NEWTONI

PRINCIPIA PHILOSOPHIÆ,

CUM COMMENTARIO PERPETUO.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ, Matheseos Professorum.

TOMUS PRIMUS.

GENEVÆ,

Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.

MDCCXXXIX.

RERUM MATHEMATICARUM STUDIOSIS, *PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ INTERPRETES.*

QUàm recondita ſint ſimùl & utilia *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica*, norunt ii omnes qui vel ipſum Clariſſimi Authoris nomen audierunt. Tanta eſt rerum dignitas atque ſublimitas, tanta ſermonis plusquàm Geometrica brevitas, ut præſtantiſſimum illud opus pauciſſimis duntaxat Geometris factum videatur. Eas ob cauſas viris Matheſeos cultioriſque Phyſices ſtudioſis gratiſſimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis Philoſophiæ propoſitiones, corollaria omnia atquè ſcholia inoffenſo pede poſſint decurrere, qui vel ipſis Geometriæ & vulgaris Algebræ elementis probè imbuti ſunt. Quod ut præſtaremus, Mechanices & Calculi infinitorum principia, quantùm inſtituti noſtri ratio poſtulat, *Newtoni* veſtigiis inſiſtentes demonſtravimus; perbrevem, ſed theorematum fæcunditate plenum noſtris Commentariis inſeruimus tractatum Sectionum Conicarum; Quæ vel minimùm, nimiâ obſcuritate Lectori negotium parere poſſent, ea omnia exponere & in bono Lumine collocare conati ſumus; quæ in ſcholiis, corollariis, propoſitionumque ſerie, prætermiſſâ demonſtratione, pronuntiat *Newtonus*, præmiſſis vel interjectis Lemmatis ſcrupulosè demonſtrata invenient, qui in ſola doctiſſimi Authoris verba jurare nolunt; eximia quæ in *Newtoni* propoſitionibus latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cùm præſtantiſſima illa ſummi viri principia non ſolùm intelligere, ſed & illam quam ſibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimùm delectationis habeat & utilitatis, diſperſa huc & illuc generalia quædam problemata Lector repe-

reperiet. Hæc ſunt quæ facere voluimus, quo exitu, penès benevolum Lectorem eſto judicium. Ex brevi illo commentariorum noſtrorum proſpectu ſatis patet quos nobis lectores poſtulemus; nec præſtantiſſimis Mathematicis nec imperito Philoſophorum vulgo nos ſcribere profitemur; ad hujuſce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, & tali inſuper pollent mentis acie, ut longioris demonſtrationis vim atque ſeriem ſtudiosè perſequi & animo comprehendere poſſint.

De noſtris Commentariis hæc ſatis dicta ſint. Verùm naturalis æquitas & mathematicus candor poſtulant, ut nos plurimùm debere fateamur Doctiſſimis Viris, DAVIDI GREGORIO, VARIGNONIO, JACOBO HERMANNO, JOANNI KEILLIO, aliiſque multis, qui varias *Newtonianæ Philoſophiæ* partes luculentis ſcriptis illuſtrarunt. Eâdem æquitatis atque ingenuitatis lege à nobis religiosè factum eſt, ut eos omnes quorum ſpoliis aliquandò diteſcimus,

mus, in Commentariorum noſtrorum decurſu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi teſtimonium deeſſe nolumus Clariſſ. D^{no}. J. L. CALANDRINO in Academiâ Genevenſi Profeſſore in rebus Mathematicis verſatiſſimo, qui hanc noſtram *Newtoni* principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantiſſimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata *Londini* prodiit anno 1726. Deindè id ſibi laboris aſſumpſit vir doctiſſimus non ſolum ut ſchemata incidi, ſuis locis diſponi, typographica menda corrigi ſeduló invigilaret, ſed etiam ea quæ jam laudavimus Sectionum Conicarum elementa compoſuit, & quæ à nobis non ſatis perſpicuè videbantur expoſita propriis notis aliquandò illuſtravit.

Hoc noſtro labore fruantur rerum mathematicarum Cultores.

ROMÆ *in Regio Conventu SS^{æ}. Trinitatis*, *An.* 1739.

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI
A
SERENISSIMO REGE
CAROLO II
AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM
FUNDATÆ,
ET
AUSPICIIS
SERENISSIMI REGIS
GEORGII
FLORENTI

TRCTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM *veteres* mechanicam (*uti auctor est* Pappus) *in rerum naturalium investigatione maximi fecerint; & recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc tractatu* mathesim *excolere, quâtenus ea ad* philosophiam *spectat.* Mechanicam *verò duplicem veteres constituerunt:* rationalem, *quæ per demonstrationes accuratè procedit, &* practicam. *Ad practicam spectant artes omnes manuales, à quibus utique* mechanica *nomen mutuata est. Cum autem artifices parùm accuratè operari soleant, fit ut* mechanica *omnis à* geometriâ *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* geometriam *referatur, quicquid minùs accuratum ad* mechanicam. *Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior est mechanicus, & si quis accuratissimè operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam & linearum rectarum & circulorum descriptiones, in quibus* geometria *fundatur, ad* mechanicam *pertinent. Has lineas describere* geometria *non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accuratè describere prius didicerit, quam limen attingat* geometriæ; *dein quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas & circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex* mechanica *postulatur horum solutio, in* geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur* geometria *in praxi mechanica, & nihil aliud est quam* mechanicæ universalis *pars illa, quæ artem mensurandi accuratè*

curatè proponit ac demonſtrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè verſentur, ſit ut geometria *ad magnitudinem*, mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo ſenſu* mechanica rationalis *erit ſcientia motuum, qui ex viribus quibuſcunque reſultant, & virium quæ ad motus quoſcunque requiruntur, accuratè propoſita ac demonſtrata. Pars hæc* mechanicæ *à veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales ſpectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non ſit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis conſiderarunt. Nos autem non artibus ſed philoſophiæ conſulentes, deque potentiis non manualibus ſed naturalibus ſcribentes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elaſticam, reſiſtentiam fluidorum & ejuſmodi vires ſeu attractivas ſeu impulſivas ſpectant: Et eâ propter, hæc noſtra tanquam philoſophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philoſophiæ difficultas in eo verſari videtur, ut à phænomenis motuum inveſtigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonſtremus phænomena reliqua. Et huc ſpectant propoſitiones generales, quas libro primo & ſecundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei propoſuimus per explicationem ſyſtematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cæleſtibus, per propoſitiones in libris prioribus mathematicè demonſtratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad ſolem & planetas ſingulos tendunt. Deinde ex his viribus per propoſitiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil ſuſpicer ea omnia ex viribus quibuſdam pendere poſſe, quibus corporum particulæ per cauſas nondum cognitas vel in ſe mutuò impelluntur & ſecundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philoſophi hactenus naturam fruſtrà tentarunt. Spero autem quod vel huic philoſophandi modo, vel veriori alicui, principia hîc poſita lucem aliquam præbebunt.*

In his edendis, vir acutiſſimus & in omni literarum genere eruditiſſimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec ſolum typothetarum ſphalmata correxit & ſchemata incidi curavit ſed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonſtratam a me ſiguram orbium cæleſtium impetraverat, rogare non deſtitit, ut eandem cum* Societate Regali *communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis ſuis auſpiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At poſtquam motuum lunarium inæqualitates aggreſſus eſſem, deinde etiam alia tentare cæpiſſem, quæ ad leges & menſuras gravitatis & aliarum virium, & figuras à corporibus ſecundum datas quaſcunque leges attractis deſcribendas, ad motus corporum plurium inter ſe, ad motus corporum in mediis reſiſtentibus, ad vires, denſitates & motus mediorum, ad orbes cometarum & ſimilia ſpectant, editionem in aliud tempus differendam eſſe putavi, ut cætera rimarer & unà in publicum darem. Quæ ad motus lunares ſpectant (imperfecta cum ſint) in corollariis propoſitionis* LXVI. *ſimul complexus ſum, ne ſingula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & ſigillatim demonſtrare tenerer, & ſeriem reliquarum propoſitionum interrumpere. Nonnulla ſerò inventa locis minùs idoneis inſerere malui, quam numerum propoſitionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendatur, quam novis lectorum conatibus inveſtigentur, & benignè ſuppleantur, enixè rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio
S. Trinitatis, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM SECUNDAM.

IN hâc secundâ Principiorum editione multa sparsim emandantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi sectione II. *inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi possint, facilior redditur & amplior. In libri secundi sectione* VII. *theoria resistentiæ fluidorum accuratiùs investigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præcessio æquinoctiorum ex principiis suis pleniùs deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.*

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ philosophiæ novam tibi, lector benevole, diuque desideratam editionem, plurimùm nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philosophiæ.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres ferè classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates specificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab *Aristotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem consequi sperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progressio instituitur à simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit natura. Verum ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita ta ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglectâ rerum conſtitutione verâ: quæ ſanè fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum ſuarum fundamentum deſumunt ab hypotheſibus; etiamſi deinde ſecundum leges mechanicas accuratiſſimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè & venuſtam, fabulam tamen concinnare dicendi ſunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philoſophiam ſcilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex ſimpliciſſimis quibus poſſunt principiis rerum omnium cauſas derivandas eſſe volunt: nihil autem principii loco aſſumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheſes non comminiſcuntur, neque in phyſicam recipiunt, niſi ut quæſtiones de quarum veritate diſputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ & ſyntheticâ. Naturæ vires legeſque virium ſimpliciores ex ſelectis quibuſdam phænomenis per analyſin deducunt, ex quibus deinde per ſyntheſin reliquorum conſtitutionem tradunt. Hæc illa eſt philoſophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendum cenſuit celeberrimus auctor noſter. Hanc ſolam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam ſuam collocaret. Hujus igitur illuſtriſſimum dedit exemplum, mundani nempe ſyſtematis explicationem è theoriâ gravitatis feliciſſimè deductam. Gravitatis virtutem univerſis corporibus ineſſe, ſuſpicati ſunt vel finxerunt alii: primus ille & ſolus ex apparentiis demonſtrare potuit, & ſpeculationibus egregiis firmiſſimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibuſdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè aſſentiri potuiſſe, & certis incerta identidem prætuliſſe. Horum famam vellicare non eſt animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipſe judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti ſumatur exordium à ſimpliciſſimis & proximis; diſpiciamus pauliſper qualis ſit in terreſtribus natura gravitatis, ut deinde tutiùs progrediamur ubi ad corpora cæleſtia, longiſſimè à ſedibus noſtris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philoſophos, corpora univerſa circumterreſtria gravitare in terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia

rientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non eſt vera levitas, ſed apparens ſolummodo; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porrò, ut corpora univerſa gravitent in terram, ita terra viciſſim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem, ſic oſtenditur. Diſtinguatur terræ totius moles in binas quaſcunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam ſi pondera partium non eſſent in ſe mutuò æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, verſus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio eſſe conſtituta: hoc eſt, gravitatis actionem eſſe mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro terræ diſtantium, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent eſſe proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora univerſa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia ſpatia cadendo deſcribunt, ſublata ſcilicet aëris reſiſtentia: accuratiùs autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra viciſſim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, ſeu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejuſdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, ſive corporis vis abſoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: ſiquidem aucta vel diminuta mole materiæ, oſtenſum eſt, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari cenſenda erit; atque adeò corpora omnia terreſtria ſe mutuò trahere oportet viribus abſolutis, quæ ſint in ratione materiæ trahenhentis. Hæc eſt natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis ſit in cœlis.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare; naturæ lex eſt ab omnibus recepta philoſophis. Inde verò ſequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuò agente retineri in itinere curvilineo Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus neceſſariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indeſinenter à tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod mathematicis rationibus colligitur & certiſſimè demonſtratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcumque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendent. Cum igitur in confeſſo ſit apud aſtronomos, planetas primarios circùm ſolem, ſecundarios verò circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur à tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in orbitarum centris Hæc itaque vis non ineptè vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, centripeta; reſpectu autem corporis centralis, attractiva; à quacunque demùm causâ oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & mathematicè demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadratura temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in orbitis quæ ſunt circulis finitimæ, & quieſcant orbitarum apſides; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in planetis univerſis conſentiunt aſtronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præſertim, apſides non penitùs quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt

poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod vis centripetæ proportio aberret aliquantùm à duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri poſſe & planè inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta ferè vicibus propiùs accedet quàm ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc apſidum progreſſionem, non ex aberratione à duplicatâ proportione, ſed ex aliâ prorſus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonſtratur in hac philoſophia. Reſtat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs ſolem & ſecundarii versùs primarios ſuos, ſint accuratè ut quadrata diſtantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat planetas in orbitis ſuis retineri per vim aliquam in ipſos perpetuò agentem: conſtat vim illam dirigi ſemper versùs orbitarum centra: conſtat hujus efficaciam augeri in acceſſu ad centrum, diminui in receſſu ob eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum diſtantiæ, diminui in eadem proportione quâ diſtantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione inſtitutâ inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejuſdem fortè ſint generis. Ejuſdem verò generis erunt, ſi deprehendantur hinc & inde leges eædem, eædemque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima eſt, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demiſſis dato tempore ſub ipſo motus initio deſcribuntur, ubi à viribus quibuſcunque urgentur, proportionalia ſunt ipſis viribus: hoc utique conſequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ ſuâ revolventis, ad vim gravitatis in ſuperficie terræ, ut ſpatium quod tempore quàm minimo deſcriberet luna deſcendendo per vim centripetam versùs terram, ſi circulari omni motu privari fingeretur ad ſpatium quod eodem tempore quàm minimo deſcribit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis ſuæ cadendo. Horum ſpatiorum prius æquale eſt arcûs à luna per idem tempus deſcripti ſinui verſo, quippe qui lunæ tranſlationem de tangente, factam à vi centripeta, metitur; atque adeò computari poteſt ex datis tùm lunæ tempore periodico, tùm distantia ejus a centro terræ. Spatium posterius invenitur per experimenta pendulorum, quamadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superiùs ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ superficiem. Vis itaque centripeta propè terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem, si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplò celeriùs in terram caderent quàm ex vi solâ gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestris ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cum nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat: id quod abundè quidem confirmatur in hac philosophiâ, ubi agitur de maris æstu & æquinoctiorum præcessione, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundus. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirùm lege vis gravitatis decrescat in majoribus à tellure distantiis. Nam cùm gravitas non diversa sit à vi centripeta lunari, hæc verò sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem & secundariorum circa jovem & saturnum sunt phænomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porrò demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versùs centrum solis, secundariorum versùs centra jovis & saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versùs terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centris, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantiæ à terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra vicissim in lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim in secundarios; sic & omnes primarii in solem, & sol vicissim in primarios.

Igitur sol in planetas universos gravitat & universi in solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur intereà circùm solem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis planetæ gravitant in solem, & sol in ipsos. Secundarios verò planetas in solem gravitare abundè insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus, quarum acuratissimam theoriam, admiranda sagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoversum propagari ad ingentes usque distantias, & sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissimè colligi potest ex motu cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam solis, & nonnunquam adeò ad ipsum proximè accedunt ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantùm non contingere videantur. Horum theoriam ab astronomis antehac frustrà quæsitam, nostro tandem sæculo faciliter inventam & per observationes certissimè demonstratam, præstantissimo nostro auctori debemus. Patet igitur cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce verò phænomenis manifestum est & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis suis, respicere solem & esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque cometæ in solem: atque adeò solis vis attractiva non tantùm ad corpora planetarum in datis distantiis & in eodem ferè plano collocata, sed etiam ad cometas in diversissimis cœlorum regionibus & in diversissimis distantiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò sequitur, planetas & cometas universos se mutuò trahere, & in se mutuò graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & saturni, astronomis non incognita, & ab actionibus horum planetarum in se invicem oriunda; quin & ex motu illo lentissimo apsidum, qui suprà memoratus est, quique à causâ consimili proficiscitur.

Eo demùm pervenimus ut dicendum sit, & terram & solem & corpora omnia cœlestia, quæ solem comitantur, se mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ, quæque minimæ, vires suas attractivas habebunt pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum suprà de terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciprocè: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eædem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondùm cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensûs lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*; quis negabit mutuam esse in *America*? Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possimus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes & experimenta: inde verò non nisi per hanc regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non nisi per experimenta, innotescunt; eodem planè modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit

neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondùm sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, & impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet occultum esse quid, perpetuò argutari solent; occultas verò causas procul esse ablegandas à philosophiâ. His autem facilè respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur, sed has solùm quarum occulta est & ficta existentia nondùm verò comprobata. Gravitas ergo non erit occulta causa motuum cœlestium, siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem reverà existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas, qui nescio quos vortices, materiæ cujusdam prorsùs fictitiæ & sensibus omnino ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur è philosophiâ, quod causa ipsius gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuant absurdi, unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent à compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulteriùs progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes & quæ ab illis porrò pendent, usque dum à causis omnibus vacua fuerit & probè purgata philosophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt, & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cùm in physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt: quod tamen dici non potest: vel eo nomine

nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel ideò minùs placet, quòd cum *Cartesii* dogmatibus pugnare & vix conciliari posse videatur. His sua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. NEWTONIANAM itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut à pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverà sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur judicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indesinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cælestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverà existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cælestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & meritò deridenda objectio,

objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maximè concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa solem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, & eandem habere densitatem vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Constat verò planetas & cometas, dùm versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias à sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed à pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuò penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, & peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur nec ab actionibus materiæ occursantis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficiliùs explicantur, quam veri illi motus planetarum & cometarum; frustrà mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectu suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmosphæris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphæras, ex naturâ suâ, circa solem moveri & sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos & cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similius, quàm hypothesis atmosphærarum hypothesi vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflectionem à cursu rectilineo oriri à gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris philosophus, causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proximè contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquiet, in fluido illo subtili natat & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unà semitam describere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materiâ scilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducentis? Quis verò non subsannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è philosophia feliciter exclusas, denuò revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutiùs immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, & planetarum regiones liberrimè pertranseunt, & sæpè contrà signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex observationibus astronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Cometarum

metarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circùm solem à vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprà dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ verò jacet intrà orbem magnum atque orbem saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquiplicata distantiarum à sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa & multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrà telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas & vis inertiæ telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitùs sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimùm sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiæ. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè tenacia fuerint ad instar olei & mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujusmodi fluidis non tenacibus ferè tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiæ, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quamadmodum clarissimè demonstratum est ab auctore nostro in peregregia resistentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac secundâ vice, & per experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi à fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc est, nisi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; fluidi cœlestis nullam esse vim inertiæ, cùm nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cùm nulla sit vis inertiæ: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cùm nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & philosopho prorsùs indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum

dum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire. Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentia; materiam ex necessitate suâ semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam; cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate, in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui verè physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sunt futura.

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ diſpli-
cent: verum nomina malitiosè indita non ſunt ipſis rebus vitio ver-
tenda; niſi illud fateri tandem velint, utique debere philoſophiam
in atheiſmo fundari Horum hominum gratiâ non erit labefactanda
philoſophia, ſiquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos judices præſtantiſſima phi-
loſophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & obſervationibus.
Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas,
ab hoc opere præclaro illuſtriſſimi noſtri auctoris; cujus eximiam
ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad
ea porrò pertingentis ad quæ nec ſpes erat humanam mentem aſ-
ſurgere potuiſſe, meritò admirantur & ſuſpiciunt quicunque paulò
profundius in hiſce rebus verſati ſunt. Clauſtris ergò reſeratis, adi-
tum nobis aperuit ad pulcherrima rerum myſteria. Syſtematis mun-
dani compagem elegantiſſimam ita tandem patefecit & penitiùs
perſpectandam dedit; ut nec ipſe, ſi nunc reviviſceret, rex *Alphon-
ſus* vel ſimplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea deſideraret. Ita-
que naturæ majeſtatem propiùs jam licet intueri, & dulciſſima con-
templatione frui, conditorem verò ac dominum univerſorum im-
penſiùs colere & venerari, qui fructus eſt philoſophiæ multò uber-
rimus. Cæcum eſſe oportet, qui ex optimis & ſapientiſſimis rerum
ſtructuris non ſtatim videat fabricatoris omnipotentis infinitam ſa-
pientiam & bonitatem: inſanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium NEWTONI opus adverſus atheorum im-
petus munitiſſimum præſidium: neque enim alicundè feliciùs, quàm
ex hac pharetra, contra impiam catervam tela depromſeris. Hoc
ſenſit pridem, & in peruditis concionibus anglicè latinèque editis,
primus egregiè demonſtravit vir in omni literarum genere præcla-
rus idemque bonarum artium fautor eximius RICHARDUS BENT-
LEIUS, ſeculi ſui & Academiæ noſtræ magnum ornamentum, Col-
legii noſtri *S. Trinitatis* magiſter digniſſimus & integerrimus. Huic
ego me pluribus nominibus obſtrictum fateri debeo: huic & tuas
quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim,
cum à longo tempore celeberrimi auctoris amicitiâ intimâ frueretur,
(qua etiam apud poſteros cenſeri non minoris æſtimat, quàm
propriis ſcriptis, quæ literato orbi in deliciis ſunt inclareſcere) ami-
ci

ci ſimul famæ & ſcientiarum incremento conſuluit. Itaque cum
exemplaria prioris editionis rariſſima admodum & immani pretio
coëmenda ſupereſſent; ſuaſit ille crebris efflagitationibus, & tan-
tum non objurgando perpulit denique virum præſtantiſſimum, nec
modeſtiâ minùs quàm eruditione ſummâ inſignem, ut novam hanc
operis editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis inſuper
acceſſionibus ditatam, ſuis ſumptibus & auſpiciis prodire pateretur:
mihi verò, pro jure ſuo, penſum non ingratum demandavit, ut
quam poſſet emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* ſocius,
aſtronomiæ & philoſophiæ experimentalis
profeſſor *Plumianus*.

A U C-

AUCTORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM TERTIAM.

IN editione hacce tertiâ, quam Henricus Pemberton M. D. *vir harum rerum peritiſſimus curavit, nonnulla in libro ſecundo de reſiſtentia mediorum paulò fuſiùs explicantur quàm anteà, & adduntur experimenta nova de reſiſtentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe ſuo per gravitatem retineri probatur, paulò fuſiùs exponitur: & novæ adduntur obſervationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem à D.* Poundio *factæ. Adduntur etiam obſervationes aliquot cometæ illius qui anno* 1680. *apparuit, à D.* Kirk *menſe Novembri in* Germania *habitæ, quæ nuper ad manus noſtras venerunt, & quarum ope conſtet quàm propè orbes parabolici motibus cometarum reſpondent. Et orbita cometæ illius, computante* Halleio, *paulò accuratiùs determinatur quàm anteà, idque in ellipſi. Et oſtenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cœlorum ſigna, non minùs accuratè curſum peregiſſe, quàm ſolent planetæ in orbitis ellipticis per aſtronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno* 1723. *apparuit, à D.* Bradleio *aſtronomiæ apud* Oxonienſes *Profeſſore computatus adjicitur.*

IS. NEWTON.

Dabam *Londini*
Jan. 12. 1725-6

IN
VIRI PRÆSTANTISSIMI
ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE
MATHEMATICO-PHYSICUM,
Seculi Gentiſque noſtræ decus egregium.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cæli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol ſolio reſidens ad ſe jubet omnia prono
Tendere deſcenſu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vaſtum per inane moveri;
Sed rapit immotis, ſe centro, ſingula gyris.
Jam patet horrificis quæ ſit via flexa cometis;
Jam non miramur barbati phænomena aſtri.
Diſcimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe
Paſſibus haud æquis graditur; cur ſubdita nulli
Hactenus aſtronomo numerorum fræna recuſet:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
Diſcimus & quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, feſſis dum fluctibus ulvam
Deſerit, ac nautis ſuſpectas nudat arenas;
Alternis vicibus ſuprema ad littora pulſans.
Quæ toties animos veterum torſere ſophorum,
Quæque ſcholas fruſtra rauco certamine vexant,

***** Ob-

Obvia conſpicimus, nubem pellente matheſi.
Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
Queis ſuperum penetrare domos atque ardua cæli
Scandere ſublimis genii conceſſit acumen.
Surgite mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
A pecudum vitâ longè lateque remotæ.
Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen preſſit ab uvâ;
Vel qui Niliacâ monſtravit arundine pictos
Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca
Reſpiciens miſeræ tantum ſolamina vitæ.
Jam vero ſuperis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.
Talia monſtrantem mecum celebrate camænis,
Vos ô cælicolum gaudentes nectare veſci,
NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

INDEX

INDEX CAPITUM
TOMI PRIMI.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

E R-

ERRATA,

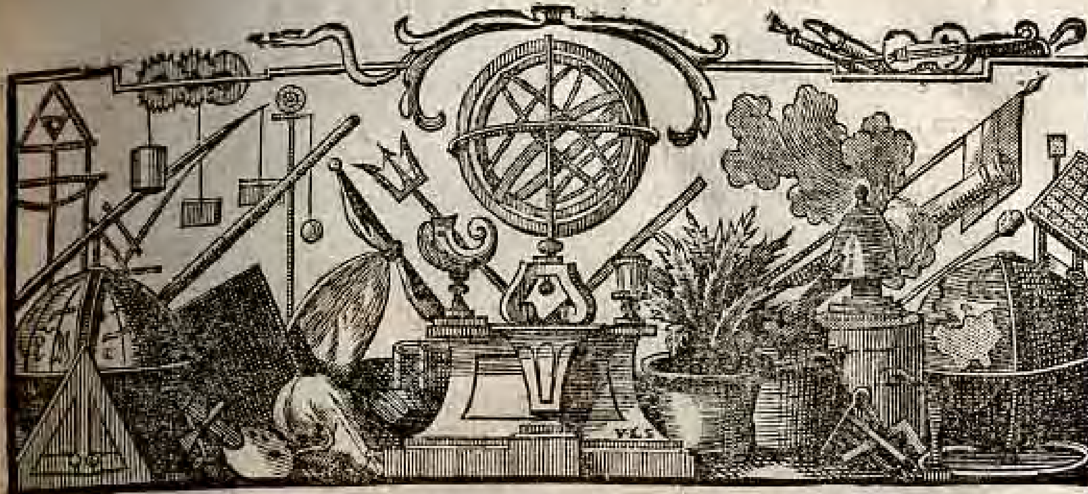
antequam legas corrigenda.

IN TEXTU.

Pag. 75. *lin.* 10. D d, *lege*, D, d. *Pag.* 91. *l.* 2. reciprocæ, *lege*, reciprocè. *Pag.* 107. *in figurâ loco* T *scribe* Q, *& loco* Q *scribe* T. *Pag.* 377. *in figurâ, scribe* R *in intersectione rectæ* AOC, *& cycloidis. Pag.* 423. *lin.* 11. *dele* viribus.

IN NOTIS.

Pag. 23. *lin.* 21. *col.* 1. corporis, *lege*, corporum. *Pag.* 52. *col.* 2. *lin.* 2. $1 - 3 : 2b$, *lege*, $1 - \frac{3b}{2}$. *Pag.* 72. *lin.* 26. *col.* 2. $G : g = S : TT :: 1 : tt$, *lege* $G : g = \frac{S}{TT} : \frac{s}{tt}$. *Pag.* 75. *col.* 1. *lin.* 28. D d, *lege*, D, d. *Pag.* 86. *lin.* 2. *col.* 1. *deleantur hæc verba:* capiatur PE = PC, & producta PC, tangentem secet in T. *Ibid. lin.* 15. *col.* 1. 145, *lege* 146. *Pag.* 87. *lin.* 9. *col.* 2. $zzdz + zzdz$, *lege*, $zzdz + zzdz + zzdz$. *Pag.* 96. *in circulo majori ad alterum diametri extremum, scribe* G. *Pag.* 102. *lin.* 26. *col.* 2. emensus, *lege*, emensum. *Pag.* 118. *col.* 1. *lin.* 3. $EG \times GE$, *lege*, $EG \times GF$. *Pag.* 123. *col.* 2. *lin.* 18. BO, *lege*, DO. *Pag.* 126. *col.* 2. *in figurâ ad alterum ordinatæ extremum, lege*, G. *Pag.* 127. *lin.* 13. *col.* 1. *deleatur*, tum. *Ibid. lin.* 25. *col.* 1. 2 A C, L, *lege* 2 A C : L. *Pag.* 129. *lin.* 8. *col.* 2. $PO^2 + CE^2 = BC^2$, *lege*, $PO^2 + KE^2 = BC^2$. *Pag.* 220. *col.* 1. *lin.* 8. AD, AB, *lege*, AD, aB. *Pag.* 279. *col.* 1. *lin.* 9. Lemma, *lege*, 374. Lemma. P. 287. *lin.* 9. $rr^2 - xx^2$, *lege*, $rr - xx$. *Ibid. in fig. col.* 2. *in extremitate secantis*, C e *scribatur* a. P. 309. *col.* 2. *l.* 16. velocitate, *leg.* velocitas. P. 310. *col.* 1. *l.* 3. D L Me, *leg.* D L me. *Ibid.* $\theta : T$, *leg.* $\theta : t$. P. 311. *col.* 2. *l.* 4. $EM = \sqrt{2ABGE}$, *leg.* $EM = \frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$. P. 339. *col.* 1. *l.* 4. corpus P, *leg.* corpus p. *Ibid. l.* 10. seu k C P, *leg.* seu KCp. *Ibid. col.* 2. *l.* 5. versus p, *leg.* versus P. P. 344. *col.* 1. *l.* 3. tendente ad focum ellipseos, *leg.* tendente ad centrum ellipseos. P. 368. *col.* 1. *initio lineæ* 1[æ]. *scribe*: (456). *Ibid. col.* 2. *l.* 16. ex generi, *leg.* ex genesi. P. 400. *col.* 1. *l.* 8. *notæ* 490. D Q, *leg.* D H. P. 401. *col.* 1. *l.* 15. $POp = \frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm - kkxx - llpp}}$, *leg.* $POp = \frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm - kkxx - CCpp}}$. P. 426. *col.* 2. *l.* 18. NM, *leg.* nm. P. 441. *col.* 1. *l.* 21. (505), *leg.* (507). P. 442. *col.* 2. *l.* 9. *leg.* arcus PK, πPk, Kkca in planis TpP, TπP, EST. P. 443. *col.* 2. *l.* 2. (509), *leg.* (508). P. 444. *col.* 1. *l. penultima* (509), *leg.* (510). P. 445. *in figurâ, loco* B *scribe* N, *& loco* N *scribe* B. P. 455. *col.* 2. *l.* 2. (513), *leg.* (504). P. 473. *col.* 2. *l.* 4. quod si sphæræ, *leg.* quod si (ut hic supponitur) vires absolutæ particularum utriusque sphæræ. *Ibid. col.* 2. *l.* 7. Si verò &c. *hæc ad finem usque notæ delenda sunt.*



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I. [a]

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

AER, densitate duplicata, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compressionem vel liquefactionem

Licet primæ definitiones NEWTONIANÆ *vix aliquam postulare videantur explicationem; in ipso tamen operis nostri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus, quæ ad majora viam sternunt. Prima quæ in posterùm sæpiùs recurrent Mechanices principia interserere non abs re erit, tùm ut Lectorum labori parcamus, tùm ut magis continua servetur nostrarum demonstrationum series.*

(a) 1. Materia est substantia trinâ dimensione prædita, solida seu impenetrabilis, mobilis, divisibilis. Spatium purum est illa immensa, penetrabilis, sui ubique tionem condenſatis. Et par eſt ratio corporum omnium, quæ per cauſas quaſcunque diverſimodè condenſantur. Medii interea, ſi quod fuerit, interſtitia partium liberè pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem ſub nomine Corporis vel Maſſæ in ſequentibus paſſim intelligo. Innoteſcit ea per corporis cujuſque Pondus. Nam ([b]) Ponderi proportionalem eſſe reperi per experimenta Pendulorum accuratiſſimè inſtituta, uti poſthac docebitur.

DE-

ubique ſimilis, immobilis extenſio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem ſeu maſſam, à corporis magnitudine, aut volumine ſeu mole diſtingui oportet. Materiæ quantitas eſt aggregatum, ſeu ſumma omnium materiæ particularum quibus compoſitum eſt corpus. Volumen, ſeu Magnitudo, eſt tota trina dimenſio ſub exteriori corporis ſuperficie contenta. Porrò inter ſolidas ſeu impenetrabiles corporis particulas ſive elementa, plura eſſe poſſunt diſſeminata foramina ſeu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; ſic aër ſubtilior ſpongiæ poros permeat, & ad ſpongiæ materiam non pertinet. Si nulla ſint inter ſolidas corporis partes admixta foramina, Maſſa & volumen non differunt; at ſi poris pertuſum ſit corpus, Maſſam volumen ſuperat.

2. Denſitas eſt ratio maſſæ corporis ad illius volumen; adeò ut ſub æqualibus voluminibus, denſitates ſint in ratione directâ maſſarum; & eadem ſeu æquali manente in diverſis corporibus maſsâ, denſitates ſint in ratione voluminum reciprocâ. Itaque ſi denſitas dicatur D; maſſa M; volumen V; erit $D = M : V$; ſeu denſitas exponi poteſt per maſſam ad volumen applicatam, ſive, quod idem eſt, denſitas erit ut maſſa per volumen diviſa. Si itaque D & $M : V$, per V multiplicentur, erit $DV = M$, ſeu maſſa aut quantitas materiæ eſt ut denſitas in volumen ducta; Maſſa igitur exponi poteſt per factum ex denſitate in volumen. Quare ſi DV & M, per D dividantur, erit $V = M : D$, ſeu volumen eſt ut maſſa ad denſitatem applicata, ſive volumen eſt in ratione compoſitâ ex directâ ratione maſſæ & inverſâ denſitatis. Si denſitates fuerint æquales, ſeu ſi $m : v = M : V$, patet maſſas eſſe inter ſe ut volumina directè. His poſitis facilè intelligitur maſſam aëris, denſitate duplicatâ, in ſpatio etiam duplicato fieri quadruplam; nam ob duplicatam denſitatem in eodem ſpatio dupla eſt maſſa; ergò duplicato etiam ſpatio maſſa rurſus duplicatur & fit quadrupla.

([b]) 3. Maſſam eſſe ponderi proportionalem, ob frequentiſſimum hujuſce veritatis uſum, hic breviter oſtendimus. Gravia omnia, ut notiſſimis conſtat experimentis, per lineas ad terræ ſuperficiem perpendiculares ac proinde ad ſenſum parallelas deſcendunt, & in tubis aëre vacuis plumbum leviſſimaque pluma eâdem celeritate cadunt, ſeu æqualia ſpatia, æqualibus temporibus cadendo percurrunt. Nec ſucceſſu caret experimentum, etiamſi coarctatis ac diductis poris vel ſuperficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat maſſa, idem ſemper ſervatur pondus; ex quo ſequitur gravitatem non ſolùm exterioribus corporis partibus, ſed & interioribus æquè ineſſe; alioquin ejuſdem corporis ſub diverſis ſuperficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret ſub diverſis figuris celeritas; mutatâ enim ſuperficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt & viceverſâ; æqualia igitur maſſæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, ſeu æqualis ſunt ponderis; creſcit ergò totiùs maſſæ pondus ut elementorum æqualium numerus, ſeu creſcit pondus ut maſſa, ſive maſſa eſt ponderi proportionalis.

DEFINITIO II. ([c])

Quantitas Motus eſt menſura ejuſdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius eſt ſumma motuum in partibus ſingulis; ideoque

([c]) 4. Locus corporis eſt pars ſpatii, quam corpus occupat. Motus eſt continua loci mutatio. Tria in motu conſideranda ſunt, corpus quod movetur ſeu mobile, ſpatium quod percurritur, & tempus quo percurritur. Spatium percurſum eſt linea quam mobile inſtar puncti conſideratum deſcribere intelligitur. Directio motûs eſt linea recta quam mobile deſcribit aut deſcribere nititur. Motus conſpirantes ſunt quorum directiones congruunt, aut ſaltem ſunt parallelæ & ad eaſdem partes tendunt. Motus contrarii ſeu directè oppoſiti dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut ſaltem ſunt parallelæ, ſed in oppoſitas partes vergunt. Motus æquabilis ſeu uniformis eſt, quo mobile æqualia ſpatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò ſpatia æqualibus temporibus deſcribit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò ſpatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas ſeu velocitas, eſt ea corporis moti affectio quâ aptum redditur, datum ſpatium dato tempore æquabiliter percurrendi. Eſt igitur celeritatis menſura in motu æquabili quærenda, ſeu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, quærendum eſt ſpatium quod corpus dato tempore percurreret, ſi illius motus conſtans atque æquabilis permaneret. Porrò manifeſtum eſt celeritatem eſſe duplam, triplam, ſi temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur ſpatium; & contrà celeritatem eſſe ſubduplam, ſubtriplam, ſi æqualia ſpatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates ſunt ut ſpatia; & manentibus ſpatiis, celeritates ſunt inverſè ut tempora; quare variantibus temporibus atque ſpatiis, celeritates ſemper erunt in ratione compoſitâ ex directâ ſpatiorum & reciprocâ temporum; ſeu ſi celeritas dicatur C, ſpatium S, tempus T; erit C ut $S : T$, ſive $C = S : T$, ſeu celeritas exponi poteſt per ſpatium ad tempus applicatum, & multiplicando utrinque per T, erit $CT = S$, ſeu ſpatium eſt ut celeritas in tempus ducta, & dividendo utrinque per C, erit $T = S : C$, ſeu tempus eſt ut ſpatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates C, c, ſeu $S : T$; $s : \tau$, fuerint æquales, id eſt $S : T = s : \tau$, erit $S : s = T : \tau$, ſeu ſpatia ſunt ut tempora.

6. Jam verò cum in motu nihil niſi corpus, ſpatium percurſum & tempus conſiderentur, & ratio ſpatii ad tempus celeritatem exponat (5), ſatis evidens eſt ad totum corporis motum ſeu quantitatem motûs inveniendam, ſolius maſſæ & celeritatis habendam eſſe rationem. Cum autem motus totius corporis ſit æqualis ſummæ motuum ſingularum Maſſæ partium, ſeu elementorum, patet manente celeritate, motum totius maſſæ creſcere prout creſcit numerus elementorum maſſæ æqualium, ſeu quantitatem motûs eſſe proportionalem maſſæ; manente verò maſsâ, quantitas motûs eſt ut velocitas; nam ſi corpus idem, duplum ſpatium eodem tempore percurrit, duplus eſt illius motus, ſi triplum triplus &c. Siquidem manentibus tempore & maſsâ, nulla eſt alia quam ſpatiorum varietas, & motus ſunt ut ſpatia; ſed ſpatia temporibus æqualibus percurſa ſunt ut celeritates (5), ergo quantitates motûs ſunt etiam ut celeritates. Quare variantibus maſſis atque celeritatibus, motûs quantitas eſt ſemper ut maſſa in celeritatem ducta, ſeu in ratione compoſitâ maſſæ & celeritatis; ſi itaque motûs quantitas dicatur Q; Maſſa M, celeritas C; erit Q ut MC, quod ita exponimus $Q = MC$, dividendo utrinque

DEFINITIONES. que in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus eſt, & duplâ cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III. (d)

Materiæ vis inſita eſt potentia reſiſtendi, qua corpus unumquodque, quantum in ſe eſt, perſeverat in ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc ſemper proportionalis eſt ſuo corpori, neque differt quicquam ab inertia maſſæ, niſi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de ſtatu ſuo vel quieſcendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis inſita nomine ſignificantiſſimo vis Inertiæ dici poſſit. Exercet verò corpus hanc vim ſolummodo in mutatione ſtatus ſui per vim aliam in ſe impreſſam facta; eſtque exercitium illud ſub diverſo reſpectu & Reſiſtentia & Impetus: reſiſtentia, quatenus corpus ad conſervandum ſtatum ſuum reluctatur vi impreſſæ; impetus, quatenus corpus idem, vi reſiſtentis obſtaculi difficul-

que per M, & deindè per C, erit $C = Q : M$; & $M = Q : C$; Seu celeritas eſt ut quantitas motûs ad maſſam applicata, & maſſa viciſſim, ut quantitas motûs per celeritatem diviſa. Si quantitates motûs Q, q, ſeu MC, mc, fuerint æquales, erit $MC = mc$, & $M : m = c : C$, ſeu maſſæ ſunt reciprocè ut celeritates; & viceverſâ ſi $M : m = c : C$, erit $MC = mc$, ſeu ſi maſſæ ſunt in ratione velocitatum reciprocâ, quantitates motûs ſunt æquales. Prætereà cum, (5), ſit $C = S : T$, erit etiam $Q = MS : T$, ſeu quantitates motûs ſunt in ratione compoſitâ ex directis rationibus maſſæ & ſpatii & inverſâ temporis; invenietur etiam $QT = MS$, $M = QT : S$; $S = QT : M$, $T = MS : Q$.

Pari facilitate demonſtrari poſſunt cætera theoremata quæ de motuum comparatione, apud ſcriptores mechanicos fuſè reperiuntur.

(d) 7. Vis duplex eſt, activa & paſſiva; Activa eſt potentia motum efficiendi; Paſſiva eſt potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa ſubdividi ſolet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta eſt, & in vim mortuam quæ eſt tantùm conatus ſeu ſollicitatio ad motum & ex quâ motus actualis non producitur, niſi vis mortuæ actio aliquandiù in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, eſt vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, ſed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abrumpatur, vel planum ſuſtentans auferatur, tùm continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, & quâ proindè conatur à centro recedere eſt quoque vis mortua.

8. Ineſt omni materiæ vis inſita paſſiva, ſeu inertia, ex quâ nullus motus, nullaque tendentia ad motum reſultat, ſed quæ conſiſtit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutatio-

nem

DEFINITIONES. ficulter cedendo, conatur ſtatum obſtaculi illius mutare. Vulgus reſiſtentiam quieſcentibus & impetum moventibus tribuit: ſed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, reſpectu ſolo diſtinguuntur ab invicem; neque ſemper verè quieſcunt quæ vulgo tanquam quieſcentia ſpectantur.

DEFINITIO IV. (e)

Vis impreſſa eſt actio in corpus exercita, ad mutandum ejus ſtatum vel quieſcendi vel movendi uniformiter in directum.

Conſiſtit hæc vis in actione ſola, neque poſt actionem permanet in corpore. Perſeverat enim corpus in ſtatu omni novo per ſolam vim inertiæ. Eſt autem vis impreſſa diverſarum originum, ut ex Ictu, ex Preſſione, ex vi Centripetâ.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta eſt, qua corpora verſus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

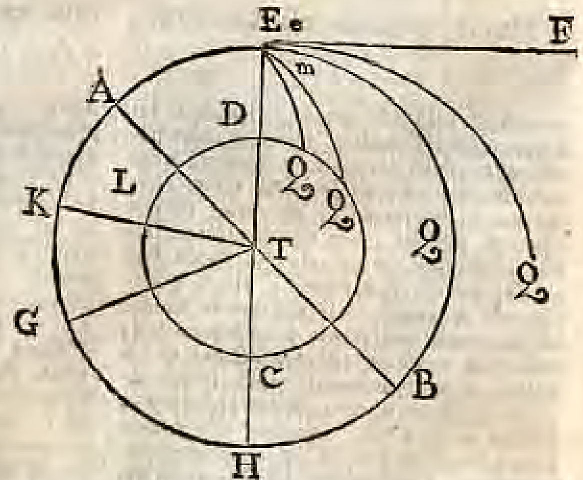
Hujus generis eſt Gravitas, qua corpora tendunt ad cen-

trum

nem ſtatûs, id eſt, motûs vel quietis inducere conanti reſiſtit. Etenim nulla poteſt eſſe actio corporis in corpus, quin luctatio quædam, ut loquitur Clar. *Hermannus* in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus agens & patiens, dum alterum alteri reſiſtit; alioqui corpus motum poſſet ſine motûs proprii detrimento, aliud quodcunque movere. Vis illa inertiæ eadem eſt in corporibus motis & quieſcentibus; tam enim reſiſtunt corpora actioni quâ à quiete ad motum concitantur, quam actioni quâ à motu ad quietem reducuntur. Eadem quippe vis requiritur ad motum datum producendum & ad eundem extinguendum. Quia autem vis illa inertiæ eadem in omnibus æqualibus materiæ partibus reperitur, conſequens eſt ut ſit materiæ proportionalis; dupla in maſſâ duplicatâ, tripla in triplicatâ. Majoribus etiam mutationibus corpora magis reſiſtunt quam minoribus, eſtque reſiſtentia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(e) 9. Nihil fit ſine cauſâ; undè omne corpus ut potè iners & paſſivum (8) in ſuo quocumque ſtatu perſeverat, niſi cauſâ aliquâ, ſeu vi externâ, ſtatum ſuum mutare cogatur; cum igitur vis aliqua in corpus actu agit; vis impreſſa ſeu actio mutat quidem corporis ſtatum, ſed ceſſante illius vis actione, corpus in novo ſtatu per illam actionem recepto perſeverat ſolâ vi inertiæ paſſivâ, quâ fit ut ſine novâ vi externâ ſtatum ſuum mutare nullâ ratione poſſit; adeoque ſi ſemel movetur, ſibi relictum, perpetuò atque æquabiliter per lineam rectam movebitur, ſeu ſecundum directionem quâ impulſum fuerit & quâ movebatur, dum actio vis externæ ceſſavit.

trum terræ; Vis Magnetica, quâ ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunque sit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus, a circumagente manu abire conatur; & conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; & quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio (f) corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, quâ cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi Gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aeris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate sua & velocitate motus. Quo



(f) 10. Cùm linea quævis curva considerari possit tanquam polygonum, ex infinitis numero, atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus rectis compositum. Si corpus in curvâ E B H K, moveatur, in singulis curvæ punctis E fertur juxtà directionem lateris evanescentis E e, adeòque si sibi relinqueretur, nec altera vis in extremitate hujus rectæ, E e, illud retraheret, & in lineam, e m, inflecteret, perpetuò atque æquabiliter moveretur per rectam, E e, productam (9) ac proindè cum linea E e producta, sit ipsa curvæ tangens E F, uniformiter moveretur per tangentem in puncto E, nisi nova vis perpetuò in illud agens, cujus directio est versùs curvam, ipsum a motu rectilineo retraheret & in orbitâ suâ retineret, quo major est vis aut celeritas secundùm directionem tangentis vel evanescentis lateris, E e, & minor vis illa quâ mobile a tangente in cur-

Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviabit a cursu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aeris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret vel denique ut in cœlos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset & terram totam circuire, potest & Luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & sine tali vi Luna

curvam retrahitur, eò miniùs a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu suo describit, ad tangentem seu rectam lineam propiùs accedit. Econtrà decrescente vi aut celeritate secundùm directionem tangentis, aut crescente vi alterâ quæ a tangente deflectit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, & major fit lineæ curvatura. Nam effectus sunt causis suis proportionales; est autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis secundùm directionem tangentis, & deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia D Q C, illiusque centrum T, ex quo vim ad centrum trahentem per totum circumquaque spatium propagari fingamus, aut, si magis placuerit, supponamus esse vim per totum spatium diffusam, quâ corpora omnia secundùm directionem radiorum, E T, A T, ad centrum T urgeantur, & ex vertice E montis E D projiciatur corpus juxtà directionem rectæ E F ad E T, normalis; corpus illud hâc solâ vi impressâ æquabiliter per rectam E F moveretur (9); at vi centripetâ seu vi tendente ad centrum T ab illâ rectâ perpetuò retrahitur & cogitur incedere in curvâ aliquâ E Q quam tangit in E recta E F (10); augendo vim impressam secundùm directionem tangentis, E F, curva E Q, ad tangentem E F, propiùs accedit, adeò ut corpus variis & successivè crescentibus celeritatibus projectum, terram tardiùs semper attingat; deindè circà eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam E F, datâ velocitate projectum, curvam datam E Q describat, certa ac determinata vis centripeta requiritur; & viceversâ datâ velocitate secundùm rectam E e seu E F, & vi centripetâ etiam datâ, corpus nonnisi certam ac determinatam curvam E Q potest describere; & mathematicorum est ex datis velocitate per tangentem E F & curvâ E Q quam corpus describit, invenire vim centri-

DEFINITIONES.

Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe suo terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire Vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri possit; & vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus é dato quovis loco datâ cum velocitate egressum a datâ vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Absoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI. (g)

Vis centripetæ Quantitas Absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro Efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

tripetam, quâ a tangente retrahitur & in orbitâ suâ retinetur, & reciprocè ex datâ velocitate per tangentem & vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo Newtonus mirâ sagacitate & elegantiâ perfecit.

(g) 12. In centro T existere supponatur corpus, ex quo per omne spatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum A T, E T, H T, versùs centrum, aut a centro versùs spatia circumposita, juxtà directionem radiorum, T A, T E, T H, agat; in 1°. casu vis illa centripeta, in 2°. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro considerata duplici præsertim ratione variare potest; Si enim corpus quod centrum occupat, & cui vis inest, in sua æqualia elementa divisum intelligatur, & vis sit singulis elementis æqualis ejusdemque constanter intensionis; vis totius corporis centralis, seu vis centralis quantitas absoluta, erit massæ seu summæ elementorum proportionalis. At si manente eâdem corporis centralis massâ, vis semper manens æqualis in singulis elementis æqualibus intensivè crescat vel decrescat, vis tota corporis centralis seu vis centralis quantitas absoluta, erit proportionalis intensioni vis in singulis elementis existentis; quare variantibus massâ & vi singulorum elementorum, vis centralis quantitas absoluta erit in ratione compositâ massæ & intensionis vis in singulis elementis æqualibus.

DEFINITIONES.

DEFINITIO VII. (h)

Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis à globo terræ; in æqualibus autem distantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

(h) 13. Si vis centralis non ampliùs in centro, sed in quâcumque à centro distantiâ consideretur, possumus in variis illis à centro distantiis superficies sphæricas fingere quarum commune centrum sit T, & vis centralis in illis distantiis seu superficiebus sphæricis considerata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato seu constante tempore in singulis materiæ elementis à centro æquidistantibus producet; nam si supponamus vim illam constantem in elementa materiæ continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut si tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque sit vis, cum velocitas illa sit illius vis effectus plenus. Si constans maneat celeritas à vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversâ temporis quo celeritas illa producitur, nam si eadem celeritas tempore subduplo producatur, vis duplicatur. Quare si manente vi constante, celeritas & tempus varient, erit vis acceleratrix in ratione compositâ ex directâ celeritatis genitæ & reciprocâ temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producitur, T; erit $G = C : T$, & $GT = C$, & $T = C : G$. Licet autem varîet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascens seu initio motûs tempore quàm minimo producta consideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non resistente diffundatur, vis acceleratrix decrescit in ratione duplicatâ distantiarum à centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non resistente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis singulorum minuitur, adeóque radii qui in distantiâ T L, per hemisphærium à semicirculo D L C descriptum diffundebantur, in distantiâ T K per hemisphærium E K H propagantur; est autem vis acceleratrix ut radiorum densitas, & radiorum densitas est reciprocè ut superficies hemisphæriorum à semicirculis descriptorum; nam radiorum densitas est ut summa seu numerus radiorum per superficiem quam occupant divisus; hic enim summa radiorum est ut massa, superficies verò cui insunt ut volumen. Verùm cum per hyp., idem numerus radiorum superficies singulorum hemisphæriorum occupet, erit densitas radiorum in ratione inversâ illarum superficierum in quâvis à centro distantiâ descriptarum; illæ autem superficies sunt in ratione duplicatâ distantiarum à centro; ergò & vis acceleratrix est in ratione duplicatâ distantiarum à centro reciprocè. Egregium illud theorema, ut ex demonstratione patet, omnem excludit medii resistentiam; quare ut in physicis valeat, medii resistentia in

DEFINITIONES.

DEFINITIO VIII. (i)

Vis centripetæ Quantitas Motrix est ipsius mensura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, quâ descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causâ aliqua

computum venire debet. Hæc autem virium seu qualitatum è centro emanantium theoria ad majorem universalitatem reduci potest, si vis in singulis radiis variè propagari supponatur, aut etiam si per lineas curvas diffundi fingatur. Sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti.

(i) 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulso consideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus seu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda est massa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus singula æqualia elementa urgentur, adeóque ex vi acceleratrice toties sumptâ quot sunt in corpore æqualia materiæ elementa, sive ex vi acceleratrice in massam ductâ. Supponimus enim singula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix est ut celeritas dato tempore genita (13), ergò vis centripetæ quantitas motrix est ut massa in illam celeritatem ducta, seu ut quantitas motûs, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; massa, M, vis motrix, p, erit p, ut, M G, & M, ut p: G, & G, ut p: M, seu massa est ut vis motrix per vim acceleratricem divisa, & vis acceleratrix, ut vis motrix per massam divisa. Si duæ fuerint vires motrices P & p, seu M G, & m g, æquales, erit M: m = g: G, seu massæ sunt ut vires acceleratrices reciproce; & viceversâ, si M: m = g: G, erit m g = M G, seu si massæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices, vires motrices sunt æquales. Porrò cum vires acceleratrices sint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in superioribus proportionibus loco virium acceleratricium celeritates illæ substitui possunt.

DEFINITIONES.

qua præditum, sine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causâ illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas & sedes Physicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuò promiscuè usurpo; has vires non Physicè sed Mathematicè tantùm considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires verè & Physicè tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam

 ex

DEFINITIONES.

ex relatione ad ſenſibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit eaſdem in abſolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares diſtingui.

(k) I. Tempus Abſolutum, verum, & mathematicum, in ſe & naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare eſt ſenſibilis & externa quævis Durationis per motum menſura (ſeu accurata ſeu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Menſis, Annus.

II. Spatium Abſolutum, naturâ ſuâ ſine relatione ad externum quodvis, ſemper manet ſimilare & immobile: Relativum eſt ſpatii hujus menſura ſeu dimenſio quælibet mobilis, quæ à ſenſibus noſtris per ſitum ſuum ad corpora definitur, & à vulgo pro ſpatio immobili uſurpatur: uti dimenſio ſpatii ſubterranei, aerei vel cœleſtis definita per ſitum ſuum ad Terram. Idem ſunt ſpatium abſolutum & relativum, ſpecie & magnitudine; ſed non permanent idem ſemper numero. Nam ſi Terra, verbi gratia, moveatur; ſpatium Aeris noſtri, quod relativè & reſpectu Terræ ſemper manet idem, nunc erit una pars ſpatii abſoluti in quam Aer tranſit, nunc alia pars ejus; & ſic abſolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus eſt pars ſpatii quam corpus occupat, eſtque pro ratione ſpatii vel Abſolutus vel Relativus. Pars, inquam, ſpatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam ſolidorum æqualium æquales ſemper ſunt loci; Superficies autem ob diſſimilitudinem figurarum ut plurimùm inæquales ſunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, ne-

(k) 16. Quemadmodùm Geometræ lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus abſolutum mathematicè conſiderare poſſumus, tanquam æquabilem unius inſtantis ſeu puncti temporis fluxum. Quapropter ſi corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac temporis punctum flueret, ſpatiaque ab eo deſcripta forent temporibus proportionalia (5); eo igitur motu tanquam accuratâ durationis menſurâ uti poſſemus. Verùm corporum cœleſtium & horologiorum motus, quos ad temporis menſuram adhibemus, licet vulgò ſupponantur æquabiles, variis tamen ex cauſis accelerantur vel retardantur, ſicque menſuræ illæ vulgares non ſunt tempori abſoluto proportionales.

DEFINITIONES.

que tam ſunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem eſt cum ſumma motuum partium, hoc eſt, tranſlatio totius de ſuo loco eadem eſt cum ſumma tranſlationum partium de locis ſuis; ideoque locus totius idem eſt cum ſumma locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Abſolutus eſt tranſlatio corporis de loco abſoluto in locum abſolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis paſſis fertur, relativus corporis Locus eſt navigii regio illa in quâ corpus verſatur, ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unà cum navi: & Quies relativa eſt permanſio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera eſt permanſio corporis in eâdem parte ſpatii illius immoti in quâ navis ipſa unà cum cavitate ſuâ & contentis univerſis movetur. Unde ſi Terra verè quieſcat, corpus quod relativè quieſcit in navi, movebitur verè & abſolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terra. Sin Terra etiam moveatur, orietur verus & abſolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in ſpatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: & ſi corpus etiam moveatur relativè in navi, orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in ſpatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terrâ. Ut ſi Terræ pars illa, ubi navis verſatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem verſus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè & abſolutè in ſpatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relativè in terrâ occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

(l) Tempus Abſolutum a relativo diſtinguitur in Aſtronomiâ per

(l) 17. Æquatio temporis dicitur differentia quæ inter tempus abſolutum & tempus relativum, (h. e. tempus per ſolis revolutionem menſuratum) intercedit; quæ proindè tempori relativo juncta, vel ab eo ſubducta conficit tempus abſolutum & viceverſâ.

DEFINITIONES.

per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim ſunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro menſura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Aſtronomi, ut ex veriore tempore menſurent motus cœleſtes. Poſſibile eſt, ut nullus ſit motus æquabilis quo Tempus accurate menſuretur. Accelerari & retardari poſſunt motus omnes, ſed fluxus temporis abſoluti mutari nequit. Eadem eſt duratio ſeu perſeverantia exiſtentiæ rerum; ſive motus ſint celeres, ſive tardi, ſive nulli: proinde hæc a menſuris ſuis ſenſibilibus meritò diſtinguitur, & ex iiſdem colligitur per Æquationem Aſtronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis neceſſitas, tum per experimentum Horologii Oſcillatorii, tum etiam per eclipſes Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis eſt immutabilis, ſic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis ſuis, & movebuntur (ut ita dicam) de ſeipſis. Nam tempora & ſpatia ſunt ſui ipſorum & rerum omnium quaſi Loca. In Tempore quoad ordinem ſucceſſionis; in Spatio quoad ordinem ſitus locantur univerſa. De illorum eſſentia eſt ut ſint Loca: & loca primaria moveri abſurdum eſt. Hæc ſunt igitur abſoluta Loca; & ſolæ tranſlationes de his locis ſunt abſoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui; earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles. Ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum à corpore aliquo, quod ſpectamus ut immobile, definimus loca univerſa: deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philoſophicis autem abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri etenim poteſt, ut nullum revera quieſcat corpus, ad quod loca motuſque referantur.

Diſtinguuntur autem Quies & Motus abſoluti & relativi ab invicem per Proprietates ſuas & Cauſas & Effectus. Quietis proprietas eſt, quod corpora verè quieſcentia quieſcunt inter ſe. Ideoque cum poſſibile ſit, ut corpus aliquod in regionibus

DEFINITIONES.

bus Fixarum, aut longè ultra, quieſcat abſolutè; ſciri autem non poſſit ex ſitu corporum ad invicem in regionibus noſtris, horumne aliquod ad longinquum illum datam poſitionem ſervet necne, quies vera ex horum ſitu inter ſe definiri nequit.

Motus proprietas eſt, quod partes, quæ datas ſervant poſitiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes ([m]) omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium ſingularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quieſcunt. Et propterea motus verus & abſolutus definiri nequit per tranſlationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quieſcentia ſpectantur. Debent enim corpora externa non ſolum tanquam quieſcentia ſpectari, ſed etiam verè quieſcere. Alioquin incluſa omnia, præter tranſlationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & ſublatâ illâ tranſlatione non verè quieſcent, ſed tanquam quieſcentia ſolummodo ſpectabuntur. Sunt enim ambientia ad incluſa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, ſine tranſlatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis eſt, quod moto Loco movetur unà Locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci ſui motum. ([n]) Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, ſunt partes ſolummodo motuum integrorum & abſolutorum: & motus omnis integer componitur ex

([m]) 18. Gyrantium corporum partes ſingulæ in orbitis curvilineis moventur, adeòque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motûs recedere nituntur; ut ſi trochus vel ſphæra circa axem rotatur, ſingulæ illorum corporum partes circulos deſcribunt, & ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cumque omnia illa centra ſint in axe motûs poſita, ſingulæ partes ab axe recedere nituntur.

([n]) 19. Si nauta in navi deambulare ſupponatur, motuſque navis & nautæ conſpirent, integra & abſoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ reſpectu loci ſui primi in navi, ex celeritate loci illius, id eſt, navis reſpectu maris, ſeu reſpectu loci ſecundi, & ex celeritate maris reſpectu ſpatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppoſitus, abſoluta nautæ velocitas æqua-

DEFINITIONES.

ex motu corporis de loco ſuo primo, & motu loci hujus de loco ſuo, & ſic deinceps; uſque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ ſupra memorato. Unde motus integri & abſoluti non niſi per loca immota definiri poſſunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia ſupra retuli. Loca autem immota non ſunt, niſi quæ omnia ab infinito in infinitum datas ſervant poſitiones ad invicem; atque adeo ſemper manent immota, ſpatiumque conſtituunt quod Immobile appello.

Cauſæ, quibus motus veri & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt Vires in corpora impreſſæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, niſi per vires in ipſum corpus motum impreſſas: at motus relativus generari & mutari poteſt ſine viribus impreſſis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia ſolum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus conſiſtit. Rurſum motus verus à viribus in corpus motum impreſſis ſemper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur neceſſario. Nam ſi eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, ſic imprimantur ut ſitus relativus conſervetur, conſervabitur relatio in quâ motus relativus conſiſtit. Mutari igitur poteſt motus omnis relativus ubi verus conſervatur, & conſervari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejuſmodi relationibus minime conſiſtit.

Effectus quibus motus abſoluti & relativi diſtinguuntur ab invicem, ſunt vires recedendi ab axe motus circularis. (o) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ ſunt, in vero autem & abſoluto majores vel minores pro quantitate motus.

Si

æqualis foret differentiæ celeritatum navis reſpectu ſpatii immoti & nautæ reſpectu navis. Tandem ſi motus nautæ reſpectu navis foret obliquus, illius directio & velocitas in duas alias directiones & velocitates ita reſolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum communi directione conſpiret, alia verò ſit ipſi perpendicularis, tuncque, ex regulis infrà demonſtrandis, facillimè invenietur tùm abſoluta nautæ celeritas, tùm illius vera directio.

(o) 20. In motu circulari nudè relativo, id eſt, in quiete abſolutâ corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ ſunt.

DEFINITIONES.

Si pendeat ſitula à filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum à contorſione admodum rigeſcat, dein impleatur aquâ, & unà cum aquâ quieſcat; tum vi aliquâ ſubitanea agatur motu contrario in orbem, & filo ſe relaxante, diutius perſeveret in hoc motu; (p) ſuperficies aquæ ſub initio plana erit, quemadmodum ante motum vaſis: at poſtquam vas, vi in aquam paulatim impreſſa, effecit ut hæc quoque ſenſibiliter revolvi incipiat; recedet ipſa paulatim à medio, aſcendetque ad latera vaſis, figuram concavam induens, (ut ipſe expertus ſum) & incitatiore ſemper motu aſcendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vaſe temporibus peragendo, quieſcat in eodem relativè. Indicat hic aſcenſus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innoteſcit & menſuratur motus aquæ circularis verus & abſolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vaſe, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam aſcendendo ad latera vaſis, ſed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Poſtea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, aſcenſus ejus ad latera vaſis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monſtrabat motum illius circularem verum perpetuo creſcentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quieſcebat in vaſe relativè. Quare conatus iſte non pendet à tranſlatione aquæ reſpectu corporum ambientium, & propterea motus circularis

cularis

(p) 21. Cum aqua vi inertiæ (8) in eodem quieſcendi ſtatu perſeverare nitatur, in eam nonniſi gradatim & per repetitam laterum ſitulæ frictionem motus circularis tranſire poteſt; adeoque ſub initio motûs ſitulæ, tota aquæ-maſſa quieſcit abſolutè, ſive quod idem eſt, maximâ velocitate nudè relativâ in vaſe revolvitur; unde deſtituta omni vi activâ (20) ſicut ante motum ſitulæ, plana & quieta manet. Sed cum iterato laterum vaſis impulſu, motus circularis ad aquam tranſierit, ſingulæ partes aquæ (18) ab axe motûs, ſeu à medio vaſis conantur recedere, cumque minorem ſursùm in aëre reſiſtentiam inveniant, ad latera ſitulæ accumulantur & aſcendunt, & quò celeriùs aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motûs per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porrò cum inter vim centrifugam & celeritatem corporis in dato circulo revolventis certa debeat eſſe ac determinata proportio, ex vi centrifugâ ſeu conatu recedendi ab axe cognoſci ac menſurari poteſt velocitas motûs circularis abſoluta, ut deinceps demonſtrabitur.

DEFINITIONES.

cularis verus per tales tranſlationes definiri nequit. Unicus eſt corporis cujuſque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui reſpondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri ſunt; & relationum inſtar, effectibus veris omnino deſtituuntur, niſi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Syſtemate eorum qui Cœlos noſtros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas ſecum deferre; ſingulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relativè quidem in Cœlis ſuis proximis quieſcunt, moventur verè. Mutant enim poſitiones ſuas ad invicem (ſecus quam fit in verè quieſcentibus) unàque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non ſunt igitur eæ ipſæ quantitates, quarum nomina præ ſe ferunt, ſed ſunt earum menſuræ illæ ſenſibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum menſuratarum utitur. At ſi ex uſu definiendæ ſunt verborum ſignificationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus propriè intelligendæ erunt hæ menſuræ ſenſibiles; & ſermo erit inſolens & purè Mathematicus, ſi quantitates menſuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces haſce de quantitatibus menſuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Matheſin & Philoſophiam, qui quantitates veras cum ipſarum relationibus & vulgaribus menſuris confundunt.

Motus quidem veros corporum ſingulorum cognoſcere, & ab apparentibus actu diſcriminare, difficillimum eſt: propterea quod partes ſpatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in ſenſus. Cauſa tamen non eſt prorſus deſperata. Nam argumenta deſumi poſſunt, partim ex motibus apparentibus qui ſunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ ſunt motuum verorum cauſæ & effectus. Ut ſi globi duo, ad datam ab invicem diſtantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innoteſceret ex tenſione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari poſſet.

DEFINITIONES.

(q) Deinde ſi vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum ſimul imprimerentur, innoteſceret ex auctâ vel diminutâ fili tenſione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri poſſent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id eſt, facies poſticæ, ſive quæ in motu circulari ſequuntur. Cognitis autem faciebus quæ ſequuntur, & faciebus oppoſitis quæ præcedunt, cognoſceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri poſſet & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenſo, ubi nihil extaret externum & ſenſibile quocum globi conferri poſſent. Si jam conſtituerentur in ſpatio illo corpora aliqua longinqua datam inter ſe poſitionem ſervantia, qualia ſunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum (r) ſciri quidem non poſſet ex relativa globorum tranſlatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus eſſet motus. At ſi attenderetur ad filum, & deprehenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui.

(q) 22. Si in alternas, ſeu è diametro ſibi oppoſitas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proinde non perturbarent æquilibrium globorum circà commune gravitatis centrum, id eſt, circa punctum æquilibrii revolventium, innoteſceret ex auctâ vel diminutâ fili tenſione augmentum vel decrementum motûs &c.

(r) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in ſtellâ fixâ poſitus, ſolo oculorum auxilio, ſeu ex motibus apparentibus diſcernere non poſſet, an globus, an ſtella verè moveretur; quemadmodum telluris incolæ ex apparenti ſtellarum motu determinare non poſſunt, an ſtellæ verè moveantur; ſive enim cum terrâ moveamur, & ſtellæ quieſcant abſolutè, ſive è contrà moveantur ſtellæ & terra quieſcat, eædem omnino ſunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem notiſſimo illuſtratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus ab iis qui navi vehuntur oculis non percipitur, dum littora urbeſque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenôn petenda eſt ratio; ea enim corpora quieſcere videntur quæ, dum nos ipſi nullam actualem voluntatem noſmet movendi exercemus, eandem reſpectu oculi poſitionem conſtanter ſervant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem ſemper retinæ partem occupet; ea verò objecta moveri videntur quæ reſpectu oculi ſitum ſuum continuò mutant, ſeu quorum imagines diverſas retinæ partes ſucceſſivè occupant.

AXIOMATA,
SIVE
LEGES MOTUS.

LEX I.

(f) *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quâtenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

PRojectilia perseverant in motibus suis, nisi quâtenus à resistentiâ aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese à motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quâtenus ab aere retardatur. Maiora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

LEX

(f) 24. Ex hâc primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem & rectilineum, adeóque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Undè cum projectilia motum suum sensim amittant, quærenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies scabras incedant, & vi gravitatis deorsùm semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motûs sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proinde quo major vel minor erit medii resistentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum & cometarum corpora nullam sensibilem in spatiis cœlestibus experiri resistentiam, cùm motus suos diutissime conservent.

LEX II.

(g) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo secundùm utriusque determinationem componitur.

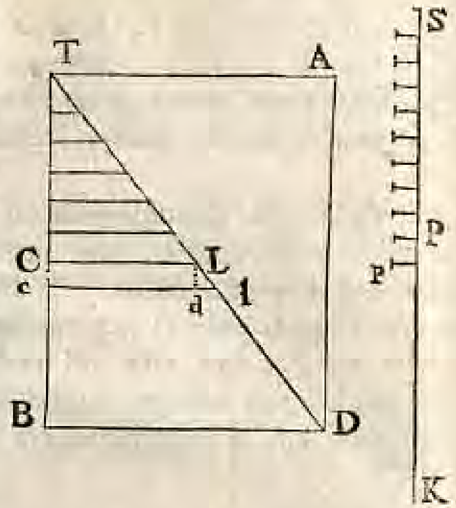
C 3 LEX.

(g) 25. Si corpus vi activâ qualis est vis gravitatis secundùm eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, & per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsum, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, & celeritates vi illâ acquisitæ sunt ut tempora quibus generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat, æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, & corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens qualibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, & deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquisivit, contrà directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu & reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo & redeundo perveneerit; adeóque motum redeundo non amittet, nisi cùm pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu & reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat & extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ motu uniformiter accelerato descendunt, & motu uniformiter retardato ascendunt ...... Dem .... Sublatâ medii resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta; ergò cum ejusdem corporis massa eadem in vertice & in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice & vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublatâ aëris resistentia, ut accuratissimis notum est experimentis (13) constans est igitur vis acceleratrix, & per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergò motu uniformiter accelerato descendunt, & uniformiter retardato ascendunt (25) Q. e. D.

27. Subla-

27. Sublatâ medii resistentiâ in terræ viciniis, spatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur . . . . Dem . . . . recta S K, repræsentet spatium quod grave cadendo percurrit T C, T c, T B, exponant tempora quibus describuntur spatia S P, S p, S K; & C L, c l, B D, ad T B, normales, exhibeant celeritates temporibus T C, T c, T B, per spatia S P, S p, S K, acquisitas; quia in motu uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora, (25), erit T C : T c = C L : c l; & T C : T B = C L : B D, adeóque recta, T D, transit per puncta L, & l, & triangula T C L, T c l, T B D, similia sunt. Jam fingamus lineam, c l, motu sibi semper parallelo ità accedere ad lineam C L, ut tandem cum ipsâ coincidat; evanescente tempusculo C c, celeritas, c l, non differet à celeritate C L, adeóque per tempusculum infinitè parvum seu evanescens C c, celeritas C L, uniformis censeri potest. Porrò spatia motu æquabili descripta sunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergò spatium P p, quod tempusculo, C c, percurri supponimus est ut rectangulum, C L, × C c = C d; quare si totum tempus, T C, in tempuscula innumera ut C c, divisum concipiatur, & similiter spatium, S P, tempore T C, percursum in totidem spatiola evanescentia, singulis tempusculis correspondentibus percursa dividatur, erit summa rectangulorum C d, hoc est area trianguli T C L, ut summa spatiolorum P p, id est ut S P; & eodem modo demonstratur aream trianguli T B D, esse ut spatium S K, tempore T C, percursum. Est igitur triangulum T C L : T B D = S P : S K. Sed triangulorum similium areæ T C L, T B D, sunt ut quadrata laterum homologorum, ergò S P, ad S K, ut quadratum temporis T C, ad quadratum temporis T B. Q. e. D.



28. Coroll. 1 . . . . Cum velocitates acquisitæ sint ut tempora (25) erunt etiam spatia percursa ut quadrata velocitatum, & tam velocitates quam tempora erunt inter se in ratione subduplicatâ spatiorum.

29. Coroll. 2 . . . . Si grave è quiete cadens, dato tempore percurrat spatium, 1, duplo tempore percurret spatium, 4, triplo spatium, 9, &c. hoc est, si tempora ab initio motûs computata sumantur in progressione numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5. spatia his temporibus descripta erunt ut termini progressionis numerorum quadratorum. 1, 4, 9, 16, 25 &c. spatia verò singulis temporibus seorsim sumptis percursa erunt ut termini progressionis numerorum imparium. 1, 3, 5, 7, 9 &c. nam cum spatium 1°. tempore percursum sit, 1, duplo tempore sit, 4, spatium secundo tempore seorsim sumpto descriptum erit 4—1 seu 3, & ità de cæteris. Undè spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundùm numeros impares retrogrado ordine decrescunt. (25)

30. Coroll. 3 . . . . spatium S K, quod grave è quiete cadendo, tempore T B, percurrit, est subduplum spatii quod eodem tempore uniformiter percurri potest, cum velocitate B D, tempore T B, per spatium S K, acquisitâ. Nam compleatur rectangulum T B D A, & spatium quod uniformi celeritate B D, tempore T B, describitur, erit ut rectangulum T B D A (25). Cum ergò (27) spatium S K, sit ut triangulum T B D, subduplum rectanguli T B D A, erit spatium S K, dimidium spatii quod uniformi celeritate B D, tempore T B, percurritur.

31. Co-

(a) LEX III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutatio-

31. Coroll. 4 . . . . celeritas B D, motu uniformiter accelerato acquisita est semper (5) ut duplum spatium percursum 2 S K, applicatum ad tempus T B, quo percurritur, seu ut 2 S K : T B. Quare si vis acceleratrix constans dicatur G; spatium percursum S; tempus quo percurritur T, erit G T = 2 S : T (13) adeoque G T² = 2 S, seu vis acceleratrix constans in quadratum temporis ducta, est ut duplum spatium eodem tempore vi illius actione descriptum.

(a) 32. Hæc notissima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertiâ clarè sequitur. Ut autem omnis tollatur ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, nisi æquales fieri in corpore agente & patiente status mutationes; cum enim nulla possit esse actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat homince corporis collisio (8), mutatio status æqualiter in utroque corpore recipi debet; undè licet actioni æqualis semper sit & contraria reactio, non idcircò tamen inter corpus agens & patiens fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifestum est; si equi lapidem trahentis conatus seu vis activa major sit vi quâ lapis per gravitatem suam, plani scabritiem, mediique resistentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius suæ vis parte, quæ post superatam lapidis gravitatem, plani scabritiem, mediique resistentiam, ipsi residua est; si autem totus trahentis equi conatus hisce tribus resistentiis minor sit, vel si ipsis sit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipsius gravitate, plani scabritie, resistentiâ medii & inertiâ quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus destituto inest, actioni equi lapidem trahentis est semper æqualis.

AXIOMATA, SIVE

tiones enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco *A* impressâ, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *A B D C*, & vi utrâque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam ([b]) quoniam vis N agit secundum lineam *A C* ipsi *B D* parallelam, hæc vis per Legem II. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *B D* à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *B D*, sive vis N imprimatur, sive non; ([c]) atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ *B D*. Eodem argu-

([b]) 33. Quoniam vis *N*, agit secundùm lineam A C, ipsi B D, parallelam, hæc vis, (per leg. 2) nihil nisi velocitatem secundùm lineam ipsi B D, parallelam producet, ac proindè non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D, à vi alterâ genitam; cùm corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, & (per leg. 1.), debeat, atque hic supponatur vires *M*, & *N*, in mobile eodem modo simul agere ac si singulæ seorsim in illud quiescens imprimerentur.

([c]) 34. Idcircò cum in fine ejusdem temporis, corpus quod hic tanquam punctum consideratur simul esse debeat in utrâque lineâ C D, & B D, in utriusque lineæ concursu D, reperiatur necesse est; quia autem initio & fine temporis dati corpus reperitur in rectâ A D, nempè primùm in A, & deindè in D, toto tempore dato motum fuit per lineam A D, nam ex duobus punctis A, & D, datis, recta, A D, positione data est; & corpus quibuslibet viribus impulsum, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundùm ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1, & 9).

35. Motus compositus per diagonalem A D, motibus per latera A B, A C, disjunctis non est æqualis, sed tantùm æquipollet. Nam cùm eadem sit corporis massa, motûs quantitates per diagonalem & per latera sunt ut velocitates uniformes (6) seu ut spatia A D, A B, A C, eodem tempore percursa (5); est autem sum-

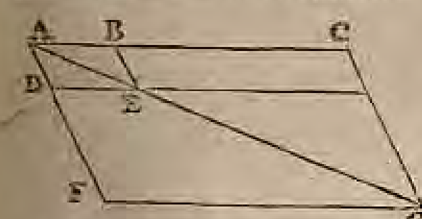
LEGES MOTUS.

summa laterum A B + A C, major diagonali A D, ergo summa quantitatum motus per latera, major est quantitate motûs per diagonalem. Verùm quia idem est motus, sive mobile per diagonalem A D, celeritate æquabili ut A D, ex vi unicâ impressâ feratur, sive viribus conjunctis per latera A B, A C, impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile à pluribus quàm duabus viribus in loco A, simul impressis impellatur, inveniri semper poterit unica directio & velocitas ex omnibus separatis composita ipsisque æquipollens, quæ media directio dicitur; duarum enim virium media directio reperiatur (per coroll. 1. Newt.); deinde diagonalis illa tanquam spatium vi unicâ percursum consideretur, & cum spatio tertiâ vi descripto pari ratione componatur, sicque vires omnes ad unicam reducentur.

37. Motus omnis in quotcumque alios laterales ipsi æquipollentes resolvi potest; nam motus per A D, æquabilis, facto triangulo quocumque A B D, resolvitur in motus per latera A B, A C, motui per diagonalem A D, æquipollentes (35). Eâdem ratione motus per A B, in duos quoscumque alios, descripto circâ latus A B, triangulo resolvitur, idemque de motu per A C, & de aliis quibuscumque motibus dici debet.

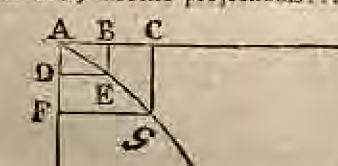
38. Si corpus aliquod A, duplici vi per A C, & per A F, ità urgeatur, ut motus in eadem ratione acceleretur vel retardetur, sive quod idem est, si spatia A B, & A D, A C, & A F, iisdem temporibus percursa, semper sint in constanti ratione, motu composito parallelogrammi diagonalem A G, describet. . .



Dem. . . ductis D E ad A B, & B E ad A D, parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet simul in utrâque lineâ D E, & E B, (34) adeòque in earum intersectione E; similiter ductis F G, ad A C, & C G, ad A F, parallelis, patet corpus motu composito eodem tempore reperiri in G, quo motibus disjunctis attingeret puncta C, & F; cum igitur (ex hyp.) sit A D, ad A B, seu D E, ut A F, ad A C, seu F G, recta A E, producta transit per punctum G; ergò corpus per diagonalem rectam A G, incedet. Q. e. D.

39. Si spatia secundùm unam directionem percursa non sint semper in eâdem ratione cum spatiis juxtà alteram directionem iisdem temporibus descriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non potest; si autem ratio spatiorum viribus separatis iisdem temporibus descriptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut si motus uniformis cum motu continuè accelerato vel retardato componatur.

40. Corpus grave secundùm quamlibet directionem A C, quæ non sit ad horizontem normalis projectum, in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ, parabolam A E G, describit, cujus diameter A F, est ad horizontem perpendicularis, & tangens A C, directio projectionis . . . .



Dem. . . Solâ vi projectionis impressâ, grave uniformiter movetur per rectam A C, (per leg. 1.), solâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam A F, aut ipsi parallelam descendit (26); quoniam verò motus per A C, æquabilis est, spatia A B, A C, sunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia A D, A F, motu uniformiter accelerato iisdem temporibus descripta sunt ut quadrata temporum quibus describuntur (27), seu ut quadrata rectarum A B, A C, aut ipsis parallelarum & æqualium D E, F G, cum igitur grave motu composito latum in fine temporum A B, A C, reperiatur in punctis E, & G, (34) evidens est quadrata ordinatarum D E, F G, curvæ A E G, (38) esse inter se in ratione abscissarum A D, A F, adeòque curvam A E G, esse parabolam, (per 20[um]. lib. 1. conic. Apollon.) cujus diameter A F, & tangens A C ordinatis D E, F G (32. prop. lib. 1. conic. Apollon.) Q. e. D.

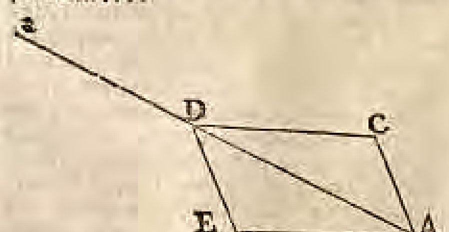
argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in lineâ *C D*, & idcirco in utriusque lineæ concursu *D* reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem I.

COROLLARIUM II.

Et hinc patet (d) *compositio vis directæ* A D *ex viribus quibusvis obliquis* A C *&* C D, *& vicissim resolutio vis cujusvis directæ* A D *in obliquas quascunque* A C *&* C D. *Quæ quidem compositio & resolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.*

Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *O M*, *O N* filis *M A*, *N P* sustineant pondera *A* & *P*, & quæ

(d) 41. Quæ de motuum compositione & resolutione dicta sunt, ad vires mortuas possunt transferri. Si corpus seu punctum D, viribus mortuis, seu ut loquuntur Mechanici, potentiis D E, D C, juxta directiones D E, D C, agentibus trahatur vel impellatur & completo parallelogrammo E C, ducatur diagonalis D A, vires D C, D E, vi mediæ, ut D A, juxtà directionem D A, agenti æquivalent....

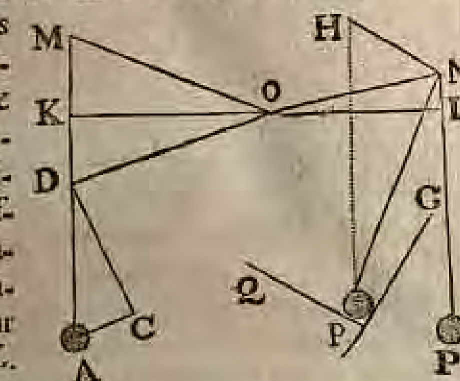


Dem... vis separata D C, considerari potest tanquam vis acceleratrix quæ in corpus D, juxtà directionem D C, continuò & uniformiter agit, & vis illa est ut celeritas quam dato tempore generat aut generare potest (13), adeòque illa celeritas per rectam D C, exponetur, cum ea recta sit ut vis ipsa D C, (per hyp.) simili argumento liquet rectam E D, esse ut celeritatem vi agente per D E eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates D E, D C, in mediam, D A, æquipollentem componantur (per coroll. 2. Newt.) manifestum est vires quoque laterales D E, D C, in mediam æquipollentem D A, (35) componi, atque adeò vim ut D A, in laterales D E, D C, æquivalentes resolvi posse. Quare (35. 36) vires quotcumque laterales in unam æquivalentem componi possunt, & vis quælibet in alias quascumque ipsi simul æquipollentes potest resolvi.

42. Producatur A D, ad a, ità ut D A, & D a, æquales sint & vis, ut D a, juxtà directionem D A, urgeat punctum D, punctum illud D, duabus viribus D A, æqualibus & contrariis sollicitatum, immotum permanebit; sed vis media D A, æquivalet viribus separatis D E, D C, (41), ergò si punctum D, sublatâ vi, D A, tribus viribus D a, D E, D C, urgeatur, non movebitur, sed erit inter vires æquilibrium.

43. Si punctum D, tribus viribus D a, D E, D C, in æquilibrio constitutis urgeatur, [com-

quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *K O L* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *O K*, *O L* majore *O L* describatur circulus occurrens filo *M A* in *D*: & actæ rectæ *O D* parallela sit *A C*, & perpendicularis *D C*. (e) Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, *K*, *L*, *D* affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur à punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis (f) autem *A* exponatur vis tota per lineam *A D*, & hæc resolvetur in vires *A C*, *C D*, quarum *A C* trahendo radium *O D* directè à centro



completo parallelogrammo E C, recta a D, producta, per angulum A, transit, estque D A = D a, parallelogrammi diagonalis, & vires sunt ut latera trianguli D A C, nempe ut D A, A C, seu E D, D C.... Dem.... Ductâ diagonali D A, parallelogrammi E C, vis media ut D A, æquipollet viribus per latera D E, D C, (41), si virium directiones D A, D a, non eandem efficiant lineam rectam, aliquem angulum in D, continent, ac proinde punctum D, à viribus sibi invicem directè non oppositis impulsum moveri debet (contrà hyp.); si verò potentiæ illæ D A, D a, non sint æquales, major minorem superat, motusque oritur (etiam contrà hyp.). Ergò recta A D, producta, per angulum A, transit, estque D A = D a, parallelogrammi diagonalis & quia A C = D E, vires sunt ut latera trianguli D A C. Q. e. D.

44. Cùm latera trianguli sint ut sinus angulorum oppositorum, erit vis D a, seu D A, ad vim D C, ut sinus anguli A C D, seu complementi illius E D C, ad sinum anguli D A C, seu A D E, seu complementi illius E D a, similiter demonstratur esse a D, ad E D, ut sinus anguli E D C, ad sinum anguli a D C. Si igitur tres potentiæ in æquilibrio circa punctum quodvis D, consistentes, dicantur ut libet 1a, 2a, 3a, erit 1a, ad 2am, ut sinus anguli quem 2æ & 3æ potentiarum directiones comprehendunt, ad sinum anguli quem 1æ & 3æ directiones formant. Omnes illas de virium & motuum compositione & resolutione demonstrationes accuratissimis confirmavit experimentis Clariss. Gravesandius in Elementis Physices.

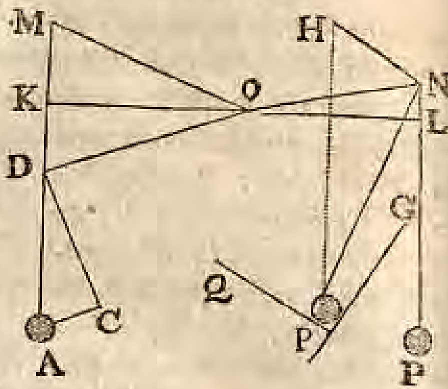
(e) 45. Planum rotæ gravitatis expers & circà centrum fixum O, (fig. Newt.), mobile supponitur, fila quoque gravitate destituta finguntur; cùmque eadem sit in variis à terrâ distantiis corporis gravitas (26) eademque proindè fili longioris vel brevioris quo pondus idem suspenditur tensio, evidens est planum rotæ iisdem semper viribus trahi, sive fila punctis M, & N, sive aliis quibusvis K, D, aut L, in filis M A, N P, sumptis affixa sint. Pondera igitur à punctis M, & N, suspensa idem valebunt ac si suspenderentur à punctis K & L, vel D & L.

(f) 46. Ponderis A, quo punctum D, trahitur, vis tota D A, resolvi potest (41) in vires laterales & æquipollentes

A C,

AXIOMATA, SIVE

tro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera DC, trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium OL ipsi OD æqualem; hoc est, idem atque pondus P, si modo pondus illud sit ad pondus A ut vis DC ad vim DA, id est (ob similia triangula ADC, DOK,) ut OK ad OD seu OL. Pondera igitur A & P, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi OK & OL, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima (g) Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major. Quod



AC, & DC, ità ut punctum D, urgeatur simul vi ut DC, secundum directionem DC, & vi ut CA, secundum directionem rectæ OD, productæ; quia verò centrum O, rotæ fixum supponitur, vis ut AC, trahendo punctum O, juxtà directionem radii OD, nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circà centrum O, movendam; vis autem altera DC, trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ad rotam circà centrum O, volvendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium OL, ipsi OD, æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod P, e puncto L, suspensum sit vi DC, æquale, seu, quod idem est, si pondus P, sit ad pondus A, ut recta DC, ad rectam DA, quæ exponit vim absolutam ponderis A, rota his duabus viribus A, & P, in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis ADC, DOK, anguli DAC, & KDO, ob parallelas AC, DO, & prætereà anguli ad K & C recti, æquales sunt, adeòque triangula illa sunt similia & $DC : DA = OK : DO$, seu OL; pondera igitur A, & P, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi OK, & OL, seu quæ sunt reciprocè ut perpendiculares OK, & OL, ex centro O, in eorum directiones ductæ idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio.

(g) 47. Sit KL, recta inflexilis & gravitatis expers circà punctum fixum seu fulcrum O, volubilis, hæc vectem & libram exhibet, atque etiam peritrochium circa xaem volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior OL, & centrum O, circà quod rota & cylindrus cujus est radius brevior OK, revolvi possunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrium, cum potentiæ seu pondera A, & P, sunt inter se reciprocè, ut rectæ à centro O, ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente distantiâ OL, vis ponderis P, ad movendam rotam est ut pondus P absolutum, & manente pondere P, crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantiæ directionis ponderis à centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ distantiâ, pondus idem P, est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis à centro est subdupla vel subtripla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentiæ seu

LEGES MOTUS.

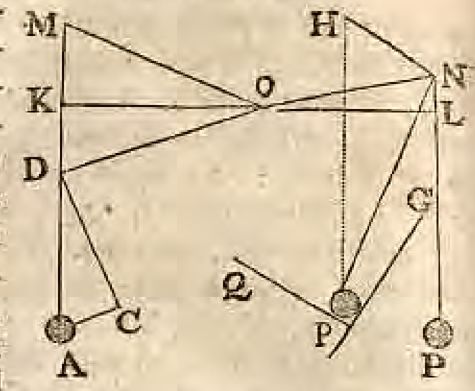
Quòd si pondus p ponderi P æquale partim suspendatur filo Np, partim incumbat plano obliquo pG: agantur pH, NH, prior horizonti, posterior plano pG perpendicularis: & si vis ponderis p deorsum tendens, exponatur per lineam pH, resolvi potest hæc in vires pN, HN. Si filo pN perpendiculare esset planum aliquod pQ, secans planum alterum pG in linea ad horizontem parallela; & pondus p his planis pQ, pG solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus pN, HN perpendiculariter, nimirum planum pQ vi pN, & planum pG vi HN. Ideoque si tollatur planum pQ, ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eâdem vi pN, quâ planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN, ut pN ad pH. (h) Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum distantiarum filorum suorum pN, AM à centro rotæ, & ratione directâ pH ad pN; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideò se mutuò sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis quâ pondus p urget planum pQ sit ad vim, quâ idem vel gravitate suâ vel ictu mallei impellitur secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH; atque ad vim, quâ urget planum alterum pG, ut pN ad NH. Sed & vis Cochleæ per similem virium divisio-

ponderis ad movendam machinam circà centrum motûs est semper in ratione composita ponderis absoluti seu intensitatis potentiæ, & distantiæ directionis illius à centro motûs. Vim autem illam ponderis aut potentiæ ad machinam movendam momentum potentiæ aut ponderis vocant Mechanici.

(h) 48. Vis quâ pondus p, tendit filum obliquum pN, dicatur π, & normalis ex centro O, in filum pN, ducta dicatur n, & erit ex demonstratis $\pi : P$, seu $p = pN : pH$. Prætereà si vis π, in æquilibrio cum pondere A, consistat; erit etiam (47) $A : \pi = n : KO$; unde per compositionem rationum erit $A \times \pi : p \times \pi = n \times pN : KO \times pH$, seu $A : p = n \times pN : KO \times pH$; & $p : A = KO \times pH : n \times pN$, ideòque si pondus p, sit ad pondus A, in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum distantiarum, n, & KO, filorum suorum pN, AM à centro rotæ, & ratione directâ pH, ad pN, erit æquilibrium.

AXIOMATA, SIVE



tro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera DC, trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ac ſi perpendiculariter traheret radium OL ipſi OD æqualem; hoc eſt, idem atque pondus P, ſi modo pondus illud ſit ad pondus A ut vis DC ad vim DA, id eſt (ob ſimilia triangula ADC, DOK,) ut OK ad OD ſeu OL. Pondera igitur A & P, quæ ſunt reciprocè ut radii in directum poſiti OK & OL, idem pollebunt, & ſic conſiſtent in æquilibrio: quæ eſt proprietas notiſſima (s) Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum ſit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major. Quod

A C, & D C, ità ut punctum D, urgeatur ſimul vi ut D C, ſecundùm directionem D C, & vi ut C A, ſecundùm directionem rectæ O D, productæ; quia verò centrum O, rotæ fixum ſupponitur, vis ut A C, trahendo punctum O, juxtà directionem radii O D, nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circà centrum O, movendam; vis autem altera D C, trahendo radium D O perpendiculariter, idem valet ad rotam circà centrum O, volvendam, ac ſi perpendiculariter traheret alterum radium O L, ipſi O D, æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; ſi itaque pondus aliquod P, è puncto L, ſuſpenſum ſit vi D C, æquale: ſeu, quod idem eſt, ſi pondus P, ſit ad pondus A, ut recta D C, ad rectam D A, quæ exponit vim abſolutam ponderis A, rota his duabus viribus A, & P, in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis A D C, D O K, anguli D A C, & K D O, ob parallelas A C, D O, & prætereà anguli ad K & C recti, æquales ſunt, adeóque triangula illa ſunt ſimilia & D C : D A = O K : D O, ſeu O L; pondera igitur A, & P, quæ ſunt reciprocè ut radii in directum poſiti O K, & O L, ſeu quæ ſunt reciprocè ut perpendiculares O K, & O L, ex centro O, in eorum directiones ductæ idem pollebunt; & ſic conſiſtent in æquilibrio.

(s) 47. Sit K L, recta inflexilis & gravitatis expers circà punctum fixum ſeu fulcrum O, volubilis, hæc vectem & libram exhibet, atque etiam peritrochium circa axem volubile poteſt exponere; ſeu rotam cujus eſt radius longior O L, & centrum O, circà quod rota & cylindrus cujus eſt radius brevior O K, revolvi poſſunt; ex demonſtratis autem (46) patet eſſe in his tribus machinis æquilibrium, cum potentiæ ſeu pondera A, & P, ſunt inter ſe reciprocè, ut rectæ à centro O, ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum ſit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente diſtantiâ O L, vis ponderis P, ad movendam rotam eſt ut pondus P abſolutum, & manente pondere P, creſcit vis illius ad movendam rotam in ratione diſtantiæ directionis ponderis à centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ diſtantiâ, pondus idem P, eſt in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus diſtantia directionis à centro eſt ſubdupla vel ſubtripla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentiæ ſeu pon-

LEGES MOTUS.

Quòd ſi pondus p ponderi P æquale partim ſuſpendatur filo Np, partim incumbat plano obliquo pG: agantur pH, NH, prior horizonti, poſterior plano pG perpendicularis: & ſi vis ponderis p deorſum tendens, exponatur per lineam pH, reſolvi poteſt hæc in vires pN, HN. Si filo pN perpendiculare eſſet planum aliquod pQ, ſecans planum alterum pG in linea ad horizontem parallela; & pondus p his planis pQ, pG ſolummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus pN, HN perpendiculariter, nimirum planum pQ vi pN, & planum pG vi HN. Ideoque ſi tollatur planum pQ, ut pondus tendat filum: quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſublati, tendetur illud eâdem vi pN, quâ planum antea urgebatur. Unde tenſio fili hujus obliqui erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis PN, ut pN ad pH. (u) Ideoque ſi pondus p ſit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum filorum ſuorum pN, AM à centro rotæ, & ratione directâ pH ad pN; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideò ſe mutuò ſuſtinebunt, ut quilibet experiri poteſt.

Pondus autem p, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fiſſi facies internas: & inde vires cunei & mallei innoteſcunt: utpote cum vis quâ pondus p urget planum pQ ſit ad vim, quâ idem vel gravitate ſuâ vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam pH in plana, ut pN ad pH; atque ad vim, quâ urget planum alterum pG, ut pN ad NH. Sed & vis Cochleæ per ſimilem virium diviſio-

ponderis ad movendam machinam circà centrum motûs eſt ſemper in ratione compoſitâ ponderis abſoluti ſeu intenſitatis potentiæ, & diſtantiæ directionis illius à centro motûs. Vim autem illam ponderis aut potentiæ ad machinam movendam momentum potentiæ aut ponderis vocant Mechanici.

(u) 48. Vis quâ pondus p, tendit filum obliquum p N, dicatur π, & normalis ex centro O, in filum p N, ducta dicatur n, & erit ex demonſtratis π : P, ſeu p, = p N : p H. Prætereà ſi vis π, in æquilibrio cum pondere A, conſiſtat; erit etiam (47) A : π = n : K O; undè per compoſitionem rationum erit A × π : p × π = n × p N : K O × p H, ſeu A : p = n × p N : K O × p H; & p : A = K O × p H : n × p N; ideóque ſi pondus p, ſit ad pondus A, in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum, n, & K O, filorum ſuorum p N, A M à centro rotæ, & ratione directâ p H, ad p N, erit æquilibrium.

visionem colligitur; quippe quæ cuneus est à vecte impulsus. (i) Usus igitur Corollarii hujus latissimè patet, & latè pandendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

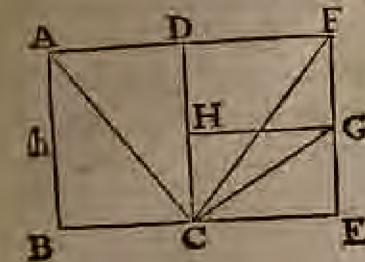
COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (k) Ut

(i) 49. Cunei & cochleæ vires totamque fere mechanicam hisce theorematibus demonstravit Clariss. Varignonius. Quam late pateat eorum usus manifestum est ex præclaro opere Joannis Alphonsi Borelli de motibus animalium, & ex variis, inter quas Bernoullianæ eminent, de musculorum motu dissertationibus; sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti; in proximo scholio machinarum vires generali mechanicæ principio determinare satis erit; ut autem ea quæ nobis illustranda occurrent in meliori lumine collocentur; generales motuum leges, ne omissis quidem definitionibus, præmittendas esse judicavimus.

(k) 50. Corpus perfectè elasticum dicitur cujus partes ex ictu flectuntur, seu introcedunt, & deindè eàdem vi quâ flexæ sunt, sese in priorem statum contraria directione restituunt. Corpus imperfectè elasticum est cujus partes ex ictu flexæ in priorem quidem statum redire nituntur, sed minori vi eâ quâ flexæ sunt. Corpus non elasticum vocatur cujus partes ictu percussæ nullâ vi sese restituere conantur. Corpus unum in alterum directè impingere dicitur, si secundùm rectam ad contactum perpendicularem impingat; obliquè verò si secundùm rectam ad contactum obliquam. Cùm corpora in se mutuò non agant, nisi per massam & velocitatem, tanquam axioma ex legibus 2ª & 3ª notissimum innumerisque confirmatum experimentis supponimus quantitates motûs æquales & contrarias in conflictu sibi mutuò æquipollere.



51. Si globus A, in planum immobile BE, incurrat, quæritur illius motus post impactum. . . . 1°. Globus ille in planum directè impingat per AB; si globus & planum omni elasticitate destituantur, globi motus post impactum in B, omninò extinguitur, cùm nulla vis globum repellat; si autem planum & globus perfecto elatere donentur, globus per BA, post impactum resiliet eâdem quâ advenit celeritate BA; nam in corporibus perfectè elasticis (50) vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, unde si imperfecta fuerit vis elastica, globus minori velocitate Bh, resiliet. . . . 2°. Globus A, in planum BE, velocitate & directione AC, obliquè impingat; illius motus resolvatur in motus laterales quorum unus AD, sit plano BE, parallelus, alter autem AB, eidem plano perpendicularis (37), globus A, motu secundùm AD, ad planum non accedit, sed tantùm motu secundùm perpendicularem AB, vel DC; velocitas globi respectu plani BE, est tantùm ut perpendicularis AB; at verò si AC, foret perpendicularis ad planum BE, velocitas quâ ad planum accederet, foret ut AC; ergò cùm impetus ejusdem corporis in planum, sint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus est ad perpendicularem, ut AB, ad AC; seu sumptâ AC, tanquam radio, ut sinus anguli incidentiæ ACB, ad sinum totum. . . . . 3°. Si nulla sit in corporibus A, & BE, elasticitas, globus A, per AC, incurrens movebitur per CE, celeritate ut $CE = AD$; nam motus perpendicularis AB, vel DC, ex demonstratis, extinguitur, remanetque tantùm motus CE, cui planum ut potè parallelum non opponitur; si verò perfectum fuerit elaterium, resiliet globus per CF, celeritate $CF = AC$, & angulus reflexionis FCE, æqualis erit angulo incidentiæ ACB; nam per vim restitutivam elateris resilit per normalem CD, celeritate CD, seu BA, & prætereà motu ad planum parallelo progreditur per CE, celeritate ut $CE = AD$, ergò motu composito (coroll. 1. Newt.) percurret diagonalem CF, & cùm in parallelogrammis DB, DE, omnia sint paria, erit $FC = AC$, & angulus $FCE = ACB$. Tandem si corpora imperfectè fuerint elastica, manebit quidem post impactum velocitas AD, seu CE, plano parallela, sed velocitas perpendicularis CH, minor erit velocitate DC, seu AB, & completo parallelogrammo HE, globus per diagonalem CG, resiliet.

52. Si globi non elastici in se mutuò directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum. . . . 1°. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eâdem directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. Newt.), summa quantitatum motûs eadem antè & post conflictum, communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summâ quantitatum motûs ante conflictum per summam massarum divisâ (6). . . . 2°. Globi contrariis directionibus sibi mutuò occurrant, si æqualis in utroque fuerit motûs quantitas, post conflictum ambo quiescunt (50). Si verò inæquales sint motûs quantitates, per conflictum extinguitur in singulis quantitas motûs globi debiliùs moti (50), & ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motûs in utroque simul residua, differentiæ quantitatum motûs antè conflictum æqualis (coroll. 3. Newt.). Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motûs ante conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum velocitas in globi cujusque massam ducta, est illius quantitas motûs post impactum (6), ex quâ & quantitate motûs ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motûs in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum

AXIOMATA, SIVE

(l) Ut si corpus sphæricum A sit triplo majus corpore sphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius A sit ad motum ipsius B, ut sex ad decem: ponantur motus

est respectivam globorum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elastici in se invicem directè incurrant, quæritur eorum motus post conflictum . . . . . 1°. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elasticorum conflictu in utriusque corporis motu nascitur, dupla est mutationis quam ictus idem in iisdem corporibus omni elaterio destitutis produceret,) in corporibus imperfectè tantum elasticis mutatio major est quàm in non elasticis, sed duplâ minor.) Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.). Si corpora omni elatere destituerentur, post conflictum vel quiescerent, vel in eandem plagam velocitate communi progrederentur (52) nec partes flexæ restituerentur; si autem accedat vis elastica partes flexæ sese restituent vi & directione (50) quæ semper contraria erit vi compressivæ, & in corporibus perfectè elasticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in se mutuò ex elateris restitutione orta, actioni ex impactu nascenti æqualis est in corporibus perfectè elasticis, minor in aliis, ex quibus & Lege 2ª constat quod erat primò propositum . . . . 2°. Corpora perfectè elastica eâdem velocitate respectivâ post conflictum recedunt, quâ antè conflictum ad se invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantum elasticis, velocitas respectiva quâ post ictum discedunt est ad velocitatem quâ ante ictum ad se mutuò accedebant, in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam; nam cum in conflictu corporum non elasticorum omnis velocitas respectiva, quâ ad se mutuò accedebant, destruatur ex ictu (52), sitque vis restitutiva elateris perfecti vi compressivæ æqualis & contraria, manifestum est in corporum perfectè elasticorum conflictu, velocitatem respectivam ex solo impactu amissam, contrariâ directione restitui; in corporibus verò imperfectè elasticis eam tantùm restitui velocitatis respectivæ partem quæ est vi restitutivæ proportionalis . . . . 3°. Ut igitur corporum perfectè elasticorum motus post conflictum directum inveniatur, considerentur corpora tanquam omni elatere destituta & in eâ hypothesi. quæratur (52) quantitas motûs ex conflictu in unoquoque corpore acquisita vel amissa secundùm eam directionem quâ corpus ante conflictum movebatur, eadem motûs quantitas duplicata, erit quantitas motûs in corpore perfectè elastico acquisita vel amissa, quæ proinde quantitati motûs corporis antè conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motûs illius corporis post conflictum . . . . . 4°. Corporum imperfectè elasticorum motus post conflictum invenitur, si data sit ratio vis restitutivæ elateris ad vim compressivam, sive, quod ex demonstratis idem est, ratio velocitatis respectivæ post impactum ad velocitatem respectivam antè impactum, quam rationem in iisdem corporibus constantem esse experimentis probavit Newtonus, nisi tamen partes corporum ex compressu lædantur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiantur. Corpora omni elaterio destituta supponantur, & in eâ hypothesi quæratur quantitas motûs in unoquoque corpore ex ictu acquisita vel amissa, cui motûs quantitati si addatur quantitas motûs vi elasticæ proportionalis, summa erit vera quantitas motûs ex conflictu corporum imperfectè elasticorum in unoquoque acquisita vel amissa, ex quâ datâ & ex quantitate motûs corporis cujusque antè conflictum, reperitur, ut suprà, omnis quantitas motûs illius post conflictum. Exemplo lux affulgebit.

(l) 54. Globus A, sit triplo major globo B, habeatque duos velocitatis gradus, illius motus quantitas (6) erit ut 3×2, seu 6. B, sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motûs globi B, 1×10, seu, 10, ... 1°. Si globi elastici non sunt,

LEGES MOTUS.

motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus A lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem, adeoque perget corpus A post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & B cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summâ partium sexdecim ut prius. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septemdecim vel octodecim, corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur, vel cum unâ parte progredietur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum unâ parte regredietur amisso motu suo & (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, & differentiæ contrariorum $17 - 1$ & $18 - 2$ semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. (m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad mo-

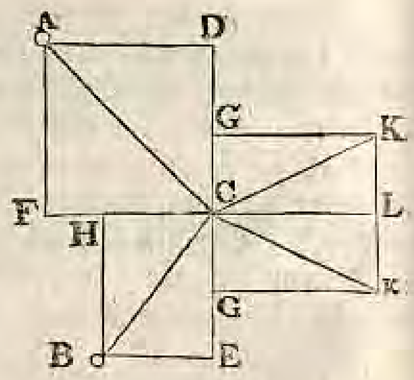
sunt, velocitas communis post conflictum (52) erit $16 : 4$, seu 4; quare quantitas motûs ipsius A, post conflictum erit 3×4, seu 12. B, verò quantitas motûs erit 1×4, seu 4. Itaque quantitas motûs à corpore B, amissa est, 6, & corpori A, acquisita est etiam, 6 . . . . . 2°. Si globi sunt perfectè elastici, quantitates illæ duplicari debent (53), erunt igitur 12 & 12. Si quantitati motûs, 6, globi A, ante conflictum jungas, 12, summa erit, 18, quantitas motûs illius post conflictum; si verò ex quantitate motûs, 10, ipsius B, ante conflictum subduxeris, 12, quantitatem motûs per conflictum amissam, residuum est -2, quod signum $-$, ut notum est, contrariam positionem significat, seu corpus B, post ictum in contrariam plagam resilit cum hâc motûs quantitate 2 . . . . 3°. Si globi A & B, sint imperfectè elastici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva subdupla vis compressivæ, erit vis compressiva ad vim restitutivam (seu 2, ad 1) ut quantitas motûs, 6, ex ictu acquisita vel amissa ad quantitatem motûs, 3, solâ vi restitutivâ acquisitam vel amissam; quare hæc quantitas, 3, addatur quantitati, 6, ex ictu acquisitæ in corpore A, & amissæ in corpore B, summa, 9, erit quantitas motûs integra tam ex ictu quàm ex elatere acquisita vel amissa; unde quantitas motûs globi A, post conflictum est, $6 + 9$, seu, 15, globi B, $10 - 9$, seu 1, quarum summa est, 16.

(m) 55. Cognitis quantitatibus motuum quibuscum corpora post conflictum pergent, invenietur cujusque velocitas dividendo quantitatem motûs cujusque corpomotum ante. Ut in caſu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium ſex ante reflexionem & partium octodecim poſtea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium ſex poſt reflexionem, dicendo, ut motûs partes ſex ante reflexionem ad motûs partes octodecim poſtea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes ſex poſtea.

(n) Quod ſi corpora vel non Sphærica vel diverſis in rectis moventia incidant in ſe mutuo obliquè, & requirantur eorum motus poſt reflexionem; cognoſcendus eſt ſitus plani à quo cor-

ris per illius maſſam (6); aut etiam quia ejuſdem corporis diverſæ quantitates motûs ſunt ut velocitates (6), dicendo, ut quantitas motûs antè conflictum ad quantitatem motûs poſt conflictum, ità velocitas corporis antè conflictum ad illius velocitatem poſt conflictum.

(n) 56. Si corpora quæcunque A & B, diverſis in rectis A C, B C, moventia, incidant in ſe mutuò obliquè in C, & requirantur eorum motus poſt impactum. Cognoſcendus eſt ſitus plani F L, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs C; deinde corporis utriuſque motus A C, B C, (per coroll. 2.) diſtinguendus eſt in duos A D, & A F, B E & B H, unum nempè A F ſeu D C, & B H ſeu E C, huic plano F L perpendicularem, alterum A D, B E, eidem parallelum. Quia verò corpora ſecundùm parallelas A D, B E, ad ſe mutuò non accedunt, ſed tantùm ſecundùm perpendiculares D C, E C, in ſe invicem agunt, motus paralleli A D, B E, per impactum non mutantur, adeòque retinendi ſunt iidem poſt conflictum qui erant ante conflictum; & motibus perpendicularibus D C, E C, mutationes æquales in partes contrarias C D, C E, tribuendæ ſunt ſic ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem ante & poſt conflictum (coroll. 3. Newt.) Ut itaque corporum A & B, in ſe mutuò obliquè incidentium motus poſt ictum inveniantur, mota duntaxat ſupponantur per lineas D C & E C, velocitatibus D C & E C, atque



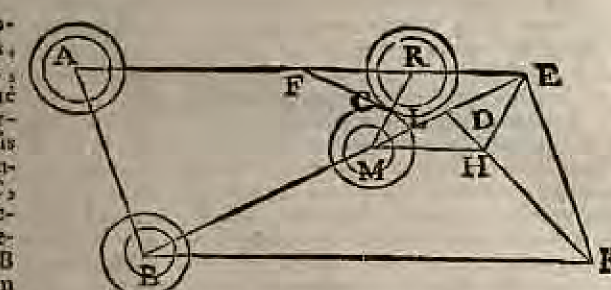
in eâ hypotheſi quærantur (52, ſi fuerint elaſtica, 53, ſi non fuerint elaſtica) eorum velocitas poſt conflictum in lineâ C D, vel C E, ex quâ datâ, & ex velocitate parallelâ plano F L, etiam datâ, compoſitus corporis motus (per coroll. 1. Newt.) facilè reperietur. Sit exempli causâ C G, velocitas corporis A, poſt impactum per D E, in C; ſumptâ C L, æquali & parallelâ velocitati ſecundùm A D, quæ eadem poſt conflictum remanet, compleatur parallelogrammum G L & A, movebitur per illius diagonalem C K, velocitate ut C K, (per coroll. 1. Newt.) Si corpora anguloſa ſibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi inſitâ in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circà corporis centrum.

57. Da-

corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs: dein corporis utriuſque motus (per Corol. 11.) diſtinguendus eſt in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in ſe invicem ſecundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ ſunt ſic, ut ſumma conſpirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujuſmodi reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos caſus in ſequentibus non conſidero, & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

CO-

57. Datis duorum globorum A & B, directionibus, celeritatibus & diametris, unà cum eorum ſitu antè conflictum, facile eſt determinare punctum concursûs C, & ſitum plani F L, utrumque globum in puncto C, contingentis. Globus A, feratur per lineam A E, & celeritate ut A E, globus B verò ſecundùm directionem B E, celeritate ut B D, moveatur. Junctis A & B globorum centris per lineam A B, compleatur parallelogrammum A B K E. Jungantur puncta D & K, & recta D K, ex centro E, interſecetur arcu qui deſcribitur radio E H, ſummæ ſemidiametrorum globorum A & B, æquali. Ex puncto interſectionis H, ducatur recta H M, ipſi E A parallela, erunt M & R, loca in quibus globorum centra conſtituentur, ubi ſecum invicem concurrent, & ſumptâ lineâ R C, æquali radio globi A, recta F L, ad R C perpendicularis, in puncto C, ſitum plani deſignabit.... Dem.... Quoniam recta H M, eſt lineæ B K parallela (per conſt.) erit D M : D B = M H : B K = R E : E A, ob R E = M H, & E A = B K; ergò dividendo B M : B D = A R : A E, & alternando B M : A R = B D : A E. Cum igitur ſit B M ad A R, ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, & B in M, eodem tempore pervenient (6); Cumque ſit M R = E H, globi in puncto C, ſe mutuò contingent, & planum E L, ad radium R C, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. D.



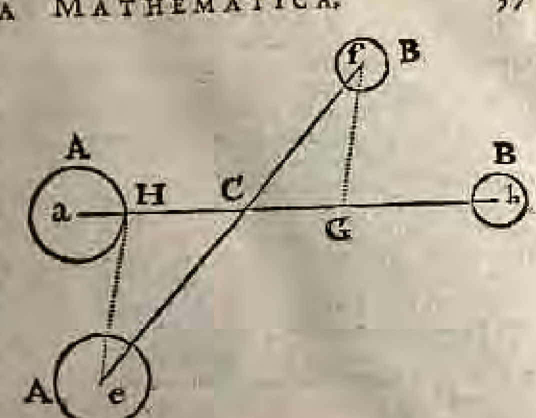
COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum (°), corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

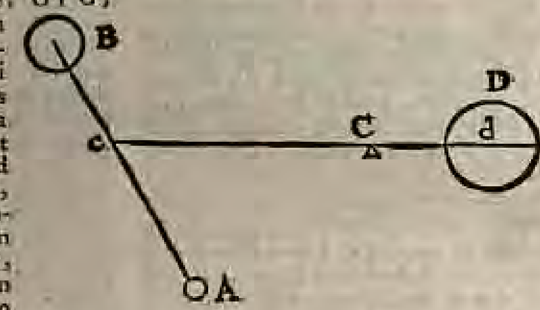
Nam

(°) 58. Centrum gravitatis corporis cujusque, est punctum intrà vel extrà corpus positum, circà quod undique partes in æquilibrio consistunt, ità ut si per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque secans, corporis segmenta quæ utrinque sunt circà planum illud librata æquiponderent; si igitur ex centro gravitatis corpus aliquod suspendatur, datum quemcumque situm retinebit, & semper quiescet, si centri gravitatis descensus impediatur; undè totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, & pro corpore gravi solum gravitatis centrum in suis demonstrationibus surrogare solent. Planum gravitatis est figura plana per centrum gravitatis transiens; Diameter verò gravitatis est recta per centrum gravitatis ducta; Quare planorum gravitatis, communis intersectio diametrum gravitatis efficit, & in diametrorum gravitatis concursu centrum gravitatis positum est. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod divisa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo & ellipsi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proindè si gravia homogenea, id est, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales, secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possint, centrum gravitatis à centro magnitudinis non differt.

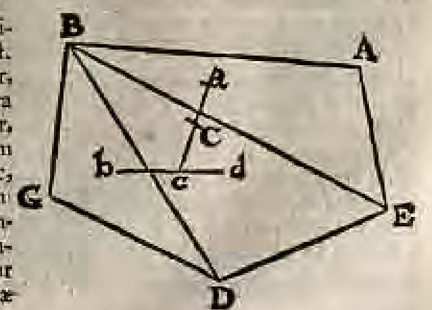
59. Ex hisce definitionibus facilè colligitur, omnium circulorum, ellipsium, sphærarum & figurarum quarumvis regularium, centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis, modò tamen gravia supponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum intersectione determinari potest centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concursu positum est; in triangulo reperitur in intersectione duarum rectarum quæ à duobus angulis ductæ, latera angulis illis opposita, totumque proinde triangulum bifariam, adeoque in partes æquiponderantes secant, in prismatibus & cylindris, centrum gravitatis est punctum medium rectæ basium oppositarum centra conjungentis; & generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, si corpus ab aliquâ sui parte liberè suspendatur, & ab eâdem parte à quâ pendet, demittatur perpendiculum ità ut in corpore linea quam fecerit perpendiculi filum notetur; deindè ab aliâ parte corpus idem libere suspendatur ut priùs, noteturque iterùm linea perpendiculi ab hâc parte super corpus demissi; concursus enim duorum filorum perpendiculi (quæ sunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.



60. Centra gravitatis a & b, corporum A & B, rectâ seu vecte inflexibili & gravitatis experte, a b jungantur, & ità dividatur a b, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A & B.... Dem... punctum C, fixum maneat, sitque 1°. a b, horizonti parallela, & quia a b, est vectis cujus fulcrum C, ponderis B momentum seu conatus ad vectem circà C, movendum, erit ut B × C b, & ponderis A momentum ut A × C a (47); verùm (per hyp.) A: B = C b: C a, adeòque A × C a = B × C b; ergò momenta ponderum A & B, æqualia sunt, & proindè in æquilibrio circà punctum C, consistunt..... 2°. vectis, a b, circà punctum C fixum, rotetur, & situm e f, inclinatum ad horizontem a b, obtineat, ductis f G, e H, rectis horizonti a b, perpendicularibus, quæ sunt gravium directiones, ponderum A & B, momenta erunt ut A × C H & B × C G, (47); sed ob triangula H C e, G f G, similia G C : H C = C f, seu C b : C e, sive C a = A: B, adeòque G C : H C = A: B & A × C H = B × C G; momenta igitur ponderum A & B, in situ quocumque dato æqualia sunt & semper æquilibrantur. Quare (58) punctum C, est commune gravitatis centrum duorum corporum A & B. Q. e. D.



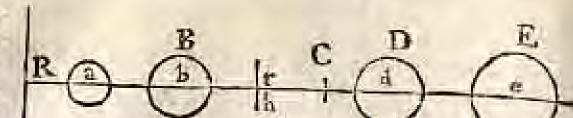
61. Coroll. 1.... Duorum corporum A & B, commune gravitatis centrum sit c, & tertii corporis D, centrum gravitatis proprium sit d; jungatur recta c d, quæ ità dividatur in C, ut sit summa ponderum A + B ad pondus D, sicut C d, ad C c, trium corporum A, B, D, centrum gravitatis commune erit in C; nam duo corpora A & B, (58) considerari possunt tanquam in suo communi gravitatis centro c, coacta, adeóque si fuerit A + B: D = C d: C c, erit C, centrum gravitatis commune trium corporum A, B, D, (60). Eâdem ratione quatuor, pluriumve, prout quisque voluerit, corporum commune gravitatis centrum reperietur.



62. Coroll. 2.... figuræ cujusvis planæ & rectilineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri potest. Figura data, A B G D E in sua triangula dividatur, duorumque triangulorum, B G D, B D E, centra gravitatis b & d, rectâ jungantur, & ità dividatur, b d, in c, ut area trianguli B G D, sit ad aream trianguli B D E, sicut c d, a d, b c, eritque, c, centrum gravitatis commune duorum triangulorum B G D, B D E, (60). Centrum gravitatis, a, trianguli B A C, & centrum, c, figuræ B G D E, mox inventum jungantur rectâ c a, quæ ità dividatur in C, ut area trianguli B A E, sit ad aream figuræ B G D E, sicut C c, ad C a & C, erit centrum gravitatis totius figuræ datæ A B G D E, (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, si figurarum area quævis, instar ponderis centro gravitatis appensi consideretur.

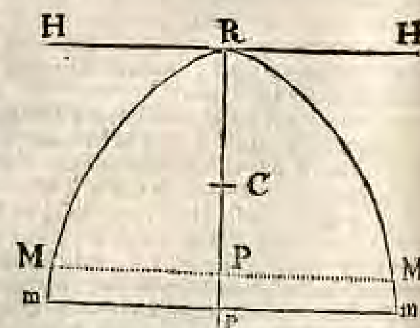
AXIOMATA, SIVE

63. Sit recta R H, horizonti perpendicularis quæ axis rotationis dicatur, & in eâ sumatur centrum rotationis R, seu punctum fixum circà quod vectis horizontalis R e, cum appensis ponderibus A, B, D, E, rotari possit, sintque corporum centra gravitatis propria a, b, d, e, & eorum commune gravitatis centrum C, in vecte R e, ad eandem axis R H, partem posita; distantia R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R, æqualis erit summæ factorum unius cujusque ponderis in suam à centro rotationis R, distantiam, per summam ponderum divisæ . . . . . . Dem. . . . Momentum cujusque ponderis ad vectem circà centrum R, movendum, est ut factum ex illo pondere in suam ab eodem centro R, distantiam (47), & omnium momentorum summa, seu totus omnium ponderum ad vectem circà centrum R, movendum conatus, ut illorum factorum summa; verùm quia pondera omnia per vectem R e, dispersa, tanquam in suo communi gravitatis centro C, coacta considerari possunt (58), erit etiam totus omnium ponderum conatus ad vectem circà R, movendum, ut summa ponderum in distantiam R C ducta; quare summa factorum uniuscujusque ponderis in suam à centro rotationis R distantiam, æqualis est facto ex summâ ponderum in distantiam R C, communis centri gravitatis C, à centro rotationis R; igitur $RC \times \overline{A+B+D+E}$ &c. $= A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR$ &c., adeóque $RC = A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR$ &c. $: \overline{A+B+D+E}$ &c. Q. e. D.



64. Si pondera ad eandem axis rotationis partem sita non sint, si v. gr. fuerit axis rotationis r h, erit $rC = \overline{D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br} : \overline{A+B+D+E}$. Nam momenta ponderum D & E, ad vectem circà r movendum sunt $D \times dr$, $E \times er$, & momenta contraria ponderum A & B, sunt $A \times ar$, $B \times br$; quare vis omnium ponderum ad vectem r e, movendum erit, $D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$; sed si pondera in centro C, coacta supponantur, erit vis illa eadem, $rC \times \overline{A+B+D+E}$, ergò $rC \times \overline{A+B+D+E} = D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$; ac proinde $rC = \overline{D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br} : \overline{A+B+D+E}$. Q. e. D.

65. Quapropter si omnia pondera sint ad eandem axis rotationis R H, partem posita, & quodlibet pondus vocetur p, summa verò omnium ponderum S p; præterea si distantia à centro rotationis dicatur x, ac proinde factum cujusque ponderis in suam à centro rotationis distantiam sit x p, & omnium factorum summa $\int x\,p$; distantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis erit generaliter $S\,x\,p : S\,p$. Si verò pondera fuerint ad diversas axis rotationis r h, partes posita, & distantia cujuslibet ponderis à centro rotationis r, vocetur x, singula verò pondera quæ sunt ad partem r e, posita, dicantur p, eorumque summa sit S p; insuper singula pondera ad partem R r, sita dicantur q, & eorum summa sit S q, distantia communis centri gravitatis omnium ponderum à centro rotationis r, erit $\overline{\int x\,p - \int x\,q} : \overline{\int p + \int q}$, vel $\overline{\int x\,q - \int x\,p} : \overline{\int p + \int q}$; unde si $S\,x\,p = S\,x\,q$, manifestum est centrum rotationis idem esse cum centro gravitatis.



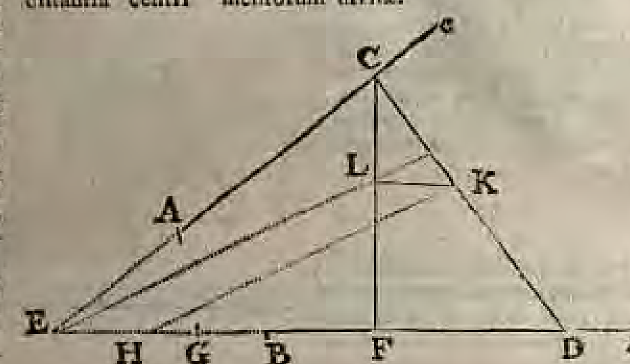
66. Harumce formularum auxilio, centra gravitatis figurarum curvarum reperiun-

LEGES MOTUS.

(p) Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in li-

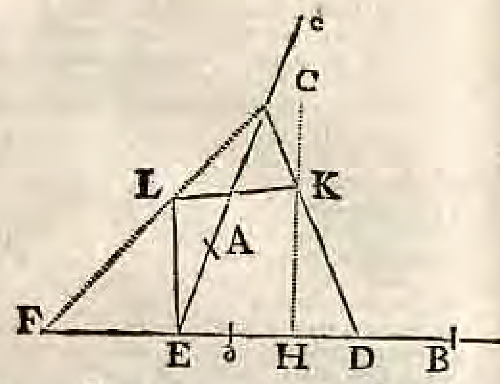
tur; Nam si curvæ M R M, axis R P, quo ordinatæ M M m m, bifariam dividuntur, ut rectis habeantur, vertexque R, ut centrum rotationis & singula elementa qualia sunt M M m m, ut pondera vecti appensa considerentur, distantia centri gravitatis C, à centro rotationis seu vertice R, erit (per primam formulam) æqualis summæ factorum ex singulis elementis M M m m, in suam à vertice R, distantiam per summam eorumdem elementorum divisæ.

(q) 67. Duo corpora C & D, æquabiliter moveantur in lineis rectis A C, B D, positione datis, jungaturque recta C D, & ità dividatur in K, ut sit D K, ad C K, ut corpus C, ad corpus D; punctum K, quod est centrum gravitatis corporum C & D, (60) vel quiescet vel movebitur uniformiter in lineâ rectâ positione datâ . . . . Dem. . . concurrant lineæ A C & B D, in E. 1°. Corpora C & D, ex punctis sitis A & B, in eandem plagam proficiscantur & iisdem temporibus ad puncta C & D, perveniant, ac proinde spatia A C & B D, erunt in ratione datâ velocitatum (y). In B E, capiatur B G, ad A E, in ratione datâ B D, ad A C, & cum data sit A E, dabitur quoque linea B G, sit F D, semper æqualis datæ E G, erit $EF = GD$, & quia $BG : AE = BD : AC$, (per const.) erit $BG + BD$, seu $GD : AE + AC$, seu $EC = BD : AC$, adeoque $AC : BD = EC : GD$, seu E F; est igitur E C ad E F; in ratione datâ, & propterea ex datis angulo C E F, & laterum E C, E F, ratione, dabitur specie triangulum E F C, id est dantur tres anguli. Deinde secetur C F, in L, ut sit C L, ad C F, in ratione datâ C K, ad C D, id est in ratione corporis D, ad summam corporum C + D; & quia in triangulo E F C, specie dato datur ratio laterum E F, F C, datæque est ratio C F, ad F L, dabitur quoque ratio ex his duabus composita E F, ad F L, adeóque ob angulum E F C, etiam datum dabitur specie triangulum E F L; Quare dum progrediuntur corpora C & D, punctum L, semper locabitur in rectâ E L, positione datâ, utpote quæ est basis trianguli E F L, in quo angulus F, idem constanter manet, & latus E F, positione datum ad latus F L, datam habet rationem. Junge L K, & quia $CL : CF = CK : CD$ (per const.), similia erunt triangula C L K, C F D, & ob datam $FD = EG$, & datam rationem F D, ad L K, seu C D, ad C K; dabitur L K, magnitudine; lineæ L K, æqualis capiatur E H, & ductâ H K, erit semper E L K H, parallelogrammum, ob L K, æqualem & parallelam ipsi L H. locabitur ergò punctum K, in parallelogrammi illius latere H K, quod positione datum est; nam latus E L, positione, latus verò E H, positione & magnitudine datur. Quare punctum K, seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonstratis, triangula C E F, L E F, specie, & tria latera E C, E L, E F, positione data sunt, manifestum est rationem rectæ E L, seu lineæ æqualis H K, ad E C, datam esse. Verùm quia punctum C, uniformiter movetur (per hyp.) uniformiter crescit recta E C, ergò pariter recta H K, uniformiter augetur, adeoque punctum K, æquabiliter progreditur in lineâ rectâ H K, positione datâ. Q. e. 1°. demonstrandum . . . . .

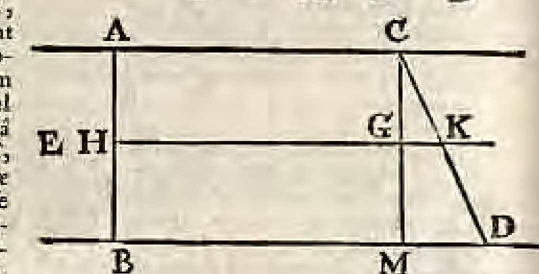


2°. Cor-

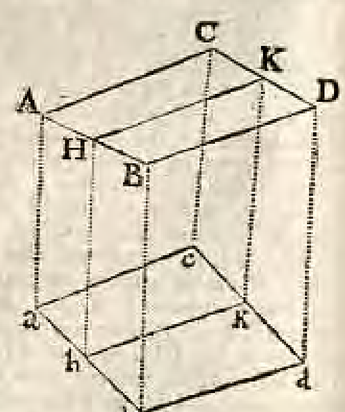
AXIOMATA, SIVE neâ rectâ. Hoc postea in Lemmate XXIII. ejusque Corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & (q) eâdem



2°. Corpora ex punctis fixis A & B, in diversas plagas progrediantur, semperque capiatur B G, in partem oppositam directioni B D, F D, verò secundùm directionem B D, cætera fiant ut in superiori constructione eadem manebit demonstratio pro 2°. casu.



68. Si punctum concursus E, in infinitum abeat, parallelæ fient lineæ A C, B D, & ex superiori demonstratione patet centrum gravitatis K, vel quiescere vel uniformiter moveri, in lineâ H K, positione datâ, lineis A C, B D, parallelâ; si autem lineæ parallelæ A C & B D, ad se mutuò accedant tandemque coincidant, eadem semper valet demonstratio, ac proindè si corpora in eâdem rectâ moveantur, in hâc eâdem lineâ centrum gravitatis vel quiescet vel movebitur uniformiter.



(q) 69. Si rectæ A C & B D, non in uno, sed in diversis planis positæ fuerint, ex singulis eorum punctis A & B, C & D, in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis a b d c, pro lubitu assumptum demittantur perpendicula A a, B b, C c, D d; & ex centris gravitatis H & K, perpendicula H h, K k, excitentur, ob motum uniformem punctorum A & B, in lineis A C, B D, evidens est puncta a & b, uniformiter moveri in lineis a c, b d; & quia A a, B b, H h, parallelæ sunt; lineæ A B, a b, in eâdem ratione datâ in H, & h, dividuntur; idemque dicendum de punctis K, & k, in lineis C D, & c d; Quare, ex demonstratis (67), punctum h, uniformiter progreditur in rectâ h k, adeóque centrum gravitatis H, semper movetur in plano H h K k, ad planum a b d c, normali; si loco plani, a b d c, aliud quodvis ad arbitrium assumeretur, eodem modo

LEGES MOTUS. dem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

(r) Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium cum distantiæ centrorum utriusque à communi gravitatis centro sint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi cor-

modo demonstrari posset centrum gravitatis H, moveri in plano ad assumptum perpendiculari; necesse igitur est ut centrum illud H, moveatur in communi illorum planorum ad alia pro lubitu assumpta perpendicularium intersectione, quæ cum sit linea recta H K, positione data, & punctum h, per rectam h k, uniformiter progrediatur, punctum H, æquabiliter fertur in lineâ H K. In omni igitur casu centrum commune gravitatis duorum corporum quæ motu uniformi per lineas rectas positione datas progrediuntur, semper quiescit vel movetur uniformiter in rectâ positione datâ.

(r) 70. Si duobus corporibus A & B, quorum commune gravitatis centrum sit K, æquales motûs quantitates in partes contrarias de novo imprimantur, quibus eodem tempore percurrunt spatia A a, B b, centri gravitatis status non mutatur; Cum enim K, sit commune centrum gravitatis corporum A & B, (per hyp.) erit A : B = K B : K A (60) & quia impressæ quantitates motûs (6) A × A a, B × B b æqua-

AXIOMATA, SIVE corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur à communi corporum omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum sunt centra reciprocè proportionales, ideoque centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; & propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi à viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur

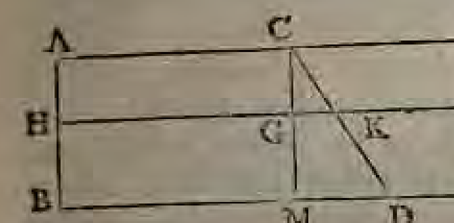
de

æquales sunt (per hyp.), erit etiam A : B = Bb : Aa, adeoque KB : KA = Bb : Aa, & componendo vel dividendo Kb : Ka = Bb : Aa = A : B; dum igitur corpora A & B, ad puncta a & b, motibus impressis perveniunt, centrum K, immotum remansit (60), ac proindè ab æqualibus motuum mutationibus in contrarias partes factis non mutat statum suum motûs vel quietis. Quapropter cum mutua corporum actio (per leg. 2. 3.) æquales mutationes in utroque corpore versùs partes contrarias producat, commune gravitatis centrum duorum corporum ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem.

71. Mo-

de hoc statu. (f) Est igitur systematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii LEGES MOTUS.

seu



(f) 71. Motus progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis semper æstimari debet.... Dem.... 1°. Corpora duo A & B, in lineis AC & BD, parallelis progrediantur cum velocitatibus, ut AC, BD, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam HK, lineis AC & BD, parallelam feratur, ducatur CM, rectæ AB parallela. Quoniam B : A = AH : BH (60) erit B : B + A = AH : AB, & ob parallelas AB, & CM; GK & MD, erit AH : AB = CG : CM = GK : MD, adeoque GK : MD = B : A + B, & B × MD = $\overline{A+B}$ × GK; verum quia AC = HG = BM, erit HK = AC + GK, & BD = AC + MD; quare $\overline{A+B}$ × HK = $\overline{A+B}$ × AC + $\overline{A+B}$ × GK = A × AC + B × AC + B × MD, ob $\overline{A+B}$ × GK = B × MD, ergò $\overline{A+B}$ × HK = A × AC + B × BD, seu summa corporum A & B, in velocitatem centri gravitatis HK, ducta, æqualis est summæ factorum in singulis corporibus A & B, in suam velocitatem AC, BD.... 2°. Si corpora contrariis directionibus CA & BD, moveantur, negativa erit quantitas motûs corporis A, propter contrariam directionem CA, adeóque differentia quantitatum motûs corporum, in plagas oppositas tendentium, seu quod idem est, quantitas motûs in eandem plagam, æqualis erit facto ex summâ corporum, in velocitatem centri gravitatis.... 3°. Si parallelæ AC, BD, ad se mutuò accedant tandemque coincidant, eadem semper manet demonstratio, quæ proinde etiam obtinet, dum corpora in eâdem rectâ feruntur.... 4°. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuscujusque ponderis directio ac velocitas in duas alias resolvatur, quarum una sit viæ centri gravitatis parallela, altera verò ipsi perpendicularis, & ex demonstratis liquet summam quantitatum motûs corporum in plagam versùs quam movetur centrum gravitatis esse æqualem facto ex summâ corporum in velocitatem centri gravitatis.... 5°. Si æquabilis non sit corporum motus, sed quâcumque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinitè parvis tanquam æquabilis spectari potest, iisque tempusculis summa quantitatum motûs corporum æqualis est facto ex summâ corporum in velocitatem centri gravitatis; undè quovis tempore quantitas motûs singulorum corporum æqualis est quantitati motûs quam habuissent omnia corpora, si communi velocitate centri gravitatis simul lata fuissent.... 6°. Si trium corporum systema moveatur, duo ex hisce corporibus in suo gravitatis centro coacta fingi possunt (ex Dem) ac proindè trium pluriumve corporum aut etiam ejusdem corporis partium systema ad duorum duntaxat corporum systema reducitur; ergò quantitas motûs progressivi seu corporis solitarii seu systematis corporum, ex motu centri gravitatis æstimari debet. Q. e. D.

72. Coroll. 1.... Si differentiæ quantitatum motûs versùs partes contrarias in systemate corporum sit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quiescit; si inæqualis est progreditur in eam partem versùs quam prævalet motus.

73. Coroll. 2.... Motus systematis corporum in plagam datam habetur, si centri gravitatis motus in duos motus resolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò sit ipsi perpendicularis; nam summa corporum ducta in velo-

 loci-

AXIOMATA, SIVE seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

COROLLARIUM V.

(t) *Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.*

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias, eædem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem II. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & à viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

locitatem centri gravitatis versus datam directionem exponit quantitatem motûs totius systematis in eandem partem progredientis.

(t) 74. Si navi quiescenti in quâ continentur corpora variis motibus agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquè participant (leg. 1. 2.), adeóque singulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proindè motus navi impressus respectivas corporum velocitates non mutat; quare differentiæ velocitatum in corporibus quæ ad eandem partem tendunt, & summæ velocitatum in corporibus quæ ad partes contrarias tendunt, eædem manent antè & post motum navi impressum; sed ex his summis vel differentiis quæ sunt respectivæ corporum velocitates, oriuntur congressus & ictûs magnitudines quibus corpora se mutuò feriunt; nam si corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quiescens m, incurrat, eadem est ictûs magnitudo ac si utrique corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, & corpus M, cum velocitate C + c, in corpus m, velocitate c, motum impingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utrique corpori communem, sed per solam velocitatum differentiam C + c − c, seu C; hæc autem differentia est ipsamet velocitas quâ corpus M, in aliud m, quiescens agit. Iidem ergò erunt congressus ac proinde æquales congressuum effectus in utroque casu (per leg. 2.), & propterea manebunt motus respectivi in uno casu æquales motibus respectivis corporum in altero; si autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

75. Vis

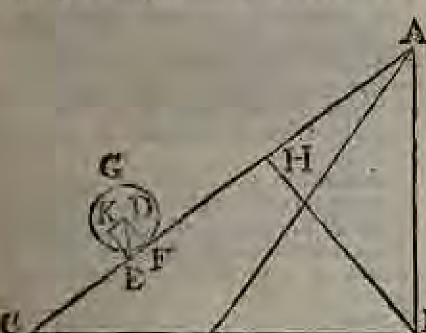
LEGES MOTUS.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem II. ideoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium. (u)

Hactenus principia tradidi à mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria

(u) 75. Vis acceleratrix gravitatis, quâ corpus in plano ad horizontem inclinato juxta plani directionem urgetur, est ad vim gravitatis acceleratricem quâ secundum directionem horizonti perpendicularem sollicitatur, ut altitudo plani ad ipsius longitudinem .... Dem....



Globus G, plano A C, ad horizontem C B, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem C B, demittatur perpendiculum A B, & ex centro D, globi ad planum A C, ducatur recta D E, perpendiculo A B, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quâ globus secundum directionem D E, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, D E, in duas vires resolvatur (41), quarum altera D F, sit ad planum A C, normalis quæ proindè toto plano sustinetur, altera verò D K, seu F E, plano parallela quâ solâ globus ad motum secundum directionem plani A C, sollicitatur, & erit vis acceleratrix juxtà plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter sollicitantem, ut E F, ad D E; sed quoniam triangula E F D, A B C, ob parallelas D E, A B, & angulos rectos F & B, æquales, similia sunt, est F E : D E = A B : A C. Vis igitur acceleratrix gravitatis secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo A B, ad ipsius longitudinem A C. Q. e. D.

76. Coroll. 1 .... Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxtà directionem D E, horizonti perpendicularem constans est (26), & vis acceleratrix F E, secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim D E in ratione datâ A B, ad A C; vis acceleratrix F E, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constanti genitis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 1°. Grave per planum inclinatum motu uniformiter accelerato descendit, & motu uniformiter retardato ascendit (25). 2°. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur (25); spatia è quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, itemque

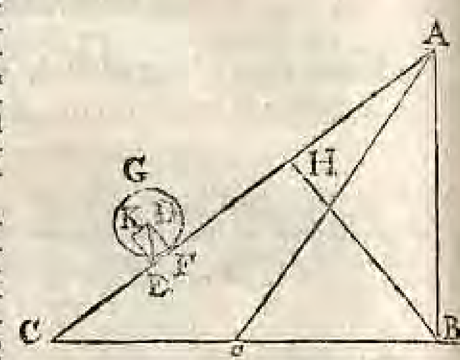
laria duo prima *Galilæus* invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aëris resistentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velocitates

que velocitatum quæ his temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates sunt in ratione subduplicatâ spatiorum (27, 28). 3°. Spatium à gravi in plano inclinato percursum ab initio motûs computatum, dimidium est illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri potest cum velocitate ultimò acquisitâ (29).

77. Coroll. 2. Quia vires acceleratrices constantes sunt inter se in ratione velocitatum, quas eodem tempore producunt (13), velocitas lapsu perpendiculari per A B, acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquisitam, ut longitudo plani, A C, ad ipsius altitudinem A B (75).

78. Coroll. 3. Si ex puncto B, perpendiculi A B, ad planum inclinatum agatur perpendicularis B H; spatium A H, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapsu perpendiculari describitur A B; nam ob similitudinem triangulorum A H B, A B C; A H : A B = A B : A C, adeóque A H, est ad A B, ut velocitas in plano inclinato acquisita ad velocitatem, eodem tempore in perpendiculo A B, acquisitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquisitæ, sunt ut dupla spatia, seu, quod idem est, ut spatia eodem tempore percursa (76); ergò A H, A B, sunt spatia eodem tempore percursa.

79. Coroll. 4. Tempus quo planum A C percurritur, est ad tempus quo percurritur ipsius altitudo A B, ut longitudo plani A C, ad ejus altitudinem A B; tempus enim per A C, est ad tempus per A H, in ratione subduplicatâ A C, ad A H (76). Sed ob continuam rectarum A C, A B, A H, analogiam A C, est ad A B, in ratione subduplicatâ A C, ad A H; tempus igitur per A C, est ad tempus per A H, hoc est (78), ad tempus per A B, ut A C, ad A B.

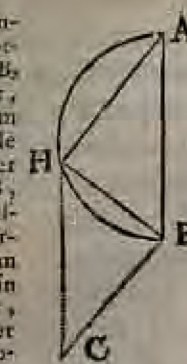


80. Coroll. 5. Cum sit A C, ad A B, ut tempus per A C, ad tempus per A B; & A c, ad A B, ut tempus per A c, ad tempus per A B (79), tempora quibus percurruntur diversa plana A C, A c, ejusdem altitudinis A B, sunt ut planorum longitudines.

81. Coroll. 6. Celeritates gravium in plano quovis inclinato A C, & in perpendiculo A B, æquales sunt, ubi gravia ex eâdem altitudine ad eandem rectam horizontalem C B, pervenerint, adeóque velocitates in planis inclinatis A C, A c, ejusdem altitudinis in C & c, sunt æquales; est enim velocitas in B, ad velocitatem in H, ut A B ad A H (ea enim spatia eodem tempore descripta sunt) & ob similitudinem triangulorum A H B, A B C, sicut A C ad A B: velocitas autem in C, est ad velocitatem in H, in ratione subduplicatâ A C, ad A H, hoc est, ob continuam analogiam rectarum A C, A B, A H, in ratione A C, ad A B; quare velocitas in B, est ad velocitatem in H, ut velocitas in C, ad eandem velocitatem in H, adeóque velocitas in C, æqualis est velocitati in B.

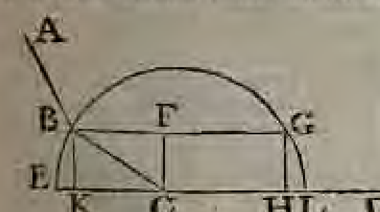
82. Co-

citates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocitates



82. Coroll. 7. Tempus descensûs per chordas quaslibet A H, H B, circuli cujus diameter, A B, est ad horisontem perpendicularis, æquale est tempori descensûs per totam diametrum A B, ac proinde tempora descensûs per omnes chordas sunt æqualia; Cum enim angulus A H B, in semicirculo rectus sit, tempus descensûs per A H, æquale est tempori descensûs per A B. (78), & ductâ H C, diametro A B, æquali & parallelâ junctâque C B, erit ob, angulum H B C, rectum, tempus per H B, æquale tempori per H C, seu per A B.

83. Si corpus in curvâ immotâ incedit, vis quâ singula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ movetur corpus comparata, major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis; vis seu celeritas quam in singulis curvæ punctis amittit, major non est quantitate infinitesimâ secundi ordinis; tandem vis seu celeritas per finitum curvæ arcum amissa major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis, adeóque corpus in curvâ progreditur eâdem celeritate finitâ ac si nihil omnino virium amitteret....

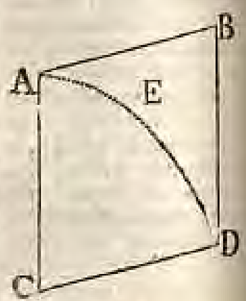


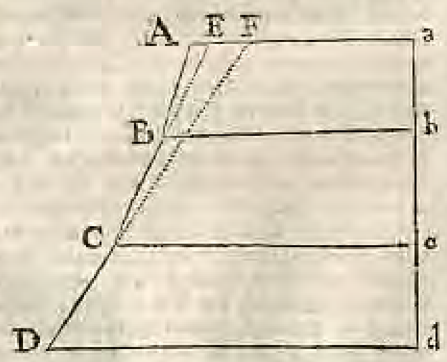
Dem.... (Curva quælibet, ut notum est, considerari potest tanquam polygonum A B C D, ex innumeris atque infinitesimis lateribus rectis A B, B C, C D, compositum, quorum duo quævis B C, C D, angulum comprehendunt à duobus angulis rectis, nonnisi quantitate infinitesimâ deficientem, ità ut producto latere C D, in E, angulus externus B C E, sit infinitesimus. Centro C, & radio C B, describatur semicirculus E B G L, ex puncto B verò demittatur in rectam E D, perpendicularis B K, & completo rectangulo K F, motus corporis latere B C, expositus, in binos B K, B F, seu K C, resolvitur (coroll. 1. Newt.). His positis manifestum est (51) vim seu celeritatem quâ corpus in latus C D, incurrit, illudque premit seu percutit, perpendiculari F C, sive B K, repræsentari; celeritatem post ictum, (supponendo corpora esse elaterio destituta) rectâ K C, seu C H, exhiberi; & celeritatem ex impactu in C, amissam rectâ E K, exponi, cum E K, sit differentia rectarum B C, K C; hoc est, celeritatum ante & post impactum. Jam si angulus B C K, finitæ quantitatis esset, recta B K, finitam haberet ad rectas B C, K C, rationem, quæ decrescente angulo B C K, semper minuitur adeóque infinitesima evadit, dum angulus B C K est infinitesimus; est igitur B K, seu vis quâ corpus curvam premit in C, quantitas non major infinitesimâ primi ordinis; verùm quia in circulo E K : B K = B K : K L, erit E K, quantitas infinitesima respectu B K, quemadmodum, ex demonstratis B K, infinitesima est respectu B C, aut K C, adeóque respectu K L; ergò celeritas seu vis in puncto C amissa non superat quantitatem infinitesimam secundi ordinis. Quarè cùm velocitas quam corpus per singula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infinitesimam secundi ordinis, per latera curvæ numero infinita, hoc est, per arcum curvæ finitum, non potest celeritatem amittere majorem quantitate infinitesimâ primi ordinis quæ est summa quantitatum infinitesimarum secundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum suum in curvâ continuat ac si nihil virium amisisset. Q. e. D.

84. Si

•

tes & tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur. Ut si corpus *A* motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam *AB* & motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem *AC*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *AED*, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta *AB* tangit in *A*, & cujus ordinata *BD* est ut *ABq*. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata de



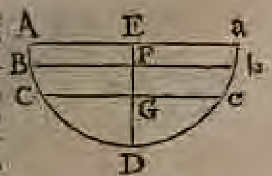


84. Si grave ex quiete in A, per plana contigua A B, B C, C D, descendat, & flexus seu anguli B, C, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendentis, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizonte distantiâ . . . . Dem. . . . Ductis rectis A a, B b, C c, D d, horizonti parallelis & perpendiculo, a d, demisso, producantur C B, D C, donec occurrant rectæ A a, in E & F; velocitas lapsu per A B, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per E B, aut etiam per A B, (81), adeóque cum flexus B, motui non officiat (per hyp.) grave motum suum per planum B C, eodem modo continuat, ac si ex puncto E, per planum unicum E C, descendisset; est igitur velocitas in C, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per, a c, acquisitæ. Similiter ostenditur velocitatem in D æqualem esse velocitati in d. Q. e. D.

85. Augeatur planorum numerus, & singulorum longitudo minuatur in infinitum ut linea A B C D curva evadat, & quia anguli B, C, D, velocitati corporis non officiunt (83), manifestum est gravis per curvam descendentis velocitatem in singulis curvæ punctis B, C, D, æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisitæ in punctis correspondentibus b, c, d.

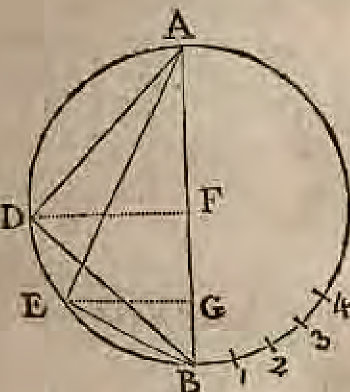
de temporibus oscillantium pendulorum, suffragante horologiorum experientiâ quotidianâ: Ex his iisdem & lege tertiâ *Christophorus Wrennus* Eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *Christianus Hugenius*, ætatis superioris geometrarum facile principes, regulas congressuum & reflexionum durorum corporum seorsim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regiâ* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata est à *Wrenno* coram *Regiâ Societate* per experimentum pendulorum: quod etiam

86. Si grave descendat per curvam quamlibet A B C D, ductis lineis A a, B b, C c, horizonti parallelis, & ex puncto



curvæ infimo D, rectâ D E, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum A D, vel a D, descendentis eandem esse velocitatem in punctis æquè altis B & b, C & c. Quare cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapsum acquisito ascendit per arcum D a, ad punctum a, æquè altum, in quo omnis velocitas extinguitur, & in punctis correspondentibus B & b, C & c, eandem tam in ascensu quam in descensu habet velocitatem (26). Si verò arcus D a, arcui D A, similis & æqualis fuerit, singuli arcus æquè alti C D & D c, B D & D b, A D & D a. æqualibus respectivè temporibus percurruntur (26).

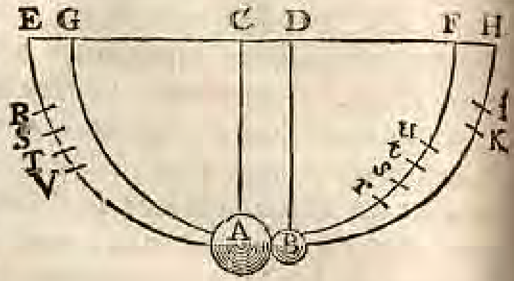
87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum E B, descendentis in puncto infimo B, est ad velocitatem quam lapsu perpendiculari per totam diametrum A B acquireret, ut chorda E B, ad diametrum A B . . . . Dem . . . Ductâ E G, horizonti parallelâ adeóque ad diametrum A B, perpendiculari, velocitas per arcum E B, acquisita, æqualis est velocitati acquisitæ per G B (85). Est ergò ad velocitatem per A B, acquisitam in ratione subduplicatâ G B, ad A B (28). Sed

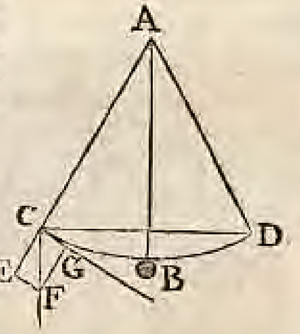


propter triangula rectangula similia A E B, B G E, G B : E B = E B : A B, adeóque E B, ad A B, in ratione subduplicatâ G B ad A B; velocitas igitur per arcum E B, acquisita in B, est ad velocitatem per A B, acquisitam ut chorda E B, ad diametrum A B. Q. e. D.

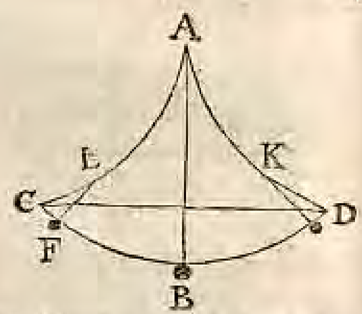
88. Coroll. Ductâ quâvis alterâ chordâ D B, erit etiam velocitas per arcum D B, acquisita in B, ad velocitatem per diametrum A B, ut D B, ad A B, ac proindè velocitates per arcus D B, E B, acquisitæ in puncto infimo B, sunt inter se ut horum arcuum chordæ; unde si capiantur arcus B 1, B 2, B 3, B 4, quorum chordæ sint respectivè ut 1. 2. 3. 4. velocitas gravis per arcus illos descendentis in puncto B, erunt ut 1. 2. 3. 4.

etiam *Clariſſimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus eſt. Verùm, ut hoc experimentum cum theoriis ad amuſſim congruat, habenda eſt ratio, cùm reſiſtentiæ aëris, tum etiam vis elaſticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora ſphærica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *A C*, *B D*, à centris *C*, *D*. His centris & inter-





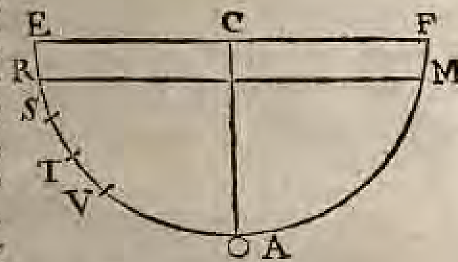
89. Si pendulum B, circà punctum fixum A, rotetur, & globus B, filo A B, appenſus inſtar puncti conſideretur, arcum circuli C B D, deſcribet, idemque globo huic motus accidet ac ſi in ſuperficie ſphæricâ immotâ & perfectè lævigatâ ſublato filo volveretur.... Dem.... Ad punctum C, adducatur globus B, & exinde demittatur; & recta C F, horizonti perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendiculo exponat; ea vis reſolvatur in duas vires, quarum una exhibeatur rectâ C E, ad arcum ſeu tangentem in C, perpendiculari; altera verò tangente C G; vis C E, quâ filum A C, directè trahitur ad globi motum nihil confert & ſolâ vi ut C G, urgetur; arcus verò C B D, conſiderari poteſt ut polygonum cujus latus unum in C, poſitionem habet tangentis C G, & ſi globus per planum C G, vi gravitatis urgeatur, ſublato filo vis C E, plano C G, tota ſuſtinetur, & globus ſolâ vi C G, ad motum in plano C G, ſollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcûs C B D, eodem modo demonſtrari poſſit, patet filum A C, ſuperficiei C B D, vices ſubire, & in utroque caſu motum globi per arcum C B D, eâdem ratione perfici. Q. e. D.



90. Coroll. 1. Pendulum A B, inter duas laminas curvas A L C, A K D, immotas & ſeſe contingentes in A, ità oſcilletur ut filum A B, in ſitu ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in A; dum verò oſcillatur pendulum, curvis laminis filum circumplicetur eaſque perpetuò tangat ut in L & K; per hanc fili ad laminas applicationem continuò impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam C B D, deſcribere cogitur; & eodem quo uſi fuimus ratiocinio (89), demonſtratur pendulum in hæc curvâ eodem modo moveri ac ſi grave B, liberè & abſque filo per curvam immotam & perfectè lævigatam C B D, incederet.

91. Coroll. 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis ſuperficiebus demonſtrata fuere, motui penduli per eaſdem curvas oſcillantis conveniunt. Nempe 1°. Penduli velocitas ſemper æqualis eſt velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendicularem arcui percurſo correſpondentem (85). 2°. Pendulum ex C demiſſum, vi gravitatis urgente ad punctum infimum B, deſcendet; & ex impetu concepto, per arcum B D, aſcendet ad eandem altitudinem D, ibique omni velocitate amiſsâ, vi gravitatis impellente ad punctum infimum B, relabetur, amiſſamque recuperans velocitatem redibit ad punctum C, atque ità continuas oſcillationes itu & reditu in curvâ C B D, perficiet (86).

intervallis deſcribantur ſemicirculi *E A F*, *G B H* radiis *C A*, *D B* biſecti. ([b]) Trahatur corpus *A* ad arcûs *E A F* punctum quodvis *R*, & (ſubducto corpore *B*) demittatur inde, redeatque poſt unam oſcillationem ad punctum *V*. Eſt *R V* retardatio ex reſiſtentia aeris. Hujus *R V* fiat *S T* pars quarta ſita in medio, ita ſcilicet ut *R S* & *T V* æquentur, ſitque *R S* ad *S T* ut 3 ad 2. Et iſta *S T* exhibebit retardationem in deſcenſu ab *S* ad *A* quam proximè. Reſtituatur corpus *B* in locum ſuum. Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* ſine errore ſenſibili tanta erit, ac ſi in vacuo cecidiſſet de loco *T*. Exponatur igitur

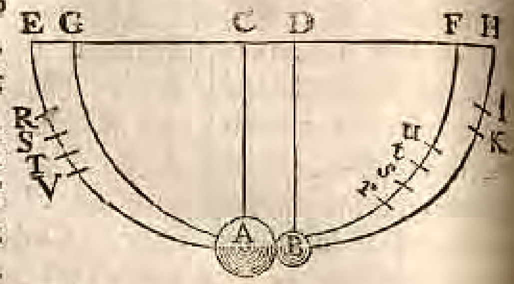


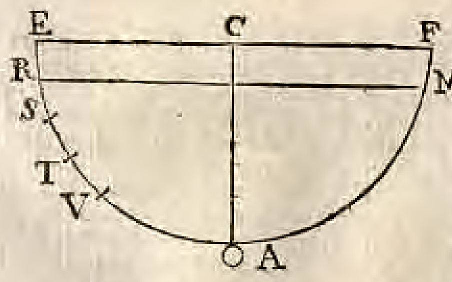
92. Coroll. 3. Si nulla foret medii reſiſtentia, nullaque circà laminas incurvatas aut centrum rotationis frictio, æquales & perpetuæ forent pendulorum oſcillationes; verum has ob cauſas ſingulis vibrationibus, licet inſenſibiliter, minuitur penduli velocitas, arcuſque continuò breviores deſcribit ac tandem omninò quieſcit.

93. Coroll. 4. Velocitates ejuſdem penduli in circuli peripheriam excurrentis, ſunt in puncto infimo ut arcuum deſcriptorum chordæ (88).

([b]) 94. Trahatur corpus A, ad arcûs E A F, punctum quodvis R, & demittatur indè, ſublatâ medii reſiſtentiâ ad eandem altitudinem M, aſcendere & rurſùs ad punctum R, redire debet (92). Cum autem poſt unam oſcillationem ex itu & reditu compoſitam perveniat (ex hyp.) ad punctum V, arcus R V exponet medii retardationem in duplici aſcenſu & deſcenſu; quare ut habeatur medii retardatio in uno tantum deſcenſu ſumenda eſt quarta pars totius retardationis id eſt quarta pars arcus R V, dummodo iſte deſcenſus neque ex puncto ſupremo R neque ex infimo V ordiatur, nam cum major ſit medii retardatio in arcu majori quam in minori, ſemperque ſiant minores arcus à pendulo oſcillante deſcripti, inæquales quoque erunt retardationes in ſingulis arcubus, & retardatio deſcenſus per R A, major erit quartâ parte totius retardationis R V ut retardatio ultimi aſcenſus A V, minor erit quartâ parte totius retardationis R V. Hoc autem aut ſimili calculo determinavit Newtonus punctum S tale ut retardatio in deſcenſu per S A ſit quarta pars totius retardationis R V. Dicatur arcus R A, 1, arcus R V, 4 *b*, arcus quæſitus S A *x*; ſintque retardationes arcubus deſcriptis proportionales, erit arcus S A (*x*) ad arcum R A (1) ut retardatio arcus S A quæ ſtatuitur eſſe *b*, ſeu quarta pars totius R V, ad retardationem primi arcus R A quæ erit *b* : *x*. Quærantur ſucceſſivè

AXIOMATA, SIVE tur hæc velocitas per chordam arcus TA. Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad locum s, & corpus B ad locum k. Tollatur corpus B & inveniatur locus v; â quo si corpus A demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum r, sit st pars quarta ipsius rv sita in medio, ita videlicet ut rs & tv æquentur; & per chordam arcus tA exponatur velocitas, quam corpus A proxime post reflexionem habuit in loco A. (c) Nam t erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A, sublatâ aeris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus k, ad quem corpus B ascendit, & inveniendus locus l, ad quem corpus illud ascen-





sivè retardationes secundi, tertii, quartive arcus eâdem ratione; arcus autem secundus est æqualis primo R A, dempta ejus retardatione $b:x$. Tertius arcus æqualis secundo demptâ ejus retardatione, & sic deinceps, omnes verò illæ retardationes simul sumptæ æquabuntur toti retardationi R V seu $4b$; unde fit æquatio ex quâ valor arcus S A, seu x, obtinebitur, per approximationem autem invenietur æqualis $1-3:2.b$, sumatur itaque R S æqualis quartæ parti cum ejus semisse totius retardationis R V, retardatio per arcum S A erit æqualis S T quartæ parti totius retardationis R V, ideòque cadat corpus ex puncto S, ejus celeritas in A eadem est sine errore sensibili, ac si in vacuo decidisset ex T.

(c) 95. t, (fig. Newt.), erit locus verus & correctus ad quem corpus A, sublatâ aëris resistentiâ ascendere debuisset; nam corpus A, ex t, in medio non resistente descendens, in puncto infimo A, eam haberet velocitatem quâ posset arcum A t, ascendendo describere (91), & quâ ob aëris resistentiam, nonnisi arcum A s, (94) percurreret, ergò cum post reflexionem ascendat ad s, eam habet in A velocitatem, quâ in medio non resistente ad punctum t ascenderet.

96. Ex

LEGES MOTUS. ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus A (ut ita dicam) in chordam arcûs TA, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco A proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcus tA, ut habeatur motus ejus in loco A proxime post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcûs Bl, ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, putà pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directè occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales. Ut si corpus A incidebat in corpus B quiescens cum novem partibus motûs, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus B resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, A cum duodecim partibus & B cum sex, & redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius A subducantur partes duodecim & restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & sic de motu corporis B partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, A velocius cum partibus quatuordecim, & B tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergebat A cum quinque partibus; pergebat B cum quatuordecim, facta translatione partium novem de A in B. Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summâ motuum con-

spi-

ſpirantium & differentiâ contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accuratè. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo $A B$; tum loca s, k notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis corporibus pendulis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolutè dura eſſe, vel ſaltem perfectè elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; ([d]) addo quod experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certâ proportione pro quantitate vis elaſticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. ([e]) Certius id affirmabitur de perfectè elaſticis. ([f]) In imperfectè elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi elaſticâ; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in datâ ratione. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter conſtrictâ ſic tentavi. Primum demittendo pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata eſt, quæ cum experientiâ plane congruit.

([d]) 96. Experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus & non elaſticis æquè ac in duris & elaſticis, utpotè non à conditione duritiei & elaſticitatis, ſed tantum ab actionis & reactionis æqualitate & oppoſitione pendentia; nam ſi regula illa in corporibus non perfectè elaſticis tentanda eſt, ut ex ipſorum motibus antè conflictum inveniantur motus poſt conflictum, debebit ſolum modò reflexio minui in certâ proportione, pro quantitate vis elaſticæ (52).

([e]) 97. Certius id affirmabitur de perfectè elaſticis; corpora enim perfectè dura ſeu quorum partes nullâ vi finitâ ſeparari aut flecti poſſunt, nullâ quoque vi reſtitutivâ aut repulſivâ pollere videntur; adeóque cum nihil ſine causâ fiat, corporum perfectè durorum concurrentium nulla videtur eſſe poſſe reflexio.

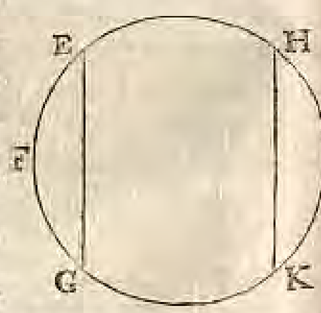
([f]) 98. In imperfectè elaſticis, velocitas reditûs minuenda eſt cum vi elaſticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata eſt, in iiſdem corporibus, niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur; dum enim corporis elaſtici fibræ ex ictu flectuntur, ſi aliqua abrumpatur fibra, ea non ſeſe reſtituit, adeóque vis corporis reſtitutiva minuitur; ſi verò fibræ extenduntur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictûs huic fibrarum extenſioni adhibita, vi reſtitutivæ detrahitur. His cauſis addi poteſt inteſtinus partium corporis percuſſi motus ſono ipſo ſatis indicatus, qui in reflexionem non impenditur. Hæc materia variis Rizzeti experimentis illuſtratur in Commentariis inſtituti Bononienſis. Tria globulorum vitreorum paria ſibi paravit Rizzetus, globuli primi paris diametrum habebant trium unciarum, ſecundi duarum, tertii unius, ità ut eſſent diverſorum parium diametri inter ſe, ut 3. 2. 1. fecit ut globuli primi paris filo appenſi ſimul congrederentur, notavitque velocitatem reſpectivam quam habuerunt vel antè vel poſt ictum, detractâ tamen more Newtoniano aeris reſiſtentiâ; idemque tentavit tum in 2°. tum in 3°. pari. In 1°. globulorum pari cum velocitas reſpectiva ante ictum fuiſſet 11, fuit poſt ictum 10; in 2°. pari cum fuiſſet antè ictum 16, fuit poſt ictum 15; in 3°. pari cum fuiſſet ante ictum 31; fuit poſt ictum 30. Unde velocitatis reſpectivæ defectus erat in primo pari 1 : 11. in 2°. pari 1 : 16. in 3°. pari 1 : 31; illi autem defectus ſunt fere diametris 3, 2, 1. proportionales. Aliud experimentum tentavit Rizzetus. Chordam calybeam duos pedes longam horizontaliter poſitam variis modis tendebat, donec tandem repererit tres chordæ tenſiones, quæ efficerent ut tempora quibus chorda pulſa ſeſe reſtituebat, forent ut 3. 2. 1. Eas autem tenſiones ſe aſſecutum eſſe ex graviori vel acutiori chordarum ſono intelligebat; in ſingulis tenſionibus globum eburneum cujus diameter erat duarum unciarum, filo decem pedes longo appenſum & in medio tantiſper complanatum in chordam demittebat, & detractâ aëris reſiſtentiâ, velocitatem reſpectivam antè & poſt ictum notabat. Obſervavit autem velocitatem antè ictum eſſe ad velocitatem poſt ictum, ut 11, ad 10, in 1ª tenſione, cum chorda pulſa reſtitueretur tempore 3; ut 16 ad 15 in 2ª tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 2; tandem ut 31, ad 30, in 3ª tenſione, cum chorda reſtitueretur tempore 1; undè concludit defectus ſingulos velocitatis poſt ictum, temporibus reſtitutionum eſſe proportionales. Manente igitur corporum homogeneorum magnitudine & figurâ, conſtans obſervatur ratio velocitatis reſpectivæ poſt ictum ad velocitatem reſpectivam ante ictum; ſed mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti oſtendunt defectus velocitatis reſpectivæ poſt ictum in globis homogeneis eſſe in ratione diametrorum, aut etiam in ratione temporum quibus globi compreſſi reſtituuntur.

In

99. Si

In attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis A, B, ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi, quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur verſus corpus alterum B, quam illud alterum B in prius A, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis A quam preſſione corporis B; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus B, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. (g) Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aquâ ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua eſt. Secetur terra FI plano quovis EG in partes duas EGF & EGI: & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuo. Nam ſi plano alio HK quod priori EG parallelum ſit, pars major EGI ſecetur in partes duas $EGKH$ & HKI, quarum HKI æqualis ſit parti prius abſciſſæ EFG: manifeſtum eſt quod pars media $EGKH$



pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, ſed

(g) 99. Si magnes ſuberis fruſto, ſimiliterque ferrum alio ſuberis fruſto imponantur, ut tam magnes quam ferrum in aquâ libere ſtagnent, æquali motûs quantitate ſibi mutuo obviam eunt, ità ut eorum celeritates ſint in ratione ponderum reciprocâ; dum verò ad contactum pervenerunt, in æquilibrio conſiſtunt. Quare hoc experimento manifeſtum eſt æqualem eſſe ferri in magnetem & magnetis in ferrum actionem. Similiter ſi quis in cymbâ aquis innatante poſitus, cymbam alteram liberè fluitantem ope funis trahat, vel conto aliove inſtrumento repellat, cymbæ in partes contrarias cum æquali motûs quantitate ferentur, ità ut earum velocitates ſint in ratione reciprocâ ponderum.

ſed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema HKI toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam EGF; ideoque vis quâ partium HKI & $EGKH$ ſumma EGI tendit verſus partem tertiam EGF, æqualis eſt ponderi partis HKI, id eſt ponderi partis tertiæ EGF. Et propterea pondera partium duarum EGI, EGF in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.

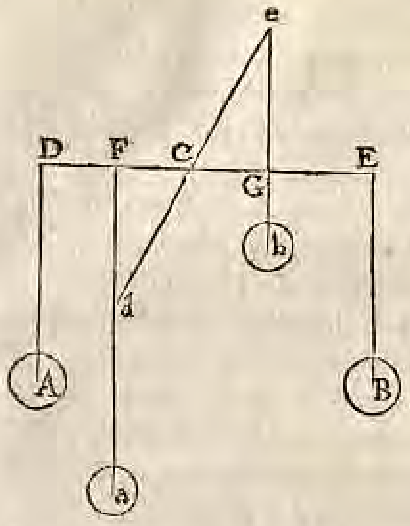
Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciprocè ut vires inſitæ: (h) ſic in movendis inſtrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem virium æſtimatæ, ſunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oſcillante librâ ſunt reciprocè ut eorum velocitates ſurſum & deorſum: hoc eſt pondera, ſi rectâ aſcendunt & deſcendunt, æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut punctorum à quibus ſuſpenduntur diſtantiæ ab axe libræ; ſin planis obliquis aliiſve admotis obſtaculis impedita aſcendunt vel deſcendunt obliquè, æquipollent, quæ ſunt reciprocè ut aſcenſus & deſcenſus, quâtenus facti ſecundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorſum. Similiter in trochlea ſeu polyſpaſto vis manûs funem directè trahentis, quæ ſit ad pondus vel directè vel obliquè aſcendens ut velocitas aſcenſus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, ſuſtinebit pondus. In horologiis & ſimilibus inſtrumentis, quæ ex rotulis commiſſis conſtructa ſunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum

(h) 100. In movendis inſtrumentis mechanicis, agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundùm directionem virium æſtimatæ ſunt reciprocè ut vires abſolutæ.... Dem.....

AXIOMATA, SIVE

dum & impediendum, si sunt reciprocè ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. (i) Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi

à



Duæ potentiæ, seu, quod idem est, duo pondera ope machinæ cujusvis datæ in se mutuò ità agant, ut pondus unum secundum propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrà propriam illius directionem rapiat; si loco machinæ datæ substituatur vectis cujus longitudo & hypomoclion talia sint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appensa, eâdem celeritate ac in machinâ datâ sese mutuò moveant, iidem erunt in vecte & in machinâ datâ conatus ponderum in se mutuò, eadem ipsorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem secundùm eandem directionem in iisdem corporibus producendam. Itaque vectis D E, horizontalis, cum appensis ponderibus A & B, rotetur circa hypomoclion C, ut situm d e, obtineat, & producatur filum a d, usque ad F; pondus A, secundum propriam directionem percurrit spatium F d; & pondus B, contrà propriam directionem eodem tempore percurrit spatium G e; adeóque horum ponderum velocitates sunt semper ut spatia F d, G e, eodem tempore percursa. Momentum ponderis a, est ut a × FC, momentum ponderis b, est ut b × CG (47). Sed ob similitudinem triangulorum F C D, e C G; F C : C G = F d : G e. Ergò momenta ponderum a & b, sunt inter se ut a × F d, & b × G e; seu sunt ut facta ex ponderibus in sua respective spatia eodem tempore percursa, adeóque etiam ut facta ex ponderibus in suas respectivè velocitates; quare si facta illa æqualia sint, aut quod idem est, si pondera seu vires sint reciprocè ut velocitates secundùm directiones virium æstimatæ, erit æquilibrium. Q. e. D.

101. Coroll. Cum ex demonstratis, momenta virium sint semper ut facta ex vi quâlibet in suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundùm propriam directionem ex dispositione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(i) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistentia corporis comprimendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, & momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ in suam quoque velocitatem; ut ergò sit æquilibrium, debet esse resistentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistentiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit circulum cujus radius est manubrii longitudo, è centro cochleæ usque ad manum sumpta, dum interea cochlea per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrium

LEGES MOTUS.

à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. (k) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistentis sint reciprocè ut vires; agens resistentiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate (l) eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistentiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tracta-

re

nubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicum.

(k) 103. Momentum cunei est ut factum (101), ex vi impressâ à malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundùm directionem vis à malleo impressæ; momentum verò resistentiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistentiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares, juxtà quarum directionem partes ligni à cuneo moventur; est etiam momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens secundùm lineam basi ipsius perpendicularem, totam suam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ basis cunei latitudine à se invicem removentur, erit (in casu æquilibrii) vis cunei ad ligni resistentiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

(l) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistentias ex crassitie rigiditate & funium flexione ortas in machinis considerare necessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

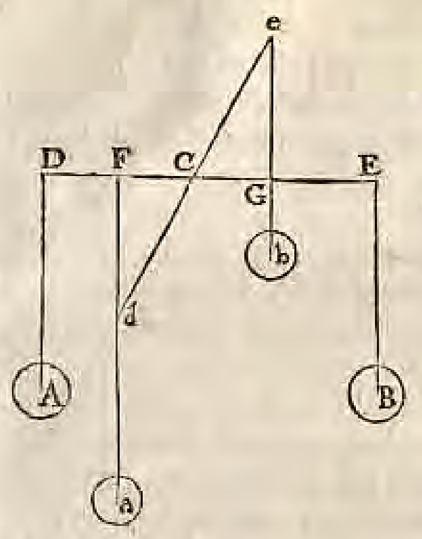
Hanc difficilem materiam Sturmius, Leibnitius, Amontonius, Parentius, La-Hirius & alii tractarunt. Bulfingerus Tom. 2°. Comment. Acad. Petropol. ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem & usum hic exscribere non abs re erit.

Suprà

AXIOMATA, SIVE

dum & impediendum, si sint reciprocè ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. (i) Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi

à



Duæ potentiæ, seu, quod idem est, duo pondera ope machinæ cujusvis datæ in se mutuò ità agant, ut pondus unum secundum propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrà propriam illius directionem rapiat; si loco machinæ datæ substituatur vectis cujus longitudo & hypomoclion talia sint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appensa, eâdem celeritate ac in machinâ datâ sese mutuò moveant, iidem erunt in vecte & in machinâ datâ conatus ponderum in se mutuò, eadem ipsorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem secundùm eandem directionem in iisdem corporibus producendam. Itaque vectis D E, horizontalis, cum appensis ponderibus A & B, rotetur circa hypomoclion C, ut situm d e, obtineat, & producatur filum a d, usque ad F; pondus A, secundum propriam directionem percurrit spatium F d; & pondus B, contrà propriam directionem eodem tempore percurrit spatium G e; adeóque horum ponderum velocitates sunt semper ut spatia F d, G e, eodem tempore percursa. Momentum ponderis a, est ut a × FC, momentum ponderis b, est ut b × CG (47). Sed ob similitudinem triangulorum F C D, e C G; F C : C G = F d : G e. Ergò momenta ponderum a & b, sunt inter se ut a × F d, & b × G e; seu sunt ut facta ex ponderibus in sua respective spatia eodem tempore percursa, adeóque etiam ut facta ex ponderibus in suas respectivè velocitates; quare si facta illa æqualia sint, aut quod idem est, si pondera seu vires sint reciprocè ut velocitates secundùm directiones virium æstimatæ, erit æquilibrium. Q. e. D.

101. Coroll. Cum ex demonstratis, momenta virium sint semper ut facta ex vi quâlibet in suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundùm propriam directionem ex dispositione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(i) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistentia corporis comprimendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, & momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ in suam quoque velocitatem; ut ergò fit æquilibrium, debet esse resistentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistentiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit circulum cujus radius est manubrii longitudo, è centro cochleæ usque ad manum sumpta, dum interea cochlea per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrium

LEGES MOTUS.

à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. (k) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistentis sint reciprocè ut vires; agens resistentiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate (l) eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistentiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tracta-

re

nubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicum.

(k) 103. Momentum cunei est ut factum (101), ex vi impressâ à malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundùm directionem vis à malleo impressæ; momentum verò resistentiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistentiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares, juxtà quarum directionem partes ligni à cuneo moventur; est etiam momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens secundùm lineam basi ipsius perpendicularem, totam suam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ basis cunei latitudine à se invicem removentur, erit (in casu æquilibrii) vis cunei ad ligni resistentiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

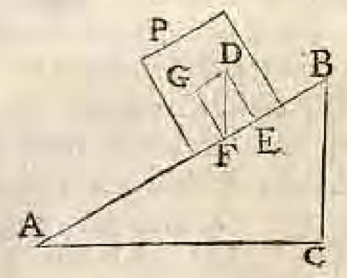
(l) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistentias ex crassitie rigiditate & funium flexione ortas in machinis considerare necessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

Hanc difficilem materiam Sturmius, Leibnitius, Amontonius, Parentius, La-Hirius & alii tractarunt. Bulfingerus Tom. 2°. Comment. Acad. Petropol. ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem & usum hic exscribere non abs re erit.

 Suprà

re non eſt hujus inſtituti. Hiſce volui tantùm oſtendere, quàm latè pateat quàmque certa ſit lex tertia motûs. Nam ſi æſtimetur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & ſimiliter reſiſtentis reactio æſtimetur conjunctim ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſem-

per



Suprà horizontem A C, experimento ſæpius inſtituto, elevetur planum A B, ad angulum B A C, ita ut ſi corpus plano A B, ad hunc angulum elevato imponatur, tantùm non deſcendat; deſcendat autem ſi angulus nonnihil augeatur; & hæreat cum aliquâ adverſus deſcenſum renitentiâ, ſi angulus minuatur. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento ſic inferatur.

Uti ſinus totus ad ſinum rectum anguli quietis, ità pondus abſolutum P, ad frictionem ejus ſuper plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterùm.

Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ità pondus abſolutum P, ad frictionem ejus ſuper plano horizontali, cùm trahitur in directione ad horizontem parallelâ . . . . Dem . . . Linea D F, horizonti perpendicularis, pondus abſolutum P, ſeu vim totam quâ corpus in perpendiculo deſcendere nititur, exponat; & ductâ D E, ad planum A B, normali; vis D F, in binas vires nempe D E, plano perpendicularem, & E F, ſeu D G, plano parallelam reſolvitur (41); vis D E, à plano A B, etiam perfectè lævigato tota ſuſtinetur, & ſolâ vi D G, ſeu E F, pondus P, nititur juxtà plani directionem deſcendere; Cùm igitur ob frictionem in plano aſpero A B, tantùm non deſcendat, erit frictio æqualis vi E F; eſt itaque pondus abſolutum P, ad frictionem ejus ſuper plano inclinato A B, ut D F, ad F E, hoc eſt, ob angulum E rectum & angulum F D E æqualem angulo quietis B A C, ut ſinus totus ad ſinum anguli quietis. Q. erat 1um.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis D E, plano perpendicularis, conſiderari ut pondus abſolutum, & ità planum A B, ſe habebit ut planum horizontale reſpectu ponderis D E; vis autem F E, ſeu frictio conſideranda eſt tanquam vis in æquilibrio conſtituta cum vi æquali trahente pondus D E, ſecundùm directionem plano A B, parallelam; & ob triangulorum F D E, B A C, ſimilitudinem, manifeſtum eſt pondus D E, eſſe ad frictionem F F, ſeu pondus abſolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, eſſe ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis. Q. erat 2um.

105. Coroll. In his duobus caſibus, frictiones, cæteris omnibus paribus, ſunt preſſionibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicatur f; in plano horizontali F, & erit per 1um. theor. P : f = A B : B C; & per 2um. theorema P : F = A C ; B C, ſeu F : P = B C : A C; adeóque per compoſitionem rationum P. F : P. f = A B × B C : B C × A C; ac proinde F : f = A B : A C = F D : D E; hoc eſt, frictio in plano horizontali

per æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne reſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria.

tali eſt ad frictionem in plano ad angulum quietis inclinato, ut preſſio in plano horizontali ad preſſionem in plano inclinato.

DE MOTU CORPORUM
LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

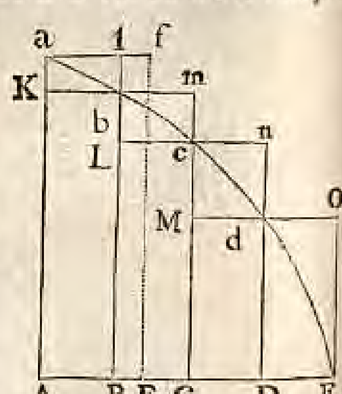
LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

SI negas; fiant ultimò inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quam pro datâ differentiâ *D*: contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis AacE, *rectis* Aa, AE *& curvâ* acE *comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam

Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *Kb* & altitudinum (m) summa *Aa*, id est, rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inscripta & circumscripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimò æquales. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB, BC, CD, &c. *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur paralle-

(m) 106. Si fuerint quotcumque & cujusvis generis quantitates decrescentes, Aa, Bb, Cc, Dd, erunt omnium differentiæ simul sumptæ æquales excessui maximæ suprà minimam. Nam perspicuum est Aa − Bb + Bb − Cc + Cc − Dd = Aa − Dd: unde si ultima seriei quantitas sit o, ut in serie Aa, Bb, Cc, Dd, o, summa differentiarum Ka + Lb + Mc + Dd, æqualis erit quantitati maximæ Aa.

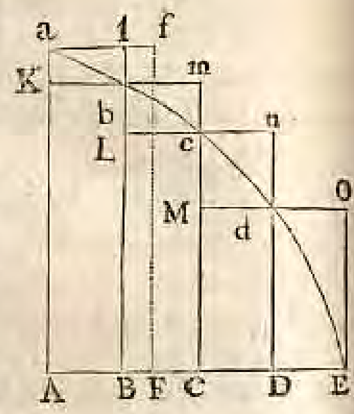
107. Linea Bb, motu sibi semper parallelo accedat ad lineam Aa, & interim punctum b, ita moveatur in linea Bb, ut semper reperiatur in arcu ba; decrescente linearum Aa, Bb, distantiâ AB, decrescit quoque earum differentia Ka, ac tandem evanescente AB, evanescit Ka, & Bb, seu AK, fit ultimò æqualis lineæ Aa: evanescunt autem AB & Ka, cum lineæ Aa, Bb, neque distantes, neque prorsus congruentes dici possint, sed simul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum Aa, Bb, differentia Ka, minor est quâvis lineâ datâ, seu infinite parva est, aut inassignabilis respectu AK & Bb; quantitas autem evanescens, seu infinitè parva, est ad quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum sit infinitum ex finiti additione vel subtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi posse, liquet lineas Bb seu AK & Aa, seu AK + Ka, pro æqualibus posse usurpari. Similiter, quia evanescente Ka, trianguli Kab, & parallelogrammi Kl, areæ infinitesimæ fiunt respectu parallelogrammi evanescentis Ab, parallelogrammum istud Ab, usurpari potest pro parallelogrammo Al, aut etiam pro figurâ ABba, hoc est, pro differentia arearum curvilinearum AEca, BEcb.

108. Ex his sequitur diversos esse infinitesimorum ordines; nam ostensum est (107) parallelogrammum Kl, infinitesimum esse respectu parallelogrammi Ab, hoc verò parallelogrammum infinitesimum esse respectu areæ curvilineæ AEca.

109. Figura AEca, circa axem suum AE, revolvatur, & quælibet ordinata Aa, Bb, describet circulum, cujus est ordinata ipsa radius, quodlibet rectangulum evanescens ut KB, aB, describet cylindrum evanescentem, & rectangula, Kl, Lm, Mn, Do, singula describent annulos solidos, quorum summa æqualis

erit

rallelogrammum *F A a f*. (ⁿ) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ; at latitudine ſuâ *A F* in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſumma ultima parallelogrammorum evaneſcentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evaneſcentium arcuum *a b*, *b c*, *c d*, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumſcripta quæ tangentibus eorumdem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. (°) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros *a c E*,) non ſunt rectilineæ, ſed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

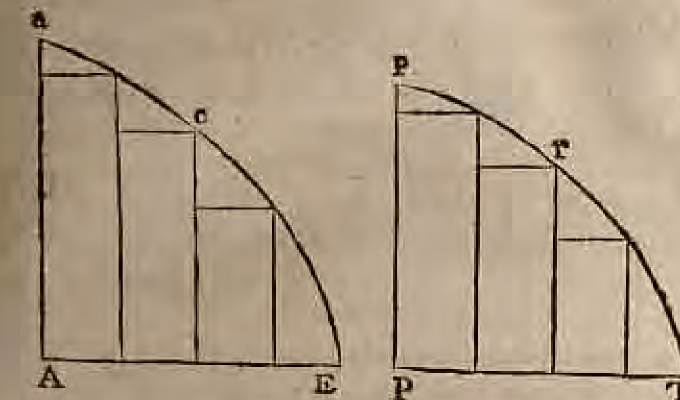
Si in duabus figuris A a c E, P p r T, *inſcribantur (ut ſupra) duæ parallelogrammorum ſeries, ſitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, ſingulorum ad ſingula, ſint eædem; dico quod figuræ duæ* A a c E, P p r T, *ſunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*

erit cylindro ex rotatione rectanguli A I deſcripto. Quare cum hic cylindrus ſit infiniteſimus, patet (per lemma 1) ultimam rationem ſolidi ex cylindris omnibus compoſiti ad ſolidum ex rotatione figuræ curvilineæ A E c a, genitum eſſe rationem æqualitatis.

(ⁿ) 110. Nam ſi ſingulorum parallelogrammorum latitudo æqualis eſſet lineæ A F, figuræ inſcriptæ & figuræ circumſcriptæ differentia foret parallelogrammum A f, (lem. 11); cùm igitur ſingulorum parallelogrammorum latitudo minor ſit latitudine A F, (ex hyp.) prædicta figurarum differentia minor quoque eſt parallelogrammo A f.

(°) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros a c E) non ſunt rectilineæ, ſeu non ſunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compoſitæ, ſed ſunt figurarum rectilinearum quarum latera numero augentur & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinatarum A a, B b, ac proindè chordarum a b, b c, numerus in infinitum augetur, & diſtantiæ A B, B C, in infinitum minuuntur, puncta a, b, K, l, & b, c, L, m, &c. coeunt & curvam a c E formant.

112. De



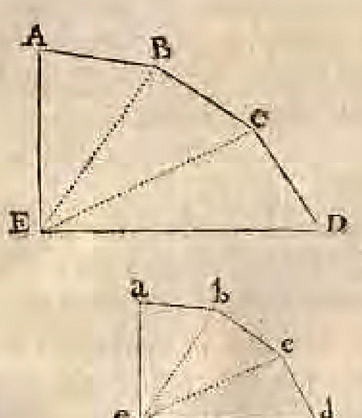
Etenim ut ſunt parallelogramma ſingula ad ſingula, ita (componendo) fit ſumma omnium ad ſummam omnium, & ita figura ad figuram; exiſtente nimirum figurâ priore (per lemma III) ad ſummam priorem, & figurâ poſteriore ad ſummam poſteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi duæ cujuſcunque generis quantitates in eumdem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, cæteræque ſuo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam ſi in lemmatis hujus figuris ſumantur parallelogramma inter ſe ut partes, ſummæ partium ſemper erunt ut ſummæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id eſt (per hypotheſin) in ultimâ ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ sunt in duplicata ratione laterum. (p)

L E M.

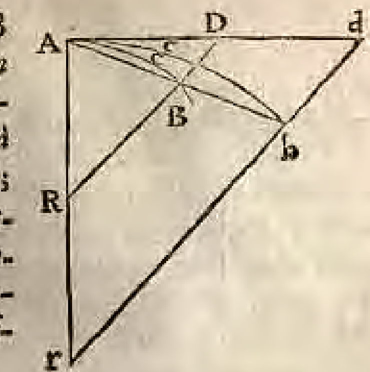


(p) 112. Demonstr. ... Duæ figuræ, A D E, a d e, similes dicuntur, quarum latera omnia sibi mutuò respondentia, ut A B, a b, B C, b c, proportionalia sunt, & angulos æquales, ut A B C, a b c, continent; undè jam patet summas laterum utriusque figuræ esse inter se ut duo quævis latera correspondentia A B, a b. Ductis ex E, & e, ad omnes angulos lineis E B, E C, e b, e c, figuræ in sua triangula dividantur; & quoniam anguli D & d, æquales sunt, lateraque E D, e d, D c, d c, proportionalia, (per definit.), duo triangula E C D, e c d, erunt similia, adeóque anguli E C D, e c d, æquales, & latera E C, e c, lateribus C D, c d proportionalia; quare cum anguli B C D, b c d sint etiam æquales (per definit.), æquantur quoque anguli E C B, e c b, & quia B C : b c = C D : c d = E C : e c, triangula duo E B C, e b c similia erunt. Idem eâdem ratione de aliis triangulis E B A, e b a demonstratur. Verùm areæ singulorum triangulorum similium, quæ in duabus figuris sibi mutuò respondent, sunt inter se in duplicatâ ratione laterum homologorum, ac proinde in datâ ratione; ergò summæ triangulorum, in utrâque figurâ, hoc est, figurarum areæ rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum A B, B C, &c. a b, b c, &c. augeatur & eorum longitudo minuatur in infinitum, & (per Cor. 4. Lem. III.) figuræ A B C D, a b c d, fiunt curvilineæ; similium igitur figurarum latera omnia, quæ sibi mutuò respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicatâ ratione laterum. Q. E. D.

113. Curv

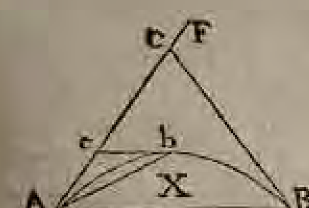
LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus A C B subtendatur chordâ A B, & in puncto aliquo A, in medio curvaturæ (q) *continuæ, tangatur à rectâ utrinque productâ A D; dein puncta A, B ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus B A D, sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimò evanescet.*



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus *A C B* cum tangente *A D* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypothesin.

L E M.



(q) 113. Curva continua B A, considerari potest tanquam descripta motu puncti B continuò mutantis directionem suam quâ per rectam tangentem B C, progredi nititur. Unde si arcus A B, sit ubique versus eamdem partem X, cavus, semperque ducantur tangentes A F, B C, sese intersecantes in C, accedente puncto B, ad A, anguli B C F, B A C, C B A, quos tangentes & chordæ complectuntur, continuò, non verò per saltum, decrescunt, & evanescente chordâ A b, evanescunt, atque nulli fiunt, dum punctum b, idem omninò est cum puncto A. Necesse igitur est ob continuitatem decrementorum, ut angulus C A b, per omnes magnitudinis gradus inter angulum C A B, & o, seu nihilum medios transeat priusquam nullus omnino sit; quod generatim statuendum est de omnibus quantitatibus, quæ nascuntur & continuò crescunt, vel quæ continuò decrescunt & tandem evanescunt; non possunt enim continuò crescere vel decrescere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios transeant. Itaque inter tangentem A F, & chordam infinitesimam A b, nulla duci potest linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum A B, & tangentem A F, nulla duci potest linea recta quæ arcum non secet.

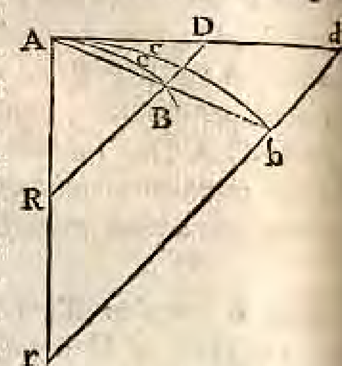
114. Sc-

DE MOTU CORPORUM.

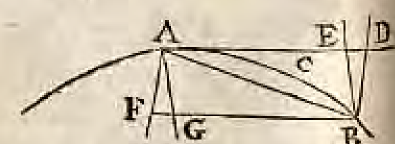
LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcûs, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *A B* & *A D* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & (r) secanti *B D* parallela agatur *b d*. Sitque arcus *A c b* semper similis arcui *A C B*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *d A b*, per lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ *A b*, *A d*, & arcus intermedius *A c b* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *A B*, *A D*, & arcus intermedius *A C B* evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*



Corol. 1. Undè si per *B* ducatur tangenti parallela *B F*, rectam quamvis *A F* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*; hæc *B F* ultimo ad arcum evanescentem *A C B* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *A F B D* rationem semper habet æqualitatis ad *A D*.



Corol.

(r) 114. Secans R D, supponitur semper efficere cum tangente A D & chordâ A B, angulos finitos, aut angulos ad quos angulus evanescens B A D, rationem habet infinitesimam; nam si anguli A B D, B A D, essent ejusdem ordinis infinitesimi, trianguli A B D latera finitam haberent inter se rationem. Angulus enim externus B D d, æqualis duobus internis oppositis D A B, D B A, esset ejusdem ordinis cum illis angulis; & quoniam in omni triangulo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum, latera A B, B D, A D, finitam rationem haberent sinuum angulorum ejusdem ordinis B D d, D A B, A B D; cùm autem anguli A & B, supponuntur infinitesimi, angulus A D B est obtusus, adeóque chorda A B, majori angulo opposita, ad tangentem A D, datam habebit majoris inæqualitatis rationem.

LIBER PRIMUS.

Corol. 2. Et si per *B* & *A* ducantur plures rectæ *B E*, *B D*, *A F*, *A G*, secantes tangentem *A D* & ipsius parallelam *B F*; ratio ultima abscissarum omnium *A D*, *A E*, *B F*, *B G*, chordæque & arcus *A B* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ A R, B R *cum arcu* A C B, *chordâ* A B *& tangente* A D, *triangula tria* R A B, R A C B, R A D *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

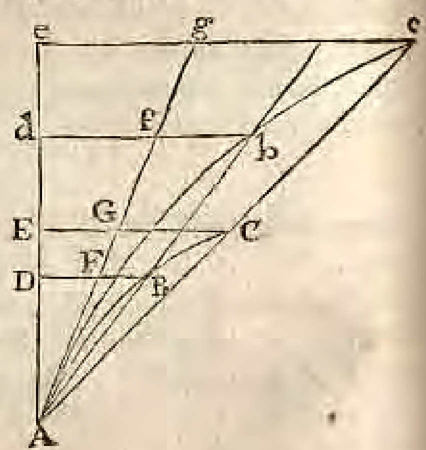
Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *A B*, *A D*, *A R* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipsique *R D* parallela agi *r b d*, & arcui *A C B* similis semper sit arcus *A c b*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *b A d* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *r A b*, *r A c b*, *r A d* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *R A B*, *R A C B*, *R A D* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta A E *& curva* A B C *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* B D, C E, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C, *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* A B D, A C E *erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur semper AD produci ad puncta longinqua d & e, ut sint Ad, Ae ipsis AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ db, ec ordinatis DB, EC parallelæ quæ occurrant ipsis AB, AC productis in b & c. Duci intelligatur, tum curva Abc ipsi ABC similis, tum recta Ag, quæ tangat curvam utramque in A, & secet ordinatim applicatas DB, EC, db, ec in F, G, f, g. (f) Tum manente longitudine Ae coeant puncta B, C cum puncto A; & angulo cAg evanescente, coincident areæ curvilineæ Abd, Ace cum rectilineis Afd, Age; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum Ad, Ae: Sed his areis proportionales semper sunt areæ ABD, ACE, & his lateribus latera AD, AE. Ergo & areæ ABD, ACE sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum AD, AE. *Q. E. D.*



LEM-

(f) 115. Tum manente longitudine finitâ A e, & mutatâ, si necessum fuerit, longitudine A d, ut sit semper A d : A e = A D : A E, coeant puncta B, C, cum puncto A, &c.

116. Spa-

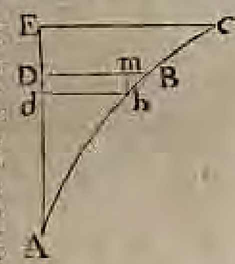
LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicatâ ratione temporum.

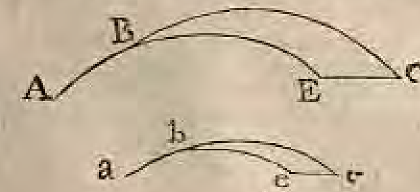
Exponantur tempora per lineas AD, AE, & velocitates genitæ per ordinatas DB, EC; (t) & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ ABD, ACE his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma IX) in duplicatâ ratione temporum AD, AE. *Q. E. D.*

Corol. 1. (u) Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus descri-

(t) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ A B D, A C E, his ordinatis descriptæ. Nam ductâ d b, ipsi D B, infinitè propinquâ, ita ut D d, sit infinitesima seu evanescens respectu A D, A E, lineæ D B, d b, & rectangulum d m, ac figura D d b B, pro æqualibus respectivè usurpari possunt (107), adeò ut per tempusculum infinitesimum, D d, velocitas D B, tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate d b, percursum, est ut factum ex velocitate d b, & tempusculo D d, (5), hoc est, ut rectangulum D d × d b, seu ut area D B b d; si igitur areæ A C E, A D B, in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut d m, divisæ concipiantur, erunt summæ spatiorum percursorum, seu spatia temporibus A E, A D, percursa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut areæ ipsæ A C E, A B D, (Lem. III).



117. Cor. Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio considerari potest, tanquam vis determinata & immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ temporum ratione (27); & contra, si spatia percursa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum & spatiorum proportio mutaretur. Ergò (Lem. X) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio tanquam immutabilis spectari potest.

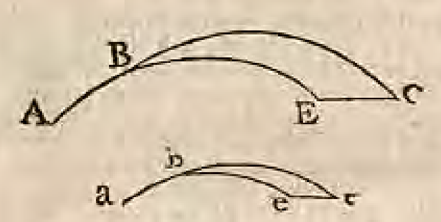


(u) 118. Corpora duo A & a, curvas similes A B E, a b e, illarumque partes similes A B, a b, B E, b e, temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta B & b, pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter se æquales & similiter applicatæ, quæ prioribus viribus additæ corpora deferant per arcus B C, b c. Jungans describentium errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum à figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. (x) Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. (y) Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè.



gantur rectæ E C, e c, quæ errores solâ virium perturbantium actione genitos exponent; Lineæ enim illæ sunt spatia solâ virium perturbantium actione descripta. Cum autem vires perturbantes supponantur æquales & similiter applicatæ, idem contingere debet ac si corpus aliquod eâdem vi acceleratrice sollicitatum spatia E C, e c, diversis temporibus describeret, adeoque spatia illa sunt, ipso motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (Lem. X) B C, b c, & quibus absque virium perturbantium actione percurrerentur arcus similes B E, b e; si igitur vires illæ perturbantes supponantur constantes, spatia E C, e c, non solùm motus initio, sed & tempore finito descripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè si admodum exigua sit virium perturbantium variatio, spatia seu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(x) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, seu viribus in datâ ratione existentibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. Nam si tempora sunt eadem, errores sunt in data ratione virium; si vires sunt eædem, errores sunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cum igitur vires & tempora variant, errores sunt in ratione compositâ ex datâ virium ratione & duplicatâ temporum.

(y) 120. Nam vires motus initio tanquam constantes haberi possunt (117); dupla autem spatia, adeóque simplicia spatia, quæ corpora urgentibus viribus constantibus describunt, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim (30); ergo spatia quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt, sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, sint G, g, spatia S, s, tempora T, t, erit S : s = G T T : g t t, ideoque G : g = S:TT : s:tt, & T T : tt = S:G : s:g, hoc est, vires sunt ut spatia motus initio descripta directè & quadrata temporum inversè; Temporum verò quadrata sunt ut descripta spatia directè & vires inversè.

121. Cir-

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè & vires inversè.

Scholium.

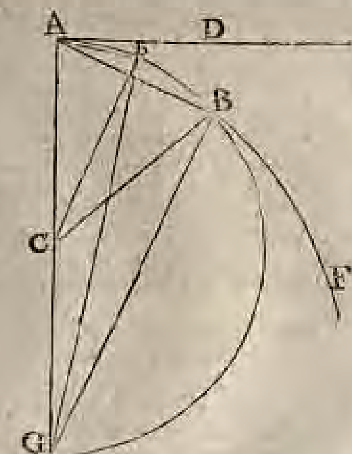
Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus est, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè aut inversè: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè & C directè & D inversè: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc est, quod A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus (z) curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicatâ subtensæ arcus contermini.

Cas.

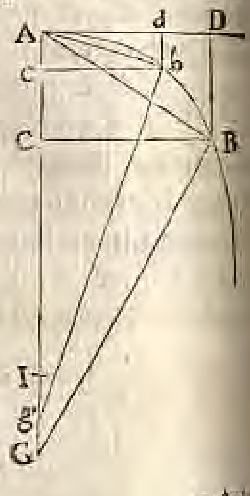
(z) 121. Circuli curvatura est in omnibus circumferentiæ punctis eadem, seu uniformis; in variis autem circulis eo major est, quo minor est circuli radius, adeò ut circuli curvatura sit semper in ratione inversâ radii. Aliarum linearum curvatura in singulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum arcu infinitesimo curvæ in puncto dato congruit, seu, quod idem est, qui curvam in puncto dato osculatur. Est igitur lineæ cujusvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto osculantis.

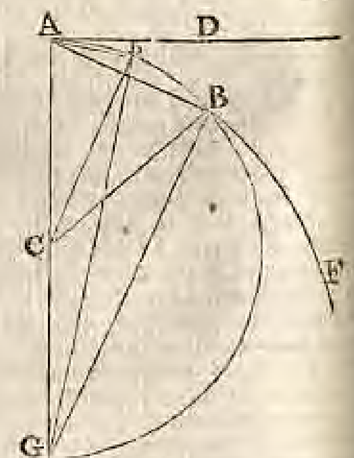


Sumantur duo curvæ A F, puncta A & B, ducanturque rectæ A C, B C, ad curvam perpendiculares, & ex puncto intersectionis C, tanquam centro, radiis C A, C B, duo describantur circuli, quorum unus radio C A, descriptus tanget curvam in A, alter autem radio C B, descriptus tanget eam in B. Si ad se mutuò accedant puncta A & B, donec arcus A B evanescat, duæ perpendiculares A C, B C, pro æqualibus usurpari poterunt (Lem. I),

con-

Caſ. 1. Sit arcus ille *A B*, tangens ejus *A D*, ſubtenſa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *B D*, ſubtenſa arcus *A B*. Huic ſubtenſæ *A B* & tangenti *A D* perpendiculares erigantur *A G*, *B G*, concurrentes in *G*; dein accedant puncta *D*, *B*, *G*, ad puncta *d*, *b*, *g*, ſitque *J* interſectio linearum *B G*, *A G* ultimo facta (a) ubi puncta *D*, *B* accedunt uſque ad *A*. Manifeſtum eſt quod diſtantia *G J* minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis. Eſt autem (ex natura circulorum per puncta *A B G*, *A b g* tranſeuntium) *A B quad.* æquale *A G* × *B D*, & *A b quad.* æquale *A g* × *b d*; ideoque ratio *A B quad.* ad *A b quad.* componitur ex rationibus *A G* ad *A g* & *B D* ad *b d*. Sed quoniam *G J* aſſumi poteſt minor longitudine quâvis aſſignatâ, fieri poteſt ut ratio *A G* ad *A g* minùs differat à ratione æqualitatis quam pro differentiâ quâvis





conjungentur duo puncta contactus A & B; duoque circuli tangentes abibunt in unum A B G, qui curvam oſculabitur in A, vel B, adeoque curvatura lineæ A F, in A, eſt in ratione inverſâ radii A C circuli oſculantis. Si ergo finitus ſit radius oſculi A C, finita quoque erit curvatura in A; ſi vero radius ſit infinitus, curvatura erit infiniteſima; ac tandem ſi radius ſit infiniteſimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva à tangente A D deflectit, quo circuli oſculantis radius A C minor eſt, & contra, patet angulum contactûs creſcere & decreſcere cum curvaturâ & in eâdem ratione inverſâ radii.

122. Ducantur chordæ A B, B G; angulus A B G, in ſemicirculo rectus eſt; ac proinde ſi in curvâ quâcumque curvaturam finitam in puncto aliquo A habente ducantur chordæ evaneſcentes A b, A B, ad eaſque agantur perpendiculares B G, b G, hæ lineæ convenient in puncto G, junctiſque punctis A & G, recta A G ad tangentem A d perpendicularis erit, & finitam habebit magnitudinem, ut pote quæ æqualis eſt duplo radio finito A C, circuli curvam oſculantis in A.

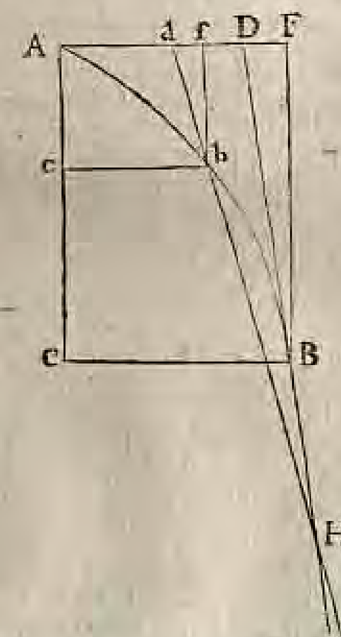
(a) 123. Ubi puncta D, B, accedunt uſque ad A, linea A J (122) eſt diameter circuli curvam A b B oſculantis

quâvis aſſignatâ, ideoque ut ratio *A B quad.* ad *A b quad.* minus differat à ratione *B D* ad *b d*, quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ. Eſt ergo, per lemma 1, ratio ultima *A B quad.* ad *A b quad.* eadem cum ratione ultimâ *B D* ad *b d*. *Q. E. D.*

Caſ. 2. (b) Inclinetur jam *B D* ad *A D* in angulo quovis dato, & eadem ſemper erit ratio ultima *B D* ad *b d*, quæ priùs, ideoque eadem ac *A B quad.* ad *A b quad.* *Q. E. D.*

Caſ. 3. (c) Et quamvis angulus *D* non detur, ſed recta *B D* ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege conſtituatur; tamen anguli *D d* communi lege conſtituti ad æqualitatem ſemper vergent & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis aſſignatâ, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1, & propterea lineæ *B D*, *b d* ſunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. *Q. E. D.*

Co-



in A, & quoniam accedente puncto B, ad A, accedit punctum G, ad J, atque evaneſcente arcu A B, evaneſcit quoque diſtantia G J, manifeſtum eſt quod diſtantia G J minor eſſe poteſt quam aſſignata quævis; quia verò anguli A b g, A B G, recti ſunt (per hyp.) circuli duo diametris A g, A G, deſcripti per puncta b, B, tranſeunt, adeóque horum circulorum chordæ A b, A B, ſunt mediæ proportionales inter ſuas reſpectivè abſciſſas A c, A C, ſeu æquales d b, D B, & diametros A g, A G, ac proinde $AB^2 = AG \times BD$ & $Ab^2 = Ag \times bd$ &c.

(b) 124. Inclinentur jam B D, b d, ad A D, in angulo quovis dato B D F, b d f, eadem ſemper erit ratio ultima B D, ad, b d, quæ priùs. Ductis enim B F, b f, ad A C, parallelis, erit ob triangula æquiangula B F D, b f d, $BD : bd = BF : bf$; ſed (123) $BF : bf = AB^2 : Ab^2$; eſt igitur $BD : bd = AB^2 : Ab^2$.

(c) 125. Et quamvis angulus D, non detur, ſed rectæ, D B, d b, ad datum punctum H, convergant, vel aliâ quâcumque communi lege conſtituantur, tamen anguli D d, communi lege conſtituti (punctis b & B ad A & ad ſe mutuò accedentibus) ad æqualitatem ſemper vergent, & evaneſcente arcu B b, adeóque coincidentibus lineis H D, H d, propiùs accedent ad invicem quam pro differentiâ quâvis aſſignatâ ac proinde ultimò æquales erunt (per Lem. I), & propterea lineæ B D, b d, ſunt ultimò parallelæ & in eâdem ratione ad invicem ac priùs (124).

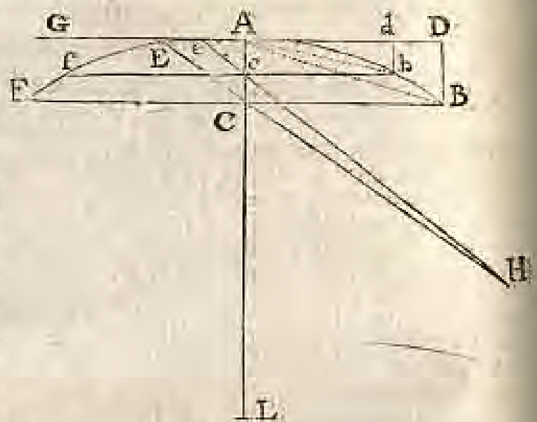
126.

Corol. 1. Unde cum tangentes *A D*, *A d*, arcus *A B*, *A b*, & eorum ſinus *B C*, *b c* fiant ultimo chordis *A B*, *A b* æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut ſubtenſæ *B D*, *b d*.

Corol. 2. (d) Eorundem quadrata ſunt etiam ultimo ut ſunt arcuum ſagittæ, quæ chordas biſecant & ad datum punctum convergunt. Nam ſagittæ illæ ſunt ut ſubtenſæ *B D*, *b d*.

Corol. 3. (e) Ideoque ſagitta eſt in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate deſcribit arcum.

Corol. 4. (f) Triangula rectilinea *A D B*, *A d b* ſunt ultimo in triplicatâ ratione laterum *A D*, *A d*, inque ſeſquiplicatâ



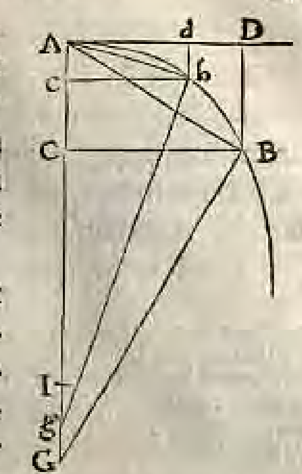
(d) 126. Sit F A B, arcus circuli, curvam datam oſculantis in A, tangens A D, radius oſculi A L, chordæ F B, f b, ad radium A L, & rectæ B D, b d, ad tangentem A D, normales, per puncta C c, ſemper ducantur lineæ E C, e c, ad datum punctum H, convergentes, evaneſcente arcu A B, rectæ D B, d b, & ipſis æquales ſagittæ A C, A c, ſunt ut tangentium A D, A d, arcuum A B, A b, & chordarum A B, A b, quadrata (coroll 1.) adeóque ut duplorum arcuum F A B, f A b, & chordarum f b, F B, iis arcubus evaneſcentibus (Lem. 7.) congruentium, atque etiam tangentium quadrata. Jam ubi punctum C, uſque ad A, accedit, chorda evaneſcens A E, cum tangente A G, coincidit (Lem. 6.) & coeuntibus quoque lineis E H, e H, triangula C E A, c e A, ſunt ſimilia, ac proinde E C eſt ad e c, ut A C, ad A c, hoc eſt ut arcuum evaneſcentium F A B, f A b, chordarum F B, f b, & tangentium quadrata.

(e) 127. Ideóque ſagittæ A C, A c, vel E C, e c, ſunt in duplicatâ ratione temporum quibus corpus datâ velocitate percurrit arcus evaneſcentes F A B, f A b, vel dimidios A B, A b; ſpatia enim datâ velocitate percurſa ſunt ut tempora (5), adeóque pro temporibus ſubſtitui poſſunt arcus F A B, f A b, ſed ſagittæ ſunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (126), ergò & temporum.

(f) 128. Triangula rectilinea A B D, A b d, ſunt ultimò in triplicatâ ratione laterum A D, A d, inque ſeſquiplicatâ laterum B D, b d; ductis enim B F, b f, ad tangentem A B, perpendicularibus, erit ob triangulorum B D F, b d f, ſimilitudinem B D : b d = B F : b f, & propterea areæ triangulorum A B D, A b d, ſunt in ratione compoſitâ laterum A D, ad A d, & B D, ad b d; ſed (124. 125. cor. 1.) B D : b d = A D² : A d², adeóque $\sqrt{BD} : \sqrt{bd}$ = A D : A d; ergò triangula A B D, A b d, ſunt in ratione compoſitâ A D, ad A d, & A D², ad A d², hoc eſt, in ratione triplicatâ laterum A D, A d; ſunt etiam in ratione compoſitâ B D, ad b d, & $\sqrt{BD}$, ad $\sqrt{bd}$, hoc eſt, in ratione B D × $\sqrt{BD}$ ad b d × $\sqrt{bd}$.

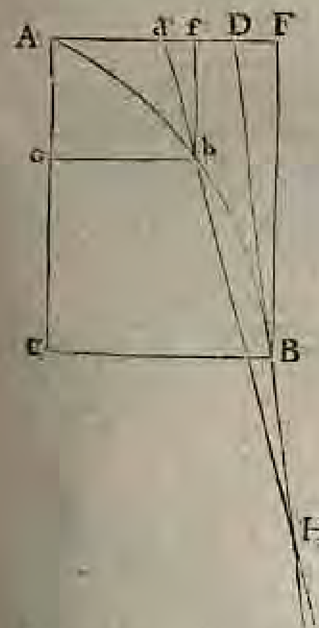
125.

catâ laterum *D B*, *d b*; utpote in compoſitâ ratione laterum *A D* & *D B*, *A d* & *d b* exiſtentia. Sic & triangula *A B C*, *A b c* ſunt ultimo in triplicatâ ratione laterum *B C*, *b c*. Rationem verò ſeſquiplicatam voco triplicatæ ſubduplicatam, quæ nempè ex ſimplici & ſubduplicatâ componitur.



Corol. 5. Et quoniam *D B*, *d b* ſunt ultimo parallelæ & in duplicatâ ratione ipſarum *A D*, *A d*: erunt areæ ultimæ curvilineæ *A D B*, *A d b* ([g] ex naturâ parabolæ) (h) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum *A D B*, *A d b*; & ſegmenta *A B*, *A b* partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc ſegmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium *A D*, *A d*; tum chordarum & arcuum *A B*, *A b*.

Scho-



(g) 129. Arcus evaneſcens A B, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs A, habentibus, pro arcu parabolæ uſurpari poteſt. Ductâ enim A C, lineis B F, b f, parallelâ, completiſque parallelogrammis A B, A b, erunt, ex demonſtratis, rectæ F B, f b, & ipſis æquales abſciſſæ A C, A c, ut ordinatarum C B, c b, quadrata, quæ eſt notiſſima parabolæ proprietas.

130. Quare arcus evaneſcens ſpectari poteſt tanquam arcus parabolæ cujus latus rectum eſt æquale diametro circuli oſculantis. Nam in arcu circulari A B, (vid. fig. textûs) ordinata C B, ad diametrum perpendicularis, eſt media proportionalis inter abſciſſam A C, & reliquam diametri partem, ſeu totam diametrum, cum A C, evaneſcit (Lem. 1.), adeóque quadratum ordinatæ C B, æquale eſt rectangulo ex abſciſſâ evaneſcente A C, & diametro circuli, quæ eſt proprietas parabolæ cujus latus rectum æquale eſt prædictæ diametro.

(h) 131. Parabolæ ſegmentum A b B, eſt tertia pars trianguli rectilinei A C B, vel æqualis A D B, adeóque area curvilinea A D B b A, æqualis eſt duabus tertiis partibus ejuſdem trianguli rectilinei A D B. Vid. Gregor. à S. Vincentio cor. 1. Prop. 232. Lib. V. quadraturæ circuli, aut Archimed. Prop. 17. quadrat. Parabolæ.

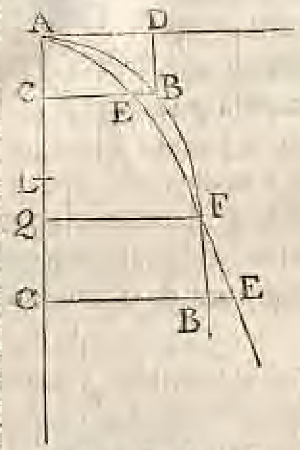
 132.

DE MOTU CORPORUM.

Scholium.

Cæterum in his omnibus ſupponimus angulum contactus nec infinitè majorem eſſe angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus ſuis, nec iiſdem infinitè minorem; hoc eſt, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam eſſe, nec infinitè magnam, ſeu intervallum AJ finitæ eſſe magnitudinis. (i) Capi enim poteſt DB ut AD^3: quo in caſu circulus

(i) 132. Sit parabolæ Apollonianæ A E F, axis A C, vertex A, tangens in vertice A D, ordinata C E, latus rectum A L, circulus diametro A L, deſcriptus parabolam oſculatur in A, (130.) eundemque ac parabola contactûs angulum efficit in A. Ad eundem axem A C, & verticem A, deſcribatur ſuperioris generis parabola cujus ordinatæ C B ſint ſemper in ſubtriplicatâ abſciſſarum A C, vel parallelarum & æqualium D B, ratione; & erit angulus contactûs B A D, angulo contactûs E A D, infinitè minor...... Dem... Parabolæ A F E, latus rectum A L, dicatur A; parabolæ A B B, latus rectum ſit B, & erit ex harum curvarum naturâ $A \times AC = CE^2$ & $B^2 \times AC = CB^3$; adeóque $AC = CE^2 : A = CB^3 : B^2$, undè reperitur $CB^3 = CE^2 \times B^2 : A$, & CB ad $B^2 : A = CE^2$ ad CB^2 ergo cum erit $CB = B^2 : A$, tunc erit $CE^2 = CB^2$, atque adeò parabolæ A E E, A B B, ordinatam habebunt communem quæ dicatur Q F, & ſeſe interſecabunt in puncto F; jam verò ſi fuerit C B minor quam $B^2 : A$, erit quoque CE^2 minor quàm CB^2, adeóque C E minor quàm C B; ſed omnes ordinatæ inter verticem A, & ordinatam communem Q F, (quæ eſt $= B^2 : A$) minores ſunt eâ, ergo omnes C E inter A & F comprehenſæ ſunt minores ordinatis correſpondentibus C B; tota igitur parabolæ Appollonianæ portio A E F, quâ ordinatæ C E terminantur, cadit intra portionem A B F, alterius parabolæ, ac proinde angulus contactûs B A D, ſemper minor eſt angulo contactûs E A D, cum ergò angulus E A D, aucto in infinitum latere recto A L, poſſit ſine fine minui, manifeſtum eſt angulum contactûs B A D, quovis angulo dato E A D, infinitè minorem eſſe. Q. e. D.



133. Ad eundem axem A C, & verticem A, ſucceſſivè deſcribantur curvæ A E E, ejus naturæ, ut abſciſſarum A C, & ordinatarum C E, relatio exprimatur æquatione generali $A^m\, AC = CE^{m+1}$. Si loco exponentis, m, ſucceſſive ponantur in æquatione numeri quilibet poſitivi, integri vel fracti continuò creſcentes vel decreſcentes, obtinebuntur infinitæ ſeries diverſæ angulorum contactuum, quorum quilibet eſt infinitè minor priore, dum numerus, m, ſemper creſcit, & infinitè major dum numerus, m, ſemper decreſcit... Dem... Numerus, m, augeatur numero poſitivo, n, integro vel fracto, & deſcribatur curva A B B, cujus æquatio ſit $B^{m+n} \times AC = CB^{m+n+1}$. Ex hac æquatione & ſuperiori $A^m\, AC = CE^{m+1}$, reperitur $AC = CB^{m+n+1} : B^{m+n} = CE^{m+1} : A^m$, adeóque $CB^{m+n+1} = CE^{m+1} \times B^{m+n} : A^m$ atque CB ad $B^{m+n} : A^m = CE^{m+1}$ ad CB^{m+1}; ſit $CB^n = B^{m+n} : A^m$, & erit $CB^{m+1} = CE^{m+1}$, adeóque $CB = CE = QF$. Quarè cum inter verticem A, & communem ordinatam Q F, omnes ordinatæ ſint minores ipsâ Q F, patet ut ſuprà (132). totam portionem A E F, curvæ A E E, cadere intra portionem A B F, alterius curvæ A B B, ac proinde angulum contactûs B A D, quovis dato angulo contactûs E A D infinitè minorem eſſe, & reciprocè angulum E A D, eſſe angulo B A D infinitè majorem. Q. e. D.

LIBER PRIMUS.

nullus per punctum A inter tangentem AD & curvam AB duci poteſt, proindeque angulus contactus erit infinitè minor circularibus. (k) Et ſimili argumento ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur ſeries angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Et ſi fiat DB ſucceſſivè ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia ſeries infinita angulorum contactus, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus, ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infinitè major priore. Sed & inter duos quoſvis ex his angulis poteſt ſeries utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inſeri, quorum quilibet poſterior erit infinitè major minorve priore. Ut ſi inter terminos AD^2, & AD^3, inſeratur ſeries $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rurſus inter binos quoſvis angulos hujus ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

(l) Quæ de curvis lineis deque ſuperficiebus comprehenſis demonſtrata ſunt, facilè applicantur ad ſolidorum ſuperficies cur-

(k) 134. In æquatione $A^m \times AC = CE^{m+1}$, loco exponentis m, ſucceſſive ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5 &c., & erit A C ſucceſſive, ut CE^2, CE^3, CE^4, CE^5 &c., & habebitur (133) ſeries angulorum contactûs pergens in infinitum quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore. Loco m ſubſtituantur ſucceſſive numeri decreſcentes, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. erit A C, ſucceſſive ut CE^2, $CE^{\frac{3}{2}}$, $CE^{\frac{4}{3}}$, $CE^{\frac{5}{4}}$, &c., & habebitur alia ſeries infinita angulorum contactûs, quorum primus eſt ejuſdem generis cum circularibus (132), ſecundus infinitè major, & quilibet poſterior infinitè major priore (133). Loco m ſubſtituantur numeri 1, $1+\frac{1}{6}$, $1+\frac{1}{5}$, $1+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{3}{4}$, $1+\frac{4}{5}$, $1+\frac{5}{6}$ &c., erit A C, ſucceſſive ut CE^2, $CE^{\frac{13}{6}}$, $CE^{\frac{11}{5}}$, $CE^{\frac{9}{4}}$ &c., & habebitur ſeries infinita angulorum contactûs, quorum quilibet poſterior eſt infinitè minor priore (133), & inter binos quoſvis angulos hujus alteriuſve ſeriei inſeri poteſt ſeries nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea ſeries inveniatur, ſufficit inter duos numeros datos, v. G. 1, $1+\frac{1}{6}$, ſeriem invenire numerorum creſcentium vel decreſcentium, quorum quilibet major ſit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum eſt.

(l) 135. Id exemplo facili illuſtrare ſatis erit. Pyramidis & coni ſit idem vertex eademque altitudo, & baſis pyramidis ſit polygonum inſcriptum circulo qui baſis eſt coni, numerus laterum polygoni augeatur, & eorum longitudo minuatur in infi-

DE MOTU CORPORUM.

curvas & contenta. (^{m}) Præmisi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minus geometrica censetur; (^{n}) malui demonstra-

infinitum, & polygoni ac circuli ultima ratio (Lem. 7.) erit ratio æqualitatis, ac proindè ultima ratio pyramidis illiusque superficiei ad conum & illius superficiem curvam erit quoque ratio æqualitatis; undè curva superficies coni æqualis est summæ ultimæ triangulorum evanescentium, quorum communis vertex est vertex coni, bases verò latera evanescentia polygoni circulo inscripti.

(^{m}) 136. Quam magnos progressus geometria fecerit hinc cognoscere licet. Veteres geometræ in iis quæstionibus quæ infiniti considerationem involvunt, suas demonstrationes ad absurdum revocabant & ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ut inter duas quantitates quæ ad æqualitatem constanter vergunt, & tandem propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ rationem æqualitatis intercedere demonstrarent, priùs supponebant inter eas quantitates esse vel majoris vel minoris inæqualitatis rationem, deindè utrumque falsum demonstrabant, & ex hâc reductione quam ad absurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem esse concludebant. Quam autem perplexus sit & tædiosus hic demonstrandi modus nemo non videt. Verùm licet imperfecta admodùm fuerit veterum geometria, non iis tamen omninò ignota fuerunt methodi infinitesimalis principia. Quantitates infinitè parvas seu evanescentes pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus tanquam axioma posuerunt Euclides & Archimedes; in exemplum afferemus unicum vulgaris Geometriæ theorema. Ut demonstrarent circulos esse inter se ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inscripta esse vel circumscripta polygona similia quorum latera numero augerentur & longitudine minuerentur in infinitum, ità ut polygonorum inscriptorum vel circumscriptorum à circulo differentia foret quâvis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygona sunt ut quadrata diametrorum circulorum quibus inscribuntur vel circumscribuntur, circulos pariter esse ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines supponit illud idem theorema licet non adverterent veteres. Nam considerabant polygona circulis inscripta tanquam composita ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus; manifestum autem est differentiam polygoni inscripti à circulo quâvis datâ minorem componi ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus circuli segmentis quorum latera polygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta sunt minimæ quantitates illæ quas secundi ordinis infinitesimas dicunt Recentiores. Hic pedem fixerant veteres, primusque longiùs progredi ausus est celeberrimus Geometra Bonaventura Cavalerius qui anno 1635. indivisibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum posuit suæ methodi decretum, lineas nempè ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, & solida ex infinitis superficiebus; Deindè indivisibilia ista elementa totamque eorum summam comparat in unâ magnitudine cum singulis elementis eorumque summâ in aliâ magnitudine, & sic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indivisibilium hypothesis durior minùsque geometrica Newtono visa est.

(^{n}) 137. Newtonus ut indirectas & perplexas vitaret veterum demonstrationes, earum tamen certitudinem & evidentiam conservaret, veterum principium Lemmate primo generaliter expressit, illudque in Lemmatis sequentibus ad curvas generatim applicavit, & indè directas perbrevesque

LIBER PRIMUS.

tiones rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites (^{o}) summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutiùs utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium (^{p}) determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (^{q}) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per velo-

vesque demonstrationes in toto operis decursu deduxit. Ut autem methodi indivisibilium brevitatem assequeretur, tutiùs tamen & accuratiùs procederet, loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit, & quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat, supponit nimirum lineas describi ac describendo generari non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, & solida per motum superficierum, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum & sic in cæteris.

(^{o}) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, & eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum summa (Lem. 2.), nunquam poterit esse major areâ curvilineâ, sed hæc area est terminus ad quem parallelogrammorum decrescentium summa semper accedit & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evanescunt aut nascuntur. Idem dicendum de evanescentibus curvarum chordis respectu perimetri curvilineæ.

(^{p}) 139. Quantitates evanescentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam & definitam parvitatem obtineant. Quascumque enim portiunculas linearum, superficierum aut corporum acceperimus aut designaverimus, hæ semper reipsâ finitæ erunt, non evanescentes; itaque non sunt intrà certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, undè hæ quantitates semper ut decrescentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(^{q}) 140. Exempli causâ, gravis sursùm projecti & ad altissimum locum pervenientis.

DE MOTU CORPORUM.

velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum & quâcum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quâcum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quâcum nascuntur. Et summa prima & ultima est quâcum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitimè usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum (r) ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro datâ qua-

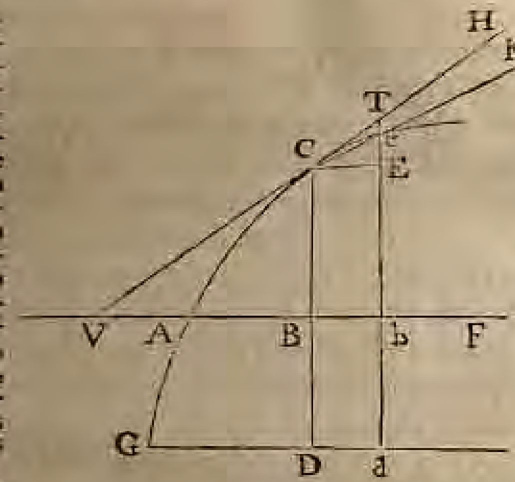
(r) 141. Seu, quantitatum determinatarum & indivisibilium, sed &c.

142. Ut quantitatum evanescentium aut nascentium relationes atque proprietates inveniantur, considerantur quantitates finitæ, harum investigantur relationes & proprietates & lex quâ continuò crescunt vel decrescunt; quibus cognitis facilè intelligitur quænam proprietates quantitatibus illis crescentibus ac decrescentibus semper conveniant, adeóque & cum in infinitum minuuntur & evanescunt vel cum nascuntur. Imò verò ex Lemmate primo aliisque sequentibus invenitur quænam sint proprietates quæ licet quantitatibus finitis non conveniant, evanescentibus tamen & nascentibus competunt, cum nempè quantitates finitæ decrescentes ad illas proprietates, ut ità dicam perpetuò accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quam pro differentiâ quâvis datâ.

Ex præcedentibus Lemmatis facilè deducitur ac demonstratur Newtoniana fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in posterum profutura breviter explicabimus.

LIBER PRIMUS.

quâvis differentiâ, nunquam verò transgredi, neque priùs attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideò dabuntur quan-



143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò crescunt vel decrescunt, variabiles aut fluentes dicuntur; constantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò crescentibus vel decrescentibus, eædem manent. Ordinatæ B C, B D, super basi A F, motu sibi semper parallelo ità progrediantur, ut ordinatâ B D, eâdem semper manente, punctum D, rectam G D d describat, & interim continuò crescente vel decrescente ordinatâ B C, punctum C describat curvam A C c; abscissa A B, ordinata B C, curvæ arcus A c, areæ A C B, A G D B, sunt quantitates indeterminatæ seu fluentes; recta verò B D, est quantitas constans.

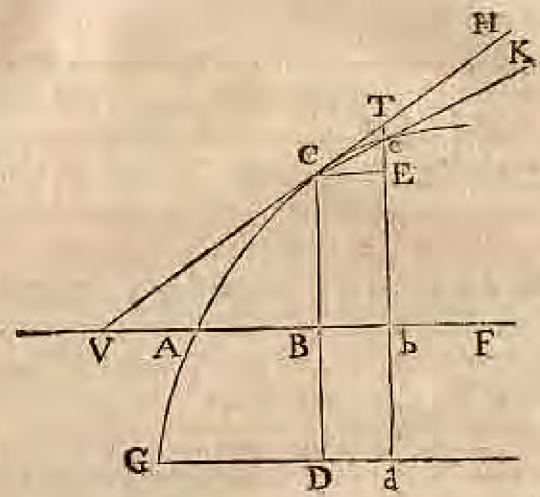
144. Quantitates fluentes, ut A B, B C, æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt, ac generantur, evadunt majores vel minores; Si enim punctum B, velociùs semper progrediatur quam punctum C, in lineâ B C, incrementa B b, fluentis A B, majora erunt incrementis E c, fluentis B C, eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut B b, E c, eodem tempore genita, primò nascuntur, dum nempe b c, coincidit cum B C, dicuntur *fluxiones*, & methodus ex fluentibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur, methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, methodus fluxionum inversa appellatur.

145. Velocitates quibus fluentium quantitatum incrementa eodem tempore genita, primò nascuntur, sunt uniformes... Dem... Cum curva A C c, motu puncti C, velocitate quâvis finitâ progredientis describi possit, si illius puncti velocitas secundùm directionem C E, lineæ A B parallelam, supponatur uniformis, velocitas ejusdem secundùm directionem E c, pro variâ curvæ A C c naturâ, varia quidem erit in diversis curvæ punctis v. gr. in C, & c; sed quò magis punctum c, ad C, accedet, eò minor erit velocitatis secundùm directionem E c, variatio in punctis C, & c, adeò ut dum punctum c, coincidit cum puncto C, omnis velocitatis per E c, variatio expiret. Quare (Lem. 1.) velocitates quibus fluentium incrementa eodem tempore genita primò nascuntur, sunt uniformes. Q. e. D.

146. Cum ergò velocitates uniformes sint spatiis eodem tempore percurrendis proportionales (5), manifestum est fluxiones (143) esse in ratione incrementorum eodem tempore genitorum, dum primò nascuntur vel ultimò evanescunt; adeóque ut fluxionum relatio inveniatur sumere oportet incrementa fluentium eodem tempore genita, & primam eorum incre-

meaquantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In sequentibus igitur, si quando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quàm minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

SEC



mentorum nascentium, vel ultimam evanescentium rationem considerare tanquam relationem fluxionum.

147. Hinc summa fluxionum est ut summa incrementorum nascentium vel evanescentium; summa verò incrementorum omnium nascentium est ipsa quantitas fluens; nam si tota area A c b divisa intelligatur in parallelogramma ut B E, eorumque numerus augeatur & latitudo B b minuatur in infinitum, summa omnium incrementorum nascentium B b, ab A usque ad b, erit ipsa fluens A b, summa omnium incrementorum E c, ab A, usque ad c, erit fluens b c, summa omnium C c, erit arcus fluens A c, & summa omnium parallelogrammorum B E, erit area A c b fluens (106. 107.); ergò summa fluxionum est ut ipsa quantitas fluens.

148. Quoniam in figurâ superiori fluxio aliqua, vel abscissæ A B, vel ordinatæ C B, aut arcûs A C, ad arbitrium tanquam uniformis spectari possit, (Ex dif. 145.) patet ex pluribus fluxionibus unam tanquam constantem posse considerari & quantitate finitâ constanti exponi, dum aliæ fluxiones variâ ratione mutari & quantitatibus variabilibus exponi possunt.

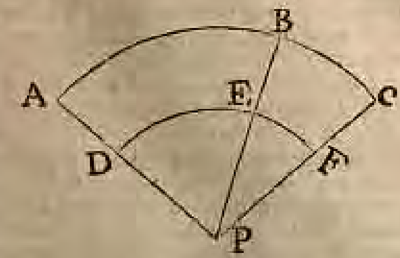
149. Quare cum quantitates variabiles suas habeant fluxiones quæ rursus possunt esse variabiles, liquet dari fluxiones fluxionum, seu varios imò infinitos fluxionum ordines. Fluentium finitarum fluxiones dicuntur fluxiones primæ; harum fluxiones primæ dicuntur fluentium finitarum fluxiones secundæ, & ità porrò in infinitum.

150. Ductâ rectâ V T H, quæ curvam tangat in C, ipsisque b c & B A productis occurrat in T & V, linea b c in locum suum priorem B C redeat, & ultima forma triangulorum evanescentium C E c, C E c, C E T, est similitudinis & ultima ratio æqualitatis (Lem. VIII.) ideóque fluxiones primæ ipsarum A B, B C, A C. sunt (146.) ut trianguli C E T, latera C E, E T, & C T, & per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est, per latera V B, C B, & V C, trianguli V B C, similis triangulo C E T.

151. Quoniam areæ B b c C, B b d D, eodem tempore describuntur communi ordinatarum B C, B D motu, erunt areæ illæ nascentes vel evanescentes ut fluxiones arearum A C B, A B D G, (146); sed area nascens B b c C, non differt à parallelogrammo B E, (107); ergò fluxiones arearum A C B, A B D G, sunt in ratione primâ parallelogrammorum B E, B d nascentium, seu ob commune latus B b, in ratione ordinatarum C B, B d.

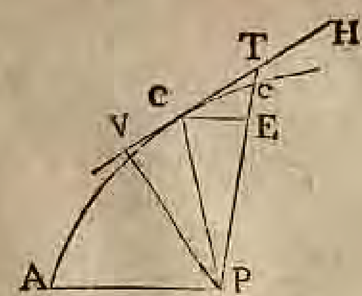
152. Si circulus centro B, radio fluente B C, descriptus per longitudinem abscissæ A B, ad angulos rectos progrediatur, describet solidum idem quod ex rotatione figuræ A C B, circà axem A B generaretur, & fluxio solidi geniti erit ut factum ex areâ circuli illius in incrementum nascens B b, abscissæ A B, & fluxio superficiei solidi geniti erit ut factum ex perimetro ejusdem circuli in arcum C c, vel tangentem C T, nascentem... Dem.... Rectangulum nascens B E, non differt à figurâ B b c C nascente (107), adeóque incrementum nascens solidi ex rotatione figuræ A C B, geniti æquale est solido ex rotatione rectanguli B E, circà latus B b, genito; hoc autem solidum est cylindrus æqualis facto ex areâ circuli radio C B descripti in altitudinem B b; solidi igitur motu circuli C B per axem A B geniti incrementum nascens adeóque & ipsius fluxio (146) est ut factum ex areâ circuli in incrementum nascens B b, abscissæ A B. Similiter cum arcus nascens C c, cum tangente C T coincidat, (Lem. 7.) superficies nascens ex rotatione figuræ B b c C, genita æqualis est superficiei coni truncati, adeóque æqualis facto ex semisummâ peripheriarum, quarum sunt radii B C, b c, in latus C T, seu ob b c = B C (107) æqualis facto ex peripheriâ circuli, cujus radius B C, in latus C T, vel arcum C c, nascentem; ergò factum istud est incrementum nascens superficiei curvæ ex rotatione A C descriptæ, adeóque est ut illius superficiei fluxio (146) Q. e. D.

153. Anguli rectilinei A P B, E P F, sunt inter se directè ut arcus A B, E F,



qui angulos subtendunt & reciprocè ut arcuum radii A P, E P... Dem... est angulus A P B, ad angulum B P C, seu E P F, ut arcus A B, ad arcum B C, adeóque ut A B : A P, ad B C : A P; sed ob arcus similes B C, E F, est B C : A P = E F : E P; ergò angulus A P B, est ad angulum E P F, ut A B : A P, ad E F : E P. Q. e. D.

154. Hinc sequitur 1°. quemlibet angulum A P B exprimi posse arcu A B qui ipsum subtendit diviso per radium A P. 2°. Quemlibet arcum circuli A B, esse ut factum ex angulo A P B in radium A P, atque adeò hoc facto exprimi posse. 3°. Incrementum nascens anguli fluentis A P B, adeóque & illius anguli fluxionem (146) esse in ratione directâ arcûs circularis nascentis & inversâ radii illius.

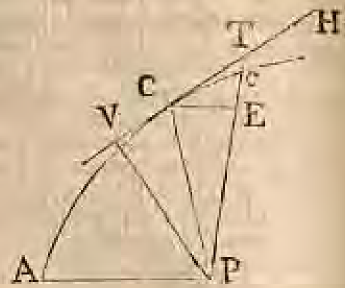


155. Recta P C fluens circà datum polum P revolvatur, & punctum illius extremum C, curvam A C c, describat quam tangit in C recta V C H in quam ex polo P, demissa sit perpendicularis P V. Sit A punctum in curvâ A C c fixum, progrediaturque recta P C de lo-

co

DE MOTU CORPORUM.

co suo P C, in locum novum P c, & producta P c, tangentem secet in T. Capiatur P E = P C, & producta P c, tangentem secet in T. Capiatur P E = P C, seu radio P C describatur circuli arcus C E, ut habeantur E c, incrementum rectæ P C, C c, incrementum curvæ A c, P C c, incrementum areæ P A C P, angulus C P c, incrementum anguli A P C, eodem tempore genita. Redeat jam P C, in locum suum priorem P C, ut incrementa illa omnia evanescant & horum incrementorum evanescentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatum fluentium quarum sunt incrementa (145).



156. Quoniam autem perveniente P c, in locum P C, triangula C E c, C E T, evanescentia sunt ultimò similia & æqualia (Lem. 8.) circuli arcus C E, cum chordâ ipsius coincidit, ipsique æqualis est (Lem. 7), & præterea evanescente angulo C P E, anguli P C E, P E C, sunt inter se & duobus rectis æquales, adeóque C E, ad P T, normalis. Manifestum est ..... 1°. Triangulum T V P esse triangulo T E C, adeóque & triangulo evanescenti c E C, simile, ac proinde fluxiones arcûs A C, & rectæ P C, esse inter se ut duo latera V T, T P, seu V C, P C ... 2°. Fluxionem anguli A P C, esse ut C E : P C (154) ... 3°. Fluxionem areæ A C P, esse ut factum ex rectâ C P, in normalem C E evanescentem; nam area trianguli P C T, æqualis dimidio rectangulo P T × C E, seu ob evanescentem E T, dimidio rectangulo P C × C E (Lem. 1.).

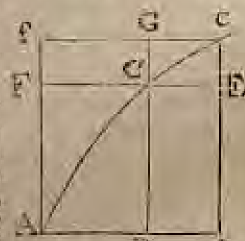
157. Similibus argumentis ex fluentibus calculo expressis fluxiones inveniri possunt, in quantitatibus finitis analysim instituendo, & finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas, investigando. Hæc autem sunt calculi fluxionum principia. Nimirùm ... 1°. Cum fluxiones sint in primâ ratione incrementorum nascentium & ultimâ evanescentium (146), fluxiones iis incrementis primò nascentibus vel ultimò evanescentibus possunt exprimi ... 2°. ... Quantitates quæ nonnisi suo incremento nascente aut evanescente differunt sunt æquales (Lem. 1.) ... 3°. ... Quantitatum constantium nullæ sunt fluxiones, nulla incrementa vel decrementa. ... 4°. Si inter quantitates indeterminatas, aliquæ decrescant, dum aliæ crescunt, decrescentium fluxiones sunt negativæ, sunt enim ut incrementa negativa, seu ut decrementa.

158. Quantitates fluentes designantur ultimis alphabeti litteris z, y, x, v; constantes indicantur aliis a, b, c &c. fluentium fluxiones primas aut ipsis proportionalia incrementa nascentia vel evanescentia Newtonus notat iisdem litteris quibus fluentes exponuntur, sed iis punctuatis sic $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{v}$; Leibnitius litteram d, incrementi nascentis vel evanescentis notam characteristicam fluentibus præponit sic dz, dy, dx, dv. Fluxiones secundæ designantur sic $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{v}$, vel sic ddz, ddy, ddx, ddv; fluxiones tertiæ sic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{v}$, vel sic $dddz$, $dddy$, $dddx$, $dddv$, vel sic d^3z, d^3y, d^3x, d^3v, & ità deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis per additionem vel subtractionem compositæ, æqualis est omnibus singulorum terminorum fluxionibus per eadem signa + vel − junctis; ità fluxio quantitatis compositæ $a + z - y$, erit $dz - dy$ ... Dem ... Totius quantitatis $a + z - y$ incrementum tempore dato genitum æquale est differentiæ incrementorum ipsarum z & y, cum nullum sit constantis a, incrementum (156) adeóque incrementum nascens vel evanescens quantitatis $a + z - y$ æquale est differentiæ incrementorum nascentium vel evanescentium ipsarum z & y, sed fluxiones sunt in primâ ratione incrementorum nascentium (145), ergò fluxio totius quantitatis $a + z - y$, est $dz - dy$. Q. e. D. Si crescente quantitate z, decresceret y, ipsius y, fluxio foret negativa nempe $-dy$ (157) adeóque fluxio $dz - dy$, fieret $dz + dy$. Quod in sequentibus semper est observandum.

LIBER PRIMUS.

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus variabilibus per multiplicationem compositæ, æqualis est summæ factorum ex singularum variabilium componentium fluxionibus in aliarum variabilium facta ductis, hoc est fluxio quantitatis zy, est $zdy + ydz$, fluxio quantitatis az est adz, fluxio quantitatis zyx est $yxdz + zxdy + zydx$ ... Dem ... Recta C B, fluens super rectâ A B cui normalis est, progrediatur, illiusque punctum extremum C, describat curvam A C c, perveniat B C in locum b c, & compleantur rectangula B F, b f, B E, c f, E G; A B, dicatur z, B C dicatur y, adeóque rectangulum B F erit zy. Dum B C, pervenit in b c, incrementum rectanguli B F seu zy, æquale est summæ rectangulorum B E, E G, C f, est autem rectangulum E G, ad rectangulum E B, ut E c ad B C, & ad rectangulum C f ut C E, vel B b, ad F C, seu A B; quare redeunte b c, in locum suum priorem B C, & decrescentibus continuò E c, & E C atque tandem ultimò evanescentibus, decrescit quoque & tandem evanescit, seu fit inassignabilis ratio rectanguli E G, ad rectangula E B & c f; adeóque (Lem. 1.) summa duorum rectangulorum B E, c f, fit ultimò æqualis summæ trium rectangulorum B E, E G, C f; ergò incrementum nascens rectanguli B F, seu zy, æquale est summæ duorum rectangulorum B E, C f, nascentium; seu summæ factorum ex z, in incrementum nascens ipsius y, & ex y, in incrementum nascens ipsius z, adeóque fluxio facti zy (146) est $zdy + ydz$. Unde etiam fluxio az, est adz, quia a, constans nullam habet fluxionem. Q. e. D.



Jam in facto zyx ponatur $zy = v$, & erit $zyx = vx$, adeóque fluxio facti zyx æqualis fluxioni facti vx; fluxio autem facti vx, est $xdv + vdx$, & fluxio facti $zy = v$, est $zdy + ydz = dv$, id est si in fluxione $xdv + vdx$, pro v & dv scribantur zy, & $zdy + ydz$, fluxio facti zyx, nempe $xdv + vdx$, erit $xzdy + yxdz + zydx$; & par est ratio aliorum factorum quorumcumque Q. e. D.

161. Cor. 1 ... Ponantur singulæ fluentes z, y, x, &c. sibi mutuò semper æquales & ipsius zz, fluxio erit $zdz + zdz = 2zdz$: fluxio cubi z^3 erit $zzdz + zzdz = 3zzdz = 3z^{3-1}dz$: fluxio potentiæ z^4 erit $4z^3dz = 4z^{4-1}dz$: & eodem argumento fluxio potentiæ cujuscumque z^m erit $mz^{m-1}dz$.

162. Cor. 2 .... Fluxio quantitatis $z^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}-1}dz = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$ nam ponatur $z^{\frac{1}{2}} = y$ & erit $z = yy$, $dz = 2ydy$ (161) $dy = d.(z^{\frac{1}{2}}) = dz : 2y = dz : 2z^{\frac{1}{2}}$ & generaliter fluxio quantitatis $z^{m:n}$ est $\frac{m}{n}z^{\frac{m}{n}-1}dz = \frac{m}{n}z^{\overline{m-n}:n}dz$.

163. Cor. 3 ... Fluxio fractionis $z : y$ seu zy^{-1} est $\overline{ydz - zdy} : yy$. Nam fiat $z : y = x$, erit $z = yx$, $dz = ydx + xdy$ & $dx = \overline{dz : y - xdy} : y = dz : y - zdy : yy = \overline{ydz - zdy} : yy$: fluxio quantitatis $az^m y^n$ est $amy^n z^{m-1}dz + anz^m y^{n-1}dy$ (160).

164. Fluxiones secundæ ex primis fluxionibus, tertiæ ex secundis, iisdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis eruuntur. Ubi tamen sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, & pro ejus fluxione primâ unitatem scribere, pro secundâ verò & sequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; sit quærenda fluxio fluxionis $ydy : dx$, supponendo quantitatem x uniformiter fluere, adeóque dx constantem seu $= 1$, invenitur fluxio $yddy + dy^2 : dx$.

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur operationes instituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quarè, litterâ S, significante fluentem fluxionis cui præponitur seu summam primam incrementorum nascentium; vel ultimam evanescentium (147) methodi fluxionum inversæ fundamentales formulæ erunt.

DE MOTU CORPORUM.

1. S. $dz = z$. & S. $adz = az$. S. $dz : a = z : a$.

2. S. $mz^{m-1} dz = z^m$,
& S. $maz^{m-1} dz = az^m$,
& S. $\frac{m}{n} z^{m-n:n} dz = z^{m:n}$.

3. S. $(dz \mp dy) = z \mp y$.

4. S. $(zdy + ydz) = yz$.
& S. $(amy^n z^{m-1} dz + anz^m y^{n-1} dy) = az^m y^n$.

5. S. $(ydz - zdy) : yy = z : y$.

166. Si fluxio cujus fluens quæritur nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variabilium substitutionem aliasque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas sæpe reduci potest. Sit in exemplum fluxio $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ponatur $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} = z$ & erit $cb + cx = zz$, & $cdx = 2zdz$, & $dx = \frac{2zdz}{c}$ adeóque $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = 2zzdz : c$. Hæc autem fluxio similis est formulæ $maz^{m-1} dz$, estque $z^2 = z^{m-1}$, adeóque $m = 3$, $ma = 3a = 2 : c$, & $a = 2 : 3c$, adeóque S. $maz^{m-1} dz = az^m = 2z^3 : 3c$ loco z, scribatur ipsius valor $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}}$, & invenietur S. $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx = \frac{2}{3c}(cb+cx) \times \overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(b+x) \times \overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}}$.

167. Superiorum formularum auxilio ex fluxionibus secundis primæ, ex tertiis secundæ &c. inveniuntur. Exempla sint S. $ddx = dx$. S. $dx . ddx = \frac{1}{2} dxdx = \frac{1}{2} dx^2$. Nam ponatur $dx = y$, & erit $ddx = dy$, & $dx\, ddx = ydy$, & per formulam secundam invenitur S: $ydy = \frac{1}{2} yy$, & si loco y substituatur ipsius valor, dx, erit S. $ydy =$ S. $dxddx = \frac{1}{2} dx^2$. Similiter. S. $(dy^2 + yddy) : dx = ydy : dx$, supponendo dx constantem, nam fiat $ddy = dv$, adeóque $dy = v$, & fluxio proposita evadet, $\overline{vdy + ydv} : dx$, cujus fluens (per formulam 4$^{\text{am}}$) est $vy : dx$, ob dx constantem. Cum autem sit $v = dy$, erit $vy : dx = ydy : dx$.

168. Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, & cum fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, conclusio recte se habet; sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquentur. Nam & fluens pro lubitu assumi potest, & assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem fluxioni propositæ, & terminos homologos inter se comparando.

169. Quoniam constantis quantitatis nulla est fluxio, & eadem proinde fluxio dz ex fluentibus z, & $z \mp a$, colligitur, fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate aliquâ constante; quæ ex fluxione secundâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio secunda nulla est; quæ ex fluxione tertia colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

170. Cum fluens composita, quæ ex propositâ fluxione collecta est, unicam variabilem includit, ut fluens $\frac{2}{3}(b+x) \times \overline{bc+cx}^{\frac{1}{2}}$, quæ (166) deducta est ex fluxione $\overline{cb+cx}^{\frac{1}{2}} \times dx$, ita determinari solet constans adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis x, ponitur o; tum si fluens ipsa sit etiam o, completa est. Si quid verò residuum fuerit, ut hic remanet $+ \frac{2}{3} b \sqrt{bc}$, hoc residuum cum signo contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa, $\frac{2}{3}(b+x) \times \overline{bc+cx}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} b \sqrt{bc}$. Hujus regulæ ratio est, quod fluens inventa supponi possit exhibere aream curvæ alicujus, cujus sit abscissa variabilis x, adeo ut dum $x = o$, area, fluente expressâ, sit etiam o; unde si in fluente primò inventâ loco x, substituatur o, sitque aliquod residuum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas constans adjicienda vel subducenda ex naturâ quæstionis determinatur, aut arbitraria est.

SEC

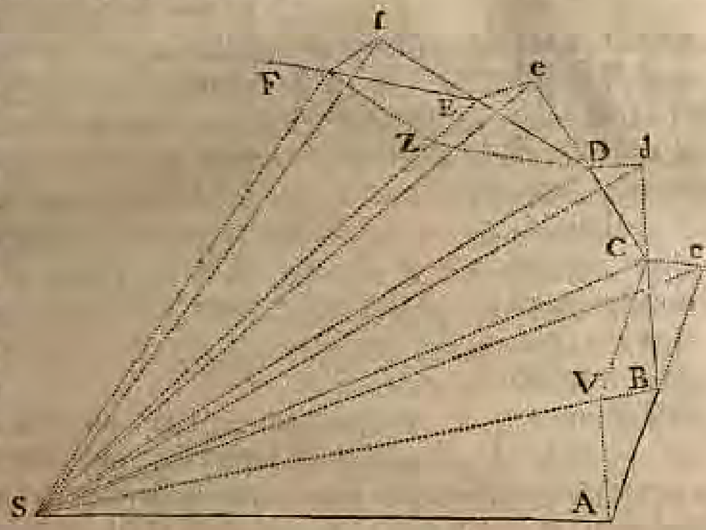
LIBER PRIMUS.

SECTIO II.

De inventione virium centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

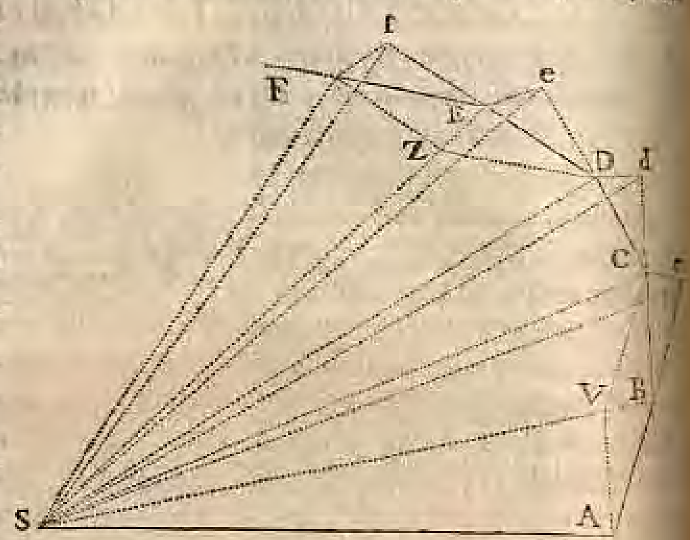
Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.



Dividatur tempus in partes æquales, & primâ temporis parte describat corpus vi insitâ rectam AB. Idem secundâ temporis parte, si nil impediret, rectâ pergeret ad c, (per leg. 1.) describens lineam Bc æqualem ipsi AB; adeò ut radiis AS, BS, cS ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ ASB, BSc. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta Bc declinet & pergat in rectâ BC. Ipsi BS parallela agatur cC, occurrens BC in C; & completâ secundâ temporis parte, corpus (per legum corol. 1.) reperietur in C, in eodem (*) plano cum triangulo ASB. Junge SC; & triangulum SBC, ob parallelas SB, Cc, æquale erit triangulo SBc, atque ideo etiam

(*) 171. Reperitur in C, in eodem plano cum triangulo A S B; nam diagonali B C, quam viribus conjunctis mobile describit est in plano parallelogrammi V B C c, cujus latera B V, B c, viribus separatis describenda, sunt in plano trianguli A S B.

etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis centripeta successivè agat in *C*, *D*, *E*, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas *CD*, *DE*, *EF*, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum *SCD* triangulo *SBC*, & *SDE* ipsi *SCD*, & *SEF* ipsi *SDE* æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto



describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis *SADS*, *SAFS* inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter *ADF*, (per corollarium quartum lemmatis tertii) erit linea curva: ideóque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur, aget indesinenter; areæ verò quævis descriptæ *SADS*, *SAFS* temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q.E.D.*

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciprocè ut perpendiculum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. ([b]) Est enim velocitas in locis illis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ut sunt bases æqualium triangulorum *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*; & hæ bases sunt reciprocæ ut perpendicula in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successivè descriptorum chordæ *AB*, *BC* compleantur in parallelogrammum *ABCU*, & hujus diagonalis *BU* in eâ positione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; ([c]) transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ *AB*, *BC* ac *DE*, *EF* compleantur in parallelogramma *ABCU*, *DEFZ*; vires in *B* & *E* sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium *BU*, *EZ*, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus *BC* & *EF* componuntur (per legum corol. 1.) ex motibus *Bc*, *BU* & *Ef*, *EZ*: atqui *BU* & *EZ*, ipsis *Cc* & *Ff* æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in *B* & *E*, ideóque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. ([d]) Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

Corol.

([b]) 172. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF, æqualibus temporibus uniformi motu descriptæ (5); æqualium autem triangulorum bases sunt reciprocè ut eorum altitudines, hoc est, reciprocè ut perpendicula ex centro virium S, in bases demissa. Cum igitur evanescentibus triangulis ASB, BSC &c. ultima perimeter ABCDEF, fit linea curva quam (113) rectæ Ac, Bd, Ce, Df, tangunt in punctis A, B, C, D, E, manifestum est velocitates in illis punctis esse reciprocè ut perpendicula à centro S, in tangentes demissa.

([c]) 173. Transibit eadem per centrum virium. Nam ex demonstratione propositionis hujus, sumptâ BV = Cc, erit VC, æqualis & parallela lineæ Bc, seu AB, adeóque VA, BC, erunt etiam æquales & parallelæ, & BV, quæ producta transit per centrum S, erit diagonalis parallelogrammi ABCV.

174. Si ducantur per puncta quævis B, & D, perimetri curvæ vel diversarum curvarum tangentes Bc, De, & demittantur angulorum contactuum subtensæ Cc, Ee, radiis SB, SD, ad centrum virium convergentibus parallelæ, sintque arcus BC, DE, æqualibus temporibus descripti, patet ex corollario 3. vires centripetas in B & D, esse ad invicem in ultimâ ratione subtensarum Cc, Ee.

([d]) 175. Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium BV, EZ, diagonales enim AC, DF, quæ sunt chordæ arcuum evanescentium ABC, DEF, alias diagonales BV, EZ, bisecant.

M 2 176.

DE MOTU CORPORUM.

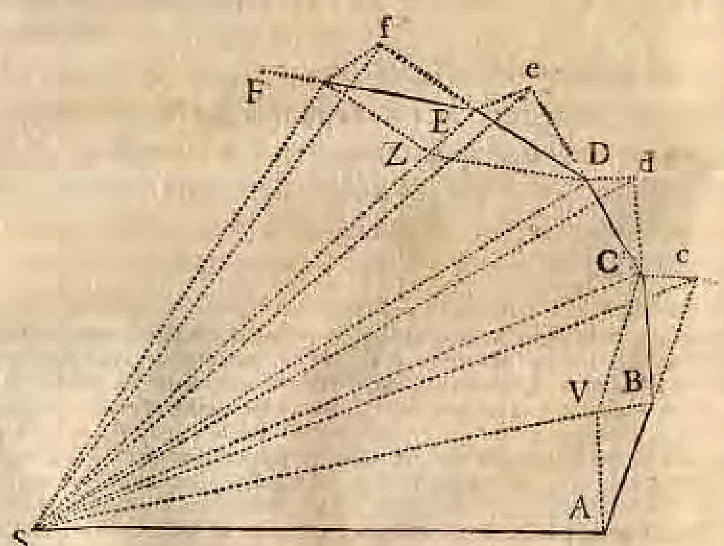
Corol. 5. Ideoque vires eædem ſunt ad (c) vim gravitatis, ut hæ ſagittæ ad ſagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore deſcribunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium, quæ in ipſis ſita ſunt, non quieſcunt, ſed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano deſcriptâ, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum.

Caſ.



(c) 176. Vis enim gravitatis per lineas parallelas ad horizontem perpendiculares agit & gravia obliquè projecta parabolas deſcribunt (40), quod etiam in figurâ ſuperiori contingeret, ſi centrum virium S, in infinitum abiret, & vis centripeta in omnibus punctis A, B, C, D, eadem maneret.

177.

LIBER PRIMUS.

Caſ. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de curſu rectilineo per vim aliquam in ipſum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de curſu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SCD*, &c. circa punctum immobile *S* temporibus æqualibus æqualia deſcribere, (f) agit in loco *B* ſecundum lineam parallelam ipſi *cC* (per prop. XL. lib. 1. elem. & leg 11.) hoc eſt, ſecundum lineam *BS*; & in loco *C* ſecundum lineam ipſi *dD* parallelam, hoc eſt, ſecundum lineam *SC*, &c. Agit ergo ſemper ſecundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde eſt, ſive quieſcat ſuperficies, in quâ corpus deſcribit figuram curvilineam, ſive moveatur eadem unà cum corpore, figurâ deſcriptâ, & puncto ſuo *S* uniformiter in directum.

Corol. 1. In ſpatiis vel mediis non reſiſtentibus, ſi areæ non ſunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concurſum radiorum; (g) ſed indè declinant in conſequentia, ſeu verſus plagam in quam fit motus, ſi modo arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol.

(f) 177. Agit in loco B, ſecundùm lineam parallelam ipſi C c, hoc eſt, ſecundùm lineam B S; nam ſolâ vi inſitâ in A, corpus uniformi cum motu progrederetur per rectam A B c, & æqualibus temporibus æquales lineas A B, B c, deſcriberet; verùm per vim centripetam in B, detorquetur à rectâ B c, ut aliam rectam B C, eodem tempore deſcribat quo deſcripſiſſet B c; adeóque junctâ C c, vis centripeta agit in B, ſecundùm directionem parallelam ipſi C c (per coroll. 1. Leg.), ſed ob A B = B c, & ob triangulum S B C, æquale triangulo S A B, (per hyp.), erit triangulum S A B = triang. S B c = triang. S B C, adeóque per prop. 40. vel 39. lib. 1. Elem. communis triangulorum S B C, S B c æqualium baſis B S, parallela eſt rectæ C c, quæ illorum triangulorum vertices jungit; cum igitur, per demonſtrata, vis centripeta in B, agat ſecundùm directionem parallelam lineæ C c, neceſſum eſt ut agat ſecundùm directionem rectæ B S, hoc eſt, ut tendat ad centrum S.

(g) 178. Sed indè declinant in conſequentia, ſi modò arearum deſcriptio acceleratur: ſin retardatur, declinant in antecedentia. Nam ſi triangulum S B C, æquale non eſt triangulo S A B, ſeu S B c, eodem tempore deſcripto, recta C c, non erit parallela lineæ B S, ſed producta cum lineâ S B, ità converget ut tendat in plagam motûs, ſi triangulum S B C, triangulo S B c, majus eſt, & tendat in plagam contrariam ſi triangulum S B C, triangulo S B c, minus. Quarè vis centripeta in B, agens ſecundùm directionem parallelam lineæ C c, in primo caſu declinat in conſequentia, in ſecundo caſu declinat in antecedentia.

179.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 2. ([h]) In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant à concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

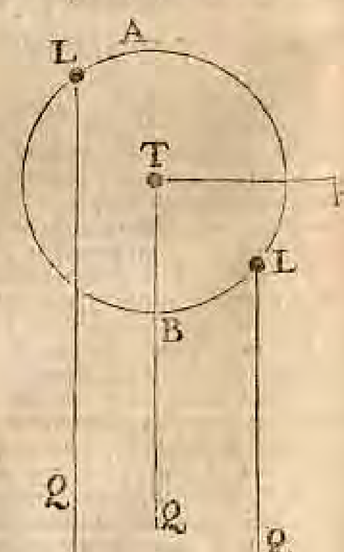
Scholium.

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. ([i]) Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur à plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

([k]) Sit corpus primum *L*, & corpus alterum *T*: & (per



([h]) 179. Cum enim medium resistat accelerationi descriptionis arearum, liquet arearum descriptionem etiam sublatâ medii resistentiâ accelerari oportere, ac proindè per Coroll. 1. virium directiones declinare à concursu radiorum, in S, versùs plagam in quam fit motus.

([i]) 180. Porrò si vis illa perpetuò secundùm lineam superficiei descriptæ perpendicularem agat, planum subjectum duntaxat premit, & corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proindè nec superficiei descriptæ quantitatem auget nec minuit, & propterea in compositione virium in plano agentium negligenda est.

([k]) 181. Corpus L, circà alterum T, in curvâ A L B, ità revolvatur, ut circà illius centrum T, semper describat areas temporibus proportionales, dùm interim corpus T, urgetur vi acceleratrice secundùm directionem T Q, & per Leg. Coroll. 6. si vi novâ acceleratrice quæ æqualis & contraria sit illi quâ corpus T secundùm directionem T Q urgetur, urgeatur corpus utrumque secundùm lineas parallelas Q T, Q L; perget corpus L, describere circa corpus T, areas easdem ac priùs; vis autem acceleratrix quâ corpus T urgebatur jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea, per Leg. 1. corpus illud T, sibimet ipsi jam relictum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum; nimirum quiescet, si nullâ aliâ vi præter acceleratricem secundùm directionem T Q, antè urgebatur; movebitur verò æquabiliter per rectam aliquam T F, si præter vim acceleratricem per T Q, agentem, aliâ vi non acceleratrice ferebatur juxtà directionem T F, &c.

LIBER PRIMUS.

legum corol. VI.) si vi novâ, quæ æqualis & contraria sit illi, quâ corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* describere circa corpus alterum *T* areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per leg. 1.) corpus illud alterum *T* sibimet ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentiâ virium, id est, urgente vi reliquâ perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* describere. Tendit igitur (per theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (sive simplici, sive ex viribus pluribus juxta legum corollarium secundum compositâ) quâ corpus prius *L* urgetur, subducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproximè.

Corol. 3. Et vice versâ, si vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum *T*, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto describit areas, quæ cum temporibus collatæ sunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quiescit, vel movetur uniformiter

182.

formiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum T tendentis vel nulla eft, vel mifcetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: vifque tota ex omnibus, fi plures funt vires, compofita ad aliud (five immobile five mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; fi modo vis centripeta fumatur, quæ reftat poft fubductionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

Scholium.

Quoniam æquabilis arearum defcriptio index eft centri, quod vis illa refpicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbita fua retinetur; quidni ufurpemus in fequentibus æquabilem arearum defcriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in fpatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

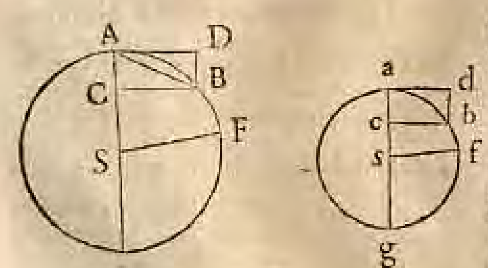
Corporum, quæ diverfos circulos æquabili motu defcribunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & effe inter fe, ut funt arcuum fimul defcriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

(l) Tendunt hæ vires ad centra circulorum per prop. II. & corol. 2. prop. 1. & funt inter fe ut arcuum æqualibus temporibus quàm minimis defcriptorum finus verfi per corol. 4. prop. 1. hoc eft, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per lem. VII. & propterea, cum hi arcus fint ut arcus temporibus quibufvis æqualibus defcripti, & diametri fint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis fimul defcriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Cum arcus illi fint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compofitâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione fimplici radiorum inversè. (m)

Corol. 2. (n) Et, cum tempora periodica fint in ratione compofitâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inversè; (o) vires centripetæ funt in ratione compofitâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

Corol. 3. (p) Undè fi tempora periodica æquentur, & prop-



(l) 182. Corpora duo A & a, circulos A B G A, a b g a, æquabili motu defcribant, & areæ feu fectores A S F, F S G, & a s f, f s g, erunt in fingulis circulis ut arcus A F, F G, & a f, f g, hoc eft (5) ut tempora quibus defcribuntur, ac proindè vires quibus corpora A & a, in peripheriis A B G A, a b g a retinentur tendunt ad centra S & s. Sint arcus A B, a b, æqualibus temporibus quam minimis defcripti, & ductis tangentibus A D, a d, & ad eas perpendicularibus B D, b d, completifque parallelogrammis C D, c d, vires centripetæ in A & a, erunt inter fe ut rectæ D B, d b, feu ut finus verfi A C, a c, (174). Verum ductis chordis A B, a b, eft A C: A B = A B : A G, & a c : a b = a b : a g, unde $AC = \frac{AB^2}{AG}$, & $ac = \frac{ab^2}{ag}$; cum igitur chordæ & arcus nafcentes æquales fint (per Lem. VII.) erit A C : a c, hoc eft, vis centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcûs evanefcentis A B diametro A G divifum, ad quadratum arcus evanefcentis, a b, diametro a g divifum & propterea cum hi arcus &c.

(m) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, eft in omnibus peripheriæ punctis eadem, ut pote femper proportionalis conftantis velocitatis quadrato ad radium conftantem applicato.

(n) 184. Tempora periodica, hoc eft, tempora quibus integræ peripheriæ defcribuntur funt in ratione compofitâ ex ratione radiorum directè & ratione velocitatum inversè. Nam (5) velocitates funt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, fed peripheriæ funt ut radii, ergo velocitates funt ut radii ad tempora periodica applicata, ac proindè tempora periodica funt ut radii directè & velocitates inversè. Si corporum A & a, tempora periodica dicantur T & t, celeritates C & c, radii A S, a s, dicantur R & r, erit $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ ideóque $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$.

(o) 185. Vires centripetæ funt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; nam vires centripetæ corporum A & a, dicantur V & v, erit (per coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, fed quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, ideóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$, erit $\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, ergò $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$.

(p) 186. Undè fi tempora periodica æquentur & propterea (184) velocitates fint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum fit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, fi $T^2 = t^2$, erit $V : v = R : r$.

propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. (q) Si & tempora periodica, & velocitates sint in ratione subduplicatâ radiorum; (r) æquales erunt vires centripetæ inter se: & contra.

Corol. 5. (s) Si tempora periodica sint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii: & contra.

Corol. 6. (t) Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radiorum, & propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione subduplicatâ; (u) vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum: & contra.

Corol.

Et contrà si vires centripetæ sint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim sit (185) $V:v = t^2R : T^2r$, si ponatur $V:v = R:r$, erit $R:r = t^2R : T^2r$, unde $rt^2R = RT^2r$, adeóque $t^2 = T^2$, & $t = T$.

(q) 187. Si tempora periodica sint in ratione subduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eâdem ratione. Nam (184) $C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$. Undè si fuerit $T:t = R^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$ ac proindè $T^2 : t^2 = R:r$, erit $C^2 : c^2 = R:r$.

Et contrà si fuerit $C^2 : c^2 = R:r$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R:r$, adeóque $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$, & $Rt^2 = rT^2$, undè $T^2 : t^2 = R:r$.

(r) 188. Si & tempora periodica ac proindè velocitates (187) sint in ratione subduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter se. Cum sit (185) $V:v = t^2R : T^2r$, si ponatur $T^2 : t^2 = R:r$, erit $t^2R = T^2r$, undè $V = v$.

Et contrà si $V = v$, cum sit (185) $V:v = t^2R : T^2r$, erit $t^2R = T^2r$, & proindè $T^2 : t^2 = R:r$.

(s) 189. Si tempora periodica sint ut radii & propterea (184) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciprocè ut radii. Quoniam enim (per coroll. 1.) $V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, si $C^2 = c^2$, erit $V:v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$.

Et contrà si fuerit $V:v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$, cum sit (coroll. 1.) $V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, erit $\frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, adeóque $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(t) 190. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radiorum, erunt velocitates reciprocè in ratione radiorum subduplicatâ; nam quoniam (184) $C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ si fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{R^3} : \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r:R$.

Et contrà si fuerit $C^2 : c^2 = r:R$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = r:R$, adeóque $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$ & $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

(u) 191. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radiorum & proptereà (190) velocitates reciprocè in radiorum ratione subduplicatâ, vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum. Nam cum sit (185) $V:v = t^2R : T^2r$; si fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $V:v = r^3R : R^3r = r^2 : R^2$.

Et contrà si $V:v = r^2 : R^2$, erit (185) $r^2 : R^2 = t^2R : T^2r$ ac proindè $t^2R^3 = T^2r^3$, & $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

192.

Corol. 7. Et universaliter, si (x) tempus periodicum sit ut radii R potestas quælibet R^n, & propterea velocitas reciprocè ut radii potestas R^{n-1}; (y) erit vis centripeta reciprocè ut radii potestas R^{2n-1}: & contra.

Corol. 8. (z) Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, par-

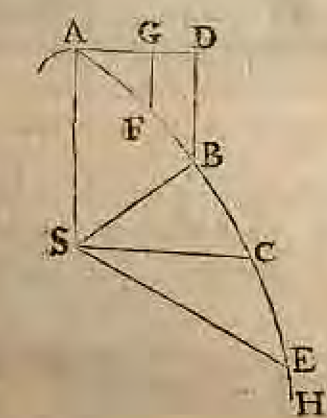
(x) 192. Si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n, velocitates erunt reciprocè ut radiorum potestates R^{n-1}, r^{n-1}. Nam ponatur $T:t = R^n : r^n$, & quoniam (184) $C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, erit $C:c = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}} = r^{n-1} : R^{n-1}$.

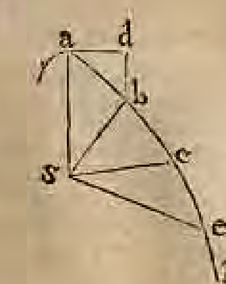
Et contrà si fuerit $C:c = r^{n-1}$, R^{n-1}, erit $\frac{R}{T} : \frac{r}{t} = r^{n-1} : R^{n-1}$, adeóque $\frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}$, undè $R^n : r^n = T:t$.

(y) 193. Et universaliter si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n, & proptereà (192) velocitates reciprocè ut radiorum potestates R^{n-1}, r^{n-1}, erunt vires centripetæ reciprocè ut radiorum potestates R^{2n-1}, r^{2n-1}. Nam ponatur $T:t = R^n : r^n$, adeóque $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$: & cum sit (185) $V:v = t^2R : T^2r$, erit $V:v = Rr^{2n} : rR^{2n} = r^{2n-1} : R^{2n-1}$.

Et contrà si fuerit $V:v = r^{2n-1}$, R^{2n-1}; cum sit $V:v = t^2R : T^2r$, erit $r^{2n-1} : R^{2n-1} = t^2R : T^2r$, adeóque $t^2R^{2n} = T^2r^{2n}$, undè $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$ & $T:t = R^n : r^n$.

(z) 194. Corpora A & a, figurarum similium ABH, abh, centra S, s, in figuris illis similiter posita habentium, partes similes ABE, abe, itâ describant ut areæ ASB, ASC &c. asb, asc &c. circà centra S, s, in singulis figuris descriptæ temporibus quibus describuntur sint respectivè proportionales, & per prop. 11. vires centripetæ ad centra S, s, tendent. Per puncta A & a, in curvis similiter posita agantur tangentes AD, ad, sintque arcus minimi, AF, ab, eodem tempore in utrâque curvâ descripti, & ductis rectis FG, bd, radiis vectoribus AS, as, parallelis, vis centripeta in A, est ad vim centripetam in a, ut FG, ad bd, (174). Sumatur autem ar-

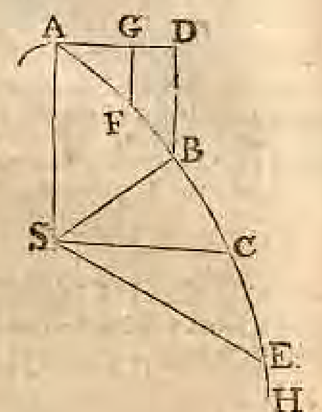


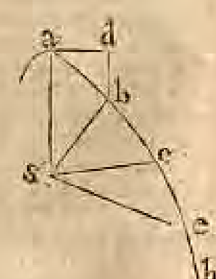


partes describunt, consequuntur ex demonstratione præcedentium ad hosce casus applicatâ. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & distantias corporum à centris pro radiis usurpando.

Co-

arcus AB similis ab, (ita ut sit as : AS = ab : AB, ac proinde sit $AB = \frac{ab \times AS}{as}$) ducaturque BD radio AS parallela, erit per coroll. 1. Lem. XI. $FG : BD = AF^2 : AB^2$, & quia figuræ ABD & abd, sunt similes, est BD : bd = AB : ab, itaque per compositionem rationis est $FG : bd = AF^2 \times AB : AB^2 \times ab = AF^2 : AB \times ab$ (& quia $AB = \frac{ab \times AS}{as}$) $= AF^2 : \frac{ab \times AS}{as} \times ab = \frac{AF^2}{AS} : \frac{ab^2}{as}$. Cum igitur demonstratum fuerit vires centripetas in A & a, esse inter se ut sunt GF, bd, erunt vires illæ ut quadrata arcuum AF, ab, simul descriptorum applicata ad radios homologos AS, as.





195. Coroll. 1. Quoniam velocitates finitæ corporum A & a, per arcus nascentes AF, ab, sunt uniformes, erunt illæ ut arcus AF, ab, æqualibus temporibus descripti (5). Unde vires centripetæ in A, & a, erunt ut velocitatum in A & a, quadrata, ad radios AS, as applicata.

196. Corol. 2. Figuræ similes ASE, ase, divisæ concipiantur in innumeros sectores æquales ASB, BSC &c., & asb, bsc, &c. sibi mutuò in duabus figuris similes, & ob æquabilem arearum seu sectorum in singulis figuris descriptionem, sectores æquales æqualibus temporibus describentur ac proinde arcus AB, BC, & arcus ab, bc, &c. æqualibus respective temporibus percurrentur, erit igitur tempus per AB, ad tempus per ab, ut tempus per AE, ad tempus per ae, hoc est, tempora quibus describuntur arcus similes AB, ab, sunt ut tempora quibus describuntur alii quicumque similes arcus, AE, ae, adeóque ut tempora periodica. Cum igitur (195) velocitates in A & a, sint inter se ut arcus AB, ab, ad sua respectivè tempora applicati, erunt quoque velocitates illæ inter se ut arcus AB, ab, seu ob figurarum similitudinem, ut radii AS, as, ad tempora periodica applicati, id est, celeritates in punctis correspondentibus A & a, sunt in ratione composita ex ratione radiorum homologorum directe & ratione temporum periodicorum inversè, adeóque tempora periodica sunt ut radii directè & velocitates inversè.

197. Coroll. 3. Celeritates in A & a, dicantur

Corol. 9. (a) Ex eâdem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est pro-

por-

dicantur C, c, vires centripetæ V, v, radii vectores homologi R, r; tempora periodica T, t, & erit (196) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, & $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$, & $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$. Et quoniam (195) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ erit $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$, hoc est, vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cum igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus & viribus in circulis corollaria, ex superioribus proportionibus deducta sint, evidens est eadem omnia convenire temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcumque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt.

(a) 198. Corpus A, uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ ABGA, & idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium AS, eâdem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur continuò ita urgeatur ut (vi illâ centripetâ constanti permanente, quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis constante cadentibus) corpus illud cadendo percurrat AL, eodem tempore quo corpus A, uniformiter describit arcum AF. Quoniam vis acceleratrix per radium AS, constans est & continuò agit (per hyp.) corpus per AS, motu uniformiter accelerato cadit (25) & spatia percursa sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur (27), ducatur per A, tangens AD, & sumpto arcu minimo AB, in tangentem demittatur perpendicularis BD, & compleatur rectangulum CD, eodem tempore quo corpus A, æquabili motu describit arcum AB, per vim centripetam percurrit DB, seu AC, (ex coroll. 5. Prop. 1æ.) erit igitur AC, ad AL, ut quadratum temporis per AB, ad quadratum temporis per AF, hoc est, ob motum in circulo æquabilem $AC : AL = AB^2 : AF^2 = \frac{AB^2}{AG} : \frac{AF^2}{AG}$; cum igitur ob arcum nascentem AB, suæ chordæ æqualem, sit $AC = \frac{AB^2}{AG}$, erit quoquè $AL = \frac{AF^2}{AG}$ atquè adeò $AL \times AG = AF^2$ & proinde $AL : AF = AF : AG$.

199. Coroll. 1. Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli AFGA, uniformiter describit, æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium AS, si vi centripetâ constanti continuò urgeretur æquali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur: Nam sit AL altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheriâ circuli describitur, sitque AF arcus eo tempore descriptus quo A cadit per AL eodem etiam tempore motu æquabili percurreretur, 2 AL per velocitatem eam in L acquisitam (30), adeóque erit AF = 2 AL siquidem eodem tempore eâdemque celeritate æquabili percurruntur, sed est semper $AF^2 = AL \times AG$ (198) cum igitur sit $2\,AL = AF$ ac proinde $4\,AL^2 = AF^2$ erit $4\,AL^2 = AL \times AG$ & $4\,AL = AG$ & $AL = \frac{AG}{4} = \frac{AS}{2}$.

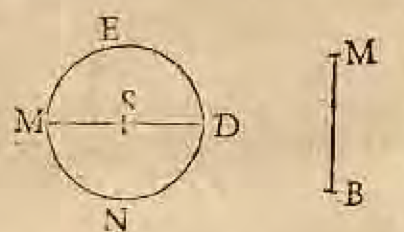
200. Coroll. 2. Tempus revolutionis per integram peripheriam est ad tempus descensûs uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato percurritur, totus radius describeretur cum æquabili velocitate lapsu per dimidium radium acquisitâ (30) eâ verò ipsâ celeritate corpus circuli peripheriam

DE MOTU CORPORUM. portionalis inter diametrum circuli, & deſcenſum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scho-

(199) deſcribit. Ergo cum ſpatia eâdem velocitate uniformi percurſa, ſint ut tempora (5) patet propoſitum.

201. Coroll. 3. Hinc datâ vi centripetâ quâlibet in datâ à centro diſtantiâ, facile eſt reperire velocitatem quâ corpus projici debet ut circà prædictum centrum in datâ diſtantiâ circulum uniformiter deſcribat; velocitas enim illa æqualis eſt velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidiam diſtantiam à centro, ſi datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199). Dato autem circuli radio, datur peripheria, & datâ æquabili in circulo velocitate cum peripheriâ, invenitur tempus periodicum, & arcus dato quovis tempore deſcriptus habetur.



202. Coroll. 4. Datis circuli radio & velocitate corporis in eo revolventis, facile colligitur proportio vis centripetæ in eo circulo ad vim quamlibet notam qualis eſt vis gravitatis. Primum enim inveniatur tempus revolutionis unius in eo circulo peractæ (5), mox invenietur tempus quo corpus vi illâ centripetâ continuò ſollicitatum per dimidium radium caderet (200). Ex datâ autem vi gravitatis ſeu ex dato ſpatio quod grave liberè cadendo, dato quodam tempore percurrit, invenitur (27) ſpatium ab eodem gravi percurſum eo tempore quo corpus vi centripetâ ſollicitatum per dimidium radium cadit, ſed vires acceleratrices conſtantes, rationem habent ſpatiorum quæ dato tempore percurrere faciunt (30) eſt ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis, ut dimidius circuli radius ad ſpatium id quod grave percurreret eo tempore quo corpus vi centripeta ſollicitatum dimidium illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili MS clavo in S alligati, circà centrum S uniformiter deſcribat circulum MNDE, in plano horizontali poſitum, eaque ſit corporis revolventis celeritas quæ acquiritur à gravi per altitudinem MB cadente; quæritur ratio vis centripetæ in circulo ad vim gravitatis. Tempus quo grave cadit per altitudinem MB, dicatur T, & velocitas in B acquiſita, quâ (ex hyp.) corpus M circuli peripheriam uniformiter deſcribit, erit $\frac{2\,MB}{T}$ (30), peripheria circuli dicatur p, & cum tempus periodicum in circulo ſit æquale peripheriæ ad velocitatem $\frac{2\,MB}{T}$ applicatæ (5) erit id Tempus Periodicum $\frac{p \times T}{2\,MB}$, jam verò eſt peripheria ad radium (200) ut tempus Periodicum ad tempus quo corpus M, ſolâ vi centripetâ conſtante ſollicitatum, dimidium radium MS percurrit, ſive $p : MS = \frac{p \times T}{2\,MB}$ ad tempus per dimidium radium quod eſt ideo $\frac{T \times MS}{2\,MB}$. Cum autem grave tempore T altitudinem MB ſit emenſus & in motu uniformiter accelerato ſpatia percurſa ſint ut quadrata temporum quibus percurruntur (27) erit T^2 ad $\frac{T^2 \times MS^2}{4\,MB^2}$, ſeu $4\,MB^2$ ad MS^2 ut ſpatium MB tempore T percurſum ad ſpatium percurſum tempore $\frac{T \times MS}{2\,MB}$, quo corpus M, vi centripetâ percurrit dimidium radium, quod erit $\frac{MS^2 \times MB}{4\,MB^2} = \frac{MS^2}{4\,MB}$ eſt igitur (13) vis centripeta in circulo ad vim gravitatis ut $\frac{MS}{2}$, ad $\frac{MS^2}{4\,MB}$, ſivè ut $2\,MB$ ad MS.

203.

LIBER PRIMUS.

Scholium.

(b) Caſus corollarii ſexti obtinet in corporibus cœleſtibus, (ut ſeorſum collegerunt etiam noſtrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ ſpectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris, decrevi fuſius in ſequentibus exponere.

Porro præcedentis propoſitionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea gravitatis. Nam ſi corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis ſuæ revolvatur, hæc gravitas eſt ipſius vis centripeta. Datur autem ex deſcenſu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore deſcriptus, per hujus corol. IX. Et (c) hujuſmodi propoſitionibus *Hugenius* in eximio ſuo tractatu *de Horologio Oſcillatorio* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

(d) Demonſtrari etiam poſſunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis deſcribi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et ſi corpus in polygoni lateribus datâ cum veloci-

tate

(b) 203. Ex obſervationibus colligunt aſtronomi planetas ſecundarios, ut ſunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad ſuum planetam primarium ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad ſolem ductis, areas deſcribere temporibus proportionales eorumque tempora periodica eſſe in ratione ſeſquiplicatâ radiorum. Quare caſus corollarii VI. in corporibus cœleſtibus obtinet, id eſt, planetarum velocitates ſunt reciprocè in ratione ſubduplicatâ radiorum & vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata radiorum.

(c) 204. Hugenius ad calcem tractatûs de horologio oſcillatorio, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis proportione 13. theoremata ſine demonſtratione propoſuit. Eorum aliqua in corollariis propoſ. hujuſce IV. demonſtravit Newtonus, viamque aperuit cui inſiſtendo cætera omnia facili negotio abſolvi poſſunt, quod poſteà perfecerunt multi inſignes Mathematici.

(d) 205. Duo intelligantur polygona ſimilia & regularia circulis duobus inſcripta, quorum latera numero creſcant & longitudine minuantur in infinitum, & corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad ſingulos angulos à circulo reflectantur. Manifeſtum eſt corporum in polygonis revolventium vires centrifugas non eſſe menſurandas ex ſolâ velocitate quâ in ſingulis angulis incurrunt in circulum & quâ ab illo reflectuntur, ſed inſuper habendam eſſe rationem frequentiæ impactuum

aut

tate movendo ad ejus angulos singulos à circulo reflectatur; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa, & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; & huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum versus.

PRO-

aut reflexionum, ità ut si eadem fuerit duorum corporum revolventium celeritas, vires centrifugæ sint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quò plures sunt tempore dato impactus & reflexiones, eò magis corpus circulum urget ut à centro recedat & viceversâ eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem & contrariam actioni. Quare si varia fuerit corporum in polygonis revolventium celeritas æquabilis, vires centrifugæ erunt ut velocitates & numeri impactuum seu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Est autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore descriptorum. Porrò si eadem supponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore descriptorum erunt reciprocè ut latera singula; quo enim majora sunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datâque velocitate percurritur; quarè manente eâdem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum sunt inversè ut latera, sive ob polygonorum similitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, & varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percursorum, directè ut velocitates æquabiles, seu, ut longitudines dato tempore descriptæ (5). Quarè variantibus polygoni velocitate & radio, numerus reflexionum est ut velocitas, seu ut longitudo tempore dato descripta applicata ad radium. Cum igitur suprà ostensum sit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipsi æqualem & contrariam, esse in ratione compositâ velocitatis & numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam esse quoque ut quadratum velocitatis radio divisum, & etiam ut quadratum longitudinis seu arcûs dato tempore descripti applicatum ad radium.

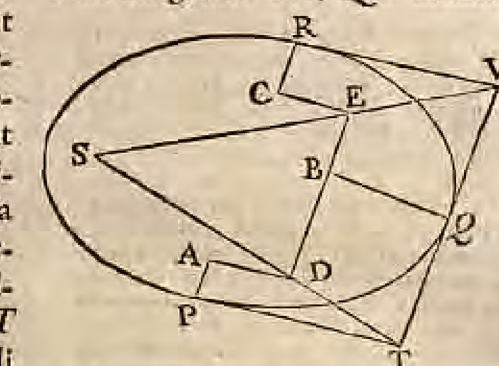
206,

PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

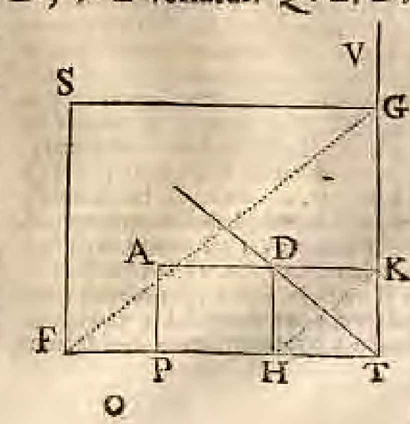
Datâ quibuscunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*, *Q*, *R*, concurrentes in *T* & *V*. Ad tangentes erigantur perpendicula *PA*, *QB*, *RC* velocitatibus corporis in punctis illis *P*, *Q*, *R*, à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id est, ita ut sit *PA* ad *QB* ut velocitas in *Q* ad velocitatem in *P*, & *QB* ad *RC* ut velocitas in *R* ad velocitatem in *Q*. Per perpendiculorum terminos *A*, *B*, *C* ad angulos rectos ducantur *AD*, *DBE*, *EC* concurrentes in *D* & *E*: Et actæ *TD*, *VE* concurrent in centro quæsito *S*.

Nam perpendicula à centro *S* in tangentes *PT*, *QT* demissa (per corol. 1. prop. 1.) sunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis *P* & *Q*; ideoque per constructionem ut perpendicula *AP*, *BQ* directè, id est ut perpendicula à puncto *D* in tangentes demissa. (e) Unde facile colligitur quod puncta *S*, *D*, *T* sunt in unâ rectâ. Et simili argumento puncta *S*, *E*, *V* sunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum *S* in concursu rectarum *TD*, *VE* versatur. *Q. E. D.*



(e) 206. Puncta S, D, T, sunt in unâ rectâ. Demissis enim ex centro S, in tangentes TV, TF, perpendiculis SG, SF, & ex puncto D, perpendiculis DK, DH, patet angulos FSG, HDK, lineis parallelis contentos esse æquales & propter laterum SF, SG, DH, DK, analogiam, triangula FGS, HKD, esse similia, adeóque angulos SFG, DHK, æquari, ac proinde lineas FG, HK, esse parallelas, & triangula FTG, HTK, similia, erit ergò TH : TF = HK : FG = DH : SF, & TK : TG = HK : FG = DK : SG. Quare linea TD, producta transibit per centrum S.



207.

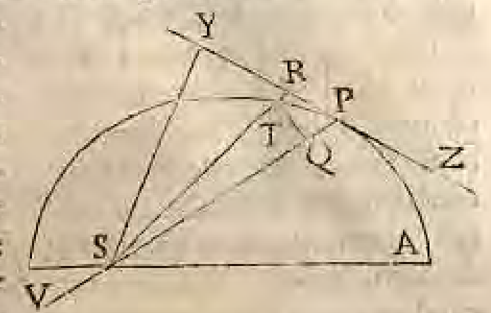
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in ſpatio non reſiſtente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam naſcentem tempore quam minimo deſcribat, & ſagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut ſagitta directè & tempus bis inversè.

(f) Nam ſagitta dato tempore eſt ut vis (per corol. 4. prop. 1.) & augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eâdem ratione ſagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per corol.

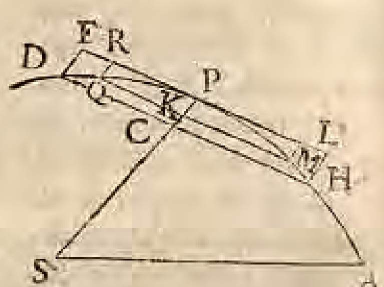
2 & 3, lem. xi.) ideoque eſt ut vis ſemel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut ſagitta directè & tempus bis inversè. *Q. E. D.*

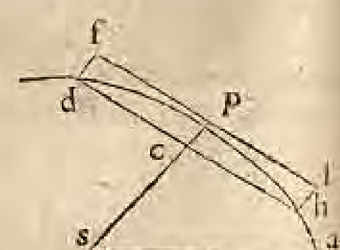
(g) Idem facile demonſtratur etiam per corol. 4. lem. x.



Corol. 1. Si corpus *P* revolvendo circa centrum *S* deſcribat lineam curvam *APQ*; tangat vero recta *ZPR* curvam illam in puncto quovis *P*, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto *Q* agatur *QR* diſtantiæ *SP* parallela, ac demittatur *QT* perpendicularis ad diſtantiam illam *SP*: vis centripeta erit reciprocè ut ſolidum $\frac{SP\ quad. \times QT\ quad.}{QR}$; ſi modo ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta *P* & *Q*. (h) Nam *QR* æqualis eſt ſagittæ dupli arcus *QP*, in cujus medio eſt *P*, & duplum trianguli *SQP* ſive *SP* × *QT*, tempori, quo arcus iſte duplus deſcribitur, proportionale eſt; ideoque pro temporis exponente ſcribi poteſt.

Co-





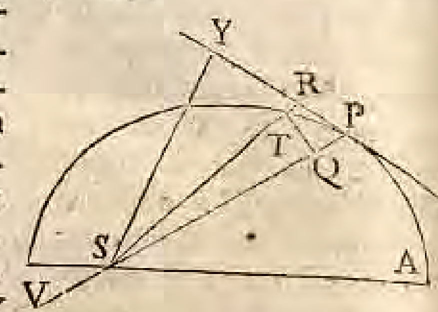
(f) 207. Corpora P & p, circà virium centra S & s, revolvendo, curvas APQ, apq, deſcribant, ſintque chordæ minimæ DH, dh, radiis vectoribus SP, sp, bifariam diviſæ, & chordis illis evaneſcentibus, erit CH = PH, & DC = DP (per coroll. 2. Lem. VII.) adeóque PH = PD; undè puncta P & p, ſunt in medio arcuum evaneſcentium DPH, dph, poſita. Præterea quoniam punctis C & P, c & p, coeuntibus, puncta D & H, d & h, ſimul cum punctis P, p, coincidunt, ultima chordarum evaneſcentium DH, dh, poſitio congruit cum tangentium FL, fl poſitione, ac proindè chordæ evaneſcentes DH, dh, tangentibus FL, fl, æquidiſtant, adeóque rectæ DF, df, radiis SP, sp, parallelæ ſagittis PC, pc, evaneſcentibus æquales ſint. His ad clariorem eorum quæ Newtonus ſupponit intelligentiam poſitis, demonſtrandum eſt vires centripetas in P & p, eſſe inter ſe ut ſunt ſagittæ PC, pc, directè, & inverse ut quadrata temporum quibus deſcribuntur arcus evaneſcentes HPD, hpd, aut dimidii PD, pd .... Dem... Si arcus PD, pd, æqualibus temporibus deſcriberentur, ſagittæ PC, pc, (per coroll. 1. Prop. 1.) eſſent ut vires centripetæ in P & p. Quòd ſi vires in P & p, æquales forent, tempora verò per arcus PD, pd, inæqualia, ſint v. gr. ſicut T ad t, dico ſagittas PC, pc, fore ut horum temporum quadrata directè; ſive ut T^2 ad t^2. Sit enim arcus PQ, deſcriptus eodem tempore t quo arcus pd, poſitis viribus in P & p, æqualibus, ſpatia QR, fd, ſeu PK, pc, virium illarum actione eodem tempore deſcripta erunt æqualia; Verùm (per cor. ii. & iii. Lem. xi.) $PD^2 : PQ^2 = DF : QR$ ſive fd, & ob motum per arcus evaneſcentes uniformem, ſunt arcus PD, PQ ut tempora quibus deſcribuntur hoc eſt ut T ad t, ideoque $PD^2 : PQ^2 = T^2 : t^2 = DF : QR$ ſive fd, & quia DF = PC & df = pc ergo $T^2 : t^2 = PC : pc$ itaque ſi vires in P & p ſint æquales erunt ſagittæ PC, pc, ut quadrata temporum quibus arcus PD, pd, deſcribuntur. Quoniam igitur manentibus temporibus ſagittæ ſunt ut vires, & manentibus viribus, ſagittæ ſunt ut temporum quadrata, neceſſum eſt ut variantibus viribus atque temporibus ſagittæ ſint ut vires & quadrata temporum conjunctim. Quamobrem ſi vires in P & p, dicantur V, v, erit $PC : pc = V \times T^2 : v \times t^2$, & dividendo antecedentes per T^2, & conſequentes per t^2, erit $V : v = \frac{PC}{T^2} : \frac{pc}{t^2}$ Q. e. D.

(g) 208. Idem facilè demonſtratur etiam per coroll. iv. Lem. x. quo ſtatuitur vires eſſe ut ſpatia, ipſo motus initio, deſcripta directè & quadrata temporum inverse: Cum enim FD, fd, ſeu ſagittæ PC, pc, ſint ſpatia ex virium centripetarum actione deſcripta iiſdem temporibus quibus percurruntur arcus evaneſcentes PD, pd, patet per ſuprà dictum coroll. vires centripetas eſſe inter ſe in ratione compoſitâ ex directâ ratione ſagittarum PC, pd, & reciprocâ quadratorum temporum quibus deſcribuntur arcus evaneſcentes PD, pd, ſeu HD, hd.

(h) 209. Nam QR æqualis eſt ſagittæ dupli arcus QP, in cujus medio eſt P, (207), duplum verò trianguli evaneſcentis SQP, (quod per Lem. VIII., tanquam rectilineum conſiderari poteſt) æquale eſt facto ex perpendiculo QT, in baſim

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut solidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, si modo SY perpendiculum sit à centro virium in orbis tangentem PR demissum. (i) Nam rectangula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

Corol. 3. Si orbis vel circulus est, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè secat, id est angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet; eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum P; & si PV chorda sit circuli hujus à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciprocè ut solidum $SYq \times PV$. (k) Nam PV est $\frac{QPq}{QR}$.

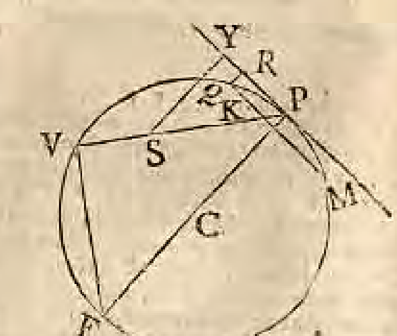


Co-

sum S P; cum igitur in eâdem curvâ A P Q, areæ sint proportionales temporibus quibus describuntur, ac proinde rectangulum $QT \times SP$, scribi possit loco temporis quo duplus arcus Q P, seu duplum triangulum S Q P, describitur, erit vis centripeta in P, directè ut $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ & inversè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$.

(i) 210. Rectangula $SY \times QP$, & $SP \times QT$, æquantur; nam tangens P R, cum arcu evanescente Q P, congruit (per Lem. VII) & propterea tangens illa considerari potest tanquam trianguli S P Q, basis P Q, producta, & S Y, tanquam perpendicularis ad illam basim productam, quare area dupli trianguli S P Q, est $SY \times QP = SP \times QT$.

(k) 211. PV est $\frac{QP^2}{QR}$. Sit enim circulus osculator P Q V F, & ductâ chordâ Q M, quam alia chorda P V, per virium centrum S acta, bisecat in K, erit (per prop. 35. lib. 3. Elem.) $QK^2 = VK \times PK$; sed evanescente P K, $VK = VP$, & (207) $QR = PK$, ac (per coroll. 1. Lem. VII) $QK = QP$, ergò $QP^2 = PV \times QR$, & $PV = \frac{QP^2}{QR}$.



212.

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inversè. Nam velocitas est reciprocè ut perpendiculum SY per corol. 1. prop. 1.

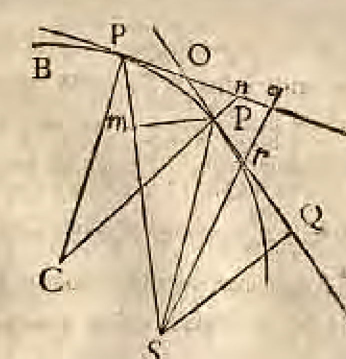
Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis P à cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $SYq \times PV$ huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

P R O-

212. Iisdem positis sit P C, radius osculi $= R$, & erit vis centripeta in P, reciprocè ut solidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$: quoniam enim rectæ S Y, & F C P, ad tangentem P Y, perpendiculares æquidistant, erit angulus $VPF = PSY$; cumque sit præterea angulus F V P, in semicirculo æqualis recto S Y P, duo triangula P V F, S Y P, similia sunt ac proinde $SP : SY = PF$ seu $2R : PV$, adeóque $PV = \frac{SY \times 2R}{SP}$ & $SY^2 \times PV = \frac{SY^3 \times 2R}{SP}$; hoc est dividendo per numerum constantem 2, ut $\frac{SY^3 \times R}{SP}$. Hæc est expressio vis centripetæ quam Joannes Bernoullius, Abrahamus de Moivre & Guido Grandus invenerunt.

SCHOLION.

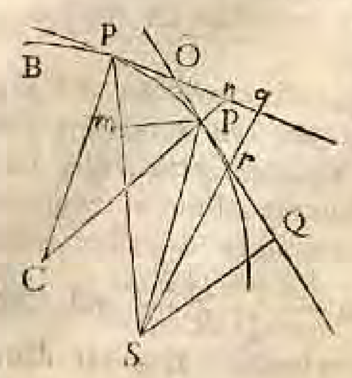
213. Newtonus generalem virium centralium theoriam in superioribus propositionibus aperuit, earumque elegantes formulas in propositionis VI^{æ} corollariis tradidit. Plurimas per analysim methodumque fluxionum posteà exquisierunt alii qui primum inter Geometras locum tenebant. Hos inter eminet Varignonius qui in Commentariis Parisiensibus an. 1700, 1701, 1706, virium centralium formulas suâ varietate & universalitate eximias dedit; præclaras quoque addidit Joannes Bernoullius in iisdem Commentariis an. 1710. Duas proposuit Jacobus Hermannus in scholio ad propositionem 22^{am} Lib. 1. Phoronomiæ quas ut pote multum expeditas, nobisque in posterum profuturas & ex superioribus Newtoni formulis, facillimè deducendas, hic exscribemus ac demonstrabimus.



214. Itaque corpus P, circà centrum virium S revolvendo describat curvam B p P, & centro C radio C P descriptus intelligatur arcus infinitesimus P p circuli curvam B p P osculantis in P, ac centro S radio S P, arculus P m, & denique S Q, S q,

ad

De Motu Corporum.



ad tangentes P Q, p q, perpendiculares. Duo Triangula q O r, n C p, seu P C p similia sunt, nam æquales sunt anguli r q O, C p n, sunt enim ambo recti, & anguli r O q, P C p, qui cum angulo P O p duos rectos efficiunt. Similia quoque sunt Triangula p m P, p q ſ, seu P Q s, ob Angulos ad q & m rectos & angulum m p P communem dum coeunt puncta P, p, quare p P : r q = P C : O q, seu p q, seu P Q; & m p : P p = P Q : S P unde ex æquo m p : r q = P C ad S P & P C $= \frac{SP \times mp}{rq}$. Porrò (212) vis centripeta in P est ut $\frac{SP}{PC \times SQ^3}$; ergò si substituatur valor ipsius P C, modò inventus eris vis ut $\frac{rq}{SQ^3 \times mp}$, hoc est, si vis centripeta sit $= v$, S P $= z$, ac proinde m p $= dz$, S Q $= p$, adeóque r q $= dp$, erit $v = \frac{dp}{p^3 dz}$, & radius osculi CP $= r = \frac{z dz}{dp}$, quas duas formulas tradunt Keillius in suâ de legibus virium centripetarum epistolâ ad Halleium directâ & Hermannus loco suprà citato.

215. Sit P p $= ds$, & P m $= dy$, & ob triangula similia p P m, P S Q, erit $ds : dy = z : p$, adeóque $p = \frac{z dy}{ds}$, & sumptis utrinque fluxionibus nullâ constante usurpatâ, invenietur (163) $dp = \frac{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,dds}{ds^2}$; quarè $v = \frac{dp}{p^3 dz} = \frac{dp\,ds^3}{z^3 dy^3 dz}$ ob $p = \frac{z dy}{ds}$ & $p^3 = \frac{z^3 dy^3}{ds^3}$, adeòque $v = \frac{dz\,dy\,ds^2 + z\,ds^2\,ddy - z\,dy\,ds\,dds}{z^3 dy^3 dz}$ quæ formula nonnisi nominibus differt à formulis quas Varignonius dedit in Commentariis Parisiensibus, 1701. 1706.

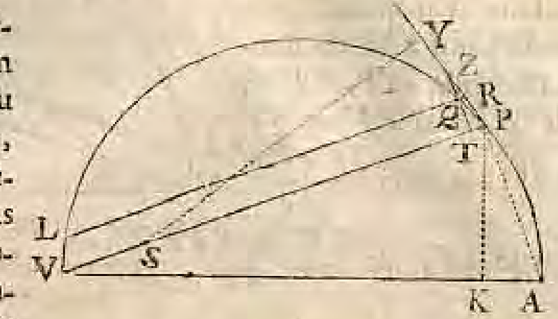
216. Hinc radiorum osculi formula admodum generalis & expedita facile reperitur. Nam invenimus (214) $r = \frac{z dz}{dp} = (215) \frac{z\,dz\,ds^2}{dz\,dy\,ds + z\,ds\,ddy - z\,dy\,dds}$ cum in hâc formulâ nulla fluxio constans assumpta sit, in alias infinitas transformari potest, sumptis pro arbitrio constantibus. Si centrum S, in infinitum abeat, ut rectæ SP, evadant parallelæ, erit $dz\,dy\,ds$, quantitas infinitè parva respectu $z\,ds\,ddy$ & $z\,dy\,dds$; nam cum z finita est $dz\,dy\,ds$, est ejusdem generis cum $z\,ds\,ddy$; ubi igitur z evadit infinita $z\,ds\,ddy$, fit etiam infinita respectu $dz\,dy\,ds$; unde si in formulâ radii osculatoris modò inventâ deleatur membrum $dz\,dy\,ds$, habebitur $r = \frac{ds^2 dz}{ds\,ddy - dy\,dds}$ formula generalis radii osculi in curvis quarum ordinatæ SP parallelæ axique perpendiculares sunt, & in quibus dz, sunt elementa abscissarum.

PRO-

Liber Primus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

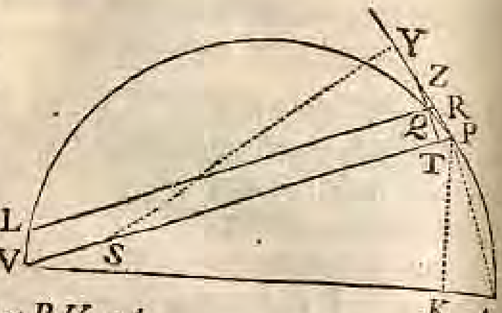


Esto circuli circumferentia $VQPA$; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, S: corpus in circumferentiâ latum P; locus proximus, in quem movebitur Q; & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV; & actâ circuli diametro VA, jungatur AP; & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z, ac denique per punctum Q agatur LR, quæ ipsi SP parallella sit, & occurrat tum circulo in L, tum tangenti PZ in R. Et (l) ob similia triangula ZQR, ZTP, VPA; erit RP *quad.* hoc est QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV\ quad.}{AV\ quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP\ quad.}{QR}$, & punctis P & Q coeuntibus scribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $\frac{SP\ quad \times QT\ quad.}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SP\,q \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$; id est (ob datum AV *quad.*) reciprocè ut quadratum distantiæ seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. $Q E I.$

Idem

(l) 217. Triangula Z Q R, Z T P, similia sunt ob Q R, parallelam T P, per constructionem, & triangula Z T P, V P A, sunt etiam similia ob angulos rectos Z T P, V P A, & æquales V P Z, V A P, quorum communis est mensura dimidius arcus V L, Q P; quare R P : Q T = Z P : Z T = A V : P V. Est autem R P² = Q R × R L, per prop. 36. lib. 3. Elem.

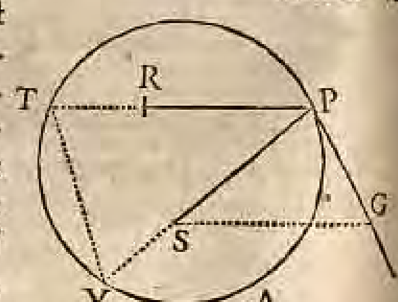
Idem aliter.



Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY: ob similia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP\ quad. \times PV\ cub.}{AV\ quad.}$ æquale $SY\ quad. \times PV$. Et propterea (per. corol. 3. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SPq \times PV\ cub.}{AVq}$, hoc est, ob datam AV reciprocè ut $SPq \times PV\ cub.$ *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si punctum datum S, ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentiâ hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis, quâ corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $RP\ quad. \times SP$ ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & distantiæ corporis à secundo virium centro parallela est.



Nam

218. Idem aliter, cum sit $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$ erit $\frac{SP^3 \times PV^3}{AV^3} = SY^3$ & $\frac{SP^3 \times PV^3 \times R}{AV^3 \times SP} = \frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3} = \frac{SY^3 \times R}{SP}$ & propterea (212) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3}$, seu ob $R = \frac{1}{2}$ AV, & AV, constantem erit reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$.

(m) Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut $RPq \times PT\ cub.$ ad $SPq \times PV\ cub.$ id est, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\ cub. \times PV\ cub.}{PT\ cub.}$, sive ([n] ob similia triangula PSG, TPV) ad $SG\ cub.$

Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $SP \times RPq$, contentum utique sub distantiâ corporis à primo virium centro S & quadrato distantiæ ejus à secundo virium centro R, ad cubum rectæ SG, quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis à secundo virium centro distantiæ RP parallela est. (o) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eædem sunt ac in circulo ejusdem curvaturæ.

PRO-

(m) 219. *Nam per constructionem hujus propos. vis prior est ad vim posteriorem,* (hoc est vis circà S, ad vim circà R) *ut* $RP^2 \times PT^3$ *ad* $SP^2 \times PV^3$. Scilicet in demonstratione hujus propositionis (vid. fig. Prop.) inventum erat $\frac{QRL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$, & punctis P & Q coeuntibus scribatur PV pro RL, & uterque terminus multiplicetur per $SP^2 \times AV^2$ erit $QR \times PV^3 \times SP^2 = QT^2 \times SP^2 \times AV^2$, est verò $QT \times SP$ area cujus arcus est QP, & QR, est ejus sagitta, itaque sagitta per cubum chordæ, & quadratum distantiæ multiplicata, æqualis est quadrato areæ cui respondet, multiplicato per quadratum Diametri. Quod utique verum erit sive agatur de vi ad S, sive de vi ad R tendente (vid. fig. Cor.) Quod si sumi intelligantur arcus æquali tempore descripti circa utramque vim, sagittæ eorum arcuum expriment rationem earum virium centripetarum; & areæ illis temporibus æqualibus circa utramque vim descriptæ æquales erunt, nam per Prop. 1. tempus Periodicum est ad integram superficiem descriptam, ut tempus quodvis ad aream ipsi respondentem, ut ergo eodem tempore Periodico idem circulus circa utramque vim absolvitur, quæriturque area eidem tempori correspondens, illa area eadem erit utriusque vis respectu, ideoque productum quadrati areæ per quadratum Diametri idem erit tam respectu vis S, quam respectu vis R, ergo sagitta pertinens ad vim S multiplicata per cubum ejus chordæ P V, & quadratum ejus distantiæ SP æqualis erit sagittæ pertinenti ad vim R, multiplicatæ per cubum ejus chordæ P T & per quadratum ejus distantiæ R P, ea enim facta, quadrato areæ in quadratum Diametri ducto æqualia sunt, ideo Sagittæ illæ, sive vires in S & R erunt reciprocè ut illæ quantitates quæ eas multiplicant, hoc est Sagitta in S est ad Sagittam in R sicut $RP^2 \times PT^3 : SP^2 \times PV^3$. Q. E. D.

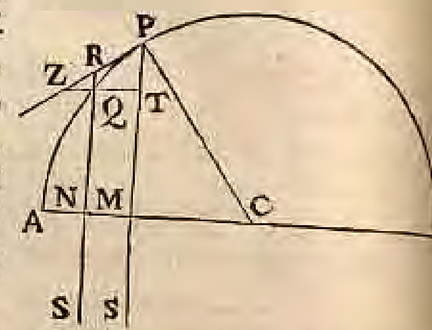
(n) 220. Triangula P S G, T P V, similia sunt, ob angulos P S G, S P T æquales quia sunt alterni inter parallelas S G, T P, & angulos V P G, V T P, æquales per 32. lib. 3. Elem. undè $TP : PV = SP : SG = \frac{SP \times PV}{TP}$ & $SG^3 = \frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$.

(o) 221. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P, eædem sunt ac in circulo orbitam osculante in P, vis enim illa in P, est semper eadem ac si corpus in arcu evanescente circuli osculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evanescente usurpari possit.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in ſemicirculo PQA: ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum S, ut lineæ omnes PS, RS ad id ductæ, pro parallelis haberi poſſint.

A ſemicirculi centro *C* agatur ſemidiameter *CA* parallelas iſtas perpendiculariter ſecans in *M* & *N*, & jungatur *CP*. Ob (p) ſimilia triangula *CPM*, *PZT* & *RZQ* eſt *CPq* ad *PMq* ut *PRq* ad *QTq*, & ex naturâ circuli *PRq* æquale eſt rectangulo $QR \times \overline{RN+QN}$, ſive coeuntibus punctis *P* & *Q* rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo eſt *CPq* ad *PM quad.* ut $QR \times 2PM$ ad *QT quad.* ideoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\ PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2\ PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$. Eſt ergo (per corollarium 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2\ PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$, hoc eſt (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2\ SP\ quad.}{CP\ quad.}$) reciprocè ut *PM cub.* Q. E. I.



(q) Idem facilè colligitur etiam ex propoſitione præcedente.

Scho-

(p) 222. Similia ſunt triangula CPM, PZT, anguli enim ad M & T recti æquales ſunt, & quoniam anguli ZPT + MPC, & anguli MPC + MCP, recto æquantur, erit etiam MCP = ZPT; & $PR^2 = QR \times \overline{RN+QN}$ (per Prop. 36. lib. 3. Elem.) Cum autem CP ſit radius circuli & SP ſit linea infinita adeòque SM = SP, erunt CP, SP, $\frac{2SP^2}{CP^2}$, quantitates conſtantes.

(q) 223. *Idem facilè colligitur ex propoſitione præcedente* quâ conſtat vim centripetam eſſe reciproce ut $SP^2 \times PV^3$. Nam centro virium S in infinitum abeunte, omnes SP ſunt æquales adeòque conſtantes, & propterea vis reciproce ut PV^3.

224.

Scholium.

(r) Et argumento haud multum diſſimili corpus invenietur moveri in ellipſi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ ſit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

(r) 224. Ut multa de ſectionibus Conicis mox erunt dicenda, viſum eſt eas præmittere ex Conicis propoſitiones quæ ſæpius occurrent, ne memoriæ vitio aut faſtidio ad alios Autores recurrendi demonſtrationum vis Lectores fugiat.

Def. 1°. Si Planum quodpiam ſecet conum, ſed per ejus Verticem non tranſeat, interſectio Coni & iſtius Plani dicitur *Sectio Conica*.

2°. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano ſecanti, conum ipſum vel ſecabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; Hinc diſtinguuntur ſectionum Conicarum ſpecies, dicentur primo caſu *Hyperbolæ*, 2°. *Parabolæ*, 3°. *Ellipſes*.

3°. Si ſint duo Coni ſimiles ſibi per Verticem oppoſiti, illud planum verticale quod unum è Conis ſecat, alterum etiam ſecabit, ideo, planum ſectionis ipſi Parallelum utrumque etiam Conum ſecabit, & ex utriuſque Coni ſectione formabuntur in eo Plano duæ *Hyperbolæ oppoſitæ*.

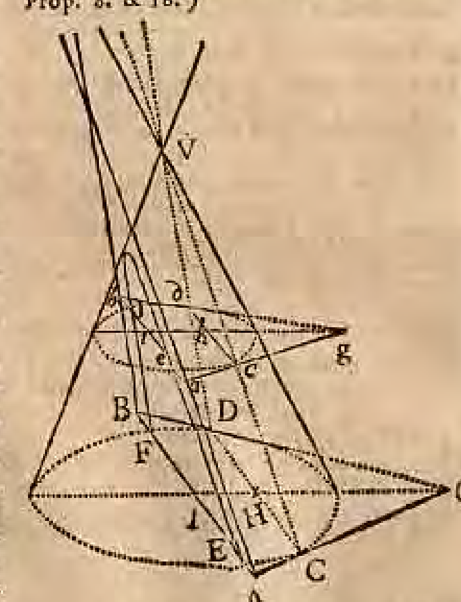
4°. Si ſecundùm lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum ſecat Coni ſuperficiem, applicentur duo plana Conum tangentia, eorum cum plano Hyperbolarum interſectiones, dicuntur Hyperbolarum *Aſymptoti*; nam ut ea plana ſuperficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam ſuperficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in ſuperficie Coni & quæ eſt in plano lineis quas tangunt parallelo.

Lemma I. Sit linea ab unâ Aſymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam ſecetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales.

Et ſi lineæ, inter ſe Parallelæ, ab unâ Aſymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriuſque Parallelæ per Hyperbolam ſectæ.

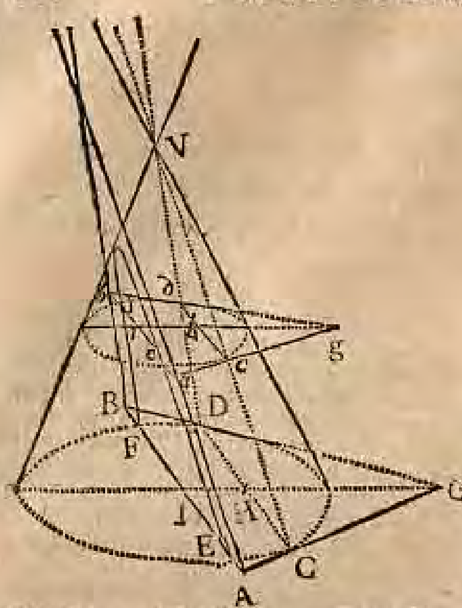
Si verò lineâ ab unâ Hyperbolâ ad oppoſitam ductâ per Aſymptotos ſecetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales.

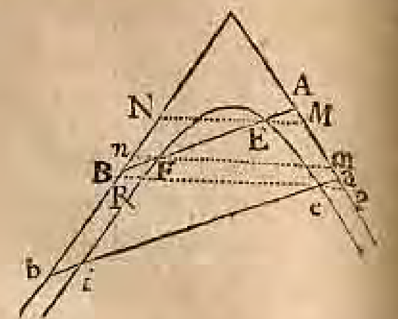
Ex ſi lineæ, inter ſe Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppoſitam ducantur, æqualia erunt facta partium utriuſque Parallelæ per Aſymptotum ſectæ (Apoll. lib. 2. Prop. 8. & 16.)



Demonſt. Primum talis ſit linea AB ut planum per eam lineam duci poſſit baſi coni parallelum, cujus ſectio cum cono erit circulus CEFD, ducatur planum VCD per verticem Coni VCD plano Hyperbolarum parallelum & ſecundum lineas VC, VD applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Aſymptoti & Tangentes circuli

CE





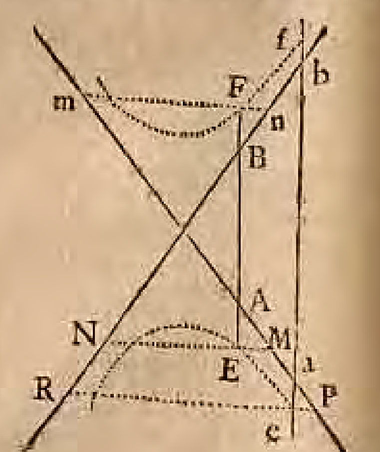
CEFD in punctis C & D: concurrant illæ Tangentes in G; ex G per centrum circuli ducatur linea GHI quæ erit perpendicularis in chordam CD eamque bifariam secabit, ut etiam ejus Parallelam AB, & chordam EF (per 3. 3. Elem.) est ergo $IA = IB$, & $IE = IF$ unde $IA - IE$ sive $AE = IB - IF$ sive BF & (per 36. 3. Elem.) $\overline{CA}^2 = AF \times AE = AF \times BF$.

Sit verò linea ab huic Parallela, sive in eâdem sive in oppositâ sectione; simili ratiocinio ostendetur esse $ac = bf$; & $\overline{ca}^2 = af \times ac = af \times bf$. Sed figura ACac est Parallelogramma, est enim tota in plano Tangente Conum, & terminatur per sectiones planorum Parallelorum, nam Cc & Aa sunt sectiones plani Verticalis & plani Hyperbolarum ipsi Paralleli, & CA & ca sunt sectiones planorum basi coni Parallelorum; est ergo $CA = ca$ & $\overline{CA}^2 = \overline{ca}^2$, ac per consequens $AF \times BF = af \times bf$.

Casus 2dus. Quod si linea AB utcumque sit ducta inter Asymptotos, & Hyperbolam secet in E & F erit $AE = BF$, nam per E & F ducantur lineæ MEN, mFn, tales ut plana per eas ducta sint basi Coni parallela Triangula AEM & AFm, BFn & BEN erunt similia propter Parallelas, est ergo $AE : AF = EM : Fm$
& $BE : BF = NE : nF$, est ergo per compositionem rationis... $AE \times BE : AF \times BF = EM \times NE : Fm \times nF$, sed per demonstrationem primi casus est $EM \times NE = Fm \times nF$, ergo $AE \times BE = AF \times BF$, unde (per Prop. 16. 6. Elem.) $AF : AE = BE : BF$ & dividendo $AF - AE$ sive $EF : AE = BE - BF$ sive $EF : BF$, cum ergo sit $EF : AE = EF : BF$ est $AE = BF$.

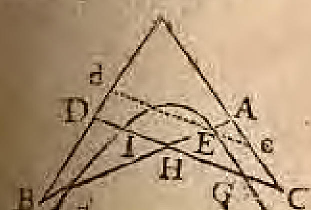
Ducatur verò linea quævis ab, priori AB parallela, & per punctum e ducatur linea PeR lineæ MEN parallela, similia erunt Triangula AEM & aeP, BEN & beR ob parallelas
est ergo $AE : ae = EM : eP$
& $BE : be = EN : eR$, est ergo per compositionem rationis... $AE \times BE : ae \times be = EM \times EN : EP \times eR$, sed per casum primum est $EM \times EN = eP \times eR$, ergo $AE \times BE = ae \times be$.

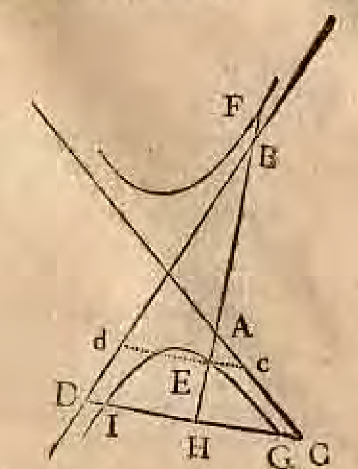
Casus 3us. Si lineæ de quibus agitur,



ab unâ Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur & per Asymptotas secarentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 2°. casu, nisi quod in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

Lemma II. Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ lineæ sumptarum à puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.





Lineæ AB, DC sibi mutuo occurrant in H, est $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$.

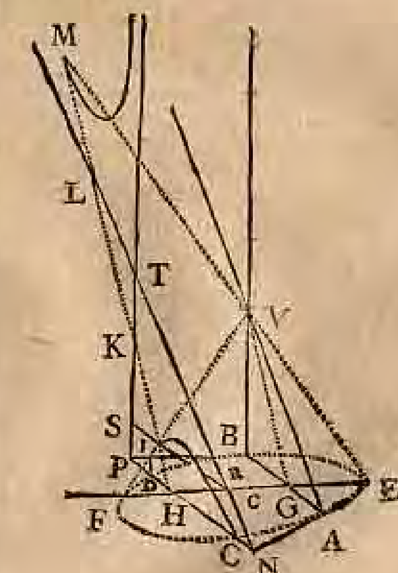
Demonst... Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam AB productam si necesse sit, linea cEd, alteri lineæ datæ CHD Parallela: similia erunt Triangula AHC & AEc, BHD & BED: unde habebuntur hæ proportiones

AH sive $AE + EH : AE = HC$ sive $CG + GH : cE$

& BH sive $BF + FH : BE = HD$ sive $DI + IH : dE$, & per compositionem rationis $AE \times BF + AE \times FH + EH \times BF$ (sive AE per Lem. I.) $+ EH \times FH : AE \times BE = CG \times DI + CG \times IH + GH \times DI$ (sive CG per Lem. I.) $+ GH \times IH : cE \times dE$ (sive $CG \times DG$ per Lem. I.) est verò $BF + FH + HE = BE$, & $DI + IH + HG = DG$ ergo est $AE \times BE + EH \times FH : AE \times BE = DG \times CG + GH \times IH : CG \times DG$.
& dividendo: $EH \times FH : AE \times BE = GH \times IH : CG \times DG$
ergo alternando $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$.

Eadem est demonstratio sive lineæ sint in eadem Hyperbola, sive, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, sive ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium &c.

Lemma III. Sint duæ Parallelæ in sectione Conicâ ductæ quæ secentur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallelæ sumptarum à curvâ ad punctum ejus intersectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum à curvâ ad punctum intersectionis cum Parallelâ.



Sint A B, C D, parallelæ sectæ per lineam E F in punctis G & H, erit $AG \times GB : CH \times HD = EG \times GE : EH \times HF$.

Sit V, vertex coni, ex eo ducantur V E, V F ad extremitates lineæ E F; ducatur in B A, planum V A B, per verticem coni transiens & in C D planum Hyperbolarum ipsi Parallelum, in plano V B A ducatur VG, & in H, H M ipsi VG parallela quæ jacebit in plano Hyperbolarum: erunt Triangula V G E & M H E, V G F & I H F ergo similia unde habentur hæ proportiones

$$VG : MH = EG : EH$$

& $VG : IH = FG, FH$, & per compositionem rationis

$$\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH.$$

Lineæ V E, V F ductæ per verticem coni & punctum in ejus superficie sumptum sunt semper in superficie coni, ergo earum intersectiones I & M cum linea H M in plano Hyperbolarum ductâ sunt in ipsâ curvâ Hyperbolicâ cujus Asymptoti sint T N, T P parallelæ lineis V A, V B; per punctum I in quo linea H M occurrit Hyperbolæ ducatur S I R lineis DC & AB parallela, similia erunt Triangula V A G & L R I, V B G & K S I lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

$$VG : AG = LI : RI$$

& $VG : GB = KI : SI$ & per compositionem rationis

$\overline{VG}^2 : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI$ ($= PD \times DN$ per Lem. I.) Sed per Lemma II. est

$$LI \times KI : PD \times DN = MH \times IH : CH \times DH$$

est ergo

$$\overline{VG}^2 : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH$$

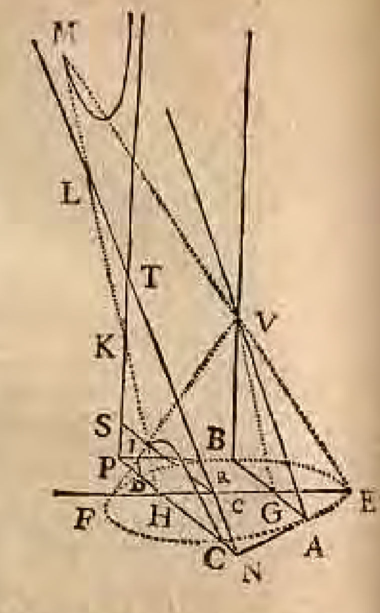
& alternando

$$\overline{VG}^2 : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH.$$

Erat autem $\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times FG : EH \times FH$, ex primâ demonstrationis parte, est ergo $AG \times GB : CH \times DH = EG \times FG : EH \times FH$. Q. E. D.

Cas. 2. Si punctum F infinite distaret à puncto E, linea F G æqualis censenda foret lineæ F H, ideoque $EG \times FG : EH \times FH = EG : EH = AG \times GB : CH \times DH$, hoc est ipsæ partes secantis forent inter se sicut facta partium parallelarum quas secat.

Cas. 3. Si punctum F non foret in eâdem sectione in qua est punctum E sed in opposita, eadem foret demonstratio nisi



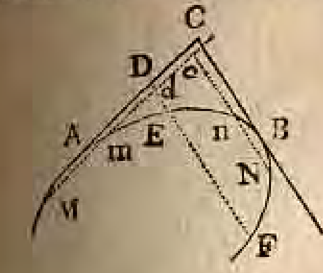
quod puncta M & I, in eadem Hyperbola forent.

Cas. 4. Eadem etiam fiet demonstratio sive puncta G & H sint intra extremitates Parallelarum A B, C D, aut intra vertices E & F lineæ secantis, sive sint extra.

Corol. 1. Sumatur medium lineæ secantis puncta E & F sitque c, si intersectio ejus lineæ per Parallelam sit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis à Centro ad intersectionem sumptæ, v. gr. erit $EG \times GF = \overline{cE}^2 - \overline{cG}^2$ ut liquet per 5. 2. Elem. Si intersectio ejus lineæ sit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus à Centro ad intersectionem sumptæ dempto quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret $EG \times GF = \overline{cG}^2 - \overline{cE}^2$, ut liquet per 6. 2. Elem.

Corollar. 2. Ex puncto quovis ductæ sint duæ Tangentes ad sectionem Conicam, & ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur linea trans sectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis est ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum partis

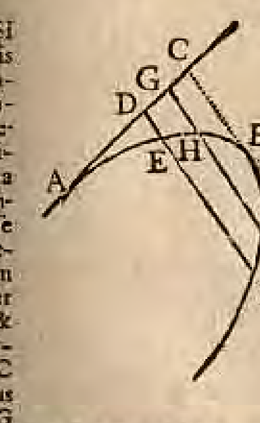
tis in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangentem & curvam comprehensam (Apol. lib. 3. Prop. 16.)



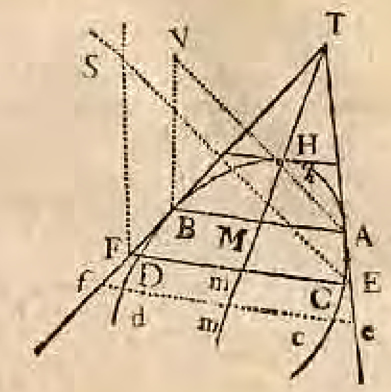
Sint A C, C B Tangentes sectionis Conicæ A B F, ex D ducatur D E F parallela C B, erit $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$.

Ducatur M m c parallela Tangenti A B, & N n c parallela Tangenti C B, & M m c lineam D E F secet in d, erit per Lem. sup. $cn \times cN : dF \times dE = Mc \times mc : Md \times md$, est enim M c linea secans parallelas c N, d F; evanescant arcus M m, & N n, coincident lineæ M m c cum A C & N n c cum B C, eritque $cn = CN = CB$, $dF = DF$, $dE = DE$, $Mc = mc = AC$, $Md = md = AD$, ergo erit $\overline{CB}^2 : DF \times DE = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$ & permutando & alternando $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$. Q. D. E.

Coroll. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per earum partem inter Tangentem & curvam interceptam. Sit A C Tangens ex ejus punctis D & G



ducantur Parallelæ D E F, G H I, erit $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$, nam supponatur in B ea Tangens quæ his lineis sit Parallela seceque priorem in C erit per Corollarium superius $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE = \overline{AG}^2 : GI \times GH$ ergo alternando, $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$. Q. D. E.



Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrit; illæ Parallelæ quas bisecat ipsi ordinatim applicatæ dicantur, & earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam usque, dicetur ejus abscissa: & denique ea Diameter quæ Parallelas bisecando simul est illis perpendicularis dicatur Axis.

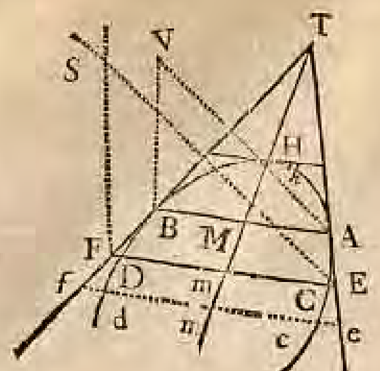
His positis 1°. Linea quæ duas Parallelas bisecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bisecabit. (Apol. lib. 2. Prop. 28.)

2°. Linea in Vertice Diametri ducta & Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice (Apol. Lib. 1, Prop. 17.) & vice versâ ea linea erit Diameter quæ bisecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (Apol. Lib. 2. Prop. 7.)

Denique; Quadrata ordinatarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ A B ducantur Tangentes quæ concurrant in T, per

DE MOTU CORPORUM.



per medium M, lineæ A B ducatur T M m sitque linea D C parallela lineæ B A hinc inde producta donec Tangentibus T B, TA productis si necesse sit in E & F occurrat: Per A B & Verticem coni V ducatur planum V A B, & per E F planum ipsi Parallelum quod Hyperbolam in Cono formabit, erit ergo D C linea ad Hyperbolam pertinens, & propter Tangentes B F A E, puncta F & E ad Asymptotos pertinebunt, ergo (per Lem. I.) est $EC = FD$, sed ob parallelas A B, E F & quia bifariam dividitur A B in M per lineam T M m erit $mE = mF$, itaque $mE - EC$ (sive mC) $= mF - FD$ (sive mD) ergo linea T M, lineam CD lineæ A B parallelam bifariam dividit, idem verò de quâvis linea c d parallelâ lineæ AB demonstrabitur ergo linea M m per medium linearum A B, C D, transiens omnes earum Parallelas in curva terminatas bifariam dividit. Est ergo Diameter curvæ.

2°. Linea per Verticem Diametri H ducta, & ordinatis Parallela est tangens curvæ, pone enim illam lineam sectioni iterum occurrere in h, linea T M quæ dividit bifariam omnes Parallelas lineæ A B in curva terminatas, deberet bifariam dividere lineam H h, sed illud absurdum, siquidem illam attingit in ejus extremo H, ergo linea per verticem Diametri ducta ordinatis parallela curvam iterum non attingit, est ergo Tangens in puncto H. Vice versâ sit Tangens lineæ A B parallela, & ex medio M lineæ A B per H punctum contactus ducatur linea, ea erit Diameter; si enim Diameter quæ transit per M ad h non verò ad H pertingeret, ducatur per h linea Parallela lineæ A B, ea erit Tangens in h; eritque Parallela Tangenti in H, sed illud est absurdum, ergo linea M H est Diameter.

Denique cum Diameter secet Parallelas sint (juxta Lem. III.) facta partium Parallelarum, ut facta partium quas secant in Diametro, sed partes singulæ Parallelæ à Diametro sectæ sunt utrinque æquales & ordinatæ dicuntur, ergo quadrata Ordinatarum sunt ut facta partium quas secant in Diametro.

Lemma V. E quovis puncto Sectionis Conicæ ducatur ordinata ad Diametrum, & Tangens quæ illi Diametro occurrat in quodam puncto: distantiæ hujus puncti ab utroque vertice Diametri erunt inter se sicut abscissæ ab utroque vertice Diametri sumptæ (Apollon. l. 1. prop. 34.)

E puncto P curvæ ducatur ordinata P O ad Diametrum A D, & in eâ sumatur punctum M tale ut sit $AM : DM = AO : DO$, ducaturque linea P M, illa in nullo alio puncto F curvæ occurret, hoc est, erit Tangens in P.

Demonst... Ex eo puncto supposito F ducatur ordinata F H, erit $MO : MH = PO : FH$ & $\overline{MO}^2 : \overline{MH}^2 = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$, sed si F pertineat ad curvam est (per Lem. IV.) $AO \times OD : AH \times HD = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$ ergo $AO \times OD : AH \times HD = \overline{MO}^2 : \overline{MH}^2$ & alternando $AO \times OD : \overline{MO}^2 = AH \times HD : \overline{MH}^2$. Ducantur autem per A & D lineæ A X D K parallelæ P M quæ secent P O ejusque productionem in E & K, & per P & H ducatur linea quæ parallelas A X & D K in I & S, secet, similia erunt Triangula AOE, MOP, DOK ob parallelas, unde habentur hæ proportiones $AO : MO = AE : MP$.

& $OD : MO = DK : MP$ & per compositionem rationis erit

$AO \times OD : \overline{MO}^2 = AE \times DK : \overline{MP}^2$.

Pariter similia sunt Triangula AHI, MHP, DHS, unde est: $AH : MH = AI : MP$

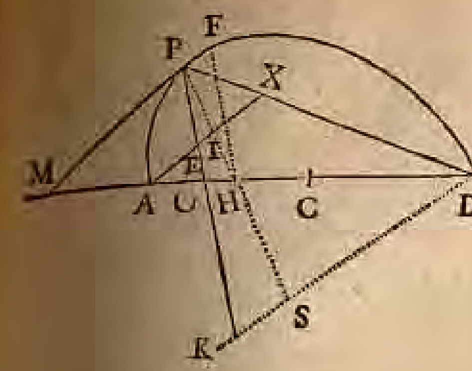
& $DH : MH = DS : MP$,

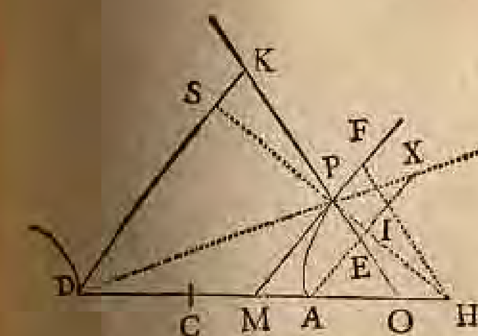
& per compositionem rationis erit

$AH \times DH : \overline{MH}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2$.

Sed si F pertinet ad curvam invenitur $AO \times OD : \overline{MO}^2 = AH \times DH : \overline{MH}^2$, foret ergo $AE \times DK : \overline{MP}^2 = AI \times DS : \overline{MP}^2$.

LIBER PRIMUS.





sive $AE \times DK = AI \times DS$ & $AE : AI = DS : DK$, quod absurdum esse in datâ Hypothesi sic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur P D, quæ lineam A E I (productam si necesse sit) secet in X; ob parallelas P M, X A est $AM : DM = PX : DP$ & $PX : DP = XE : DK$,

& ob Triangula similia A O E, D O K est $AO : DO = AE : DK$, & quia per Hypothesim est $AM : DM = AO : DO$, erit $XE : DK = AE : DK$ ideoque in datâ Hypothesi $XE = AE$ & cum sit $XI : XE = DS : DK$ ob parallelas, erit $XI : AE = DS : DK$ erat verò ex suppositione quod F est in curva, $AE : AI = DS : DK$, foret ergo $XI : AE = AE : AI$, & $AE^2 = XI \times AI$. Sed AE^2 quadratum dimidii lineæ A X est semper majus Rectangulo ejus partium $XI \times AI$ (per 5. 2. Elem.), absurdum ergo est ea esse æqualia quod tamen sequitur supposito punctum F ad curvam pertinere, ideoque, M P curvam tangit in P. Sed ad idem cujusvis curvæ punctum duas Tangentes rectas duci non posse ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangens in P, ita occurrit Diametro ut sit

$AM : DM = AO, DO$. Q. E. D.

Cor. 1. Si Diameter A D sit infinita hoc est punctum D ad infinitum removeatur, D M & D O æqualia censenda sunt, cum ergo sit $DM : AM = DO : AO$ erit $AM = AO$; sive distantia puncti concursûs Tangentis cum Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abscissæ ab eodem vertice sumptæ (Ap. lib. 1. 35.)

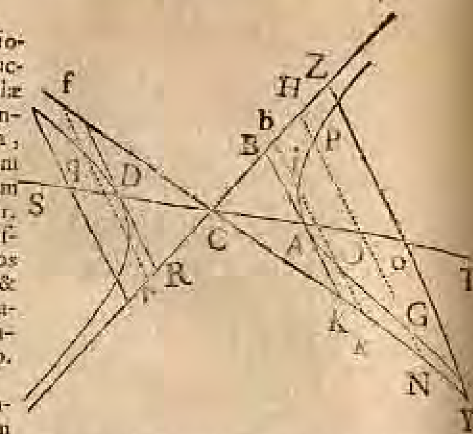
Cor. 2. Si Diameter A P sit terminata, ejusque medium sit C sitque P O ordinata fiatque $CM, CA = CA : CO$, erit P M tangens in puncto O; Etenim sumendo summam & differentiam terminorum harum rationum est,

$CM + CA : CA + CO = CM - CA : CA - CO$

sive in primâ ratione ponendo DC pro CA, est $DM : DO = AM : AO$ aut alternando $DM : AM = DO : AO$, ergo (per Lemma) MP erit Tangens in P, est ergo semidiameter media proportionalis inter abscissam à centro sumptam, & partem Diametri à centro ad concursum Tangentis comprehensam. (Apol. Lib. 1. 37.)

Cor. 3. In Puncto P Sectionis Conicæ ducatur Tangens, quæ secet Diametrum in M, & ducatur ordinata P O quæ secet Diametrum in O factum partium Diametri $AO \times DO$ est æquale facto $CO \times OM$ ex partibus lineæ à Centro ad Tangentem sumptæ & per ordinatam in O sectæ. Cum enim sit $CM : CA = CA : CO$ tollendo terminos secundæ rationis à terminis primæ erit $MA : AO = CA$ (sive DC) $: CO$, unde componendo erit $MO : AO = DO : CO$, ideoque $AO \times DO = CO \times MO$: & (per 5. vel 6. 2. Elem.) prout O est inter A & D vel ultra, erit $CO \times MO = AC^2 - CO^2$ vel $CO^2 - AC^2$, unde deducitur $MO = \frac{AC^2 - CO^2}{CO}$ vel $\frac{CO^2 - AC^2}{CO}$.

De Hyperbolâ.



Theor. I. Lineæ omnes ab Interſectione Aſymptotorum in eorum Angulo ductæ & utrinque productæ, ſunt Hyperbolæ utriuſque Diametri, & earum portio inter utramque Hyperbolam comprehenſa, dicitur Diameter tranſverſa, & bifariam dividitur in Interſectione Aſymptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum vocatur. Tangentes verò in utroque vertice ejuſdem Diametri ductæ & inter Aſymptotos comprehenſæ ſunt inter ſe Parallelæ & æquales, & bifariam dividuntur ab ea Diametro dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (Apol. lib. 1. Prop. 30. lib. 2. Prop. 3. & 19.)

Demonſt. Ducta enim quomodocunque linea S C T in Angulo Aſymptotorum ZCY per earum interſectionem C, ſi crura CZ & CY ſumantur reciprocè proportionalia ſinibus Angulorum adjacentium, ducaturque linea ZY illa per lineam SCT bifariam dividetur; nam in Triangulo C Z Y eſt C Z : C Y = Sin. Y : Sin. Z = Sin. Y C o : Sin. Z C o (per conſt.) & alternando, Sin. Y : Sin. Y C o = Sin. Z : Sin. Z C o. Sed in Triangulo C o Y eſt

Sin. Y : Sin. Y C o = C o : Y o,

& in Triangulo C M Z eſt

Sin. Z Sin. Z C o = C o : Z o,

ergo cum duæ priores rationes ſint æquales, eſt C o : Y o = C o : Z o, ideoque Y o = Z o.

Omnis autem linea H N lineæ Z Y parallela ſimiliter bifariam dividetur in O per lineam S T, partes autem ejus inter Hyperbolam & Aſymptotum utrinque contentæ ſunt æquales, per Lem. I. cum ergo ſit ſemper H O = O N, & H P = G N eſt H O − H P = N O − N G ſive O F = O G. Ergo linea S T, lineas omnes lineæ Z Y parallelas, in Hyperbola contentas bifariam ſecat, eſt ergo ejus Diameter per Lemma V.

Sint verò A & D puncta in quibus linea S T occurrit Hyperbolis, per ea ducantur B A K, F D R parallelæ lineæ Z Y inter Aſymptotos contentæ, ergo biſecantur in A & D, cum verò ſint parallelæ ordinatis Diametro S T ſunt Tangentes in verticibus A & D (per Lemma IV.) & inter ſe Parallelæ.

Dico præterea eas eſſe æquales, ducantur enim Parallelæ ipſis proximæ b i K, f q r: erit f q × q r = b i × K i (per Lem. I.) accedentibuſque ordinatis ad Tangentes fit tandem f q = F D, q r = R D; b i = B A, & K i = K A eſt ergo F D × R D = B A × K A, ſed eſt F D = D R & B A = K A ergo F D² = B A² & F D = B A = K A. Unde tandem cum Triangula CAK & C D F ſint ſimilia, & ſit C A : C D = K A : F D eſt etiam C A = C D.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro tranſverſæ & Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; Eſt Diameter tranſverſa ad Latus Rectum ut factum Abſciſſarum ab utroque vertice ſumptarum, ad quadratum Ordinatæ; Hinc iſta curva ὑπέρβολα ſive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus eſt facto lateris Recti per abſciſſam à proximo vertice (Apol. lib. I. Prop. 21.) Coincidit verò hæc propoſitio cum iſta, eſt quadratum Diametri Tranſverſæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abſciſſarum ad quadratum ordinatæ.

Demonſt. Sit ut prius Diameter tranſverſa D A T, conjugata B A K & ordinata inter Aſymptotas contenta HPOGN: ſunt (per Lem. II.) facta partium ſumptarum in lineis D O, H N à puncto Hyperbolæ ad utramque Aſymptotum, ſicut facta partium earundem linearum à puncto concurſus O, uſque ad Hyperbolam ſumptarum; hoc eſt A C × A C : G N × G H = A O × D O : P O × G O. Sed G N × G H æqualis eſt quadrato ſemi Tangentis B A, ſive ſemidiametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) eſt G N × G H = b i × K i & per præced. dem. b i × K i = B A²) & eſt P O = G O ideo pro-

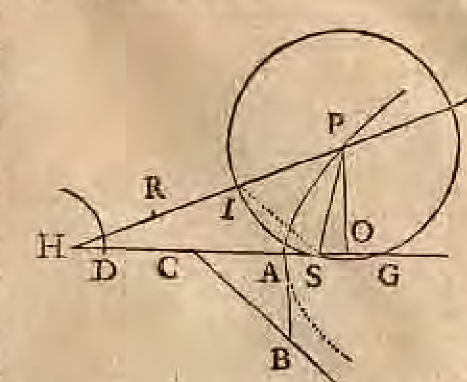
portio ſuperior huc redit, A C² : B A² = A O × D O : P O². Sit verò L latus rectum, eſt per ejus definitionem 2 A C : 2 B A = 2 B A : L, ergo eſt 2 A C : L = 4 A C² : 4 B A² = A C² : B A² ideoque 2 A C. L = A O × D O : P O².

Hinc deducitur quod $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2\,AC}$

$= \frac{DO}{AD} \times L \times AO$ ut ergo D O eſt ſemper major quàm A D, eſt etiam P O² ſemper major quàm L × A O. Q. E. D.

Theor. III. Diameter illa quæ Aſymptotorum Angulum bifariam dividit eſt perpendicularis ſuis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideoque eſt Axis Hyperbolæ & ejus Diameter Conjugata Axis conjugatus: ſi à Centro feratur utrinque in Axem longitudo Aſymptoti à centro ad extremum Axis conjugati ſumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, & ſi à focis ad quodvis Hyperbolæ punctum ducantur lineæ, earum differentia eſt ſemper Axi tranſverſo æqualis. Latus Rectum axis dicitur Latus rectum Principale, & tota linea ordinatim Axi applicata in foco eſt æqualis illi lateri recto Principali; quod erit majus quadruplo diſtantiæ verticis à foco, ſi denique bifariam dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, linea eum angulum biſecans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (Apol. lib. 3. 51.)

Demonſt. Ducatur quævis linea ex foco H, ſumatur H I = D A, & ducta I S ad alterum focum S, fiat I S P = P I S erit P I = P S, ideoque differentia linearum HP, S P erit H I = D A ſeu axi tranſverſo, dico hoc poſito, P ad Hyperbolam pertinere. Centro P, radio P S, deſcribatur circulus I S G N habebitur hæc proportio, H I : H S = H G. H N ſumatur dimidium harum linearum manebit proportio, ſit autem ½ H I = H R, ½ H S = C S ½ H G = ½ H S + ½ S G & demiſſa P O perpendiculari in S G eſt ½ S G = S O, ergo ½ H G = C S + S O = C O, Denique ½ H N = ½ H I + ½ I N = R I + I P = R P eſt ergo H R : C S = C O : R P: componendo primum habetur HR : CS + HR = C O : R P + C O & prioris rationis terminos terminis ſecundæ jungendo habetur H R : C S + H R = C O + H R :



H R + R P + C S + C O, ſive quia H R = A C = D C, & C S = C H eſt A C : C S + A C = D O : H P + H O. At operationibus contrariis in eandem proportionem HR : CS = CO : RP factis, hoc eſt, dividendo & poſtea prioris rationis terminos e terminis ſecundæ detrahendo, ſubſtitutionibus factis erit

A C : C S − A C = A O : H P − HO,

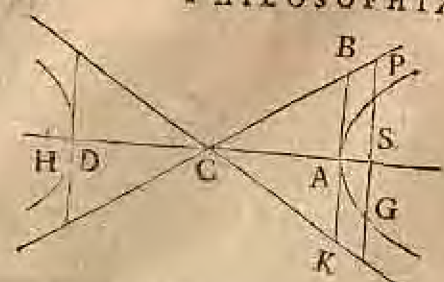
multiplicatis ergo terminis utriuſque proportionis erit

A C² : CS² − AC² = AO × DO : HP² − HO²

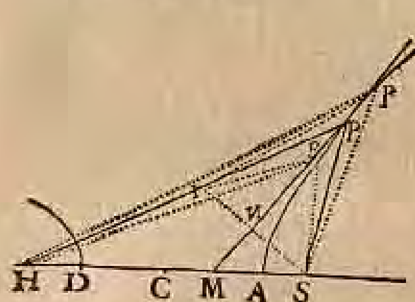
ſit autem perpendicularis A B erecta ab A uſque ad Aſymptotam C B, eſt C B = C S, & C S² − A C² = A B²; eſt etiam H P² − H O² = P O², eſt ergo

A C² : A B² = A O × D O : P O², ſed eſt AC² : AB² = BO × A O ad quadratum ordinatæ in O, (per Thor. II.) ergo PO eſt ipſa illa ordinata & punctum P ad Hyperbolam pertinet.

Sit autem P S ordinata in foco, erit A C² : A B² = A S × D S : P S² eſt verò D S = C S + A C & A S = C S − A C, ergo B S × A S = C S² − A C² = A B², ergo A C² : A B² = A B² : P S², & A C : A B = A B : P S, & duplicando omnes

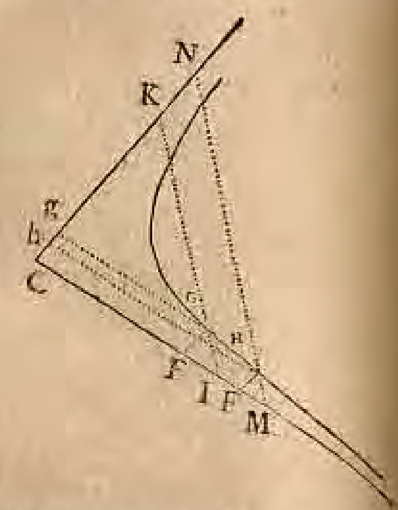


terminos $2\,AC : 2\,AB = 2\,AB : 2\,PS$ sive PG. Sed est per naturam lateris recti $2\,AC : 2\,AB = 2\,AB : L$, ergo $L = PG$: & $\frac{1}{2}L = PS$, sed cum per Theor. II. sit $PO^2 = \frac{DO}{AB} \times L \times AO$ erit ergo PS^2 sive $\frac{1}{4}L^2 = \frac{DS}{AB} \times L \times AS$ & $\frac{1}{4}L = \frac{DS}{AB} \times AS$, ut itaque DS est major AB, erit $\frac{1}{4}L$, major AS.



Denique. Ducantur à focis lineæ HP, SP, linea PM bifariam dividat angulum P; dico eam esse Tangentem Hyperbolæ in P; hoc est illam non occurrere Hyperbolæ in alio quovis puncto p; ex HP tollatur $HI = DA$, erit $PI = PS$ (per hoc Theor.) & ducta IS erit PM perpendicularis in medium N lineæ IS, ex alio quovis puncto p ducantur rectæ pI pS erunt inter se æquales, ob æqualia Triangula pNI, pNS (per 4. 1. Elem.) sed si p esset in Hyperbola, esset $Hp = HI + pS$ sive quia $pI = pS$ esset $Hp = HI + Ip$, quod absurdum (per 20. 1. Elem.)

Theor. IV. Si sumantur pro abscissis portiones quævis Asymptoti ab Hyperbo-



læ centro, & Ordinatæ sint Parallelæ alteri Asymptoto, Ordinatæ erunt suis Abscissis reciprocè proportionales; Et area inter Asymptotum, Hyperbolam, ordinatam Vertici axis occurrentem & ordinatam quamvis comprehensa erit abscissæ hujus ordinatæ Logarithmus.

Demonst. Sit C centrum Hyperbolæ, CE CF abscissæ, EG FH ordinatæ Asymptoto CN parallelæ dico quod est $CE : CF = FH : EG$; Ductis enim per G & H lineis Gg, Hh parallelis Asymptoto CF, & IGK, MHN inter se parallelis trans Hyperbolam, erunt similia Triangula IGE & MHF, GKg & HNh propter Parallelas, ideoque est

$$IG : MH = GE : HF$$

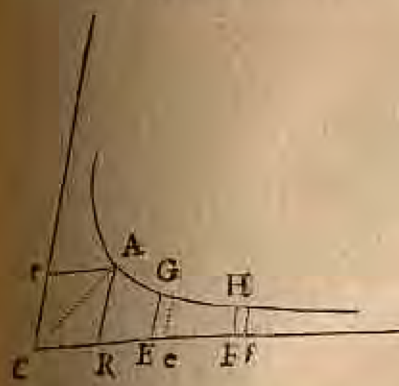
& $GK : HN = Gg$ (sive CE) : Hh (sive FC) compositis rationibus est

$IG \times GK : MH \times HN = GE \times CE : HF \times FC$, Sed, (per Lem. I.) est $IG \times GK = MH \times HN$, ergo $GE \times CE = HF \times CF$ est ergo $CE : CF = HF : GE$,

cum autem Parallelogrammata CG, CH sint æquiangula & ea lateribus reciprocè contineri sit demonstratum, sunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ esse abscissarum Logarithmos, ex centro C ducatur axis CA, & ex vertice A ducantur lineæ AR Ar Asymptotis Parallelæ, ob Angulum C bifariam divisum & parallelas, erit $CR = AR$ sit $AR = 1$; & fingantur duæ ordinatæ quæ ita moveantur ut abscissæ unius sint

sem-



semper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis est semper 1, sed procedendo si $CE = x$ debebit esse $CF = x^n$, erunt ergo $GE\ \frac{1}{x}$ & $HF\ \frac{1}{x^n}$ est enim

$CE : CR = AR : GE$ sive $x : 1 = 1 : \frac{1}{x}$

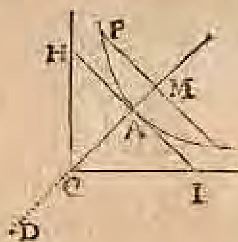
& $CF : CR = AR : FH$ sive $x^n : 1 = 1 : \frac{1}{x^n}$,

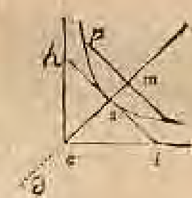
fluxio autem lineæ CE erit $dx = Ee$, & lineæ CF erit $nx^{n-1}dx = Ff$, ideo areæ RG fluxio erit $dx \times \frac{1}{x} = \frac{dx}{x}$ & areæ RH, $nx^{n-1}dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{n\,dx}{x}$ sed $\frac{dx}{x} : \frac{n\,dx}{x} = 1 : n$, sunt ergo fluxiones earum arearum in Ratione constanti 1 ad n, ideoque & areæ integræ RG, RH quæ sunt earum summæ, sunt in eadem ratione 1 ad n, sunt autem 1 & n Exponentes potentiarum abscissarum CE, CF, sunt ergo areæ sicut illi exponentes, sed Logarithmi sunt semper ut Exponentes potentiarum quantitatum quarum sunt Logarithmi, ergo illæ areæ RG, RH, sunt Logarithmi abscissarum CE, CF.

In puncto R ubi abscissa est unitas area est 0, ut Logarithmis convenit, fitque negativa retrocedendo ab R versus C, simulque cum sint abscissæ minores unitate CR sunt fractiones.

Theor. V. Si Angulus Asymptotarum sit Rectus, Hyperbola dicitur æquilatera, æqualesque sunt Axes conjugati, ideoque latus Rectum Axi transverso est æquale, ac (per Theor. II.) facta abscissarum quadrato ordinatarum æqualia sunt, sicut in circulo: Diversæ Hyperbolæ eodem Asymptotorum angulo descriptæ sunt similes: Si vero idem sit Hyperbolarum axis sed diversus Angulus erunt ordinatæ ad idem axeos punctum sicut Radices quadratæ Laterum Rectorum Principalium, & in ea erunt ratione portiones earum Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum quarum æquales sunt abscissæ.

Demonst. Axis transversus est perpendicularis conjugato, dividitque bifariam angulum Asymptotorum; si ergo is angulus sit 90°, ejusque dimidium 45°. Triangulum CAH erit Isosceles & $CA = AH$, cætera ex his facile deducuntur.



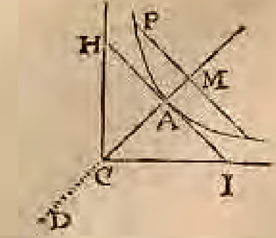


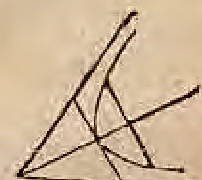
Si in duabus Hyperbolis anguli Asymptotorum sint æquales, ut bifariam dividuntur per axem, similia erunt Triangula CAH, cah: ideoque $CA^2 : AH^2 = Ca^2 : ah^2$ sumantur abscissæ AM, am in ratione AD ad ad erit etiam $DM : dm$ in eadem ratione cum sit ergo $AM : am = AD : ad$

& $DM : dm = AD : ad$.

est $AM \times DM : am \times dm = AD^2 : ad^2$ sed est $CA^2 : AH^2 = ca^2 : ah^2 = AM \times DM : MP^2 = am \times dm : mp^2$, & altern. $AM \times DM : am \times dm = MP^2 : mp^2$ est ergo $AD^2 : ad^2 = MP^2 : mp^2$ unde est $MP : mp = AD : ad$, omnes ergo ordinatæ ac omnia puncta Hyperbolæ determinantur per rationem AD ad ad.

Sit

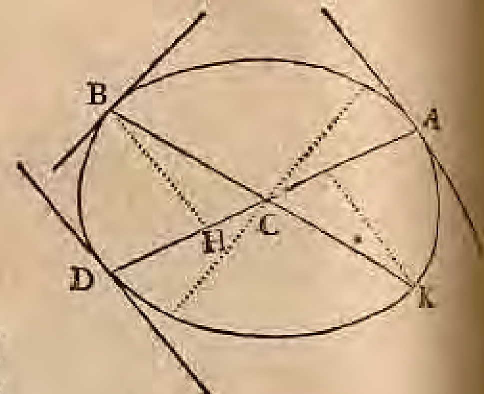




Sint denique in duabus Hyperbolis æquales axes transversi sed diversi Asymptotorum Anguli; diversa erunt Latera Recta, sumantur ergo æquales abscissæ, & quoniam Axis est ad latus Rectum sicut factum partium abscissæ ad quadratum ordinatæ, Axis verò & factum partium abscissæ æqualia sunt utrinque, eadem erit utrinque ratio Lateris recti principalis ad quadratum ordinatæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æquales abscissas pertinebunt, ut Radices quadratæ Laterum rectorum principalium, quæ ratio est constans, sit ergo utraque abscissa in portiones infinitè parvas & utrinque, æquales divisa singula Parallelogrammata quam minima super æquales abscissæ portiones formata erunt in eadem ratione ac ordinatæ, ergo areæ Hyperbolarum, quæ sunt eorum Parallelogrammorum summæ, in eâdem erunt ratione, nempe ut Radices quadratæ laterum Principalium.

De Ellipsi.

Theor. I. Omnes Ellipsis Diametri sese bifariam secant in eodem puncto quod dicitur centrum Ellipsis, eaque Diametri ordinata quæ per centrum transit est ipsa Diameter, quæ respectu Diametri cujus est ordinata conjugata dicitur: (Apol. l. 1. Prop. 30.)

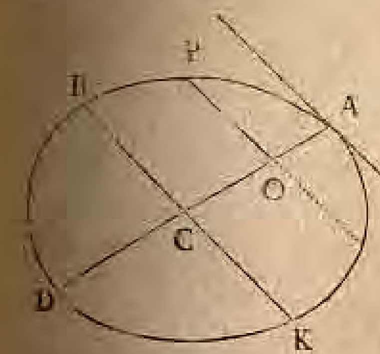


Demonst. Si per medium C, Diametri Ellipsis AD, ducatur linea quævis BK, & per puncta B & K ducantur BH, KG ordinatæ Diametro AB, erit per Lemma V.
AG × GD : AH × HD = GK² : BH² & propter Triangula similia GKC, CBH est GK : BH = CG : CH = BC : CK, est ergo AG×GD : AH×HD = CG² : CH², est autem (per 5. 2. Elem.) AG × GB = AC² − CG² & AH × HB = AC² − CH, est ergo
AC² − CG² : AC² − CH² = CG² : CH², & jungendo terminos secundæ rationis terminis prioris, est AC² : AC² = CG² : CH², ideo CG = CH, ac per consequens BC = CK. Omnes ergo lineæ per punctum C transeuntes illic bifariam secantur. Sunt autem singulæ Diametri Ellipsis, nam in vertice B ducatur Tangens, & per Centrum C linea illi parallela, ea dividetur bifariam, cum itaque BK bisecet lineam Parallelam Tangenti per ejus verticem ductæ, est Diameter, per Lemma V.

Denique solæ lineæ per Centrum transeun-

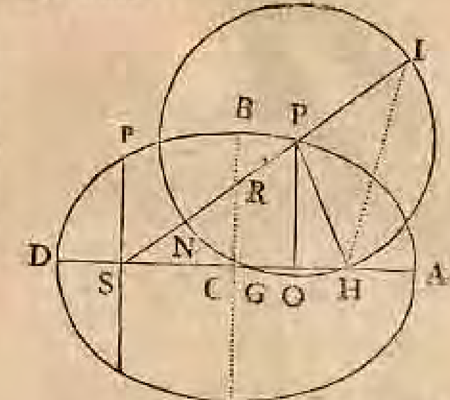
tes non sunt Diametri; fingatur enim Diameter per centrum non transiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, & illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam etiam dividetur à Diametro supposita quæ per centrum non transit, ergo male supponitur eam esse Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipsis per centrum transeunt, illicque bisecantur.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro transversæ ejusque conjugatæ dicatur Latus Rectum, erit Diameter transversa ad Latus Rectum, vel quod idem est quadratum diametri transversæ ad quadratum ejus conjugatæ, ut factum abscissarum interceptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ semper minus deprehenditur facto Lateris recti per utramlibet abscissam, unde hæc curva dicitur Ellipsis; (Apoll. lib. 1. Prop. 21.)



Demonst. Sit Ellipsis Diameter ACD, ejus conjugata BCK est per Lemma IV, AC × CD sive AC² : AO × DO = BC² : PO² & alternando AC² : BC² = AO × DO : PO², sed est 2AC : 2CB = 2CB : *L*. ergo 4AC² : 4CB² = AC² : CB² = 2AC, *L* = AO × DO : PO², ergo est PO² = $\frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{2AC} \times L \times AO$ sed ut DO est semper minus quam 2AC, est PO² semper minus facto Lateris recti per alterutram abscissam.

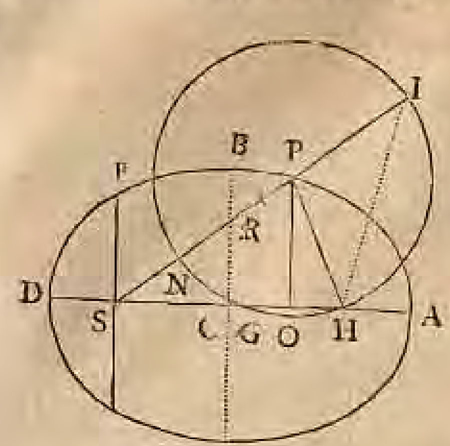
Theor. III. Sit AD axis major, à centro sumantur utrinque CH, CS, æquales & tales ut quadratum CH² sive CS² cum quadrato semiaxis conjugati CB² sit æquale quadrato semiaxis majoris CA², dicanturque puncta H & S, Foci, summa linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipseos ductarum erit semper æqualis Axi majori, (Apol. Lib. 3. Prop. 52.); & tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali; quod ergo minus erit quadruplo distantiæ foci à proximo Vertice.

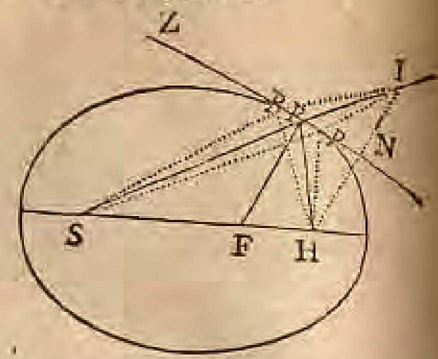


Demonst. Ducatur quævis linea ex foco S, in eâ sumatur SI = DA & ducta IH ad alterum focum, fiat IHP = I erit IP = PH, ideoque SP + PH = SP + PI = SI = DA sive axi majori: quo posito dico punctum P ad Ellipsim pertinere. Centro P radio PH describatur circulus IHGN habebitur hæc Proportio SI : SH = SG : SN, sumendo dimidium harum linearum manebit proportio; sit autem $\frac{1}{2}$SI = SR; $\frac{1}{2}$SH = CH; $\frac{1}{2}$SG = $\frac{1}{2}$SH − $\frac{1}{2}$GH & demissa PO perpendiculari in GH est $\frac{1}{2}$GH = HO ergo $\frac{1}{2}$SG = CH − HO = CO. Denique $\frac{1}{2}$SN = $\frac{1}{2}$SI − $\frac{1}{2}$NI = RI − PI = RP est ergo

SR : CH = CO : RP & componendo habetur SR : SR + CH = CO : CO + RP, tum prioris rationis terminos jungendo terminis secundæ, est: SR, SR + CH = CO + SR : CO + RP + SR + CH sive quia SR = AC = DC & CH = CS, est AC : AC + CH = DO : SP + SO. At operationibus contrariis factis in eamdem proportionem SR : CH = CO : RP, hoc est, dividendo & postea prioris rationis terminos

De Motu Corporum.





minos è terminis ſecundæ detrahendo ſubſtitutionibuſque factis erit

$AC : AC - CH = AO : SP - SO$

multiplicatis autem terminis utriuſque proportionis eſt

$AC^2 : AC^2 - CH^2$ (ſive BC^2) $= AO \times DO,\ SP^2 - SO^2$,

eſt autem (per 47. 1. Elem.) $SP^2 - SO^2 = OP^2$, ſed eſt $AC^2 : BC^2 = AO \times DO$ ad quadratum ordinatæ in O, eſt ergo PO ipſa illa ordinata, & punctum P ad Ellipſin pertinet.

Sit autem Sp ordinata in foco erit $AC^2 : BC^2 = AS \times SD : Sp^2$, eſt autem (per 5. 2. Elem.) $AS \times SD = AC^2 - CS^2 = BC^2$, eſt ergo $AC^2 : BC^2 = BC^2 : Sp^2$ ſive, $AC : BC = BC : Sp$, & duplicando omnes terminos: $2\,AC : 2\,BC = 2\,BC : 2\,Sp$, ſed eſt $2\,AC : 2\,BC = 2\,BC : L$ ergo $L = 2\,Sp$, & $\frac{1}{2} L = Sp$.

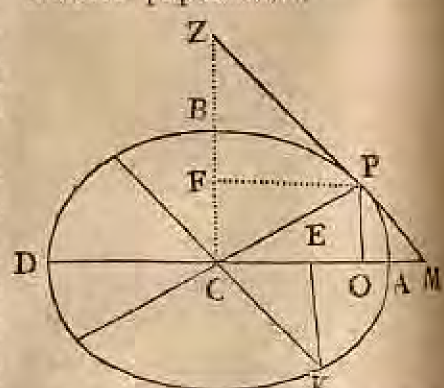
Eſt autem (per Theorema 2.) Sp^2, ſive $\frac{1}{4} L^2 = \frac{AS}{2\,AC} \times L \times DS$ & $\frac{1}{4} L = \frac{AS}{2\,AC} \times DS$

ut ergo eſt AS minor 2 AC erit $\frac{1}{4}$ L minor DS, hoc eſt latus rectum minus eſt quadtuplo diſtantiæ foci à proximo Vertice.

Theor. IV. Tangens Ellipſis biſariam dividit Angulum qui ſit inter unam è lineis à foco ductam & productionem alterius: & lineæ ab utroque foco ductæ, æquales faciunt angulos cum Tangente, & ſi biſariam dividatur angulus quem faciunt lineæ à foco ductæ, linea biſecans erit curvæ perpendicularis. (Apol. 48. ~~[illegible]~~)

Demonſt. Ducantur à focis lineæ SP HP productaque SP in I, dividatur biſariam angulus SPH, dico lineam ZPN non occurrere Ellipſi in ullo alio puncto p, ſit PI = PH & ducta IH, erit PN perpendicularis in ejus medium, ex alio quovis puncto p, ducantur pI, pH, quæ erunt æquales ob æqualia Triangula pNI, pNH (per 4. 1. Elem.) ſed ſi p foret in Ellipſi eſſet Sp + pH ſive Sp + pI = SI quod abſurdum (per 20. 1. Elem.)

Eſt autem ZPS = IPN (per 15. 1. El.) eſt IPN = NPH, per conſt. ergo ZPS = NPH, Si ergo FPS = FPH eſt ZPS + FPS = NPH + FPH, ſunt autem omnes ſimul æquales duobus rectis, ergo ZPS + FPS eſt Recto æquali, & PF angulum SPH biſecans eſt in Tangentem ideoque in curvam perpendicularis.



Theor. V. Sit Diameter quævis AD, & ducantur utlibet duæ aliæ Diametri inter ſe conjugatæ CP, CK, ex utriuſque vertice ducantur ordinatæ KE, PO in priorem AD, factum abſciſſarum à curvâ ſumptarum, unius ver-

Liber Primus.

tici reſpondentium erit æquale quadrato abſciſſæ à centro ſumptæ reſpondenti Vertici alterius Diametri: Unde quadrata amborum abſciſſarum à Centro ſumptarum erunt ſimul æqualia quadrato $\frac{1}{2}$ Diametri in quam ſumuntur, & quadrata ordinatarum erunt æqualia quadrato ejus $\frac{1}{2}$ Diametri conjugatæ. Hinc deducitur ſummam quadratorum duarum Diametrorum conjugatarum quarumvis eſſe ſemper eamdem: eas verò Diametros conjugatas eſſe inter ſe æquales quarum vertices determinantur per ordinatam erectam in Axem majorem cujus abſciſſa à centro ſumpta ſit æqualis radici dimidii quadrati ſemi Axis majoris.

Demonſt. . ... Sint CP CK Diametri conjugatæ, PO KE ordinatæ ex earum verticibus in Diametrum AD ductæ; PM Tangens Parallela Diametro CK: Triangula POM, KEC erunt ſimilia & $PO : KE = MO : CE$, vel $PO^2 : KE^2 = MO^2 : CE^2$ ſive quia (per Cor. 3. Lem. V.) eſt $MO = \frac{CA^2 - CO^2}{CO}$ eſt $PO^2 : KE^2 = \overline{\frac{CA^2 - CO^2}{CO}}^{\,2} : CE^2$, ſed per Lemma IV. eſt $PO^2 : KE^2 = AO \times DO : AE \times DE$ ſive (per 5. 2. Elem.) $= CA^2 - CO^2 : CA^2 - CE^2$ eſt ergo, $CA^2 - CO^2 : \overline{CA^2 - CE^2} = \overline{\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2}}^{\,2} : CE^2$, dividendo primum & tertium terminum per $\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2}$ eſt $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$ & addendo terminos ſecundæ rationis terminis primæ eſt $CA^2 : CA^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$, ergo $CE^2 = CA^2 - CO^2 = AO \times DO$: Pari modo addendo terminos primæ rationis terminis ſecundæ erit $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 : CA^2$: ergo $CO^2 = CA^2 - CE = AE \times DE$. Quod erat primum.

Junctis ergo quadratis abſciſſarum CO^2, CE^2 ſumma eſt æqualis CA^2; nam eſt $CE^2 = CA^2 - CO^2$ ergo $CE^2 + CO^2 = CA^2 - CO^2 + CO^2 = CA^2$.

Sit BC diameter conjugata diametri AC, eſt $PO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times CA^2 - CO^2$ & $KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - AC^2 + CO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} CO^2$, ergo $PO^2 + KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CO^2 + CO^2 = BC^2$.

Sit autem Diameter AC axis, ordinatæ erunt perpendiculares, ergo $PO^2 + CO^2 = PC^2$, & $CE^2 + KE^2 = CK^2$ (per 47. 1. El.) ergo $PO^2 + CO^2 + CE^2 + KE^2 = PC^2 + CK^2$, ſed $PO^2 + CE^2 = BC^2$, $CO^2 + KE^2 = AC^2$ Ergo $PC^2 + CK^2 = AC^2 + BC^2$. Quarumvis Diametrorum conjugatarum quadrata æqualem ſummam facient ac quadrata axium.

Denique ſi punctum O in axi ita ſit ſumptum ut ſit $\frac{1}{2} CA^2 = CO^2$ & ſit ductâ in O ejus ordinata & per ejus verticem P ducatur Diameter ejuſque conjugata, quadratum abſciſſæ quæ reſpondebit vertici Diametri conjugatæ erit æquale $AO \times DO$ ſive $AC^2 - CO^2$ ſed $CO^2 = \frac{1}{2} CA^2$ per hypotheſim, ergo hoc quadratum erit etiam æquale $\frac{1}{2} AC^2$, eadem ergo abſciſſa ac proinde æquales ordinatæ verticibus utriuſque Diametri reſpondebunt, æquales ergo erunt illæ Diametri conjugatæ ſiquidem ſunt Hypothenuſæ æqualium abciſſarum & Ordinatarum.

Cor. I. Si à vertice Diametri PC, producatur Tangens terminata utrinque in M & Z, ad Diametros conjugatas CA, CB productas, erit ſemiDiameter CK priori conjugata media proportionalis inter partes Tangentis PM PZ: Ductis enim ordinatis PF PO, ob ſimilia Triangula CKE, ZFP, POM,

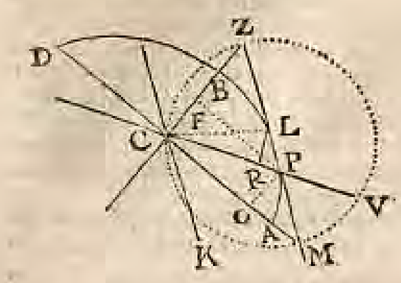
eſt $CK : CE = ZP : FP$ (ſive CO)

& $CK : CE = PM : MO$ unde compoſitis rationibus eſt

$CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CO \times MO$, ſed $CO \times MO = AO \times DO$ (per Cor. 3. Lem. V.) & $AO \times DO = CE^2$ per præſens Theorema, ergo $CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CE^2$ & $CK^2 = ZP \times PM$ ſive $ZP : CK = CK : PM$. Q. E. D.

Et converſa per ſe liquet, nempe quod ſi duæ Diametri occurrant Tangenti ductæ in Vertice alterius Diametri, ita ut hujus $\frac{1}{2}$ Diameter conjugata ſit media proportionalis inter partes tangentis, duæ illæ priores Diametri erunt inter ſe conjugatæ.

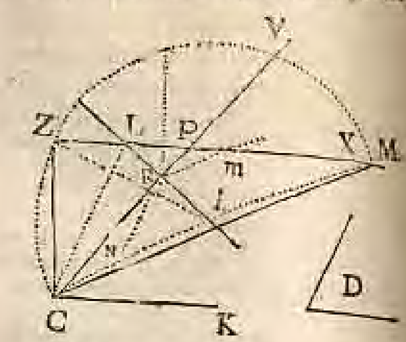
Problema. Datis tàm positione quam magnitudine Ellipseos alicujus non descriptæ duabus Diametris conjugatis invenire positionem & magnitudinem duarum aliarum Diametrorum conjugatarum, quæ faciant inter se angulum quemvis datum.



Primus Casus: Angulus qui datur sit rectus, h. e. Diametri quæsitæ sint Axes conjugati. Sint verò semi-Diametri datæ CP CK, per verticem P unius ducatur linea alteri CK parallela, quæ ideo erit Ellipsis Tangens in eo puncto. (per Lem. IV.) producatur CP in V ita ut sit $CP:CK = CK:PV$, in medium R lineæ CV erigatur perpendicularis tangentem secans in L, & ex L velut Centro radio LC qui æqualis est LV; describatur circulus transiens per puncta C & V, & Tangentem secans in punctis Z & M, dico lineas ZC MC, esse in axium positione.

Demonst.... Angulus enim ZCM est rectus quia est in semi-circulo per constructionem, præterea quia chordæ CV ZM sese secant in P est $CP \times PV = ZP \times PM$ (per 35: 3. Elem.) sed $CP \times PV = CK^2$ per constructionem, ergo $CK^2 = ZP \times PM$ ideoque, per Corollarii præcedentis conversam, lineæ CZ, CM, cadunt secundum Diametros conjugatas.

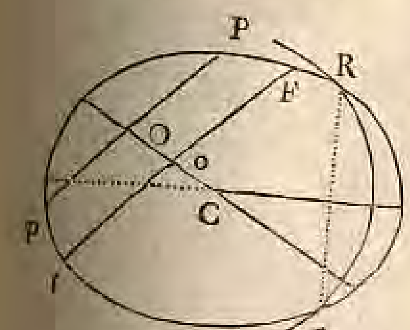
Sec. Casus. Si angulus datus D rectus non sit, centrum circuli describendi non erit in L sed in alio puncto l ejusdem lineæ RL in medio R lineæ CV perpendicularis, sic verò invenitur, ducatur ex R perpendicularis in Tangentem fiatque cum eâ angulus æqualis dato, & linea eum formans secet Tangentem in m, ducatur LC, & per R linea RN ipsi Parallela, ex C ut centro, radioque æquali Rm secetur RN in N, ductaque CN quæ secet LR in l erit l centrum circuli ex quo si radio lC circulus describatur is transibit per C & etiam per V (per const. & 1. 3. Elem.) secabit verò Tangentem in punctis Z & M, è quibus ductis CZ, CM habetur Diametrorum quæsitarum positio.



Demonst. Evidens est, sicut in priore hujus demonstrationis parte, lineas CZ CM, cadere secundum Diametros conjugatas, quæstio est utrum faciant in C angulum datum, ex centro l ducatur linea parallela lineæ Rm, dico illam occurrere Tangenti in puncto M, hoc est illam fore æqualem radio lM sive lC, occurrat enim Tangenti in X erit ob Parallelas $lR : Rm = Ll : lX$; sed propter Parallelas RN & LC triangula NlR ClL, sunt similia, estque $lR : lN = Ll : lC$, & sumptis vel differentiis vel summis terminorum utriusque rationis est $lR : CN = Ll$, lC est verò per constructionem $CN = Rm$ ergo $lR : Rm = Ll : lC$ ergo $Ll : lX = Ll : lC$, scilicet est $lX = lC$, hoc est X cadit in M; radius ergo lM cum sit Parallelus lineæ Rm, faciet cum perpendiculari quæ in lineam ZM duceretur eumdem angulum quem format linea Rm cum perpendiculari in eamdem lineam ductâ, angulum nempe quæsitum: & angulus ZlM ejus erit duplum; sed angulus ZCM est anguli ZlM dimidium, ergo est æqualis angulo quæsito.

Determinatur autem Diametrorum magnitudo, ductis ex P in utramq. Diametrum ordinatis PO, PF lineis CZ, CM, Parallelis; $\frac{1}{2}$ Diametri enim erunt mediæ proportionales inter abscissas à centro, & lineas à centro ad Tangentem sumptas, hoc est, erit $CO : CA = CA : CM$, & $CF : CB = CB : CZ$; undè cum cognoscantur CO & CM, CF & CZ determinantur CA & CB.

Cor. I. Datis axibus foci inveniuntur si ex vertice axis minoris, ut centro, cum radio æquali semi axi majori ipse major axis secetur, & datis focis & axi majori puncta quotlibet ad Ellipsim pertinentia inveniri possunt, si ab uno foco ducatur ut libet linea æqualis axi majori & ab ejus extremitate ducatur linea ad alterum focum, fiat in hoc foco super hanc lineam angulus æqualis angulo qui fit inter lineas à focis ductas, secabitur prima linea in puncto ad Ellipsim pertinente.

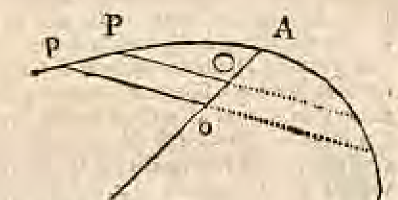


Cor. II. Si Ellipsis sit data, sic inveniuntur centrum & Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelæ Pp, Ff, per earum medium O: o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium C erit Centrum ex quo describatur circulus qui secet curvam in duobus punctis R r ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam Rr quæ eam bifariam dividet (per 3. 3. Elem.) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam usque.

IX. *De Parabola.*

I. Theor. Omnes Diametri Parabolæ sunt infinitæ & inter se Parallelæ: quadrata ordinatarum sunt inter se ut Abscissæ Diametrorum, & cum tertia proportionalis abscissæ & ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abscissam est æquale quadrato ordinatæ; hincque derivatur nomen hujus curvæ. (Apol. lib. 1. Prop. 20.)

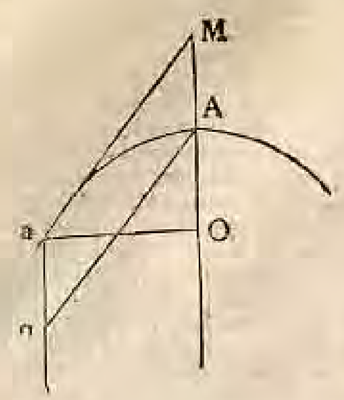
Dem. Ducatur in basi coni chorda parallela plano Parabolæ, & infinitè parva, per verticem coni & eam chordam ducatur Planum & aliud illi parallelum per unam è lineis Parabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola, sed quam proxima Parabolæ, & cujus centrum tanto magis à Vertice coni removetur quo minor est chorda per quam transit planum per Verticem coni ductum, evanescat hæc chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum abibit, & ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidet hæc Hyperbola cum Parabolâ, sed omnes ejus Diametri à puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelæ & infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea ex casu 2do. Lem. III. constat quod si secans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conicâ secet, abscissæ erunt inter se ut facta partium linearum Parallelarum, sed hæ bifariam dividuntur à Diametro, sunt ergo Diametri abscissæ sicut quadrata ordinatarum.



Fiat $AO : OP = OP : L$ erit $OP^2 = AO \times L$; esto verò quævis alia abscissa Ao & ordinata op erit $AO : Ao = OP^2 : op^2$, & multiplicando primam rationem per L erit $L \times AO : L \times Ao = OP^2 : op^2$, sed per Hypothesim $AO \times L = OP^2$ ergo etiam $L \times Ao = op^2$ hoc est factum Lateris recti per quamvis abscissam æquale est quadrato ordinatæ ipsi respondenti.

Cor. I. Si in Diametrum productam sumatur à Vertice longitudo æqualis lateri Recto, & ab ejus extremo ad extremum abscissæ describatur semi circulus, & in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum usque, erit hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abscissam pertinenti.

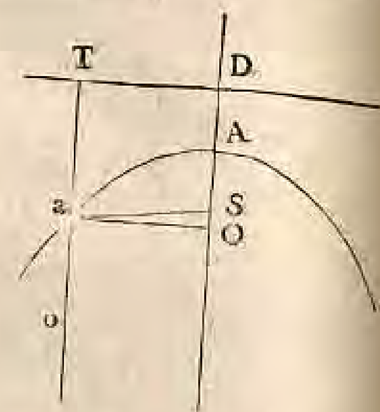
Cor. II. Si in Diametro quâvis sumatur à vertice quarta pars ejus Lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim $Ao = \frac{1}{4}L$ est $\frac{1}{4}LL = op^2$: ergo $LL = 4op^2$ & $L = 2op$, sive toti ordinatim applicatæ in o.



Cor. III. Latus Rectum Diametri cujusvis est æquale Lateri recto axis & quadruplo abscissæ axis determinatæ per ordinatam è vertice Diametri in axem ductam. Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M & a O ordinata axi, per Corollarium Lemmatis V. distantia verticis axis A ad M est æqualis distantiæ ejusdem verticis ab O, ergo $MO = 2AO$, & (per 47. 1. Elem.) est $aM^2 = MO^2$ (sive $4AO^2$) $+ aO^2$ (sive $L \times AO$) $= 4\overline{AO} + L \times AO$; à vertice A axis ducatur ordinata A o ad Diametrum propositam, evidens est ob parallelas a o, A O, & Tangentem ordinatæ parallelam, esse $ao = AM$ sive AO & $oA = aM$; sit verò l latus Rectum Diametri a o, erit oA^2, sive $aM^2 = l \times ao = l \times AO$ sed erat $aM^2 = 4\overline{AO} + L \times AO$ ergo $l \times AO = 4AO + L \times AO$, unde $l = L + 4AO$. Q. E. D.

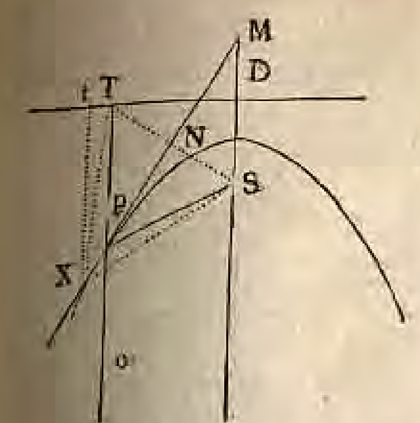
Theor. II. Si in axe sumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, si verò ultrà verticem eadem feratur longitudo & per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producatur quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem & Directricem comprehensa est quarta pars lateris Recti ejus Diametri, & est æqualis distantiæ ejus verticis à foco.

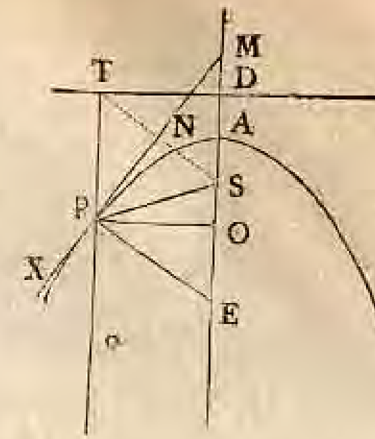
Demonst. Ut enim Diameter & axis sunt paralleli, ducta perpendiculari a T à vertice diametri ad directricem erit $aT = OD = DA + AO$, est verò D A, quarta pars lateris recti principalis & A O abscissa axis quæ respondet ordinatæ a O à vertice Diametri ductæ, est verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti & quadruplo A O, hoc est $= 4DA + 4AO$ ergo $aT = DA + AO$ est quarta pars lateris Recti Diametri a o.



Secundò, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a, sitque ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. Ele.) est $Sa^2 = SO^2 + aO^2$ & $aO^2 = 4DA \times AO$: ergo $Sa^2 = SO^2 + 4DA \times AO$, sed est DO^2 (per 8. 2. El.) $= SO^2 + 4DA \times AO$, ergo $DO^2 = Sa^2$ & $Sa = DO = aT$.

Theor. III. Si à puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, & linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ si producatur donec secet axem, portio axis à foco ad occursum Tangentis contenta erit æqualis lineæ à foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ à foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ secundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur, & Angulus Diametri cum lineâ à foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: Si ea perpendicularis secet axem, pars axis inter eam & ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, est æqualis dimidio lateris recti principalis, & pars axis inter eam & Tangentem comprehensa, est dimidium lateris Recti Diametri, ipsa verò perpendicularis est media Proportionalis inter ea semilatera recta.





Demonst. Sit T D directrix, à puncto P linea P T perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea P S & denique ducatur linea P N bifariam dividens angulum S P T; illa linea perpendiculariter & bifariam dividet lineam S T à foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ P N ducantur lineæ X T, X S, erunt inter se æquales (per 4. 1. Elem.), erit verò X T directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demissa erit brevior quam X T ac per consequens brevior quam X S, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea P N erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

Anguli autem T P N, N M S sunt æquales ob Parallelas T P, M S, & per constr. $TPN = NPS$, ergo $NMS = NPS$, est ergo Triangulum M S P Isosceles, & $MS = SP$.

Anguli autem X P o, T P N, per verticem sunt oppositi, ergo sunt æquales, sed $TPN = NPS$ per constr. ergo $XPo = NPS$.

Dividatur bifariam angulus S P o per lineam P E ita ut sit $oPE = EPS$; erit $XPo + oPE = NPS + EPS$ hi quatuor valent duos rectos, ergo $XPo + oPE$ valent rectum & est PE perpendicularis in Tangentem.

Est ergo in Triangulo Rectangulo M P E (ductâ perpendiculari P O) $MO : PO = PO : OE = \frac{PO^2}{MO}$, est verò $PO^2 = L \times AO$ & $MO = 2AO$ ergo $OE = \frac{L \times AO}{2AO} = \frac{L}{2}$.

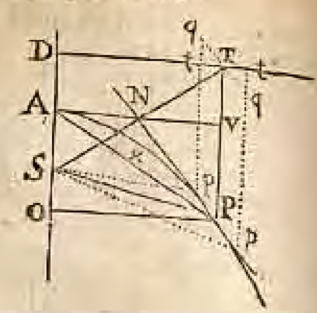
Ergo etiam E M est æqualis dimidio lateris Recti Diametri P o, est enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali & quadruplo abscissæ A O, est verò O E dimidium lateris Recti Principalis & $MO = 2AO$, sive dimidium quadrupli A O, ergo $EM = \frac{1}{2} l$.

Est etiam ob Triangulum Rectangulum M P E, $EM : PE = PE : OE$, ergo est P E hoc est perpendicularis in curvam, media proportionalis inter semilatus rectum Diametri & semilatus rectum Axis.

Theor. IV. Superficies Parabolica inter curvam, abscissam axis & ejus ordinatam comprehensa, est ad factum abscissæ per Ordinatam ut duo ad tres, segmentum verò Parabolicum inter curvam & chordam à Vertice ductam terminatum est ejusdem facti sexta pars.

De Motu Corporum.

Demonst. Ex foco S ducatur SP ad quodvis Parabolæ punctum P & ex P ducatur PT ad directricem perpendicularis, ducatur Tangens in puncto P, & in ea sumantur puncta p, p puncto P proxima & utrinque à puncto P æqualiter dissita, ab iis ducantur ad focum lineæ Sp Sp, & pq, pq lineæ PT parallelæ & æquales; ducaturque qTq, habebitur Parallelogrammum pqqp, cujus basis pp est eadem cum basi Trianguli Spp; si verò ducatur ST, quam Tangens PN, bifariam & perpendiculariter dividit in N, erit SN altitudo Trianguli Spp, & NT = SN, altitudo Parallelogrammi pqqp, cum ergo bases & altitudines sint æquales, (per 41. 1. Elem.) erit Parallelogramma pqqp duplum Trianguli Spp, sed est pqqp æquale Trapezio tppt, cum ergo tota superficies DAXPT talibus Trapeziis tppt constet, & superficies ASPX, talibus Triangulis Spp, erit superficies DAXPT dupla superficiei ASPX.

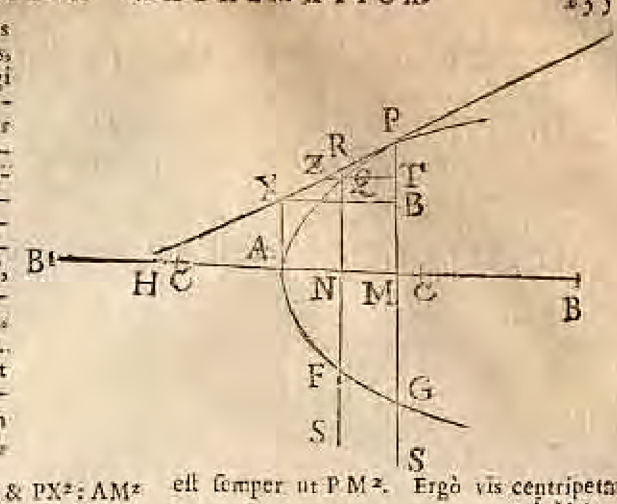


Si verò ducatur AV Tangens in A & chorda AP, erit Parallelogrammum DAVT, duplum Trianguli ASP, bases enim AD, AS sunt æquales, altitudo verò Trianguli est PO, parallelogrammi AV & PO = AV: si ergo DAVT ex DAXPT detrahatur, & ASP ex ASPX, residuum primæ figuræ AXPV erit duplum segmenti APX in altera residui, hæc verò simul sumpta faciunt Triangulum AVP, vel AOP, quod est ergo triplum segmenti APX, & tota figura AOPV ejus sextuplum, & area Parabolica AoPX, ejus quadruplum, est ergo area Parabolica ad Parallelogrammum AOPV ut 4. ad 6. sive ut 2. ad 3. Q. E. D.

HIS

Liber Primus.

HIS verò circa Conicas Sectiones ad mentem revocatis, sine quibus sequentia intelligi nequeunt, probabitur, *vim centripetam quâ corpus tendens ad punctum remotissimum Sectionem Conicam describit, esse reciprocè ut cubus ordinatæ applicatæ ad centrum virium tendentis*: Corpus P moveatur in Sectione conicâ PAF, & vis centripeta agat juxtà directionem parallelarum PS, FS, axi AB applicatarum. Linea PH, Sectionem tangat in P. Itaque ZT, XB, axi parallelæ, & XA ipsa Tangens in A, & ob similia triangula XPB, ZTP, ZQR, erit,



$PX : BX$ (seu AM) $= PR : QT$ & $PX^2 : AM^2 = PR^2 : QT^2$, & (per Prop. 16. lib. 3. Conic. Appoll. quæ est Cor. 2. Lem. III. de Conicis) $PR^2 : QR \times FR = PX^2 : AX^2$, adeoque $PR^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2}$, ergò $PX^2 : AM^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2} : QT^2$; & $AX^2 : AM^2 = QR \times FR : QT^2$, undè $\frac{QT^2}{QR} = \frac{AM^2 \times FR}{AX^2} = \frac{AM^2 \times 2PM}{AX^2}$ ubi puncta P, Q, coeunt, & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{AM^2 \times 2PM \times SP^2}{AX^2}$. Est ergo (per coroll. I. & V. prop. VI^æ.) in omnibus sectionibus conicis vis centripeta reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM \times 2SP^2}{AX^2}$, hoc est, deleto $2SP^2$, constante, reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2}$.

Porrò ob similitudinem triangulorum HAX, HMP, est $HM : PM = HA : AX = \frac{PM \times HA}{HM}$ & $AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2}$ & $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2} = \frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$, vis igitur est etiam in omni sectione conicâ reciprocè ut $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$.

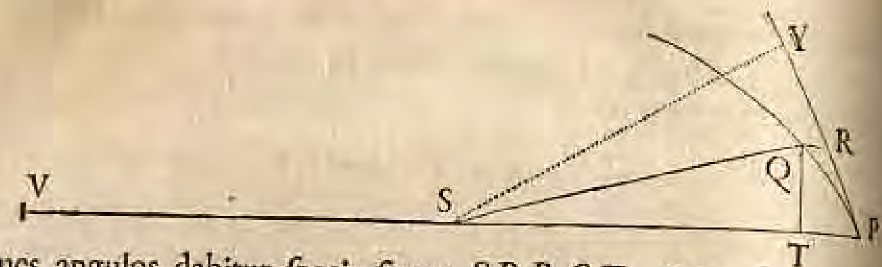
In Parabolâ (per prop. 35. lib. 1. conic. appoll. sive cor. 1. Lem. V. de Conicis) $HA = AM$, & $HM = 2AM$, & (per prop. 20. lib. 1. conic. Appoll. quæ est Theor. I. de Parabola) AM, adeòque & HM est semper ut PM^2. Ergò vis centripeta in parabolâ erit reciprocè ut $\frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$ sive ut $\frac{AM^2}{PM}$, hoc est, ut $\frac{PM^4}{PM} = PM^3$, hoc est, reciprocè ut cubus ordinatæ PM.

In Ellipsi & Hyperbolâ, si latus rectum axis AB, dicatur L, erit (ex prop. 21. lib. 1. conic. appoll. sive Theor. II. de Ellip.) $PM^2 : AM \times MB = L : AB$ ac proindè $AM = \frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}$, & $AM^2 = \frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}$, & $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} = \frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}$, undè deletâ ratione constanti $\frac{AB^2}{L^2}$, erit vis centripeta reciprocè ut $\frac{PM^3 \times HM^2}{MB^2 \times HA^2}$; verùm (per prop. 37. lib. 1. conic. Appoll. sup. cor. 2. Lem. V.) posito centro sectionis C, est $CM : CA = CA : CH$, adeóque dividendo vel componendo $CM : AM = CA : HA$, ac proindè addendo vel detrahendo terminos secundæ rationis è terminis prioris $MB : HM = CA : HA$ & $\frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA}$ & $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$ quæ est quantitas constans. Erit igitur etiam in hyperbolâ & Ellipsi adeóque in omni sectione conicâ vis centripeta reciprocè ut PM^3, seu reciprocè ut cubus ordinatæ PM; deletâ nimirum, in expressione vis centripetæ suprà inventâ, quantitate $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}$, constante.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in spirali PQS *secante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.*

(r) Detur angulus indefinite parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura $SPRQT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut QT, hoc est (ob datam specie figuram illam) ut SP. Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR angulum contactus QPR subtendens mutabitur (per lemma XI.) in duplicatâ ratione ipsius PR vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut SP. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ est ut SP *cub.* ideoque (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut cubus distantiæ SP. *Q. E. I.*



(r) 225. Ob omnes angulos datos, dabitur specie figurâ SPQRT, & ipsius latera omnia erunt inter se in datâ seu constanti ratione, ergò datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque proindè $\frac{QT}{QR} \times QT$, ut QT hoc est, ob datam rationem QT, ad SP, erit $\frac{QT^2}{QR}$, ut SP; mutetur jam utcumque angulus PSQ, & manebit $\frac{QT^2}{QR}$, ut SP. Nam QR, ubi angulus PSR constans est dicatur a, & QT dicatur b; ubi verò angulus PSR utcumque mutatur, QR dicatur x, & QT dicatur y, & erit per Lem. XI. $a : x = b^2 : y^2$, adeóque $\frac{b^2}{a} = \frac{y^2}{x}$ hoc est $\frac{y^2}{x}$ seu $\frac{QT^2}{QR}$ eadem manet quæ priùs nimirùm ut SP. Quoniam autem evanescente angulo PSR, sive coeuntibus punctis Q, P, recta SR, rectæ SP parallela evadit, erit per coroll. 1. & 5. prop. VI^a. vis centripeta reciprocè ut $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$, ac proinde substituendo SP, loco $\frac{QT^2}{QR}$, vis centripeta erit reciprocè ut SP^3.

Idem aliter.

(x) Perpendiculum SY in tangentem demissum, & circuli spiralem concentricè secantis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP *cub.* est ut $SYq \times PV$, hoc est (per corol. 3. & 5. prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia circa datæ ellipseos vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.

Constat ex conicis. (y)

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos. (z)

(x) 226. Sit circuli spiralem osculantis in P chorda per centrum virium S ducta PV, demissimoque in tangentem perpendiculum SY, & ob angulum SYP, rectum, & SPY, datum, dabitur specie triangulum SPY. Ergò datur ratio SY ad SP, & in virium centripetarum formulis SP scribi potest pro SY. Prætereà datur ratio PV ad SP, nam (210) SY × QP = SP × QT, adeóque QP $= \frac{SP \times QT}{SY}$; undè ob rationem $\frac{SP}{SY}$ datam, QP scribi potest pro QT. Verùm (211) PV $= \frac{QP^2}{QR}$, ergò PV, est ut $\frac{QT^2}{QR}$. Cum igitur ex demonstratis in Prop. IX. $\frac{QT^2}{QR}$, sit ut SP, erit etiam PV, ut SP, & proptereà SP, loco PV, substitui potest in formulis.

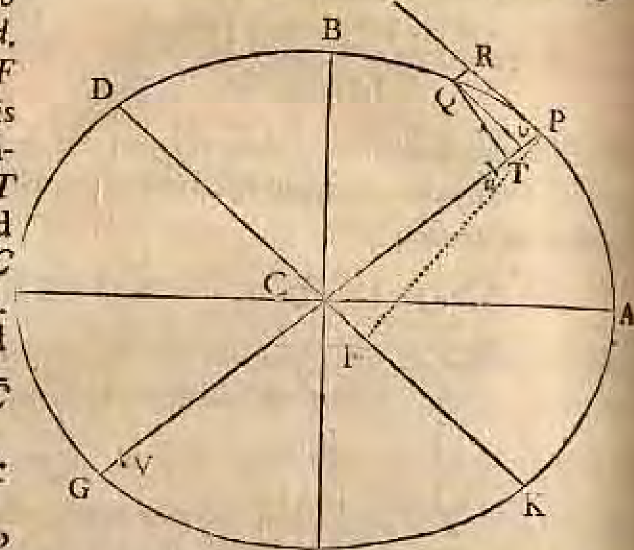
227. Scholion. Propositio IX. facilè demonstratur etiam per formulam Hermanni (214), $v = dp : p^3 dz$; est enim in hoc casu SP $= z$, SY $= p$; & si ratio $\frac{SY}{SP}$ data dicatur $\frac{a}{b}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$ ergo $az = bp$, & (160) $a\,dz = b\,dp$, & $\frac{dp}{dz} = \frac{a}{b}$; unde $v = \frac{a}{bp^3}$; hoc est, ob datam $\frac{a}{b}$ vis centripeta v, est directè ut $\frac{1}{p^3}$, hoc est reciprocè ut p^3, aut quia $p = \frac{za}{b}$, v erit ut $\frac{1}{z^3}$ directè, reciprocè autem ut z^3, deletis nimirùm constantibus.

(y) Demonstratio hujus Lemmatis inferius tradetur ubi nempe Newtonus eo Lemmate ad solutionem proximi Problematis utetur.

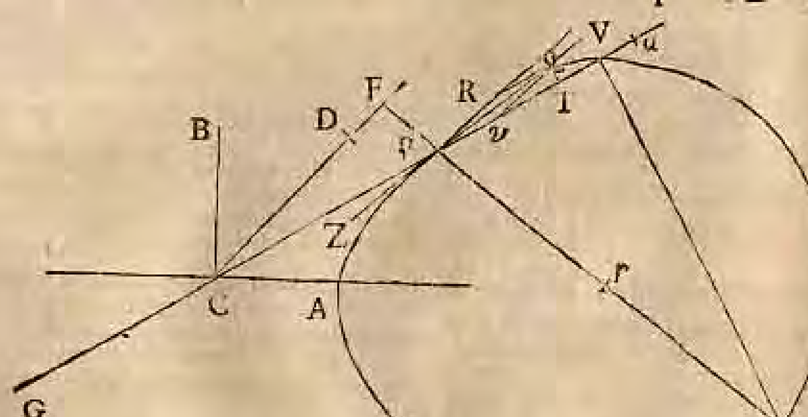
(z) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis spectantis centrum Hyperbolæ simili modo, nisi quod vis illa ejus centri respectu sit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non est intra Hyperbolam constitutum, sed Hyperbola versus illud convexitatem obvertit; Legatur si lubet utraque solutio hujus Problematis & ad figuram infrà positam in quâ Hyperbola descripta est referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ Newtonus de Ellipsi statuit.

DE MOTU CORPORUM.

Sunto CA, CB semiaxes ellipseos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & si compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit ([a] ex conicis) rectangulum PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob similia triangula QvT, PCF) Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id est, vG ad $\frac{QT\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq.}{PCq}$



Scribe QR pro Pv, & (per lemma XII [b]) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$



([a]) *Ex Conicis*, per 21. 1. lib. Apoll. Vide Sup. Lemma IV. de Conicis.

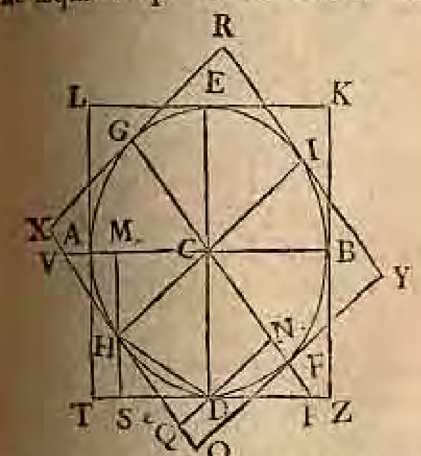
([b]) 229. *Parallelogramma omnia circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ Diametros quasvis conjugatas descripta sunt inter se æqualia.*

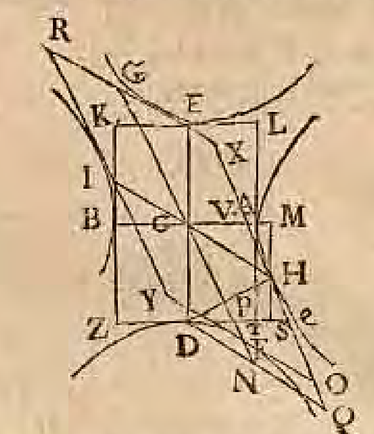
LIBER PRIMUS.

nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in se mutuo fiet $\frac{QT\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per corol. 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) reciprocè ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directè ut distantia PC. *Q.E.I.*

Idem aliter.

In rectâ PG ab alterâ parte puncti T sumatur punctum u ut Tu sit æqualis ipsi Tv; deinde cape uV, quæ sit ad vG ut est

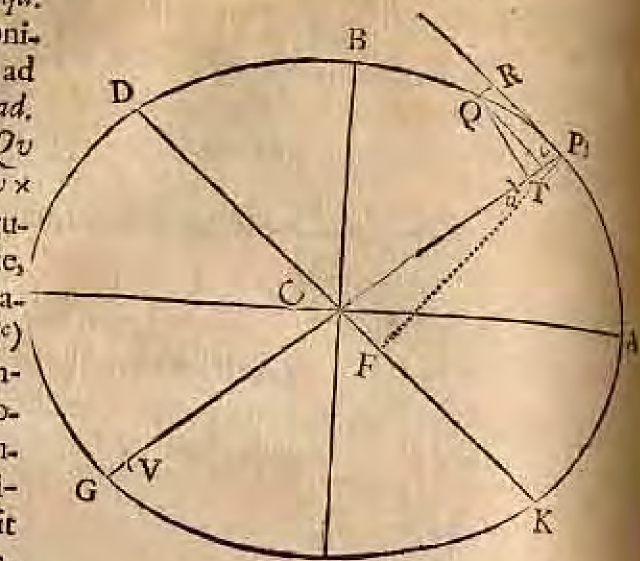


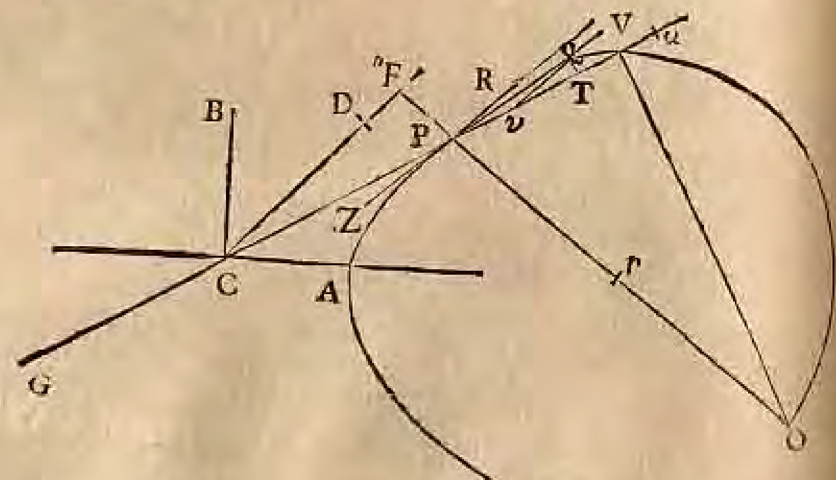


Dem. . . . . Sunto Ellipseos & hyperbolæ axes ED, AB, & GF, HI, diametri conjugatæ, ductisque per axium & diametrorum extrema tangentibus, describantur rectangulum LKZT, & parallelogrammum XRYO; jungatur DH, & DN ordinatim applicetur ad diametrum GF, erit (per prop. 37. lib. 1. conic. Apoll. sup. Cor. 2. Lem. V. de Conicis) PC ad CF, (hoc est, parallelogrammum PCVe, ad parallelogrammum æque altum CHOF) sicut CF, ad CN, hoc est, sicut idem parallelogrammum CHOF, ad parallelogrammum CHQN; & similiter VC, erit ad CA, (hoc est, parallelogrammum PCVe, ad æque altum, CATD) sicut CA ad CM, hoc est, sicut idem CATD, ad rectangulum CMSD, seu ad prædictum parallelogrammum CHQN; nam rectangulum CMSD, duplum est trianguli CHD, ejusdem basis CD ejusdemque altitudinis MC, & parallelogrammum CHQN est etiam ejusdem trianguli duplum, cum sit utriusque basis communis HC & eadem altitudo ob parallelas HC, QN; ac proinde CMSD=CHQN. Cum igitur sit PCVe:CHOF=CHOF:CHQN, & PCVe:CATD=CATD:CHQN, necesse est ut sit CATD=CHOF, quare rectangulum LKZT, quadruplum rectanguli CATD, æquale est parallelogrammo XRYO, etiam quadruplo parallelogrammi CHOF. Q.E.D.

DE MOTU CORPORUM.

DC *quad.* ad PC *qu.* Et quoniam ex conicis est Qv *quad.* ad PvG ut DC *quad.* ad PC *quad.* erit Qv *quad.* æquale $Pv \times uV$. Adde rectangulum uPv utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs (c) PQ æquale rectangulo VPv; (d) ideoque circulus, qui tangit sectionem conicam in P & transit per punctum Q, tran-





(c) *Adde Rectangulum* uPv *utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs* PQ, *æquale rectangulo* $VP \times Pv$. Nam (per construct.) est quadratum chordæ arcus $PQ = QT^2 + PT^2$, sed est $QT^2 = Qv^2 - Tv^2$ sive quia $Tv = Tu$ est $QT^2 = Qv^2 - Tu^2$, ideo quadratum chordæ arcus $PQ = Qv^2 - Tu^2 + PT^2$, est verò $PT^2 - Tu^2 = PT + Tu \times PT - Tu$ sive $PT - Tv = Pu \times Pv$, ergo quadratum chordæ arcus $PQ = Qv^2 + Pv \times Pu$. Quod si Rectangulo $Pv \times uV$ addas idem rectangulum $Pv \times Pu$, est $Pv \times Vu + Pv \times uP = Pv \times VP$, erat verò $Qv^2 = Pv \times uV$, ergo $Qv^2 + Pv \times Pu$ *sive quadratum chordæ arcus* PQ *erit æquale Rectangulo* $Pv \times VP$, *sive* VPv.

(d) *Ideòque circulus qui tangit sectionem in* P, *& transit per punctum* Q, *transibit etiam per punctum* V; nam ductis circuli illius chordis QP, QY, angu-

LIBER PRIMUS.

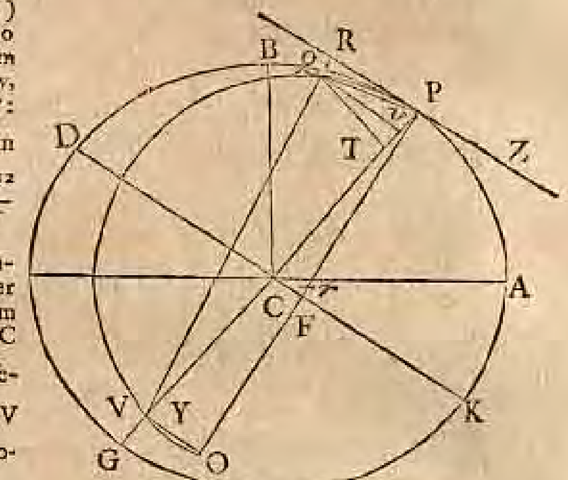
etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & ratio uV ad vG, quæ eadem est cum ratione DCq ad PCq, fiet ratio PV ad PG seu PV ad $2\,PC$; ideoque PV æqualis erit $\frac{2\,DCq}{PC}$. Proinde vis, quâ corpus P in ellipsi revolvitur, erit reciprocè ut $\frac{2\,DCq}{PC}$ in PFq (per corol. 3. prop. VI.) hoc est (ob datum $2\,DCq$ in PFq) directè ut PC. *Q.E.I.*

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis à centro ellipseos: (e) & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in el-

lus $PQv = QPR$, (ob parallelas Qv, PR) $= QYP$ (per 32. 3. Elem.) ac proinde duo triangula PQv, PYQ, quæ communem habent angulum, QPY, & æquales PQv, PYQ, similia sunt, & $Pv : QP = QP : PY$. Unde $PY = \frac{QP^2}{Pv}$; quarè cum sit $Pv \times PV = QP^2$, ideoque $PV = \frac{QP^2}{Pv}$ erit $PV = PY$.

230. Coroll. 1 . . . Ducantur circuli sectionem conicam osculantis diameter PO, & chorda VO, & ob similitudinem triangulorum PFC, PVO, erit $PF : PC = PV : PO = \frac{PC \times PV}{PF}$, sed per secundam demonstrationem Newtonianam $PV = \frac{2\,DC^2}{PC}$, ergo $PO = \frac{2\,DC^2}{PF}$, ac proinde radius osculi $Pr = \frac{1}{2}\,PO = \frac{DC^2}{PF}$, & $PF : DC = DC : Pr$. Quarè datis diametris conjugatis eorumque angulo PCD, facilè invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujusvis extremo.

231. Coroll. 2 . . . Datis radio osculi Pr, semidiametro sectionis conicæ PC, & positione tangentis PR, seu angulo PCD, diametrorum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata DC, & describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis PF, ac proinde DC, media proportionalis inter Pr, & PF, (230) datas. Datis autem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex sectionum conicarum elementis.

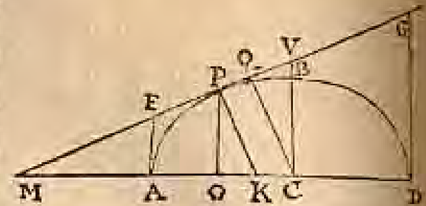


232. Coroll. 3. Hinc etiam problema V. aliter solvitur. Cum enim sit vis centralis (212) ut $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, sitque $PF = \frac{BC \times CA}{CD}$, (per Lem. XII.) & $Pr = \frac{DC^2}{PF}$ (230). His valoribus in formulâ $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, substitutis, ea fit $\frac{CP}{BC^2 \times CA^2}$ hoc est, ob constantem quantitatem $BC^2 \times CA^2$, vis est directè ut PC.

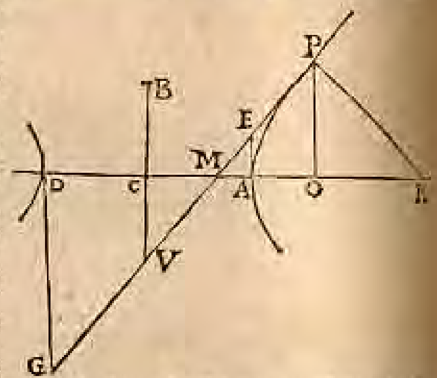
(e) *Et vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium &c.*, ut hæc conversa demonstretur sequentia sunt præmittenda.

lipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest.

233. Lemma I. Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, & à Centro ducatur ipsi Parallela ad Tangentem usque, harum linearum factum erit æquale quadrato semi-Axis.



Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem PK, ducatur ordinata PO perpendicularis in axem, & in C, ducatur CQ Parallela P, & CV, parallela PO, triangula POK CQV, erunt similia, ergo erit $PO:PK = CQ:CV$, ergo $PK \times CQ = PO \times CV$ similia etiam sunt Triangula CMV, OMP, erit ergo $CM:MO = CV:PO$; sed (per Cor. 2. Lem. V. de Conicis) est $CM = \frac{CA^2}{CO}$ & (per Cor. 3. ejusdem Lem.) $MO = \frac{AO \times DO}{CO}$ & (per Theor. II. tam de Hyp. quam de Ellip.) est $CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2$ ergo est $CM : MO = \frac{CA^2}{CO} : \frac{AO \times DO}{CO} = CA^2 : AO \times DO = CB^2 : PO^2 = CV : PO$, ideoque $CB^2 \times PO = PO^2 \times CV$ utrumque vero dividendo per PO est $CB^2 = PO \times CV$, erat verò $PK \times CQ = PO \times CV$. Ergo $PK \times CQ = CB^2$. Q. E. D.



234. Lemma II. Sit PM, Sectionis Conicæ Tangens, CA axis, CB ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares AE, DG, ad Tangentem usque, factum earum $AE \times DG$, erit æquale quadrato semi-Axis.

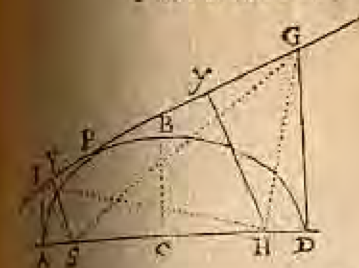
Demonst.... Ducta PO ordinata ad axem & CV ad Tangentem usque ipsi Parallela, erit (per Cor. 2. Lemm. V. De Conicis) $CO:CA = CA:CM$. Dividendo verò, est $CA - CO$ vel $CO - CA$, sive AO ad CA sive CD, sicut $CM - CA$ vel $CA - CM$, sive MA ad CM, hoc est $AO:CD = MA:MC$, jungendo terminos primæ rationis terminis secundæ hæc non mutatur, estque $MA : MC = MA + AO$ (sive MO) $: MC + DC$, (sive MD) hoc est alternando $MA : MO = MC : MD$ sed ob parallelas est $MA : MO = AE : PO$ & $MC : MD = CV : DG$ ergo est $AE : PO = CV : DG$ & est $AE \times DG = PO \times CV$ sed per Lemma præcedens est $PO \times CV = CB^2$. Ergo est $AE \times DG = CB^2$. Q. E. D.

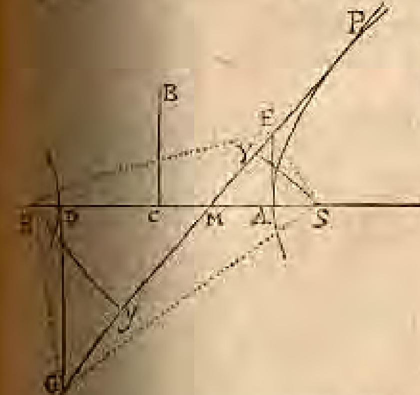
235. Lemma III. Ducantur à focis perpendiculares in Tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato semiAxis.

Demonst.... Sint illæ perpendiculares SY, Hy, ducantur in utroque vertice axeos transversæ lineæ AE, DG, perpendiculares axi usque ad Tangentem, & ducantur à focis S & H, ad earum extremitates lineæ SE, SG & HG HE.

Triangula EAS, SDG, EHG, GHy similia inter se, ut & Triangula GDH, HAE, GSE, ESY: Primò, similia sunt Triangula EAS, SDG quia latera EA & AS, SD & DG circa angulos rectos A & D posita proportionalia sunt nam (per Lemma præced.) est $EA \times DG = CB^2$, & per naturam focorum (& per 5. vel 6. 2. Elem.) est $AS \times SD = CB^2$ ergo est $EA \times DG = AS \times SD$ ideoque $EA : AS = SD : DG$; Eâdem ratione probatur Triangula GDH, HAE esse similia, ob latera proportionalia GD & DH, HA & AE circa angulos rectos A & D posita, est enim ut prius $EA \times DG = CB^2 = DH \times HA$ ideoque $DG : DH = HA : EA$.

Secundò Triangula SDG, EGH sunt similia, latera enim GH & HE, GD & DS



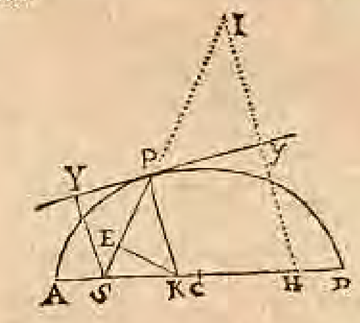


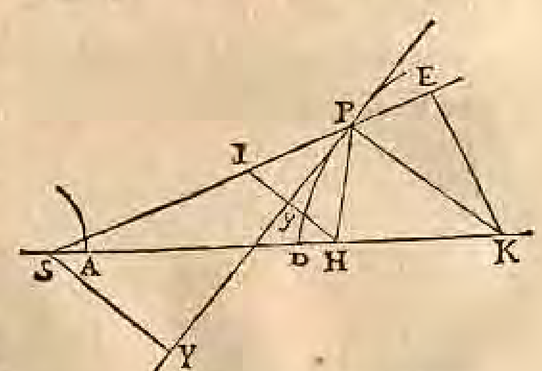
circa angulos SDG & EHG posita sunt proportionalia, nam ob triangula similia GDH, HAE, est $GH : HE = GD : HA$, sed $HA = DS$, ergo est $GH : HE = GD : DS$; Præterea anguli SDG & EHG sunt ambo recti, SDG quidem per constructionem, angulus verò EHG est in Ellipsi complementum ad duos rectos angulorum GHD & EHA, in Hyperbola eorum summa, cum autem illi duo anguli GHD & EHA pertineant ad Triangula Rectangula similia, simul sumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos est recto æquale, ergo Angulus EHG est rectus; Eodem modo probatur Triangula HAE, GSE esse similia, ob latera proportionalia SE & GS, AE & HA, circa angulos HAE & GSE rectos posita; nam ob Triangula similia EAS, SDG est $ES : GS = AE : DS$ sive HA; & HAE est rectus per constructionem & GSE in Ellipsi est complementum ad duos rectos angulorum GSD & EAS, & in Hyperbola eorum summa, illi vero Anguli pertinent ad Triangula Rectangula similia &c.

Tertio EGH est simile HGy (per 8. 6. El.) & eadem ratione est GSE simile ESY.

Ex quibus liquet, Triangula EAS, GHy esse similia ut & Triangula GSE, ESY; ex similitudine Triangulorum EAS, GHy est $ES : GH = EA : Hy$, & ex similitudine Triangulorum GDH & ESY est $ES : GH = SY : GD$ ergo est $EA : Hy = SY : GD$ & $EA \times GD = Hy \times SY$ sed $EA \times GD = CB^2$ per Lemma præcedens, ergo etiam $Hy \times SY = CB^2$. Q. E. D.

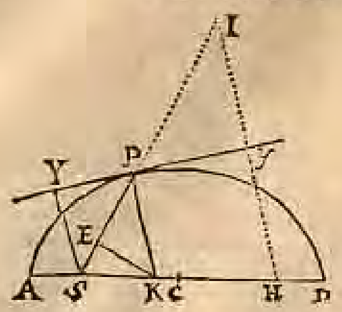
236. Lem. IV. Ducatur à foco S linea SP ad punctum contactûs & ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ secet axem in K, & ex puncto K ducatur in lineam SP perpendicularis KE, pars PE lineæ PS erit æqualis semilateri recto.

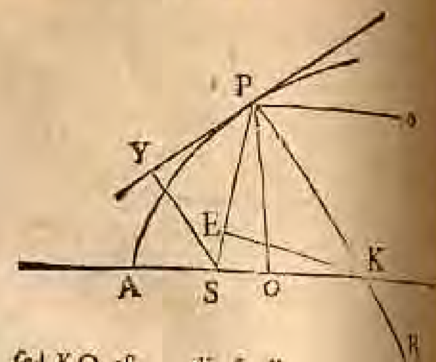


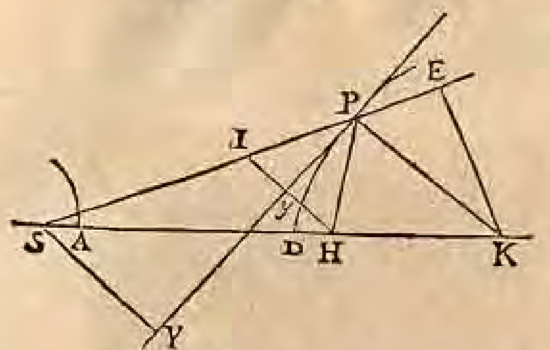


Producatur vel secetur SP in I ut sit $SI = AD$ sive Axi, ducaturque ex altero foco linea HI quæ dividitur bifariam & perpendiculariter per Tangentem in y (per Theor. II. de Hyp. & IV. de Ellip.) ergo $HI = 2\,Hy$ & est HI parallela PK, ergo Triangula PSK ISH sunt similia, estque $PS : PK = SI : IH$ sive $2\,Hy$, sed ob Parallelas SY, PK, & angulos rectos Y & E similia sunt Triangula PSY, PKE, ergo est $PS : PK = SY : PE$, est ideo $SI : 2\,Hy = SY : PE$ & PE

2 Hy





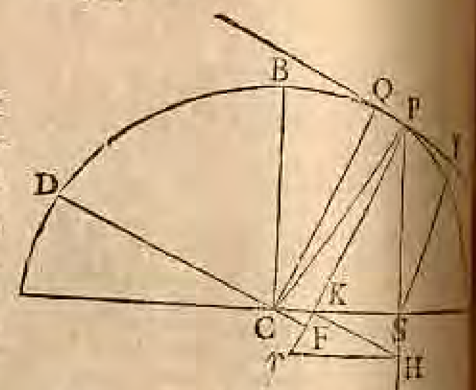


$= \frac{2 Hy \times SY}{SI}$ fed $Hy \times SY = CB^2$ & $SI = 2AC$, ergo $PE = \frac{2CB^2}{2AC}$ & $2PE = \frac{4CB^2}{2AC}$ fed Latus Rectum L eft $\frac{4CB^2}{2AC}$, ergo $2PE = L$, five PE eft dimidium lateris Recti.

237. 1. Coroll. Ex eo quod eft $PS : PK = SY : PE$ five $\frac{1}{2}L$, eft $SY = \frac{L \times PS}{2PK}$ & $PK = \frac{L \times PS}{2SY}$

238. 2. Cor. Hoc Lemma cum fuo Corollario de Parabola etiam verum eft, fed aliter demonftratur, ducta ordinata PO Triangula PKO, PKE funt æqualia, propter Angulos rectos in O & E; latus PK commune, & angulum PKO angulo KPE æqualem, ducto enim Diametro Po, erit OPK æqualis PKO ob Parallelas AK & Po fed oPK eft etiam æqualis angulo KPE quia perpendicularis dividit bifariam angulum SPo (per Theor. III. de Parab.) ergo angulus PKO = KPE, & (per 26. 1. Elem.) Triangulum PKO eft æquale Triangulo PKE ideoque PE = KO, fed KO eft æqualis femilateri recto (per Theor. III. de parab.) ergo & PE.

239. Lemma V. In omni fectione conicâ cujus focus S, PY, tangens in P, SY & PK, tangenti perpendiculares, L, latus rectum, eft radius ofculi $Pr = \frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ ...



Dem. ... Sit APB ellipfis cujus femiaxes AC, BC, femidiametri conjugatæ PC, DC, ac proinde DF, tangenti PY parallela, atque adeo PF, QC, tangenti perpendiculares æquales funt. Eft (per Lem. XII. Newt.) $CD . BC = AC : PF$, & $CD^2 : BC^2 = AC^2 : PF^2$, ideoque eft $CD^2 = \frac{BC^2 \times AC^2}{PF^2}$ Et quia $BC^2 = CQ \times PK$ five $PF \times PK$ (233.) eft $CD^2 = \frac{PF \times PK}{PF^2} \times AC^2 = \frac{PK \times AC^2}{PF}$; fed eft $Pr = \frac{CD^2}{PF}$ (230.)

ergo eft $Pr = \frac{PK \times AC^2}{PF^2}$; eft autem $AC : BC = BC : \frac{1}{2}L$, ergo $BC^2 = \frac{1}{2}L \times AC$ ideoque $PF \times PK = \frac{1}{2}L \times AC$, ergo $PF = \frac{L \times AC}{2PK}$ & $PF^2 = \frac{L^2 \times AC^2}{4PK^2}$ atque fubftituto in valore Pr mox reperto erit $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, & quia $PK = \frac{L \times SP}{2SY}$ (237.) erit $\frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = Pr$. Q. e. 1um.

Idem eodem prorfus modo demonftratur in hyperbolâ. Q. e. 2um.

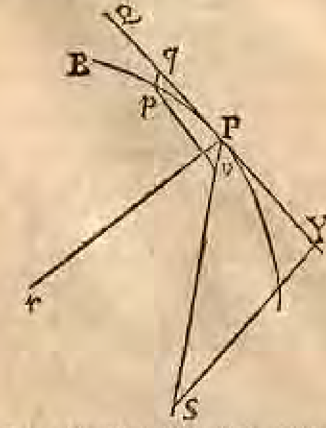
In Ellipfi crefcente focorum diftantiâ manet $Pr = \frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$, adeóque idem etiam verum eft cum focorum diftantia infinita evadit, feu cum Ellipfis in Parabolam mutatur. Q. e. 3um.

240. Coroll. 1 ... Ex his facillima oritur conftructio pro determinando radio curvaturæ in quâvis fectione conicâ. Ex K, enim fuper PK, erigatur perpendicularis KH, cum PS concurrens in H; ex H erigatur fuper PH perpendicularis Hr, erit Pr, radius curvaturæ. Nam ob angulos rectos PKH, PHr, & lineas PK, SY, parallelas eft $SP : SY = Pr : PH = PH : PK$, atque inde $SY^2 : SP^2 = PK : Pr$; adeóque $Pr = \frac{PK \times SP^2}{SY^2}$ fed $SY = \frac{L \times SP}{2PK}$ (237), ergò $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, ac proinde Pr eft radius ofculi (239.).

241. Coroll. 2 ... Quoniam in verticibus fectionum conicarum principalibus $SP = SY$, erit ibi $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = \frac{L}{2}$, feu radius ofculi æqualis dimidio lateris recti principalis.

242. Theor. Datis in puncto P, vis centripetæ quâ corpus curvam PpB defcribit quantitate abfolutâ, vis illius directione PS, velocitate corporis, & pofitione tangentis PQ, datur curvæ PpB curvatura in P, feu radius ofculi Pr.

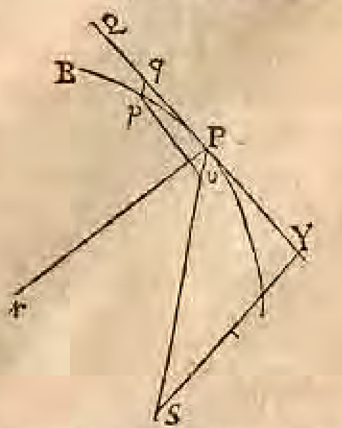
Dem.. Sit curva PpB, & circuli ofculantis arcus infinitefimus Pp, & quoniam velocitas corporis P revolventis finita fupponitur, vis centripeta conftans eft, & illius directio fibi parallela per arcum Pp,



adeòque arcus ille eft portio parabolæ cujus tangens PQ, & diameter PS (ex notâ 40d.) Quoniam autem vis centripetæ quantitas abfoluta in P, data eft, datumque proindè fpatium quod corpus vi illâ conftante, dato tempore percurreret, & præterea corporis P velocitas, ac tangentis PQ pofitio data funt, data eft ratio qp five Pv ad Pq five pv, data ergo eft parabola quam corpus P defcriberet, fi vis centripeta eadem maneret & directionem haberet lineæ PS perpetuò parallelam. Cum igitur datus fit radius circuli parabolam datam in dato puncto ofculantis (239.) datur Pr, radius ofculi in puncto P. Q. e. d.

243. Coroll. Hinc datis in puncto P, curvaturâ feu radio ofculi Pr, pofitione tangentis PQ, velocitate corporis, & vis centripetæ directione PS, datur vis illius quantitas abfoluta in P; nam propter datas pofitionem Tangentis, & vis directionem, datur ratio SP ad SY & SP^3 ad SY^3, five $\frac{SP^3}{SY^3}$ & propter datum $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ datur $\frac{L}{2}$ five L Latus rectum principale Parabolæ cujus arcus Pp eft portio, PS Diameter & PQ Tangens unde datur tota Parabola & Latus rectum Diametri PS; Denique cum data fit velocitas corporis in P datur lineola Pq, vel pv dato tempore defcripta, datur ergo abfciffa Pv five qp quæ eft vis centripetæ quantitas abfoluta.

Datis verò in P, vis centripetæ quantitate abfolutâ, vis illius directione PS, pofitione tangentis PQ, radio ofculi Pr, five datâ curvaturâ, datur velocitas corporis in P, &

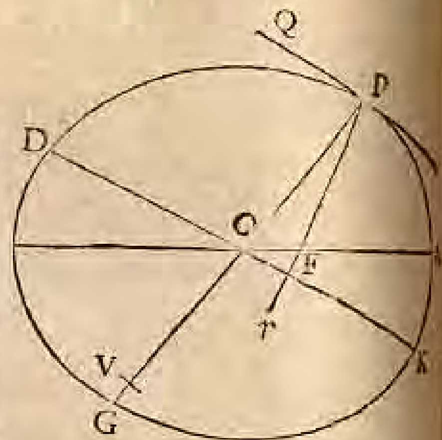


& generatim si ex his quinque, nimirum, vis centripetæ quantitate absolutâ, illius directione, velocitate corporis, positione tangentis & curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum est.

244. Theor. Corpus P, circà centrum virium S datum revolvendo, curvam P p B describat, sintque data, vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, data lex secundum quam in variis à centro S distantiis vis centripeta agit, positio tangentis P Q, & curvatura in P, determinata ac unica est curva P p B, quam corpus P, circà centrum virium S, potest describere.... Dem... Quoniam datur centrum virium S & punctum P, datur quoque positio rectæ P S, hoc est, directio vis centripetæ, ac proinde ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur; sed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate absolutâ, positione tangentis seu rectæ secundùm quam projicitur corpus, velocitate projectionis determinatur proximum punctum p, tangentis in eo puncto p positio, corporis P in eo velocitas, ut & novâ distantiâ à centro p S, sed datâ lege vis centripetæ in variis à Centro distantiis, datur iterum in puncto novo p, vis centripeta, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ P p B, successivè determinantur; ergo data ac unica est curva quam corpus P, his datis describere potest. Q. e. D.

Coroll. Iisdem manentibus, si describatur nova curva quæ curvam P p B quam corpus P describit osculetur in P, quæ proindè eandem habet tangentem P Q, ut porè radio osculi P R, perpendicularem, impossibile est ut datis iis quæ numero 244. posuimus, corpus P, hanc novam curvam a priori diversam describat, hoc est, verba Newtoni ferè usurpando, orbes duo se mutuò osculantes eâdem vi centripetâ describi non possunt.

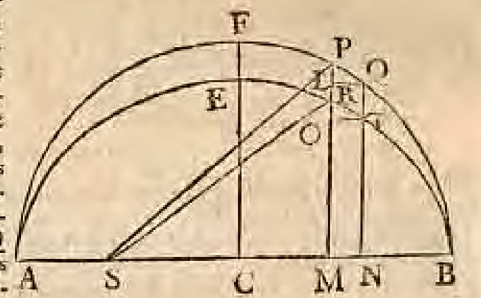
245. Hisce positis tandem probabimus quòd si vis centripeta sit ut distantia à centro, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo in quem Ellipsis migrat focis coeuntibus.



Data sint centrum virium C, & vis centripetæ quantitas absoluta, data a centro distantia C P, & corpus datâ cum velocitate secundùm directionem datam rectæ P Q projiciatur, erit P Q tangens curvæ describendæ. Si fuerit C P ad tangentem P Q normalis, & velocitas quâ corpus P, projicitur æqualis velocitati quam idem corpus solâ vi centripetâ ut est in P, constante sollicitatum acquireret, cadendo per dimidium radium P C, curva describenda erit circulus cujus centrum C, & radius C P (201.) si verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus P, aliam curvam describet, in quâ tangens P Q, non semper erit ad radium vectorem C P perpendicularis, cum hæc sit solius circuli proprietas, ut notum est. Sit ergò P Q ad radium vectorem C P obliqua, per centrum C ducatur recta C K, ipsi P Q parallela, & radio osculi P r dato (242.) describatur circulus rectam P C intersecans in V, tùm sumatur C K, media proportionalis inter C P, & $\frac{1}{2}$ P V, & semidiametris conjugatis C P, C K, describatur ellipsis P D G A, ea erit orbita quam corpus P, describet.... Dem... Ellipsis P D G A, describi potest per corpus aliquod *A* sollicitatum vi aliquâ centripetâ ad centrum C tendente, quæque sit semper ut distantia ab illo centro C P, (prop. X.) ponamus velocitatem corporis *A*, tandem esse ac velocitatem projectionis corporis *P*, & ex datâ velocitate corporis illius *A*, directione tangentis P Q directione vis C P, & curvaturâ Ellipsis in P, datur vis centripetæ quantitas absoluta (242.) quâ corpus *A*, in Ellipsi motum retinetur in puncto P, sed eadem est ellipsis illius, & orbitæ quam corpus P describit, curvatura; nam P r est radius circuli Ellipsim P D G A osculantis in P, (per constr. & secum demonst. Newt. Prop. X.) est quoque radius circuli curvam quam corpus P describit osculantis in eodem puncto P, (per constr.) adeóque Ellipsis P D G A, & orbita quam corpus P describit eandem habent curvaturam in puncto P, prætereà recta P Q, orbitæ tangens cum sit diametro C K parallela ellipsim tangit in P, idem est orbitæ & ellipsis centrum C, idem punctum P, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ ac proindè eadem vis illius quantitas absoluta in puncto P, tam in ellipsi quam in orbitâ à corpore P describendâ; cum igitur iis datis corpus P unicam curvam describere possit & reverâ ellipsim P D G A, possit describere, si vis centripeta sit ut distantiâ à centro (nec circulus describatur) corpus movebitur in Ellipsi centrum habente in centro virium. Q. e. D.

Corol. 2. (d) Et æqualia erunt revolutionum in ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipsibus similibus æqualia sunt (per corol. 3. & 8. prop. IV.) in ellipsibus autem communem habentibus axem majorem sunt ad invicem ut ellipseon areæ totæ directè, & arearum particulæ simul descriptæ inversè; id est, ut axes minores direc-

246. Si vis centrifuga sit ut distantia à centro, eodem modo demonstratur corpus moveri in hyperbolâ centrum habente in centro virium.

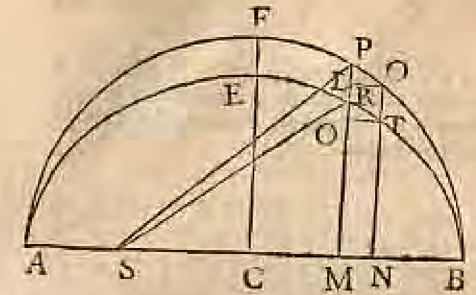


(d) 247. Ut demonstretur *æqualia esse revolutionum circa idem centrum factarum periodica tempora in Ellipsibus universis ista ex Conicis sunt repetenda.*

Lemma...... Area circuli A F B, cujus radius F C æquatur semiaxi A C ellipsis A E B, est ad hujus Ellipseos aream ut semiaxis A C, seu F C, ad alterum semiaxem E C... Dem... Axis A B, divisus intelligatur in particulas innumeras æquales lineolæ M N, & per singula divisionum puncta erigantur rectæ P M, Q N, axi perpendiculares. Quoniam ex circuli & Ellypsis naturâ, $FC^2 : QN^2 = AC \times CB : AN \times NB = EC^2 : TN^2$, erit $FC : QN = EC : TN$, & $FC : EC = QN : TN$; verum ejusdem basis rectangula N L, N O, sunt ut altitudines N Q, N T, ac proindè $NL : NO = FC : EC$; ergò ultima summa rectangulorum evanescentium ut N L, ad summam rectangulorum evanescentium ut N O, hoc est, area circuli ad aream Ellipsis (per Lem. IV.) ra-

tiodirectè, & corporum velocitates in verticibus principalibus inversè; hoc est, ut axes illi minores directè, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inversè; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scho-



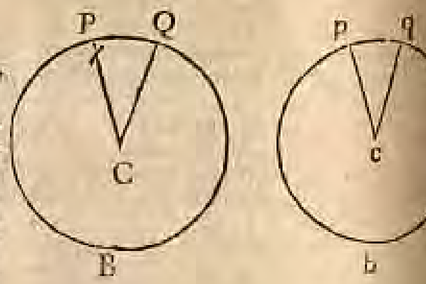
tionem habet semiaxis F C, ad alterum semiaxem E C. Q. e. D.

248. Coroll. 1 ... Idem eodem prorsùs modo demonstratur, si A F B fuerit Ellipsis communem axem A B, habens cum Ellipsi A E B. Et generatim duæ quævis figuræ A F B, A E B, quarum semiordinatæ Q N, T N, sunt in datâ ratione & quarum est communis diameter A B, sunt inter se in ratione datâ ordinatarum Q N, T N.

249. Coroll. 2. Area circuli cujus diameter est medius proportionalis inter duos Ellipsis axes æqualis est areæ Ellipsis. Nam sit $EC : R = R : FC$, & radio R, describatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli A F B, ut R^2 ad FC^2, adeóque ut E C ad F C; Quarè cum Ellipsis A E B, eandem habeat rationem ad circulum A F B (247), manifestum est aream circuli radio R, descripti æqualem esse areæ Ellipsis A E B.

250. Coroll. 3 ... Quoniam $R^2 = FC \times EC$, & areæ circulorum sunt ut radiorum quadrata, erunt areæ Ellipsium ut axium rectangula.

251. Coroll. 4 ... Patet etiam in Ellipsibus vel ellipsi & circulo aut etiam in quibuslibet curvis quarum ordinatæ Q N, T N, datam habent rationem, & quarum est diameter communis A B, aream MRB esse ad aream correspondentem MPB, ut est E C, ad F C, seu ut R M ad P M; sed ductis ex quocumque diametri puncto S, rectis S P, S R, est etiam triangulum S M R, ad triangulum S M P, ut M R ad M P, ob communem utriusque trianguli altitudinem M S; ergò sector S B R, est ad sectorem S B P, in ratione datâ E C, ad F C.

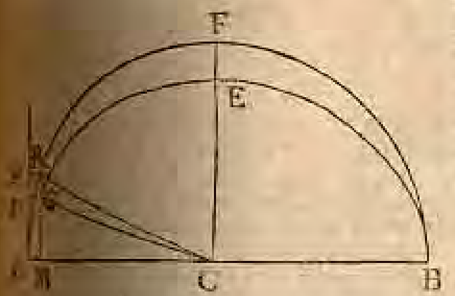


252. Theor. Corpora duo P, p, circa varium centra C, c, revolvendo, orbitas PQB, p q b, describant; tempus periodicum in orbitâ P Q B, est ad tempus periodicum in alterâ orbitâ p q b, ut area P Q B P, ad aream p q b p, directè & sectores P C Q, p c q, simul descripti inversè ..... Dem. ... ob æquabilem arearum circà centra C, c, descriptionem (prop. I.) tempus periodicum T, in orbe P Q B, est ad tempus t, quo describitur sector P C Q, ut area P Q B P, ad sectorem P C Q, & similiter tempus t, quo describitur sector p q c, est ad tempus periodicum θ, in orbe p q b, ut sector p c q, ad aream p q b p; hoc est $T : t = PQBP$ area $: PCQ$, & $t : \theta = pcq : pqbp$ area, unde per compositionem rationum & ex æquo $T : \theta = PQBP \times pcq : pqbp \times PCQ$. Q. e. D.

253.

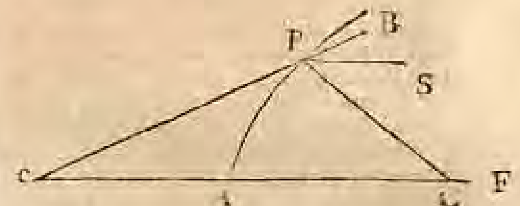
Scholium.

Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinitè distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est theorema *Galilæi.* (c) Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus



253. Si corpora duo Ellipses A E B, A F B, quarum est axis communis A B, describant, viribus ad centrum Ellipsium C tendentibus; tempora periodica erunt æqualia ... Dem ... Sint arcus A R, A G, infinitesimi eodem tempore descripti, A Q tangens ad verticem A, Q R, D G, ad A B, parallelæ, & quoniam vires centrales sunt ut Q R, D G (prop. VI.) & ob communem distantiam à centro A C, æquales sunt vires, seu eadem vis (prop. X.) erit $QR = DG$, sectores verò A C G, A C R, sunt ut G M, R M, seu E C, F C, (251), & areæ Ellypsium A E B, A F B, sunt etiam ut E C, F C, (247. 248.) Quare cum tempora periodica in illis Ellipsibus sint ut areæ A E B A F B directè & sectores A C G, A C R, inversè (252.) erunt eædem ut E C ad F C directè, & E C ad F C inverse, hoc est, ut $EC \times FC$ ad $FC \times EC$, ac proindè in ratione æqualitatis. Q. e. D.

254. His positis facilè *demonstratur æqualia esse revolutionum in Ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora.* Nam duæ quævis ellipses circa idem centrum descriptæ dicantur A, & B, describatur tertia Ellipsis C, similis Ellipsi A, & axem unum communem habens cum Ellipsi B, tempora periodica in Ellipsibus similibus A & C, sunt æqualia (per corol. 3. & 8. prop. IV. Newt.) & tempora periodica in ellipsibus C, & B, axem alterum communem habentibus sunt etiam æqualia (253.) tempora igitur periodica in Ellipsibus quibusvis A & B sunt æqualia. Q. e. D.



(c) 255. *Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata), vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ.* Cum enim Ellypsis centrum C, à vertice A, in plagam F abit, vis centripetæ directio est per lineas P C, P F, à puncto P, ad centrum, & ubi infinita evadit distantia P C, atque P S, ad centrum ducta axi parallela fit, Ellipsi in parabolam mutatâ, directio est à puncto P, ad S, secundùm lineam P S; mutatâ in Hyperbolam parabolâ, & centro ad alteram verticis A partem translato in c, vis centralis directio est secundùm lineam P B, à P ad B, hoc est, à centro C, ad P c, adeòque in centrifugam versa (228.)

256.

DE MOTU CORPORUM. hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam verſâ. Et quemadmodum in circulo vel ellipſi ſi vires tendunt ad centrum figuræ in abſciſſâ poſitum, hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abſciſſam, ſemper augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum á centro, ſi modo tempora periodica maneant æqualia; (f) ſic etiam in figuris univerſis ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore pe-

256. Ex quibus ſequitur hæc generalis Lex; Si corpus revolvatur in ſectione conicâ, & vis centralis tendat ad ſectionis centrum, aut à centro, vis illa erit directè ut diſtantia à centro, & contrà ſi vis fuerit ut diſtantia à centro, corpus movetur in ſectione conicâ. (245. 246.)

(f) 257. *In figuris univerſis, ſi ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore Periodico, vires augentur vel minuuntur in ratione diſtantiarum a Centro.* Hujus veritas ſequentium Lemmatum ope patebit.

Lemma. In figurâ quâvis A Q D, cujus diameter A D, ad hanc diametrum ordinatæ Q E, N G, augeantur vel minuantur in ratione datâ Q E, ad P E, vel ad angulum quemvis datum P E D, inclinentur, novaque deſcribatur curva A P D, per novarum ordinatarum extrema tranſiens, ſitque centrum virium C, in diametro poſitum utrique curvæ commune, rectæ P H, Q h, quæ curvas in punctis correſpondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt.... Dem... Ductis rectis P t, Q v, diametro A D parallelis, erit Q v = G E, = P t, & (per hypotheſim) n v : m t = E Q : E P, unde & alternando n v : E Q = m t : E P, & coeuntibus punctis n & Q, m & P, erit propter ſimilitudinem triangulorum n v Q & Q E h m t P & P E H

n v : E Q = Q v (G E) : E h

m t : E P = P t (G E) : E H

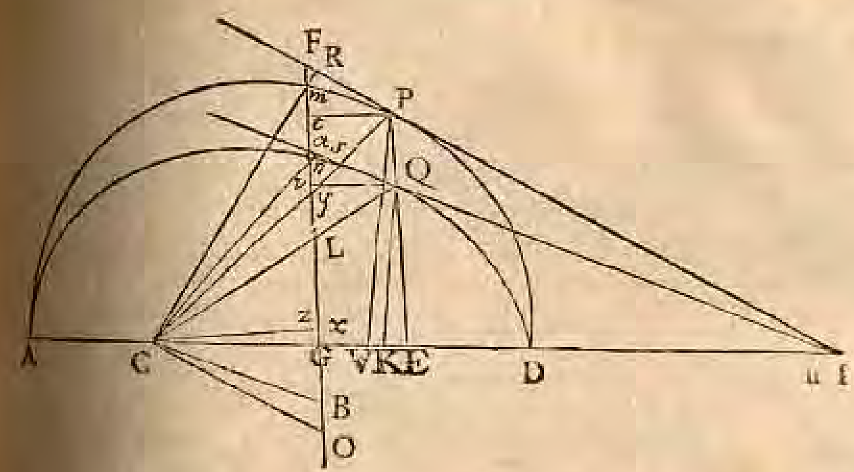
Cum ergo ſit n v : E Q = m t : E P, erit G E : E h = G E : E H, ideoque E H = E h, ac proindè tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. Q. e. D.

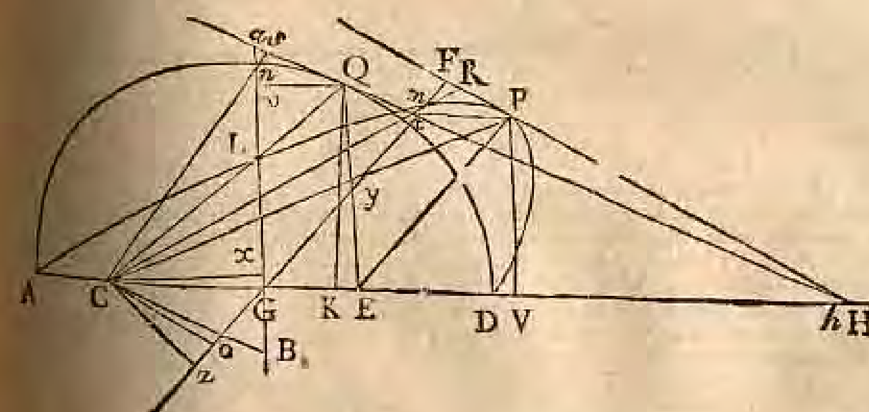
258. Lemma. Iiſdem manentibus ſector evaneſcens, C Q n, eſt ad ſectorem C P m in alterâ curvâ correſpondentem ut area A Q D, ad aream A P D... Dem. ob parallelas G m & E P, G n, & E Q, eſt Gy : CG = EP : CE & CG : GL = CE : EQ unde ex æquo Gy : GL = EP : EQ = Gm : Gn (per conſt.) & hinc Gm − Gy : Gn − GL = ym : Ln = Gm : Gn = EP : QE. Ex puncto C, demittantur in Gm, & Gn, perpendiculares Cz, Cx; & ex punctis P & Q, in diametrum A D, perpendiculares P V, Q K, & erit triangulum Cym : triang. CLn = ym × Cz : Ln × Cx = Gm × Cz : Gn × C x. Verum ob ſimilia triangula CzG, & PVE, CxG & QKE, eſt Cz : CG = PV : PE, & CG : Cx = QE : QK atque adeò per compoſitionem rationum Cz : Cx = PV × QE : QK × PE = PV × Gn : QK × Gm (per conſtr.) cum ergo ſit triangulum Cym : triang. CLn = Gm × Cz : Gn × Cx = Gm × PV × Gn : Gn × QK × Gm = PV : QK, & PV ſit ad QK, ut parallelogrammum GEPm, ad parallelogrammum GEQn, hoc eſt, (per Lem. IV.) & per conſtruct. ut area APD, ad aream A Q D; ergò triangula Cym, CLn, ſunt in ratione arearum APD, AQD; at punctis m & P, n & Q coeuntibus, ſector C P m, æquatur triangulo Cym, & ſector CQn triangulo CLn; ſunt igitur ſectores illi evaneſcentes ut areæ A P D, A Q D, directè. Q. e. D.

259. Theor. Iiſdem manentibus ſi tempora

periodico; vires ad centrum quodcunque in abſciſſâ poſitum tendentes in ſingulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro. LIBER PRIMUS.

SEC-

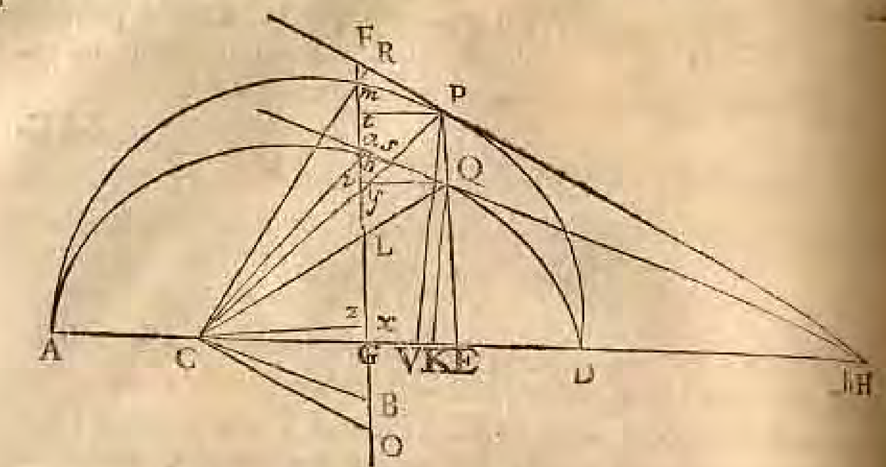


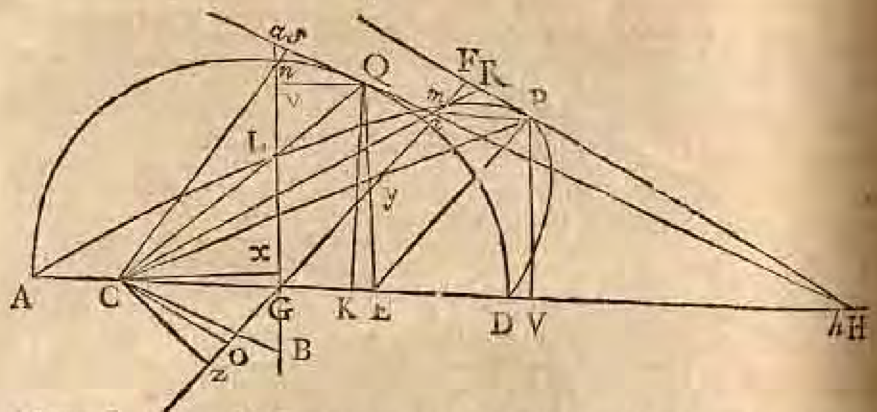


pora periodica in curvis APD, AQD fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correſpondentibus P & Q erunt inter ſe ut diſtantiæ à centro CP, CQ.

Demonſt. Figura A Q D rectis ex centro C ductis in ſectores innumeros inter ſe æquales, ut CQn, & figura A P d, in totidem ſectores correſpondentes, ac proindè etiam inter ſe æquales (258), ut CPm diviſæ intelligantur; & ob eumdem

ſectq-





sectorum in utrâque figurâ numerum, æquabilem illorum descriptionem (prop. I.) & æqualia tempora periodica, sectores CPm, CQn, æquali tempore describentur. Quare (per prop. VI). Vires centripetæ in punctis P & Q, sunt inter se ut rectæ mR, nS, punctis m & P, n & Q coeuntibus; verùm propter Parallelas QE, aG & PE, FG, est, aG : FG = QE : PE, (257) & quia nG & mG in eadem sunt ratione, iis ex aG & FG subductis manent an ad Fm sicut QE ad PE; ductis autem ex C, Parallelis CB CO ad tangentes aH FH, Triangula BCG & OGC sunt similia triangulis aGH, FGH unde est

BG : aG = GC : GH

& OG : FG = GC : GH ideoque

BG : OG = aG : FG = QE : PE = nG : mG & jungendo terminos primæ & secundæ rationis terminis ultimæ est Bn : Om = QE : PE = an : Fm. Denique quia CB, CO, Tangentibus aH FH Parallelas, similia etiam sunt Triangula, naS & nCB, FmR & mCO, est

Bn : na = Cn : Sn

& est Fm : mO = Rm : mC, & Compositis Rationibus est Bn × Fm : na × mO = Cn × Rm : Sn × mC, sed quia Bn : Om = an : Fm, est Bn × Fm = an × Om, ergo etiam Cn × Rm = Sn × mC, ideoque Cn : Cm = Rm : Sn; sive distantiæ à Centro in eadem sunt ratione ac vires Centrales.

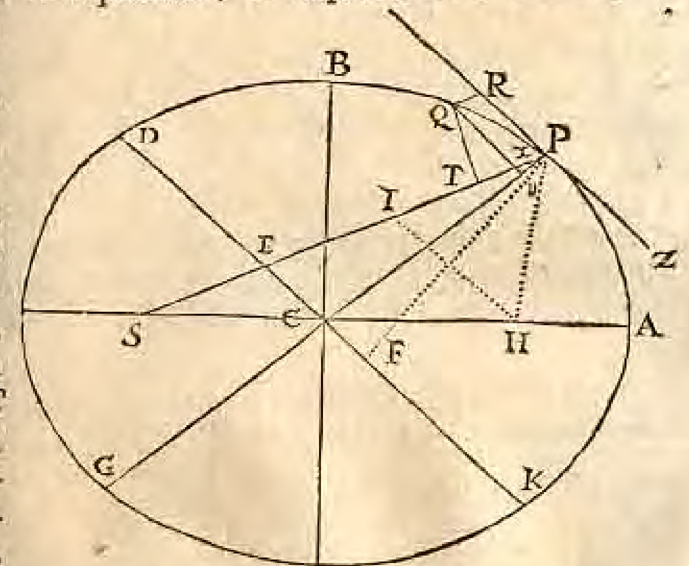
SECTIO III.

De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

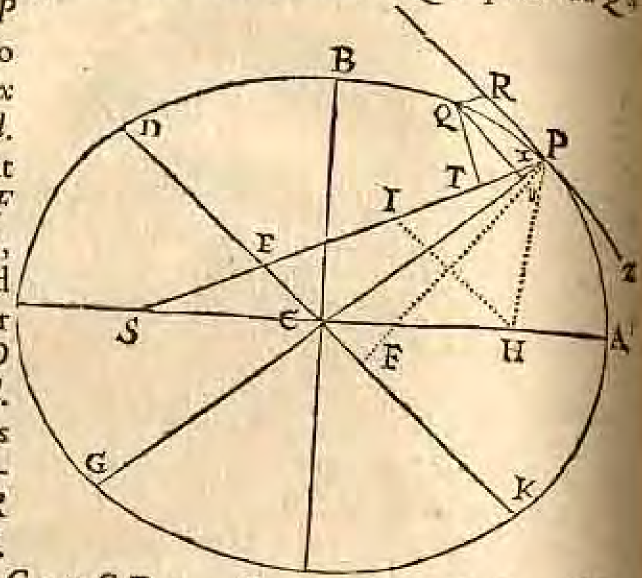
Esto ellipseos umbilicus *S*. Agatur *SP* secans ellipseos tum diametrum *DK* in *E*, tum ordinatim applicatam *Qv* in *x*, & compleatur parallelogrammum *QxPR*. Patet *EP* æqualem esse semiaxi majori *AC*, eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico *H* lineâ *HI* ipsi *EC* parallelâ, ob æquales *CS*, *CH* æquentur *ES*, *EI*, (t) adeo ut *EP* semisumma sit ipsarum *PS*, *PI*, id est (ob parallelas *HI*, *PR*, & angulos æquales *IPR*, *HPZ*) ipsarum *PS*, *PH*, quæ conjunctim axem totum 2*AC* adæquant. Ad *SP* demittatur perpendicularis *QT*, & ellipseos latere recto



prin-

(t) 260. Quia (per prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellipsi) æquales sunt anguli quos rectæ PH, PS, constituunt cum tangente PR, & ob parallelas HI, PR, æquales quoque sunt anguli alterni PIH, PHI, æquales erunt rectæ PI, PH, adeóque $EP = \frac{PS + PH}{2}$ = AC, (prop. 52. lib. 3. conic. apoll. superius Theor. III. de Ellip.).

principali (seu ([h]) $\frac{2\,BC\,quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv ([i]) id est, ut PE seu AC ad PC; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv; & ([k]) GvP ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus est ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QT *quad.* ut EP *quad.* ad PF *quad.* ([l]) id est, ut CA *quad.* ad PF *quad.* sive (per lem. XII.) ut CD *quad.* ad CB *quad.* ([m]) Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad QT *quad.* ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2\,CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2\,PC$ ad Gv. Sed punctis



([h]) 261. In Ellipsi & hyperbolâ latus rectum principale $L = \frac{2\,BC^2}{AC}$ nam $2AC : 2BC = 2BC : L$, undè $L = \frac{4\,BC^2}{2\,AC} = \frac{2\,BC^2}{AC}$.

([i]) Per constructionem $QR = Px$, sed propter Triangula similia Pxv, PEC $Px : Pv = PE\,(AC) : PC$, ergò $QR : Pv = AC : PC$.

([k]) Per naturam Conicorum, facta partium Diametri sunt ad quadrata Ordinatarum ut Diametri transversæ quadratum ad quadratum ejus conjugatæ (Vide superius de Conicis Theor. II. de Ellipsi & de Hyperbolâ).

([l]) Est $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$; nam per Lem. XII. $PF \times CD = AC \times BC$, adeóque $PF^2 \times CD^2 = CA^2 \times BC^2$, ac proindè $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$.

([m]) 262. Scriptis seorsim analogiis res clara fit.

$$L \times QR : L \times Pv = AC : PC$$
$$L \times Pv : GvP = L : Gv$$
$$GvP : Qv^2 = PC^2 : CD^2$$
$$Qv^2 : QT^2 = CD^2 : CB^2.$$

Undè conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, hoc est, ob $AC \times L = 2\,BC^2$, $L \times QR : QT^2 = 2\,PC : Gv$, & ob $2\,PC = Gv$, $L \times QR = QT^2$, & $L = \frac{QT^2}{QR}$.

tis Q & P coeuntibus æquantur $2\,PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT *quad.* æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicata distantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus P in ellipsi illâ revolvi potest, sit (per corol. 1. prop. X.) ut CP distantia corporis ab ellipseos centro C; ducatur CE parallela ellipseos tangenti PR; & vis, quâ corpus idem P circum aliud quodvis ellipseos punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E, ([n]) erit ut $\frac{PE\,cub.}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus ellipseos, ideoque PE detur, ut SPq reciprocè. *Q. E. I.*

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

PRO-

([n]) Nam (per Coroll. III. Prop. VII.) vis tendens ad centrum C, quam exponat recta CP, est ad vim tendentem ad aliud punctum S, quam exponat recta SP, ut $CP \times SP^2$ ad cubum rectæ quæ à centro C ad Tangentem RPZ duceretur parallela ad lineam SP à secundo virium centro ad punctum P curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret PE, quoniam ipsi esset Parallela & inter easdem Parallelas DC RPZ, adeóque $CP \times SP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{SP^2}$; hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeóque $PE = AC$ (260) detur, erit vis ut SP^2 reciprocè; hic autem supponitur talem esse vim ad centrum C tendentem ut tempora periodica circà centra C, & S, æqualia sint, quod supponi potest.

263.

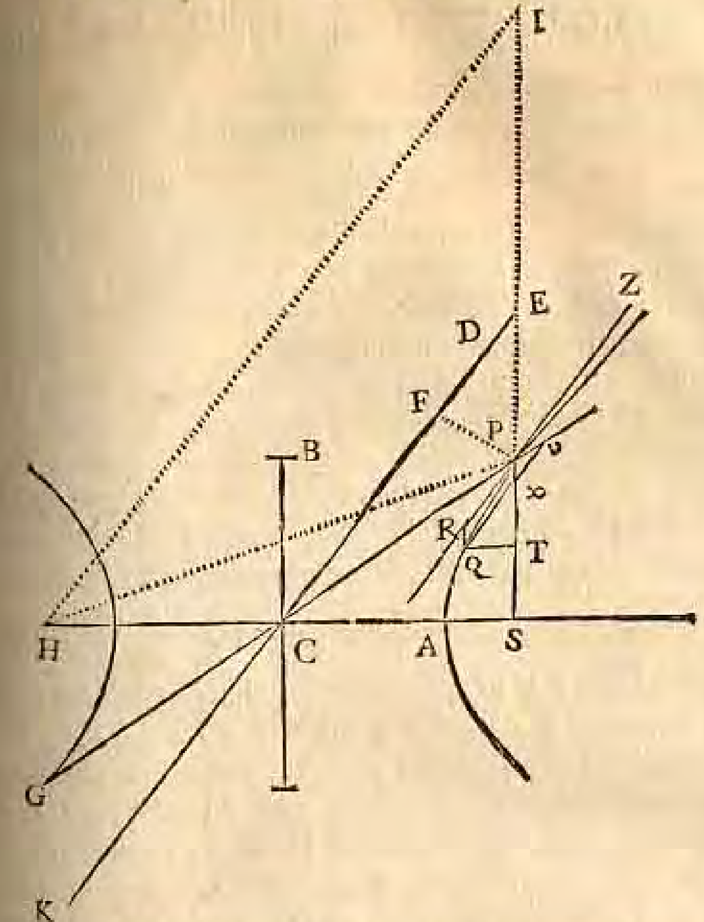
PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB ſemiaxes hyperbolæ; PG, KD, diametri aliæ conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP ſecans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. (°) Patet EP æqualem eſſe ſemiaxi tranſverſo AC, eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ HI, ipſi EC parallelâ, ob æquales CS, CH æquentur ES, EI; adeo ut EP ſemidifferentia ſit ipſarum PS, PI, id eſt (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipſarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et hyperbolæ latere recto principali (ſeu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, ſeu Px ad Pv, id eſt (ob ſimilia triangula Pxv, PEC) ut PE ad PC, ſeu AC ad PC. Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv; & (ex naturâ conicorum) rectangulum GvP ad Qv *quad.* ut PCq ad CDq; & (per corol. 2. lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* ſeu Qv *quad.* eſt ad QTq ut EPq ad PFq, id eſt, ut CAq ad PFq, ſive (per lem. XII.) ut CDq ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, ſeu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, ſive ut $2PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq (P) æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè eſt ut $L \times SPq$, id eſt, reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ SP. *Q. E. I.*

(°) 263. Eſt $SE = SP + PE$ & ob æquales ES, EI, eſt $PI = EI + PE = ES + PE = SP + 2PE$, ac proindè $PI - SP = 2PE$, ac PE eſt ſemidifferentia ipſarum PS, PI; ſed angulus $HPR = RPS$, angulus enim interceptus inter lineas à focis ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (per prop. 48. lib. 3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.) & $RPS = EPZ$ (per 15. 1. Elem.) adeóque $IPR = HPZ$, & ob parallelas IH, PR, angulus $PHI = HPR = IPZ = HIP$, unde $HP = PI$, adeóque EP, eſt ſemidifferentia ipſarum PS, PH, & quia differentia rectarum PS, PH, axem totum $2AC$, adæquat (per prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Vide ſup. Theor. IV. de Hyperb.), eſt $EP = AC$.

264.



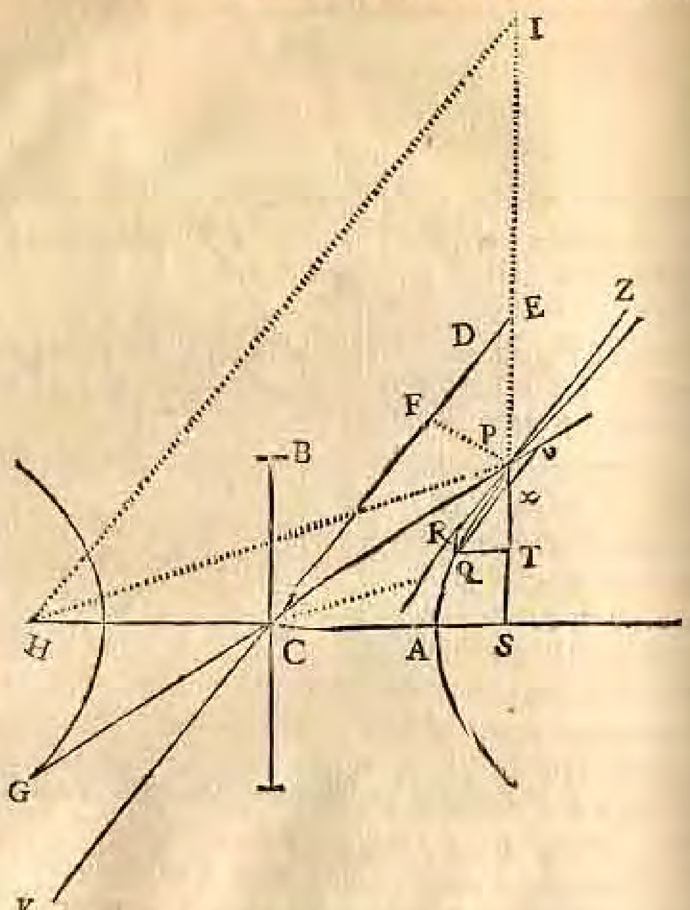
Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc diſtantiæ CP proportionalis. Inde vero (per. corol. 3. prop.

(P) 264. Notandum eſt quod in hyperbolâ ſicut in Ellipſi, (ut liquet ex demonſtratione Prop. X. & XI.) latus rectum principale ſive $L = \frac{QT^2}{QR}$.

VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$, hoc est, ob datam PE reciprocè ut SPq. *Q. E. I.*

Eodem modo demonstratur, quod corpus (q) hac vi centrifugà in centrifugam versà movebitur in hyperbolà oppositâ.



(q) 265. Nam ex centro C, in tangentem PR productam ducta intelligatur recta ipsi HP parallela, & ea æqualis erit lineæ PE; Etenim ob parallelas PR, CE, & HI, angulus quem linea ipsi HP, parallela efficit cum CE, æqualis erit angulo PHI = HIP = CEP; lineæ autem intrà duas parallelas æqualiter inclinatæ sunt æquales. Est igitur, (per coroll. 3. prop. VII.), vis centrifuga à centro C, tendens quâ corpus P, hyperbolam AQP, describit ad vim centrifugam à foco H tendentem quâ eandem hyperbolam percurrit ut $CP \times HP^2$ ad PE^3. Vim à centro C, tendentem quæ est ut CP, exponat recta CP, & alteram vim à foco H directam exponat recta A, & erit $CP \times HP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{HP^2}$, hoc est, ob PE æqualem datæ AC, vis à foco H tendens est reciprocè ut HP^2.

LEMMA XIII.

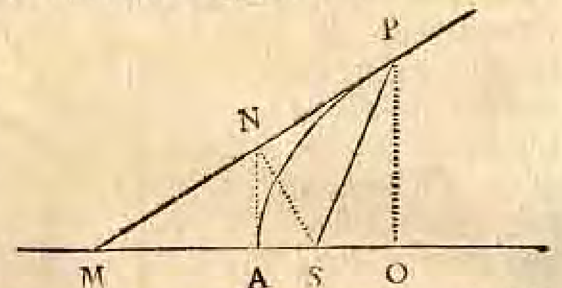
(r) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.*

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici à puncto contactus & à vertice principali figuræ.

Sit enim AP parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M, & SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur AN & ob æquales MS & SP, MN, & NP, MA & AO parallelæ erunt rectæ AN & OP; & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A, & simile triangulis æqualibus SNM, SNP: ergo PS est ad SN ut SN ad SA. *Q. D. E.*



Corol. 1. PSq est ad SNq ut PS ad SA.

(s) *Corol.* 2. Et ob datam SA est SNq ut PS.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis PM cum recta SN, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam AN quæ parabolam tangit in vertice principali.

P R O-

(r) 266. Dem.... Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parabolâ dedimus.

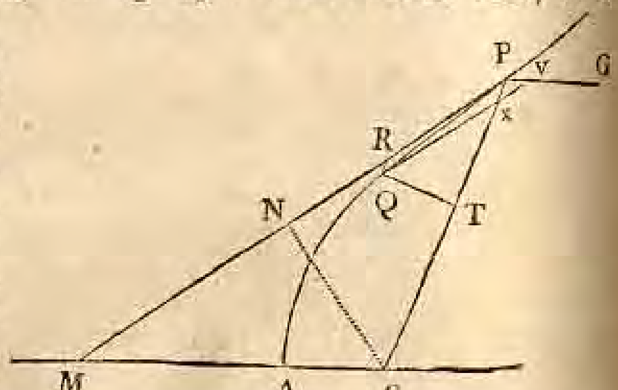
(s) Cum sit (per coroll. 1.) $SA \times PS^2 = SN^2 \times PS$, adeóque $SA \times PS = SN^2$; erit ob datam SA, SN^2 ut PS, id est, variationes quadrati SN^2, in eâdem parabolâ erunt ut variationes rectæ SP sive ut distantiæ à foco.

Nam

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio lemmatis, sitque P corpus in perimetro parabolæ, & à loco Q, in quem corpus proxime movetur, age ipsi SP parallelam QR & perpendicularem QT, necnon Qv tangenti parallelam, & occurrentem tum diametro PG in v, tum distantiæ SP in x. Jam ob similia triangula (t) Pxv, SPM, & æqualia unius latera SM, SP, æqualia sunt alterius latera Px seu QR & Pv. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri Pv, id est (per lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, seu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per corol. 2. lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in casu æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob similia triangula QxT, SPN) Qxq ad QTq ut PSq ad SNq, hoc est (per corol. 1. lem. XIV.) ut PS ad SA, id est, ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per prop. IX. lib. V. elem.) (u) QTq & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale



SP

(t) * Nam ob parallelas MP & Qv, MS & PG, est angulus $vPx = PSM$ & $Pxv = QxT = MPS$.

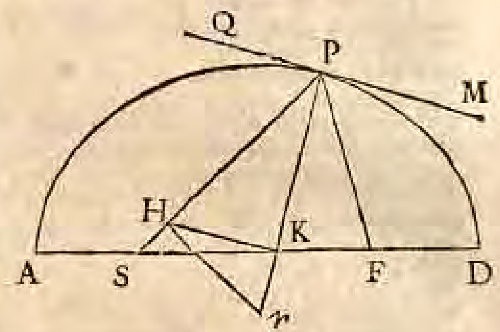
(u) 267. Quoniam latus rectum principale $L = 4AS$, & est $4AS \times QR = QT^2$, erit etiam in parabolâ ut in cæteris Sectionibus conicis (264), latus rectum principale $L = \frac{QT^2}{QR}$.

268.

$SPq \times 4SA$: & propterea (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $SPq \times 4SA$, id est, ob datam $4SA$ reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ SP. *Q. E. I.*

Corol. 1. (x) Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P secundum lineam quamvis rectam PR quâcunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripetâ, quæ sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & positione tangentis, describi potest sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis: & orbes duo se mutuo tangentes eâdem vi centripetâ eâdemque velocitate describi non possunt.

Co-



(x) 268. Si corpus moveatur in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium, vis centripeta erit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum ab umbilico, & contrà si vis centripeta fuerit quadrato distantiæ à centro virium reciprocè proportionalis, corpus movebitur in aliquâ sectionum conicarum... Dem... Prima pars propositionis à Newtono eleganter demonstrata, potest adhuc aliter & generatim demonstrari. Vis centripeta ut $\frac{SP}{SY^3 \times R}$ (212.) sed in omni sectione conicâ $R = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ (239.) Ergò $\frac{SP}{SY^3 \times R} = \frac{2SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{2}{L \times SP^2}$ hoc est, ob datam $\frac{2}{L}$, vis est ut $\frac{1}{SP^2}$. Q. e. 1um.

Corpus P, datâ cum velocitate secundum directionem datam PQ projiciatur, sitque vis centripetæ ad punctum S tendentis quantitas absoluta data in puncto dato P, in variis à centro distantiis ea vis sit semper in ratione inversâ quadrati distantiæ à centro S, si ea fuerit corporis P velocitas quam vi centripetâ ut est in P uniformiter urgente acquireret cadendo per $\frac{1}{2}$ SP & præterea P S sit ad PQ perpendicularis, corpus P circulum describet cujus centrum S & radius PS (201.) Si verò alia fuerit velocitas, aut PS ad PQ obliquâ, corpus P aliam describet orbitam in quâ tangens PQ, non semper erit ad radium vectorem SP perpendicularis. Sit igitur PQ ad SP obliqua, datur Pr, radius circuli orbitam à corpore P describendam osculantis in P; ex r in PS demittatur perpendicularis rH, & ex H in Pr perpendicularis HK, jungaturque

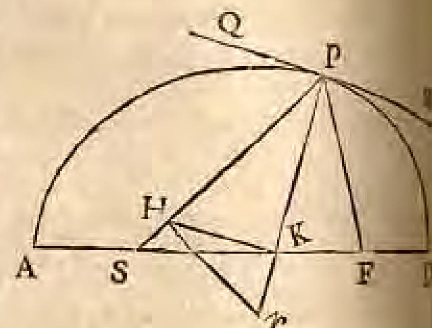
 X

SK;

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco suo P, ea sit, quâ lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium QR: movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione; cujus latus rectum principale est quantitas illa (r) $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipsin; & casum excipio, ubi corpus rectâ descendit ad centrum.

P R O-



SK; Deindè fiat angulus Q P F complementum ad duos rectos anguli Q P S, & si fuerit P F parallela ipsi S K, describatur parabola cujus umbilicus S, axis S K, & punctum perimetri P, data sunt. Si verò P F ipsi S K occurrat in puncto aliquo F, tunc focis S, & F, & perimetri puncto P datis describatur Hyperbola si puncta S & F cadant ad eandem partem puncti K, & Ellipsis si cadant ad partes contrarias, & corpus *P* movebitur in sectione conicâ per eam constructionem descriptâ. Nam (per construct.) angulus Q P F, est complementum anguli Q P S, ad duos rectos; sed angulus S P M, est quoque ejusdem anguli Q P S, complementum ad duos rectos, ac proinde Q P F = S P M, ergò subducto communi angulo S P F, erit angulus Q P S = F P M, adeòque Q P, tangens sectionis in P, (prop. 48. Lib. 3. conic. Apoll. & per Theor. III. aut IV. de Hyp. Ell. & Parab.) Cum igitur sectionis axis sit S K, & P K ad tangentem P Q normalis (per constr.) erit P r radius curvaturæ sectionis in puncto P, (239.) eadem igitur est sectionis conicæ & orbitæ quam corpus *P* describit tangens atque curvatura in puncto P, porrò sectio conica D P A describi potest vi aliquâ centripetâ ad umbilicum S tendente quæ sit semper reciprocè proportionalis quadrato distantiæ ab illo puncto S (per superius demonstrata) & ex datis corporis alicujus *A* sectionem describentis, velocitate in puncto P, directione tangentis P Q, directione vis P S, & curvaturâ sectionis conicæ in P, datur vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, (242.) quâ corpus *A* in sectione conicâ retinetur in P, ponamus velocitatem corporis *A* eandem cum velocitate projectionis corporis *P* orbitam suam describentis, tùm eadem erit ejus orbitæ & Sectionis Conicæ curvatura in P, idem virium centrum S, idem punctum P, eadem tangens P Q, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ, & proinde eadem illius quantitas absoluta in puncto P, tam in sectione conicâ quam in orbitâ à corpore *P* describendâ. Cùm igitur corpus P, iis positis unicam curvam describere possit & quidem sectionem conicam D P A possit describere, eam reverà describet (244.) Q. e. 2^um.

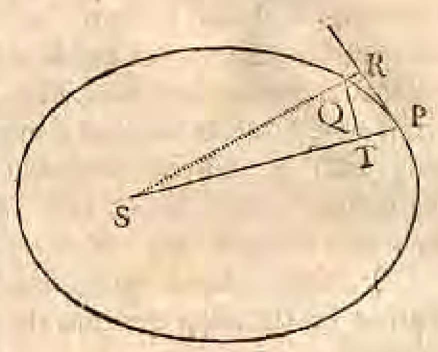
2^am. hujusce propositionis partem formulis analyticis invenerunt Hermannus & Bernoullius in monumentis Academiæ Parisiensis, an. 1710.

(r) * Patet ex notâ 267.

LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.

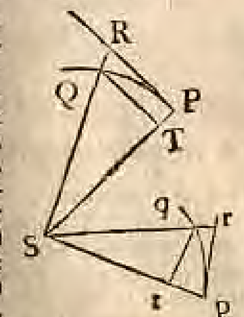


(s) Nam (per corol 2. prop. XIII.) latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (per hypothesin) reciprocè ut SPq. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times SPq$, hoc est, latus rectum L in duplicatâ ratione areæ $QT \times SP$. *Q. E. D.*

Corol. (t) Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

P R O-

(s) 269. Sint in Hypothesi propositionis XIV. duarum sectionum conicarum arcus quam minimi P Q, p q, simul descripti, L, l, earumdem latera recta, (& per prop. VI. & Hyp.) $QR : qr = Sp^2 : SP^2$. Sed (267.) $\frac{QT^2}{QR} : \frac{qt^2}{qr} = L : l = \frac{QT^2}{SP^2} : \frac{qt^2}{Sp^2} = QT^2 \times SP^2 : qt^2 \times Sp^2$.



Sunt autem Q T × S P, q t × S p, ut sectores evanescentes S Q P, S q p, ergò latera recta L, l, sunt in duplicatâ ratione arearum simul descriptarum; nam areæ quævis simul descriptæ sunt semper ut sectores S Q P, S q p, simul descripti, ob æquabilem circà centrum virium S arearum descriptionem in utrâque sectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati areæ dato tempore descriptæ substitui potest sectionis latus rectum & contrà, dummodo id fiat in Hypothesi propositionis.

(t) 270. *Hinc Ellipseos area tota eique proportionale rectangulum sub axibus (250.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione temporis periodici.*

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsibus sunt in ratione sesquiplicatâ majorum axium.

(b) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & sesquiplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per corol. prop. XIV.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis *Q. E. D.*

(c) *Corol.* Sunt igitur tempora periodica in ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

PRO-

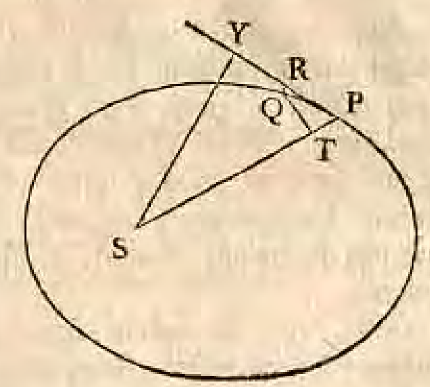
dici. Namque tempus periodicum (252.) est ut area tota directe & area tempore dato descripta inverse, adeòque area tota est ut area QT×SP quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

(b) 271. Sit Ellipsis axis major A, minor B, Latus rectum L, tempus periodicum T; & quoniam A:B=B:L, erit $B^2 = A \times L$, $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, sed rectangulum A×B, (270.) est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, ergò $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, & dividendo utrumque terminum per $L^{\frac{1}{2}}$ erit $A^{\frac{3}{2}}$ ut T.

(c) 272. Circulus est species ellipsis cujus foci cum centro coincidunt & Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsibus quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergò in Ellipsi & circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendiculorum inversè, & subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.



Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY, & velocitas corporis P erit reciprocè in subduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ in datâ temporis particulâ descriptus, hoc est (per lem. VII.) ut tangens (d) PR, id est, ob proportionales PR ad QT & SP ad SY, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, sive ut SY reciprocè & $SP \times QT$ directè; estque $SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est (per prop. XIV.) in subduplicatâ ratione lateris recti. *Q. E. D.*

Corol. 1. (e) Latera recta principalia sunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum, & duplicatâ ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum, in (f) maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione compositâ ex ratione

ne

(d) * Velocitas est ut tangens PR, sed ob angulos ad T & Y rectos & angulos QPT, YPS, punctis P, Q, coeuntibus æquales, triangulum evanescens QPT, simile erit triangulo PSY, adeòque QP (PR) : QT = SP : SY, & PR $= \frac{SP \times QT}{SY}$.

(e) * Velocitatis quadratum c^2, est directe ut $\frac{L}{SY^2}$ (prop. XVI.) ergò L est ut $c^2 \times SY^2$.

(f) * Maximæ & minimæ distantiæ sunt axis partes ab umbilico ad vertices principales contentæ, adeoque cum illic axis sit per-ne diſtantiarum inverſè, & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendicula jam ſunt ipſæ diſtantiæ.

Corol. 3. (g) Ideoque velocitas in conicâ ſectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico diſtantiâ, eſt ad velocitatem in circulo in eadem à centro diſtantia in ſubduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam diſtantiam.

Corol. 4. (h) Corporum in ellipſibus gyrantium velocitates in mediocribus diſtantiis ab umbilico communi ſunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad eaſdem diſtantias; hoc eſt (per corol. 6. prop. IV.) reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum. Nam perpendicula jam ſunt ſemi-axes minores, & hi ſunt ut mediæ proportionales inter diſtantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverſè cum ſubduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio ſubduplicata diſtantiarum inverſè.

Corol. 5. In eadem figurâ, vel etiam in figuris diverſis, quarum latera recta principalia ſunt æqualia, velocitas corporis eſt reciprocè ut perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. (i) In parabolâ velocitas eſt reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipſi ma-

pendicularis tangenti, ipſa perpendicula ad tangentem in maximis & minimis diſtantiis ſunt ipſæ diſtantiæ; mediocres diſtantiæ ſunt diſtantiæ ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipſeos, adeòque ſemiaxi majori æquantur.

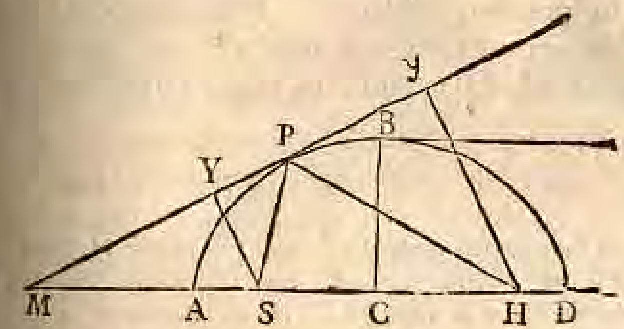
(g) * Nam circulus ille (272.) eſt ellipſis cujus latus rectum eſt ipſa diameter, ideoque eſt ipſa dupla diſtantia ab umbilico ſeu centro, quare cum eadem ponatur diſtantia tam in conicâ ſectione quàm in circulo, velocitates ſunt in ſubduplicatâ ratione laterum rectorum, hoc eſt in ſubduplicatâ ratione lateris recti ſectionis conicæ, ad duplam illam diſtantiam quæ eſt latus rectum circuli.

(h) * Sit A corporis in Ellipſi gyrantis mediocris diſtantia ab umbilico, ſit etiam circuli radius A; ſemiaxis minor, ſeu perpendicularis demiſſa ex umbilico in tangentem axi majori parallelam ſit B, latus rectum L, & circuli latus rectum (272.) erit $2A$, velocitas in Ellipſi ſit C, in circulo c, & erit (per prop. XVI.) $C^2 : c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$; ſed ex Conicis diſtantiâ à foco ad extremitatem ſemi axis minoris (quæ eſt mediocris diſtantia) eſt æqualis ſemiaxi majori, eſt ergo diſtantia A ſemiaxis major, ideoque cum ex conicis ſit $A : B = 2B : L$, eſt $2B^2 = A \times L$, ergò $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(i) *In Parabolâ velocitas eſt reciprocè in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ corporis ab umbilico figuræ*, cum enim velocitas ſit reciprocè ut perpendiculum demiſſum ab umbili-

magis variatur, in hyperbolâ minus quàm in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XIV.) perpendiculum demiſſum ab umbilico ad tangentem parabolæ eſt in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ. In hyperbolâ perpendiculum minus variatur, in ellipſi magis.

Co-



lico ad Tangentem, per præced. Coroll., & (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum ejus perpendiculi ſit ſemper in Parabolâ ut diſtantia à foco, erit velocitas reciprocè ut radix quadrata illius diſtantiæ à foco, ſive in *ſubduplicatâ ratione diſtantiæ* &c.

276. Lemma. Sit Ellipſis A P B, cujus axis major A D, foci S & H, ſemiaxis minor B C, M y tangens in P, S Y & H y in tangentem perpendiculares; ob angulos Y P S, H P y, æquales (prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. ſup. Theor. IV. de Ellip.) ſimilia ſunt triangula S P Y, H P y, undè $SP : SY := HP : Hy = \frac{SY \times HP}{SP}$ ac proindè $SY \times Hy = \frac{SY^2 \times HP}{SP} = BC^2$ (ex conicis Vid. ſup. n. 236.) ſed $HP + SP = AD$ (prop. 52. lib. 3. conic. Apoll. ſup. Theor. III. de Ellipſi) inde eſt $HP = AD - SP$ ergò $\frac{SY^2 \times AD - SP}{SP} = BC^2$, & $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$. Ergò in Ellipſi SY^2 variatur in ratione $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$ ſive ob quantitatem BC^2, conſtantem in ratione $\frac{SP}{AD - SP}$.

Creſcat diſtantia SP, minor fiet AD—SP, ſi non mutaretur denominator fractionis $\frac{SP}{AD - SP} = SY^2$, creſceret SY^2 ſicut SP; cum autem minuatur denominator Sp creſcente, eo ipſo major fit valor fractionis $\frac{SP}{AD - SP}$ ergo creſcente SP, SY^2 magis creſcit quam in ſolâ ratione SP, *ergo perpendiculum in ellipſi magis variatur quam in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ* S P.

In Hyperbolâ verò, quoniam $HP - SP = AD$ (prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Theor. III. de Hyp.) & $HP = AD + SP$, eodem modo reperitur $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD + PS}$, & creſcente SP, creſcit etiam AD + SP, ſi idem maneret denominator creſceret SY^2 ſicut SP, denominatore aucto, fractio $\frac{SP}{AD + SP}$ fit minor quam eo manente, ſed ea exprimit valorem quadrati perpendiculi SY, ergo SY^2 minus creſcit quàm S P ſive *perpendiculum in Hyperbolâ minus variatur quam in ſubduplicatâ ratione diſtantiæ* S P.

277.

Corol. 7. (k) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; (l) in ellipsi minor est, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium secundum velocitas in vertice parabolæ est in hac ratione, & per corollaria sexta hujus & propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbolâ major.

Co-

(k) 277. Sit latus rectum parabolæ L, adeóque distantia foci à vertice $\frac{1}{4}L$, & ex umbilico tanquam centro ac radio $\frac{1}{4}L$, describatur circulus, ejus latus rectum seu diameter erit $\frac{1}{2}L$; undè velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut $\sqrt{L}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}L}$, hoc est, ut $\sqrt{2}$ ad 1. (corol. 2. hujusce Prop.) sed per coroll. 6. velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in aliâ quâvis ab umbilico distantiâ SP, ut $\sqrt{SP}$ ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$, & (per corol. 6. prop. IV.) velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}L$, est etiam ad velocitatem in alio circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{SP}$, ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$; quarè velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in eâdem parabolâ ad distantiam SP, ut velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}L$, ad velocitatem in circulo cujus radius est SP, ac proindè alternando velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in circulo radio $\frac{1}{4}L$ descripto, hoc est, $\sqrt{2}$ ad 1, ut velocitas in parabolâ in distantiâ SP, ad velocitatem in circulo ad eandem à centro seu umbilico distantiam descripto.

278. *Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam*; nam velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$SP est ad velocitatem in circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1, (per coroll. 6. prop. IV.) sed velocitas in parabolâ ad distantiam SP, est ad velocitatem in circulo cujus radius SP, etiam ut $\sqrt{2}$ ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad distantiam SP, æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ SP.

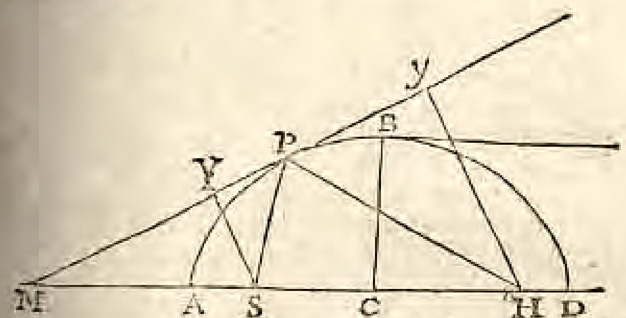
(l) 279. *In Ellipsi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in minore ratione quam $\sqrt{2}$ ad 1; in Hyperbolâ in ratione majore.* Sit enim Ellipsis vel hyperbolæ latus rectum L, distantia ab umbilico SP, perpendiculum ad tangentem sectionis in puncto P demissum SY; SP, sit radius circuli, C sit velocitas in Ellipsi vel hyperbolâ ad distantiam SP; C, velocitas in circulo, & erit (per prop. XVI.) $c^2 : C^2 = \frac{L}{SY^2} \cdot \frac{2SP}{SP^2} = L \times SP : 2SY^2$; sed (276) $2SY^2 = \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP}$, ergo $c^2 : C^2 = L \times SP : \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP} = L \times \overline{AD \mp SP} : 2BC^2$ & ob $L \times AD = 4BC^2$ seu $2BC^2 = \frac{L \times AD}{2}$, est $c^2 : C^2 = 2AD \mp 2SP : AD$; unde in Ellipsi in quâ 2SP habet signum $-$, ratio c^2 ad C^2, minor est quam ratio 2, ad 1, & ratio c ad C, minor quam ratio $\sqrt{2}$, ad 1; in hyperbolâ major ob $+ 2SP$ (276.)

280. Coroll. Quoniam distantia ab altero sectionis foco $HP = AD \mp SP$, erit $c^2 : C^2 = 2HP : AD = HP : \frac{1}{2}AD$, hoc est, velocitas in Ellipsi & hyperbolâ ad quamvis ab umbilico seu centro circuli distantiam SP est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam in ratione subduplicatâ distantiæ HP ab altero umbilico ad semiaxem majorem.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in sectione quâvis conicâ est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantiâ dimidii lateris recti principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. (m) Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. (n) Unde cum (per corol. 6. prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eâdem distantiâ, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

PRO-



(m) * Nam iste circulus & sectio Conica idem latus rectum habent, quia in circulo distantia à Centro semi diametro æquatur & tota diameter est latus Rectum, ideo velocitates sunt reciprocè ut perpendicula in Tangentem demissa (per Cor. 5, hujusce) sed in circulo semidiameter perpendiculo æquatur, ergo velocitates in sectione & in circulo sunt ut semi-diameter circuli ad Perpendiculum &c.

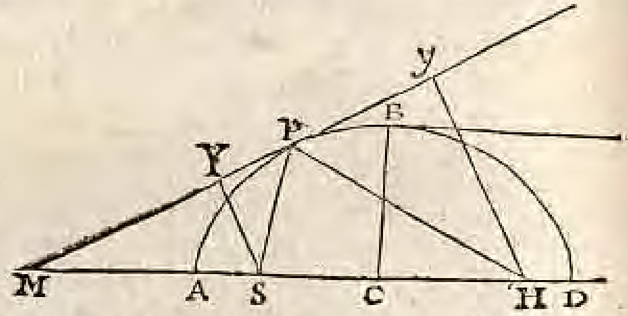
(n) 281. Sit C velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam dimidii lateris recti $\frac{1}{2}L$, c velocitas in sectione conicâ ad distantiam SP, K velocitas in circulo ad eandem distantiam SP, & erit (per coroll. 8.) $c^2 : C^2 = \frac{1}{4}L^2 : SY^2$ (& per cor. 6. prop. IV.) $C^2 : K^2 = SP : \frac{1}{2}L$. undè, ex æquo, $c^2 : K^2 = SP \times \frac{1}{4}L^2 : SY^2 \times \frac{1}{2}L = SP \times \frac{1}{2}L : SY^2$. Fiat $SP : m = m : \frac{1}{2}L$, & erit $m^2 = SP \times \frac{1}{2}L$, ac proindè $c^2 : K^2 = m^2 : SY^2$ & $c : K = m : SY$.

282.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.

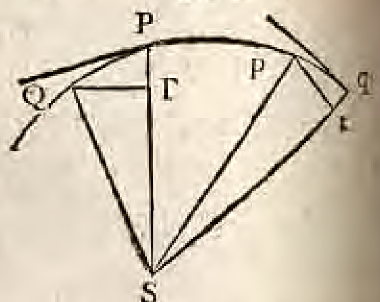
Vis centripeta tendens ad punctum *S* ea sit, quâ corpus *p* in orbitâ quâvis datâ *p q* gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco *p*. De loco *P* secundum lineam *PR*



282. Sit C, centrum Ellipsis, CB semiaxis minor, foci S & H, tendatque vis centripeta ad focum S; velocitas in P erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ ratione distantiæ H P à foco H, ad distantiam S P ab altero foco seu centro virium S; Nam velocitas in P dicatur *C*, velocitas in B dicatur *c*, & erit (per cor. 5. prop. XVI.) $C : c = CB : SY$, adeóque $C^2 : c^2 = CB^2 : SY^2$, hoc est, ob $CB^2 = SY \times Hy$ (235.) $C^2 : c^2 = SY \times Hy : SY^2 = Hy : SY$; sed ob similia triangula SPY, HPy, $Hy : SY = HP : SP$. Ergò $C^2 : c^2 = HP : SP$, & $C : c = HP^{\frac{1}{2}}, SP^{\frac{1}{2}}$ Q. e. D.

Theorema illud invenit clarissimus Geometra Abrahamus de Moivre.

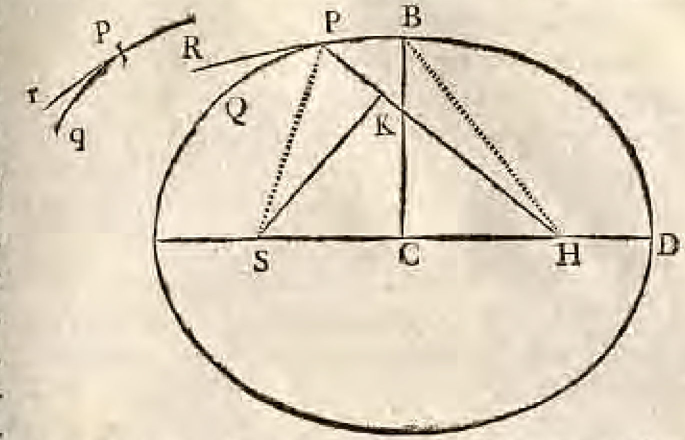
283. Velocitas angularis corporis P, in quâvis orbitâ Q P p, revolventis seu angulus P S Q, quem radius vector S P, dato tempore minimo describit est directè ut Q T perpendicularis ad radium vectorem SP, & distantia S P inversè, dum puncta Q & P coeunt, nam linea perpendicularis Q T pro arcu circuli haberi potest, undè angulus $PSQ = \frac{QT}{SP}$ (153.)



284. Coroll. 1. Hinc velocitas angularis in eâdem orbitâ est ubique reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ S P à centro virium S. Nam sectores P S Q, p S q, eodem tempusculo descripti sunt æquales (prop. I.). Unde $QT \times SP = qt \times Sp$ adeóque $QT : qt = Sp : SP$, & hinc $\frac{QT}{SP} : \frac{qt}{Sp} = \frac{Sp}{SP} : \frac{SP}{Sp} = Sp^2 : SP^2$.

285. Coroll. 2... Velocitates angulares in sectionibus conicis circà umbilicum communem ceu centrum virium descriptis sunt inter se ut radices quadratæ laterum rectorum principalium directè & quadrata distantiarum inversè. Nam, (per prop. XIV.) Latera recta *L*, *l*, sunt in duplicatâ ratione sectorum P S Q, p S q, simul descriptorum, seu $L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}} = QT \times SP : qt \times Sp$, adeóque $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp} = QT : qt$; & hinc velocitates angulares seu anguli minimi P S Q, p S q, hoc est, $\frac{QT}{SP}, \frac{qt}{Sp}$, sunt ut $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP^2}, \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp^2}$.

exeat corpus *P* cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni sectionem *P Q*. Hanc igitur recta *P R* tanget in *P*. Tangat itidem recta aliqua *p r* orbitam *p q* in *p*, & si ab *S* ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per corol. 1. prop. XVI.) latus rectum principale coni sectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. (a) Sit *L* coni sectionis latus



(a) Solutio hujus Problematis duas continet partes; Sit enim corpus è puncto P secundum lineam P R datâ cum velocitate projectum & retineatur circa punctum S per vim centripetam quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum à Centro cujusque quantitas absoluta in puncto P sit cognita, id corpus describet (per Cor. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam Conicam cujus 1°. quæritur Latus Rectum principale, 2°. Dato umbilico S illius sectionis, puncto P, Tangente PR, & latere recto quæritur alter umbilicus, quo nempe invento & ex cæteris datis describetur sectio Conica quam Corpus propositum percurrit.

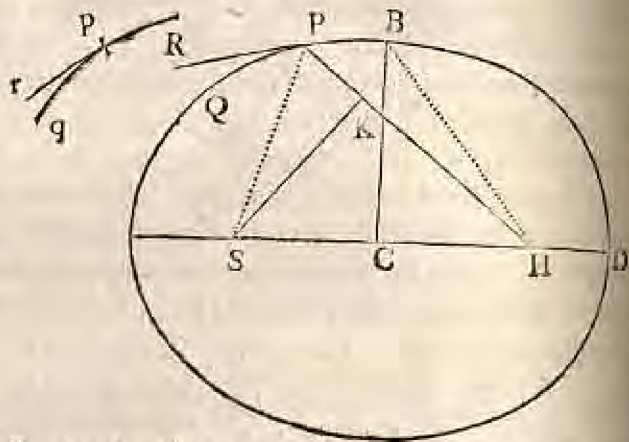
Ad primam solutionis partem, fingitur sectio quælibet Conica cujus umbilicus sit S, & alter umbilicus & latus rectum ad arbitrium sumuntur, unde in quovis ejus puncto P duci poterit Tangens, & quantitas vis in eo puncto erit cognita, est enim ad vim in puncto P quæ data est reciproce ut quadrata linearum S p, SP; Invenietur etiam velocitas in eo puncto p; Nam velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam Sp (sive arcus in eo descriptus tempore quo arcus PQ describitur) est media proportionalis inter vim centripetam in p, quæ inventa est, & duplam distantiam S p (per naturam circuli), hæc verò est ad velocitatem in hâc Sectione Conicâ, ut perpendiculum ab S ad Tangentem communem demissum ad mediam proportionalem inter distantiam S p & semissem lateris Recti istius sectionis.

Cum ergo (per Cor. 1. Prop. XVI.) *Latera Recta principalia sectionum circà umbilicum communem descriptarum sint in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum & duplicatâ ratione velocitatum* & ob datas Tangentes in p & P dentur perpendicula ex S in eas Tangentes demissa, deturque Velocitas corporis moti in P & inventa sit velocitas in puncto p, datur ratio Lateris

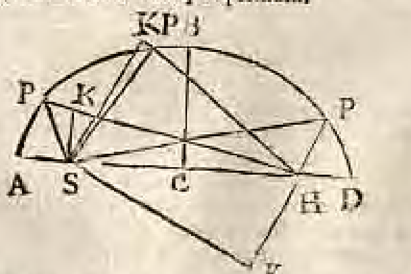
 Recti

DE MOTU CORPORUM.

rectum. Datur præterea ejusdem coni sectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH, & dabitur positione linea PH, in quâ umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC, (b) & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq$ $= 4CHq = 4BHq - 4BCq = \overline{SP+PH}\text{: quad.} - L \times \overline{SP+PH}$ (c) $= SPq + 2SPH + PHq - L \times \overline{SP+PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP+PH}$, & fiet $L \times \overline{SP+PH} = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR



Recti sectionis assumptæ ad Latus Rectum sectionis quam corpus P describit; Quod ergo invenitur, eratque primum.



(b) *Erit* $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2$, Etenim (per 12. & 13. 2. Elem.) in omni Triangulo SPH, quadratum lateris SH quod consideratur ut Hypothenusa anguli P, æquatur quadratis aliorum laterum SP PH dempto duplo Rectanguli lateris PH in quod cadit perpendiculum, ducti in partem PK ab Angulo P ad perpendiculum usque interceptam, quæ quidem PK sumitur cum signo + si sit ab eâdem parte Tangentis ac S & cum signo − si sit in parte opposita.

(c) 287. $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$ &c. Ex naturâ Ellipseos est 2BH æqualis axi majori 2AC ideoque æqualis SP + PH & $4BH^2 = \overline{SP+PH}^2$, pariter est $2AC : 2BC = 2BC : L$ est ergo $4BC^2 = L \times 2AC$ sive $L \times \overline{SP+PH}$ unde est $4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP+PH}^2 - L \times \overline{SP+PH}$.

Collatis itaque valoribus ejusdem quantitatis SH^2, est $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SP^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times \overline{SP+PH}$, utrinque detractis æqualibus manet $-2KP \times PH = 2SP \times PH - L \times \overline{SP+PH}$ transpositisque partibus negativis est $L \times \overline{SP+PH} = 2SP \times PH + 2KP \times PH$ sive $\overline{2SP+2KP} \times PH$ unde est $2SP + 2KP : L = SP + PH : PH$ & dividendo $2SP + 2KP - L : L = SP : PH$ unde

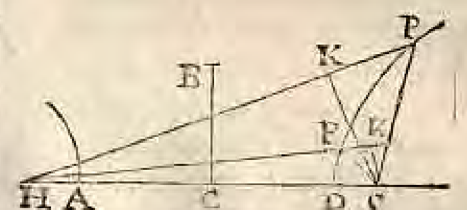
LIBER PRIMUS.

cum linea PS; ideoque figura erit ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantiæ corporis a centro virium S reciprocè; ideoque linea PQ rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato P, cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam PR egrediens. *Q.E.F.*

Corol. 1. Hinc in omni coni sectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. (d) Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L in casu hujus corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4DS$ ad L, & divisim DS ad DH ut $4DS - L$ ad L.

unde quo magis accedit valor lateris recti L ad quantitatem $2SP + 2KP$, eo major est PH respectu SP, si $L = 2SP + 2KP$, infinitum est SP respectu PH, hoc est, Ellipsis abit in Parabolam, si L sit majus quam $2SP + 2KP$, primus terminus Proportionis fit negativus, ideoque PH in partem oppositam Tangentis cadet & sectio fiet Hyperbola; manentibus autem cæteris crescit Latus Rectum cum velocitate in puncto P datâ: Unde quo major fit velocitas respectu vis centripetæ eo magis elongatur Ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in Parabolâ movetur, & tandem in Hyperbolâ.

288. Demonstratio pro Hyperbolâ ita instituitur. Quia PK non est in eâdem parte Tangentis ac S, sumitur PK cum signo − ideoque est $SH^2 = SP^2 + 2KP \times PH + PH^2$, & per naturam Hyperbolæ $SH^2 = 4CH^2 = 4CA^2 + 4CB^2$ sive quia $2CA = PH - SP$ & $4CB^2 = L \times 2CA$ est $SH^2 = PH^2 - 2SP \times PH$



$+ SP^2 + L \times \overline{PH - SP}$ unde collatis valoribus SH^2 & detractis quantitatibus communibus est $2KP \times PH = -2SP \times PH + L \times \overline{PH - SP}$ & transpositis quantitatibus negativis est $2KP \times PH + 2SP \times PH = L \times \overline{PH - SP}$ unde est $2SP + 2KP : L = PH - SP : PH$, & convertendo $L - 2SP - 2KP : L = SP : PH$.

(d) 289. In casu hujus corollarii punctum P cadit in D, punctum K cadit in S, fitque $PK = DS = SP$, & $PH = DH$. Quare in omni sectione conicâ est DH, ad DS, ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & 4DS.

DE MOTU CORPORUM.

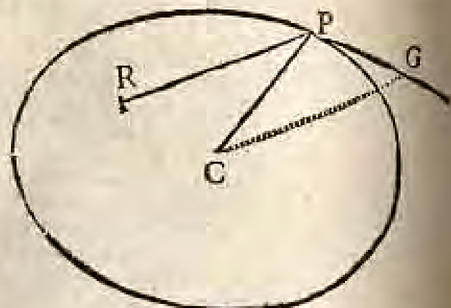
Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expeditè; capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam DS, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis (per corol. 3. prop. XVI.); dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ continuo perturbetur, innotescet cursus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.

Si corpus P vi centripetâ ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit C; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G; & (e) vis illa (per corol. 1. & schol. prop. X. & corol. 3. prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$



(e) 290. Vis ad centrum vel à centro C, tendens est ut CP, (per coroll. 1. Prop. X. & Not. 232.) adeóque exponatur per lineam CP; vis ad punctum R, tendens exponatur per lineam A; & (per corol. 3. prop. VII.) erit $CP \times RP^2 : CG^3 = CP : A = \frac{CG^3}{RP^2}$.

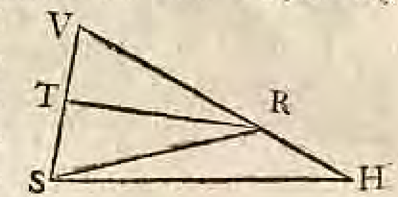
LIBER PRIMUS.

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab ellipseos vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera* SV *à perpendiculo* TR *in se demisso bisecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *sectionem conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*

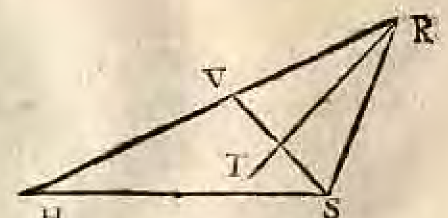


Secet enim perpendiculum TR rectam HV productam, si opus fuerit, in R; & jungatur SR. Ob æquales TS, TV, æquales erunt & rectæ SR, VR & anguli TRS, TRV. (f) Unde punctum R erit ad sectionem conicam, & perpendiculum TR tanget eandem & contra. *Q. E. D.*

PRO-

(f) * Si fuerint S, & H, Ellipseos umbilici, erit $SR + RH = HV =$ axi majori, ac proinde R punctum perimetri Ellipsis quam TR tangit in R, ob angulos TRS, TRV, æquales (per prop. 52. & 46. lib. 3. conic. Apollon. Theor. III. & IV. de Ell.) & contrà si TR tangat Ellipsim in R, & ducatur SV, ad TR perpendicularis, erit ob angulos TRS, TRV, æquales $VR = SR$, & $VH = SR + RH =$ axi majori.

* Si fuerint S, & H, Hyperbolæ umbilici ob æquales TS, TV, erit $SR = VR$, & $HR - SR = HV$ æqualis axi majori, & R punctum Hyperbolæ quam tangit in R recta TR ob angulos VRT, TRS, æquales (per prop. 51, & 46. lib. 3. conic. Apoll. Theor. III. & IV. de Hyperb.) & contrà si TR tangat Hyperbolam in R, & agatur SV ad TR perpendicularis erit $VR = SR$, & $HV = HR - RS$, æqualis axi majori, ut patet.

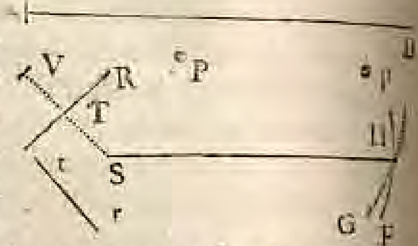


Si

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

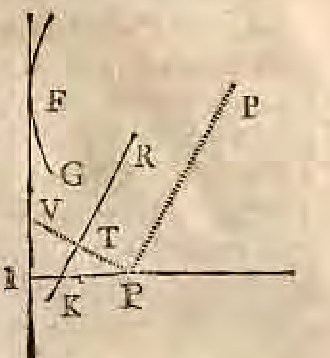
Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis trajectoriæ cujusvis; P punctum per quod trajectoria debet transire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo AB−SP, si orbita sit ellipsis, vel AB+SP, si ea sit hyperbola, describatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpendiculum ST, & producatur idem ad V, ut sit TV æqualis ST; centroque V & intervallo AB describatur circulus FH. Hac methodo sive dentur duo puncta P, p, sive duæ tangentes TR, tr, sive punctum P & tangens TR, describendi sunt circuli duo. Sit H eorum intersectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria descripta (eo quod PH+SP in ellipsi, & PH−SP in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P, & (per lemma superius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas TR, tr. (g) *Q. E. F.*



PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens trajectoriæ describendæ. Centro P intervallo PS describe circulum FG. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST, & produc eam ad V, ut sit TV æqualis ST. Eodem modo describendus est alter circulus fg, si datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, si datur altera tangens tr, dein ducenda recta IF quæ tangat duos circulos FG, fg si dantur duo puncta P, p, vel transeat per duo puncta V, v, si dantur duæ tangentes TR, tr, vel tangat circulum FG & transeat per punctum V, si datur punctum P & tangens TR. Ad FI demitte perpendicularem SI, eamque biseca in K; & axe SK, vertice principali K describatur parabola. Dico factum. (h) Nam parabola, ob æquales SK & IK, SP & FP, transibit per punctum P; & (per lem. XIV. corol. 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR, tanget rectam TR. *Q. E. F.*



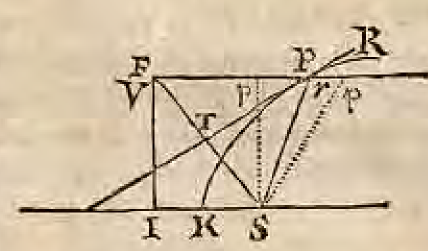
PRO-

* (g) Si orbita sit Hyperbola, focus H, erit in rectâ HS, ultra S, productâ.

291.

(h) 291. *Nam Parabola ob æquales SK & IK, SP & FP, transibit per punctum P.* Parabola descripta *ob æquales SK & IK* habet pro directrice lineam IF (per Theor. II. de Parab. n. 224. de Conicis), cum verò distantia puncti cujusvis Parabolæ à Directrice sit æqualis distantiæ ejus puncti à foco, vice versâ, punctum quod æqualiter à foco & à Directrice distabit pertinebit ad Parabolam. Finge enim lineam FP Directrici perpendicularem occurrere quidem Parabolæ in puncto P, ita ut sit FP=SP, sed in eâ posse sumi aliud punctum p ita ut sit etiam Sp=Fp=FP±Pp, erit ob FP=SP, Sp=SP±Pp; cum SPp sit Triangulum, absurdum est (per 20. 1. Elem.) esse Sp=SP±Pp ergo absurdum est fingere aliud Punctum præter id quod ad Parabolam pertinet tale ut ejus distantia à directrice sit æqualis ejus distantiæ à foco, ergo *ob æquales SP & FP*, Parabola cujus directrix est IF & umbilicus S *transibit per punctum P.*

2°. Casus. Parabola descripta *ob æquales ST, TV, ob angulum Rectum STR tanget rectam TR*, ejus enim Parabolæ descriptæ directrix est VI. Jam verò ducatur ex V perpendicularis in directricem quæ rectæ TR occurrat in r & ab r ducatur ad focum linea rS, ob æquales ST TV & angulum rectum STR erit Vr=rS & punctum r ad Parabolam pertinebit per superiorem demonstrationis partem, eâdem ratione probabitur angulum VrT æqualem esse angulo TrS ideoque linea Tr bifariam dividit angulum VrS, sed ea linea Parabolæ Tangens est quæ bifariam dividit angulum quem faciunt duæ lineæ ductæ à puncto quovis Parabolæ una ad focum altera perpendiculariter ad directricem (per Theor. III. de Parabola n. 224.) ergo linea TR tangit Parabolam descriptam sive *Parabola descripta tanget Rectam TR.*



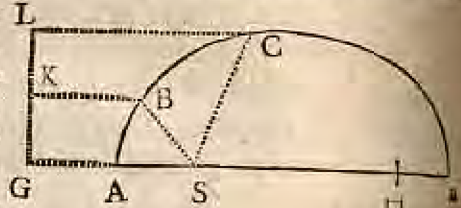
292.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie (i) *datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.*

Cas. 1. Dato umbilico *S*, describenda sit trajectoria *ABC* per puncta duo *B*, *C*. Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape *KB* ad *BS*, & *LC* ad *CS*. Centris *B*, *C*, intervallis *BK*, *CL*, describe circulos duos, & ad rectam *KL*, quæ tangat eosdem in *K* & *L*, demitte perpendiculum *SG*, idemque seca in *A* & *a*, ita ut sit *GA* ad *AS* & *Ga* ad *aS* ut est *KB* ad *BS* & axe *Aa*, verticibus *A*, *a*, describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim *H* umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit *GA* ad *AS* ut *Ga* ad *aS*, erit divisim *Ga*−*GA* seu *Aa* ad *aS*−*AS* seu *SH* in eâdem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; (k) & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. (l) Cumque sint *KB* ad *BS* & *LC* ad *CS* in eâdem ratione, transibit hæc figura per puncta *B*, *C*, ut ex conicis manifestum est.



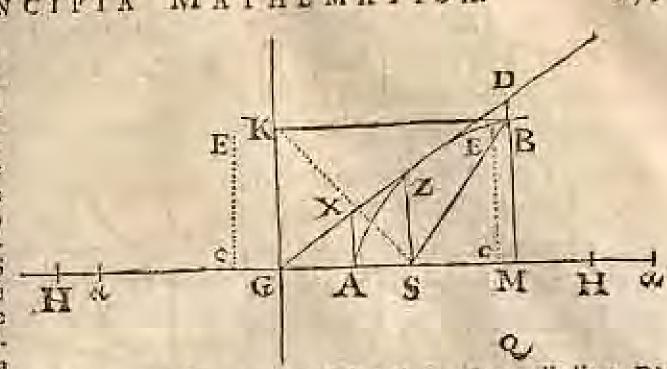
(i) 292. Sectiones conicæ sunt ejusdem speciei seu similes quarum axes duo, vel quod idem est, axis major & focorum distantia sunt inter se in datâ ratione; Ex hâc enim ratione unicè pendent partium sectionis ratio ac respectiva positio, atque hinc fit ut parabolæ omnes similes sint quod in omnibus focorum distantia infinita majori axi æqualis sit.

(k) * Si describenda sit hyperbola, punctum a, sumi debet in perpendiculo SG, ad alteram partem lineæ GL, producto ut sit G, inter A, & a, tumque erit Ga + GA, seu Aa ad aS + AS, seu SH, in ratione GA ad AS, adeóque in ratione quam habet axis principalis hyperbolæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, & propterea hyperbola descripta similis est hyperbolæ describendæ.

(l) Ut demonstretur *puncta B & C ad Sectionem Conicam descriptam pertinere* quædam prævia ex Conicis sunt usurpanda.

293. Lemma... Sit sectionis conicæ ATB axis major A a, foci S, H, semiaxis minor c E erectâ ad axem perpendiculari SZ per punctum Z, ducatur tangens D Z G quæ axi occurrat in G; tum ex punctis G, A, & quovis alio axis puncto M, erigantur ad axem perpendiculares G K, A X, M B D, & ex puncto sectionis B, ducatur ad GK, perpendicularis B K, erit 1°. $SZ = \frac{1}{2}L$ seu dimidio lateri recto, etenim ordinata in foco est semper æqualis semilateri Recto (per Theor. III. de Ell. & Hyp. & Cor. Theor. I. de Parab. n. 224.)

Liber Primus.



294. 2°. Erit GA ad AS sicut axis major ad distantiam focorum, hoc est GA : AS = A a : SH; Nam cum G sit punctum in quo Tangens secat Diametrum, ejus distantiæ G A, G a, ab utroque vertice sunt inter se sicut abscissæ A S, S a ab utroque vertice Diametri sumptæ, sive est (per Lem. V. de Conic. n. 224.) G A : G a = A S : S a & convertendo G A : A a = A S : Sa − AS sive S H (quia A S = H a) ergo alternando GA : A S = A a : S H.

295. 3°. Erit factum GS × S c æquale quadrato semi axis minoris, nam quia est GA : AS = A a : S H, est componendo GS : A S = SH + A a : S H, & sumendo dimidium terminorum ultimæ rationis est GS : A S = Sc + c a (sive S a) : S c, est ergo GS × S c = AS × S a, sed factum A S × S a, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem sumptarum) est semper æquale quadrato semi axis minoris, nam id factum æquatur in Ellipsi c A² − c S² (per 5. 2. Elem.) & in Hyperbola c S² − c A² (per 6. 2. Elem.) utrumque verò æquatur quadrato semi axis minoris per naturam focorum (Theor. III. de Hyper. & Ellip. 224.) est ergo GS × S c = c E².

296. 4°. Perpendicularis A S in axis Vertice A erecta & terminata ad Tangentem in extremitate Z ordinatæ quæ insistit foco S est æqualis A S distantiæ foci à Vertice... Nam cum ob Triangula similia XGA ZGS sit GA : AX = GS : SZ sive $\frac{1}{2}$ L $= \frac{2cE^2}{2cA}$ & sit c E² = GS × S c est GA : AX $= GS : \frac{GS \times Sc}{cA}$ = c A : S c (& duplicando hos terminos) = A a : S H, sed in eadem ratione est G A ad A S (294) ergo GA : AX = GA : A S & AX = A S.

In Parabolâ idem verum est, in ea enim est GA = AS, GS = 2 A S & SZ = $\frac{1}{2}$ L = 2 A S (Cor. I. Lem. V. de Coni. 224). Ergo hæc proportio G A : A X = G S : S Z in hanc mutatur A S : A X = 2 A S : 2 A S ergo A S = A X.

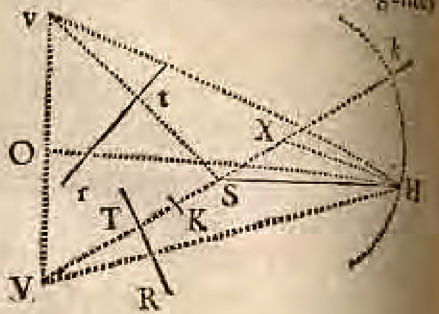
297. 5°. Linea à foco S, ad curvæ punctum quodvis B ducta est æqualis lineæ DM, quæ per id punctum transit, & perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc à Tangente GZ Produc enim DM ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ sitque MQ = BM, erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) ZX² : ZD² = A X² : D M × D P (sive D M² − B M² per 6. 2. Elem.) sed ob Parallelas AX, SZ, MD est ZX : ZD = AS : SM & ZX² : ZD² = AS² : S M². Ergo est AS² : S M² = AX² (sive AS² per 296) : DM² − BM² unde est S M² = D M² − B M² & addendo utrinque B M², S M² + B M² (sive S B² per 47. 1. Elem.) = D M² & S B = D M.

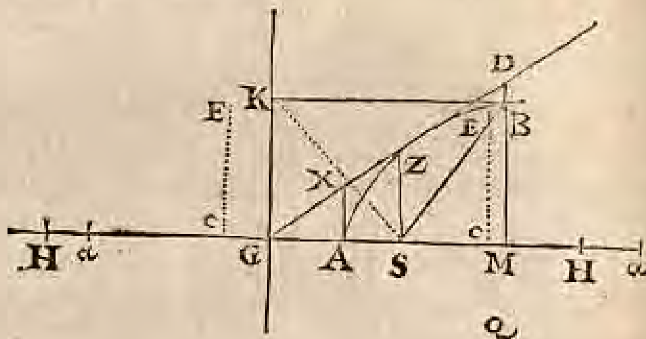
298. 6°. Si ex sectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis BK ad lineam GK, & linea B S ad focum, erit semper K B : B S = GA : AS, nam propter Triangula similia GMD GAX, est GM (sive KB ob Parallelas GM & KB, GK & MB) : MD (sive BS per 297) = GA : AX (sive AS per 296) hoc est KB : BS = GA : AS ideoque KB : BS = Aa : SH quoniam GA : AS = A a : S H (per 294).

299. Conversa etiam vera est si ducatur perpendicularis in lineam GK, & in ea sumatur B, ita ut sit KB : BS = GA : A S = Aa : S H punctum B est in Sectione Conicâ descriptâ.

Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B secabitur per lineam KB, eritque (per 298) KB : BS = A a : S H, dico autem nullum aliud punctum β sumi posse in ea linea KB producta si lubet, ita ut sit KB : BS = A a : S H, fingatur enim dari illud punctum β, subtrahanturque termini duarum priorum rationum à se mutuo, erit KB − Kβ (sive Bβ) : BS − βS = Aa : SH sed quia in Hyperbola est A a, minor quam SH, & in Parabola ei est æqualis, erit B β minor

Caſ. 2. Dato umbilico S, deſcribenda ſit trajectoria quæ rectas duas TR, tr alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula ST, St & produc eadem ad V, v, ut ſint TV, tv, æquales TS, tS. Biſeca Vv in O, & erige perpendiculum infinitum OH, rectamque VS infinite productam ſeca in K & k, ita ut ſit VK ad KS & Vk ad kS ut eſt trajectoriæ deſcribendæ





axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro Kk deſcribatur circulus ſecans OH in H, & umbilicis S, H, axe principali ipſam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Nam biſeca Kk in X, & junge HX, HS, HV, Hv. Quoniam eſt VK ad KS ut Vk ad kS; & compoſite ut $VK+Vk$ ad $KS+kS$; diviſimque ut $Vk-VK$ ad $kS-KS$, id eſt, (m) ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX, ſimilia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, ideoque ut VK ad KS. Habet igitur trajectoriæ deſcriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipſius umbilicorum diſtantiam SH, quam habet trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad ipſius umbilicorum diſtantiam, & propterea ejuſdem eſt ſpeciei. Inſuper cum VH, vH æquentur axi principali, & VS, vS à rectis TR, tr perpendiculariter biſecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam deſcriptam tangere. *Q. E. F.* (n)

Caſ.

nor aut æqualis differentiæ $SB-S\beta$, ſed $SB\beta$ eſt Triangulum, ergo abſurdum eſt (per 20. 1. Elem.) unum ejus latus ut $B\beta$ eſſe minus aut æquale differentiæ aliorum, non datur ergo punctum illud β.

2°. Sectio ſit Ellipſis; Ducatur SK; ſi GK ſit æqualis ſemi axi minori, erit $SK : GK = Aa : SH$ nam (per 295) eſt $GS : cE$ (ſive GK ex Hyp.) $= cE : Sc$ & $GS^2 : GK^2 = cE^2 : Sc^2$, & componendo $GS^2 + GK^2$ (ſive SK^2 per 47. 1. Elem.) $: GK^2 = cE^2 + Sc^2$ (ſive cA^2 per nat. focorum) $: Sc^2$ & $SK : GK = cA : Sc$ & duplicando terminos poſterioris rationis eſt $SK : GK = Aa : SH$.

Si GK ſit major quam cE erit $GS^2 : GK^2$ in minori ratione quam cE^2 ad Sc^2, & componendo erit $GS^2 + GK^2$ ſive SK^2 ad GK^2 in minori ratione quam $cE^2 + Sc^2$ ad Sc^2 unde tandem deducetur in hoc caſu eſſe SK ad GK in minori ratione quam Aa ad SH.

Et pariter ſi GK ſit minor quam cE, erit SK ad GK in majori ratione quam Aa ad SH.

Sed (per princ. Trigo.) eſt in Triang. SKG ſinus totalis ad ſinum ang. KSG (ſive ad ſinum anguli SKB huic æqualem ob Parallelas GS KB) ſicut KS ad KG. Ergo ratio ſinus totalis ad ſin Ang. SKB, æqualis eſt rationi Aa ad SH, ſi GK ſit æqualis cE, eſt illâ minor ſi GK ſuperet cE, eſt illa major ſi GK minor ſit quam cE.

Ut verò lineæ KB BS habeant rationem Aa ad SH, oportet ut in Triang. KBS ſinus angulorum KSB SKB ſint in ea ratione Aa ad SH; Ergo ſi GK ſit æqualis cE, eſt Sinus totalis: Sin. SKB = Sin. KSB: Sin. SKB, ideoque in hoc caſu erit Sin. tot. = Sin. KSB, hoc eſt, linea SB erit perpendicularis in SK, unica ergo erit, unicumque punctum B, ſicut etiam linea KB in unico puncto Sectioni Conicæ occurret.

Si GK ſit major cE eſt ſin. totalis ad ſin. SKB in minori ratione quam ſin. KSB ad ſin. SKB, unde ſinus totalis minor eſſe deberet ſinu KSB quod quidem eſt abſurdum, nulla ergo duci poterit linea SB quæ determinet punctum B tale ut ſit KB ad SB ſicut Aa ad SH, ſicut etiam in eo caſu linea KB nuſquam occurrit Sectioni Conicæ.

Denique ſi GK ſit minor cE, eſt ſin. tot. ad ſin. SKB in majori ratione quam ſinus KSB ad ſin. SKB, dabitur ergo ſinus KSB, qui ut ad acutum vel obtuſum angulum æqualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ SB (ſed non plures) quæ requiſitam cum KB habeant rationem, ut etiam linea KB hoc in caſu duobus in punctis Ellipſim ſecat. Ergo ſi $KB : BS = GA : AS = Aa : SH$ punctum B eſt in Sectione Conicâ.

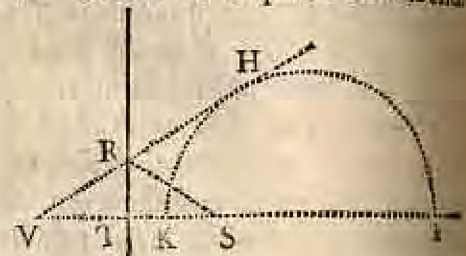
Ex his autem liquet curvam ſecundum Newtonianam ſolutionem deſcriptam tranſire per puncta B & C omnia enim planè conveniunt ad Lemmatis (293) Hypotheſim. In his omnibus parabolam uſurpamus pro ellipſi in quâ diſtantia focorum infinita eſt, ac proindè axi majori æqualis.

(m) * *Id eſt, ut $2VX$ ad $2KX$, & $2KX$ ad $2SX$;* nam $KX = kX = HX$ (per conſtr.) adeóque $VK + Vk = 2VK + 2KX = 2VX$, & $KS + kS = Kk = Vk - VK = 2KX$; & quia $kS - KS = kX + SX = KX + SX = KS + 2SX$, erit $kS - KS = 2SX$, adeóque $VK : KS = VX : HX = HX : SX$. Quare ſimilia erunt triangula VXH, HXS, quorum latera VX & XH, HX & KS, proportionalia communem angulum X, complectuntur.

(n) * Si deſcribenda ſit hyperbola, in SV, versùs V productâ, ità ſumantur puncta K, k, ut inter utrumque poſitum ſit V, cæteraque fiant ut Newtonus præſcribit, & quoniam $VK : KS = Vk : kS$, erit $Vk - VK : kS - KS = VK : KS = VK + Vk : KS + kS$, ſed $Vk - VK = 2VX$, $kS - KS = 2KX$, $VK + Vk = 2KX$, & $KS + kS = 2SX$. Reliqua demonſtratio eadem eſt ac pro ellipſi.

* Cen-

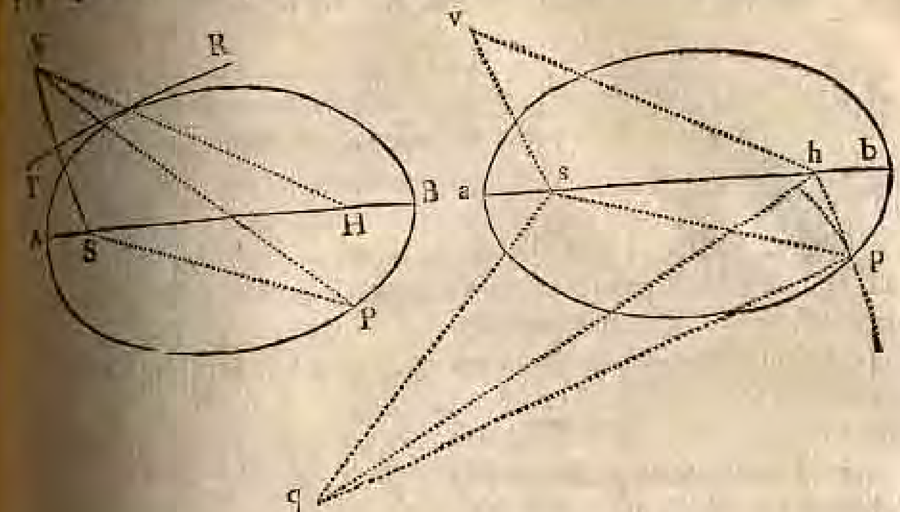
Caſ. 3. Dato umbilico S deſcribenda ſit trajectoria quæ rectam TR tangat in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Junge VR & rectam VS infinite productam ſeca in K & k, ita ut ſit VK ad SK & Vk ad Sk ut ellipſeos deſcribendæ axis principalis ad diſtantiam umbilicorum; circuloque ſuper diametro Kk deſcripto ſecetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, deſcribatur trajectoria. Dico factum. Namque VH eſſe ad SH ut VK ad SK atque ideo ut axis principalis trajectoriæ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus, (o) patet ex demonſtratis in caſu ſecundo, & propterea trajectoriam deſcriptam ejuſdem eſſe ſpeciei cum deſcribendâ, rectam vero TR quâ angulus VRS biſecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. *Q. E. F.*



Caſ. 4. Circa umbilicum S deſcribenda jam ſit trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, tranſeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque ſimilis ſit figuræ apb, axe principali ab & umbilicis s, h deſcriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut ſit TV æqualis ST. Angulis autem SVP, SPV fac angulos hsq, shq æquales; centroque q & intervallo quod ſit ad ab ut SP ad VS deſcribe circulum ſecantem figuram apb in p. Junge sp & age SH quæ ſit ad sh ut eſt SP ad sp, quæque angulum PSH angulo psh & angulum VSH angulo psq æqualem conſtituat. Denique umbilicis S, H, & axe principali AB diſtantiam VH æquante, deſcribatur ſectio conica. Dico factum. Nam ſi agatur sv quæ ſit ad sp ut eſt sh ad sq, quæ

(o) * Centro circuli litterâ X, notato, jungantur HX, HS, HV, & eadem eſt demonſtratio quæ caſus 2i pro ellipſi, & ſi producatur RV, SV, verſus V, & punctum V, ſitum ſit inter K & k, eadem quoque erit demonſtratio pro hyperbolâ.

conſtituat angulum vsp angulo hsq & angulum vsh angulo psq æquales, triangula svh, spq erunt ſimilia, & propterea vh



erit ad pq ut eſt sh ad sq, id eſt (ob ſimilia triangula VSP, hsq) ut eſt VS ad SP ſeu ab ad pq. Æquantur ergo vh & ab. Porro (p) ob ſimilia triangula VSH, vsh, eſt VH ad SH ut vh ad sh, id eſt, axis conicæ ſectionis jam deſcriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis ab ad umbilicorum intervallum sh; & propterea figura jam deſcripta ſimilis eſt figuræ aph. Tranſit autem hæc figura per punctum P, (q) eo quod triangulum PSH ſimile ſit triangulo psh; & quia VH æquatur ipſius axi & VS biſecatur perpendiculariter à recta TR, tangit eadem rectam TR. (r) *Q. E. F.*

LEM-

* (p) Similia ſunt triangula VSH, vsh, nam (per conſtr.) angulus VSP = vsp; & angulus HSP = hsp, adeoque angulus VSH = vsh; & præterea sp : sh = SP : SH, & sv : sp = sh : sq = SV : SP, ob ſimilia triangula VSP, hsq; quare ex æquo sv : sh = SV : SH, triangula igitur VSH, vsh, quorum latera proportionalia æquales angulos comprehendunt ſunt ſimilia.

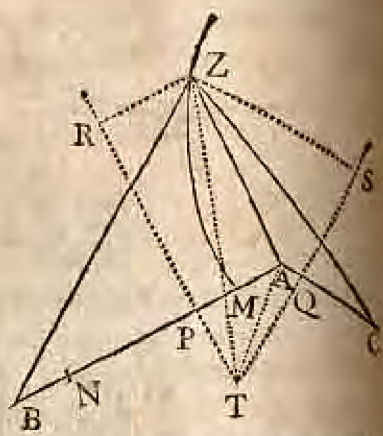
* (q) Nam ſi ducatur recta SP, perimetro figuræ occurrens in P, & angulum PSH, æqualem faciens angulo psh, patet ob ſimilitudinem ſectionum conicarum, triangula duo PSH, psh, fore ſimilia; unde viciſſim manifeſtum eſt punctum P, eſſe in perimetro figuræ, ſi triangulum PSH, ſimile ſit triangulo psh.

* (r) Eadem eſt conſtructio ac demonſtratio pro hyperbolâ, ſi foci H, h, & vertices B, b, ad contrariam partem transferantur.

Erit

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ ſunt.



Caſ. 1. Sunto puncta illa data A, B, C & punctum quartum Z, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum AZ, BZ, locabitur punctum Z in hyperbola cujus umbilici ſunt A & B, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille MN. Cape PM ad MA ut eſt MN ad AB, & erecta PR perpendiculari ad AB, demiſſaque ZR perpendiculari ad PR; erit, (f) ex naturâ hujus hyperbolæ, ZR ad AZ ut eſt MN ad AB. Simili diſcurſu punctum Z locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici ſunt A, C & principalis axis differentia inter AZ & CZ, ducique poteſt QS ipſi AC perpendicularis, ad quam ſi ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS, hæc fuerit ad AZ ut eſt differentia inter AZ & CZ ad AC. Dantur ergo rationes ipſarum ZR & ZS ad AZ, & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque ſi rectæ RP, SQ concurrant in T, & agantur TZ & TA, figura $TRZS$ dabitur ſpecie, & recta TZ in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur poſitione. Dabitur etiam recta TA, ut & angulus ATZ; & ob datas rationes ipſarum AZ

* (f) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ ZR, ad AZ, ut eſt MN, ad AB, (298) 300.

AZ ac (t) TZ ad ZS dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum ATZ, cujus vertex eſt punctum Z. *Q. E. I.*

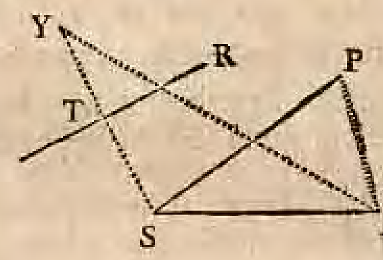
Caſ. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ, æquantur, ita age rectam TZ, ut biſecet rectam AB; dein quære triangulum ATZ ut ſupra.

Caſ. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C tranſeuntis. *Q. E. I.*

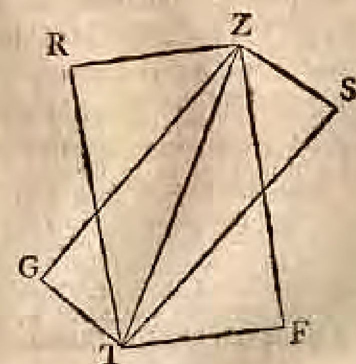
Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum *Apollonii* à *Vieta* reſtitutum.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum deſcribere, quæ tranſibit per puncta data & rectas poſitione datas continget.

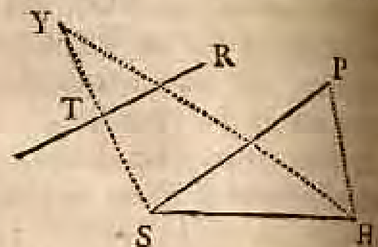


Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus ſit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & produc idem ad Y, ut ſit TY æqualis ST, & erit YH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP diffe-



(t) 300. Et recta T Z, in quâ punctum Z, alicubi locatur, dabitur poſitione; ductis enim TF ad RT, & TG ad ST perpendicularibus, quæ ſint in ratione data RZ ad ZS, agantur GZ, FZ, ipſis TS, RT parallelæ & ſe mutuò interſecantes in puncto aliquo Z, juncta TZ, habebit poſitionem quæſitam; patet enim perpendicula ZS, ZR, ex puncto Z, in rectas TS, TR, demiſſa, eſſe lineis TG, TF æqualia adeóque in datâ ratione.

differentia inter HP & axem principalem. (u) Hoc modo si dentur plures tangentes TR, vel plura puncta P, devenietur semper ad lineas totidem YH, vel PH, à dictis punctis Y vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iisdem, atque ideo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma superius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est YH; vel, si trajectoria ellipsis est, $PH+SP$; sin hyperbola, $PH-SP$) habetur trajectoria. *Q. E. I.*

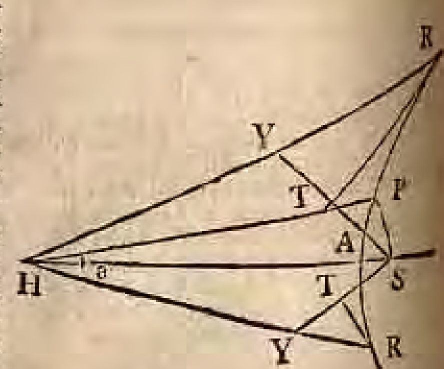


Scholium.

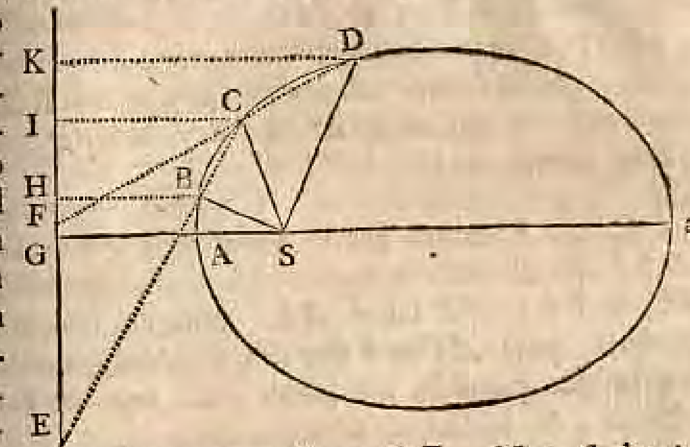
Ubi trajectoria est hyperbola, sub nomine hujus trajectoriæ oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu suo in oppositam hyperbolam transire non potest.

Casus

(u) 301. Si dentur tres tangentes, dabuntur tria puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt tres rectæ æquales ut YH, quod fit per Cas. 3. Lemmatis superioris. Si duæ dentur tangentes & punctum perimetri sectionis P, dabuntur duo puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt duæ rectæ æquales, & 3um punctum P, ex quo ducenda PH, cujus differentia à lineâ YH, est data SP. Nam in ellipsi $PH+SP=YH$, adeóque $YH-PH=SP$; in hyperbolâ $PH-SP=YH$, unde $PH-YH=SP$, estque Casus 2us Lem. XVI. Tandem si dentur tria perimetri puncta ut P, locum habet Casus 1us ejusdem Lemmatis.



Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut sit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinite productâ cape GA ad AS & Ga ad aS ut est HB ad BS; & erit A vertex, & Aa axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quam AS, erit ellipsis, parabola vel hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF. Nam si demittantur ad GF perpendicula CI, DK; erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc est, ut SC ad SB; & vicissim IC ad SC ut HB ad SB sive ut GA ad SA. Et simili argumento probabitur esse KD ad SD in eâdem ratione. (x) Jacent ergo puncta B, C, D in coni sectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes, ab umbilico S ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula à punctis iisdem ad rectam GF demissa in datâ illâ ratione.



Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit clarissimus Geometra *de la Hire*, conicorum suorum lib. VIII. prop. XXV.

SEC-

(x) * *Jacent ergo puncta B, C, D, in Coni Sectione* (vide n. 298.)

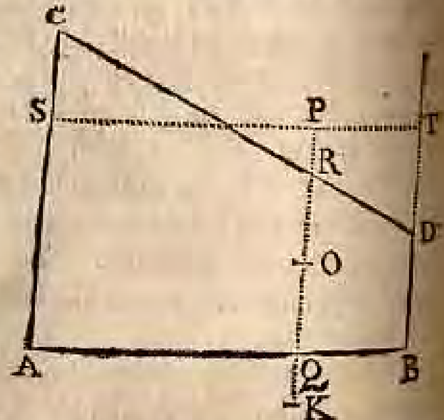
SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si à datæ conicæ sectionis puncto quovis P *ad trapezii alicujus* ABDC, *in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinitè producta* AB, CD, AC, DB *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* $PQ \times PR$, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* $PS \times PT$ *in datâ ratione.*

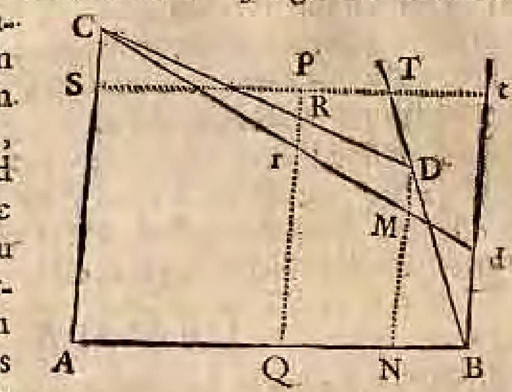
Cas. 1. Ponamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà PQ & PR lateri AC, & PS ac PT lateri AB. Sintque insuper latera duo ex oppositis, putà AC & BD, sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, & bisecabit etiam RQ. Sit O punctum in quo RQ bisecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K, ut sit OK æqualis PO, & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A, B, P & K sint ad conicam sectionem, & PK secet AB in dato angulo, erit (per prop. 17, 19, 21 & 23. lib. III. conicorum *Apollonii*) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in datâ ratione. (y) Sed QK & PR æqua-



(y) *Erit Rectangulum* PQK *ad Rectangulum* AQB *in datâ ratione.* Liquet (per Lem. III. de Conic.) quod si linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut PK secet aliam

æquales sunt, utpote æqualium OK, OP, & OQ, OR differentiæ, & inde etiam rectangula PQK & $PQ \times PR$ æqualia sunt; atque ideo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum AQB, hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in datâ ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita AC & BD non esse parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t, tum conicæ sectioni in d. Junge Cd secantem PQ in r, & ipsi PQ parallelam age DM secantem Cd in M & AB in N. Jam ob similia triangula BTt, DBN; est Bt seu PQ ad Tt ut DN ad NB. Sic & (z) Rr est ad AQ seu PS ut DM ad AN. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum PQ in Rr est ad rectangulum PS in Tt, ita rectangulum NDM est ad rectangulum ANB, & (per cas. 1.) ita rectangulum PQ in Pr est ad rectangulum PS in Pt, (†) ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*



Cas.

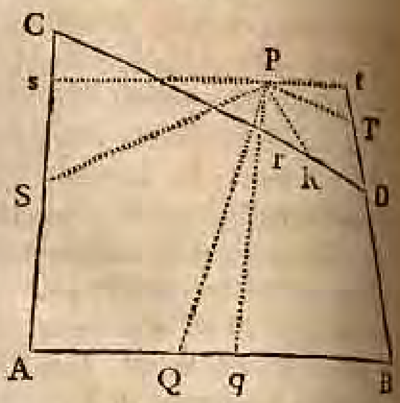
aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut AB, Rectangulum partium lineæ PK erit ad Rectangulum partium lineæ AB ut Rectangulum partium lineæ cujusvis alius Parallelæ lineæ PK & ad Sectionem terminatæ, ad Rectangulum partium quas hæc nova linea secat in lineâ AB: ideo ubicumque sit punctum P Rectangula PQK & AQB erunt in eâdem ratione.

(z) * *Rr : AQ seu PS = DM : AN.* Sunt enim propter parallelas Rr, DM, triangula rCR MCD similia, ideoque Rr : DM = Cr : CM; sed est Cr : CM = AQ vel PS : AN; ergò Rr : DM = AQ, vel PS : AN & Rr : PS = DM : AN.

(†) * *Ac divisim.* Ex Demonstratis NDM : ANB = PQ × Rr : PS × Tt = PQ × Pr : PS × Pt, & divisim NDM : ANB = PQ × Pr − PQ × Rr : PS × Pt − PS × Tt = PQ × PR : PS × PT, sed ratio NDM ad ANB data est, ergò & ratio PQ × PR ad PS × PT.

* Cum

Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ, PR, PS, PT non esse parallelas lateribus AC, AB, sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age Pq, Pr parallelas ipsi AC; & Ps, Pt parallelas ipsi AB; & propter datos angulos triangulorum PQq, PRr, PSs, PTt, dabuntur rationes PQ ad Pq, PR ad Pr, PS ad Ps, & PT ad Pt; atque ideo rationes compositæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data est: ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q. E. D.*



LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii $PQ \times PR$ *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* $PS \times PT$ *in datâ ratione; punctum* P, *à quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.*

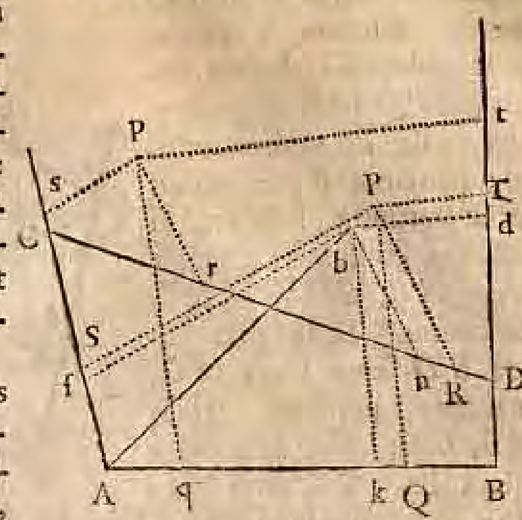
Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P, putà p, concipe conicam sectionem describi: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, junge AP secantem hanc conicam sectionem alibi quam in P, si fieri potest, putà in b. Ergo si ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ pq, pr, ps, pt & bk, bn, bf, bd; erit ut $bk \times bn$ ad $bf \times bd$ ita (per lem. XVII.) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem trapeziorum $bkAf$, $PQAS$, ut bk ad bf ita PQ ad PS. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit bn ad bd ut PR ad PT. (‡) Ergo trapezia æquiangula $Dnbd$, $DRPT$

(‡) * Cum sit $bk \times bn : bf \times db = PQ \times PR : PS \times PT$ item $bf : bk = PS : PQ$ erit $bn : bd = PR : PT$.

Ergo

similia sunt, & (a) eorum diagonales Db, DP propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum AP, DP ideoque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. *Q. E. D.* (b)

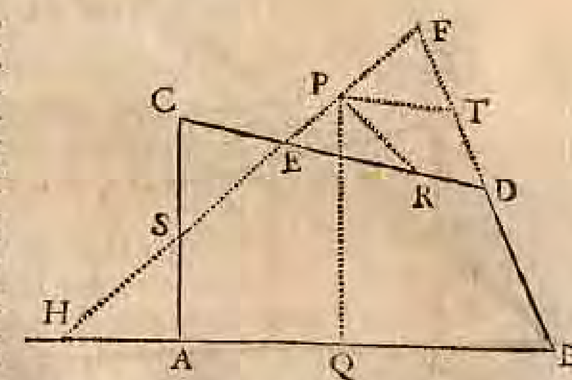
Corol. Hinc si rectæ tres PQ, PR, PS à puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas AB, CD,



sin-

(a) *Ergò trapezia æquiangula* D n b d, D R P T, *similia sunt, & eorum diagonales* D d, D P, *propterea coincidunt;* nam jungantur n d, R T, & duo triangula n d b, R T P, æquiangula erunt ob latera b n, b d, & P R, P T; proportionalia, & angulos n b d, R P T, æquales; jam & duo triangula n d D, R T D, æquiangula erunt ob angulum D, communem, & angulos ad T & t, R & n, æquales, erit igitur b n : n D = P R : R D, adeoque ductis diagonalibus D b, D P, duo triangula b D n, P D R, erunt similia, ac proinde angulus P D R, æqualis angulo b D n, quod esse non potest, nisi diagonales D b, D P, coincidant.

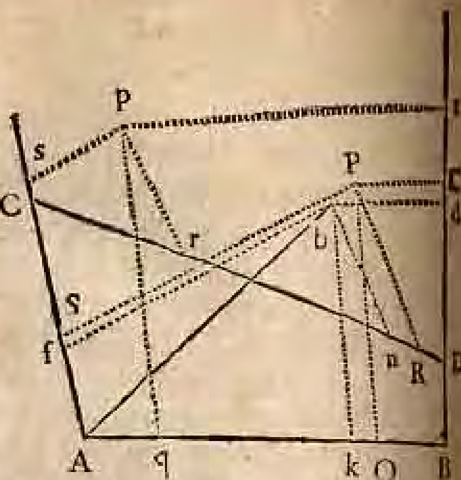
(b) 302. Lemma XVIII per analysim facili demonstrari potest. Producta enim PT, donec singulis trapezii lateribus occurrat in F, E, S, H, ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum ad illius singula triangula F P T, F E D, P E R, E C S, S H A, P H Q, clauduntur. Assumptis igitur C E, tanquam abscissa & P E tanquam ordinatâ loci punctorum P, data erit ratio P E, ad P R, adeoque P E, in datam quantitatem ducta æquabitur ipsi P R; ob datam C D, invenietur E D, utpote æqualis C D − C E, & per triangulum F E D specie datum

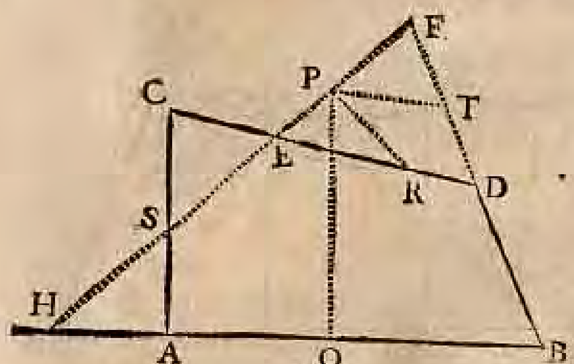


invenietur E F, ac proindè P F = E F − E P, & inde per triangulum F P T, invenietur P T, omnesque illæ lineæ exprimentur per lineas C E, P E, unius dimensionis, & alias datas quantitates. Similiter E S & C S & S A = C A − C S, atque H S, per triangulum S A H, specie datum, & hinc P H = H S + S E + E P, adeóque P Q, per triangulum P H Q, invenientur in lineis C E & P E, unius dimensionis & aliis datis quantitatibus. Quaré in rectangulis P Q × P R, P S × P T, rectæ variabiles C E, P E, non plures quam duas dimensiones obtinebunt, unde æquatio quæ ex rectangulo-

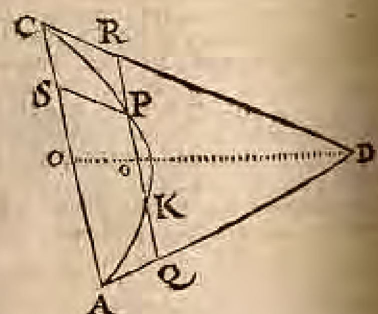
DE MOTU CORPORUM.

singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis (c) $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS in datâ ratione: punctum P, à quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione conicâ quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contra. Nam coeat linea BD cum lineâ AC, manente positione trium AB, CD, AC; dein coeat etiam linea PT cum linea PS: & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS *quad.* rectæque AB, CD, quæ





gulorum illorum ratione datâ reperitur secundum gradum non superabit; Cum igitur, ut vulgò notum est, æquationis quadraticæ locus sit Sectio conica, patet locum punctorum P, esse ad sectionem conicam. Quod autem sectio illa per puncta C, D, P, A, transeat inito calculo facilè ostenditur, nam si in æquatione loci ponatur CE = o, invenietur valor unus ipsius PE = o, adeóque punctum P, cadit in C, si ponatur CE = CD, invenietur quoque valor unus PE = o, ac proinde punctum P, cum puncto D, coincidit; idem pari argumento respectu punctorum A, B, reperitur, si ponatur AQ = o vel AQ = AB.



(c) *Hinc si rectæ tres &c.* Sint tres lineæ AB, CD, AC positione datæ, & lineæ AB, CD tangant sectionem conicam in A & C, & à puncto communi P ducantur tres Rectæ PQ, PR, PS in datis angulis ad singulas AB, CD, AC erit PQ×PR in ratione datâ ad quadratum tertiæ PS: Sit enim PS parallela lineæ DC & sint RP, PQ parallelæ lineæ CA sitque PK chorda Sectionis, sumatur medium

LIBER PRIMUS.

quæ curvam in punctis A & B, C & D secabant, jam (†) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent.

Scholium.

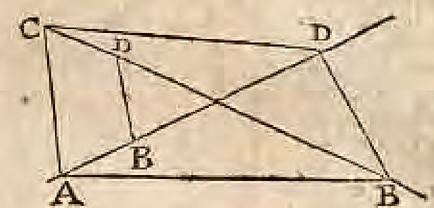
Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. (d) Nam si punctum p incidit in rectam, quâ puncta A & D vel C & B junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum p incidit, & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, sectio conica eva-

dium O chordæ AC ducaturque per punctum D DO, quæ secabit tam chordam PK quam totam RQ in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 224.) hinc erit RK = PQ, sed est (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 144.) CR^2 ad RP×RK in datâ ratione, ideoque est CR^2 ad RP×PQ in datâ ratione, sed ob parallelas CR SP & CS RP est PS = CR, ergo PS^2 est ad RP×PQ in datâ ratione.

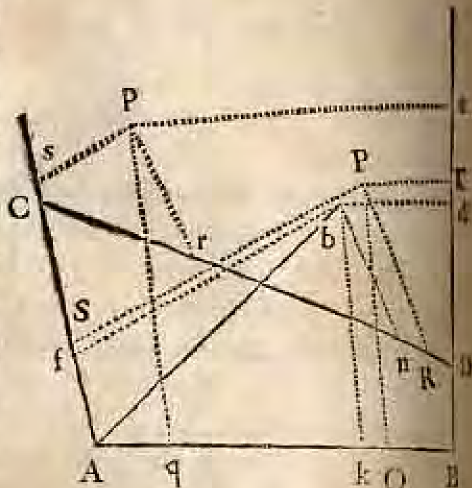
Si lineæ PS, RP, PQ in aliis sed datis angulis ad lineas AC CD AD inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII. in isto etiam casu fore SP^2 ad RP×PQ in datâ ratione.

Pariter & conversa demonstrabitur ut Lemma XVIII.

(†) * *Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent*; puncta enim A & B, C & D, semper supponuntur in conicæ sectionis perimetro posita; quare evanescentibus distantiis AB & CD, lineæ AB & CD, ultimò coincidunt cum tangentibus sectionem in punctis A & C. Vid. Lem. VI. Newt.

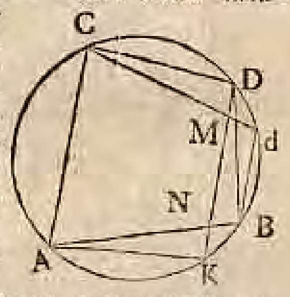


(d) 303. Puncta quatuor A, B, D, C, sint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppositarum, planum sectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad coni verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum P, & quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel sunt ipsius diagonales, ac proinde punctum P, incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor A, B, C, D, junguntur & *conica sectio vertitur in geminas rectas quarum una est recta illa in quâ punctum P incidit & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur,* evadet circulus. (e) Idem fiet, si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis, & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R, in quibus duæ primæ PQ,

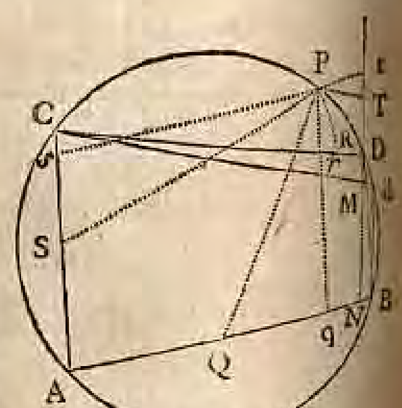


PR,

(e) 304. *Sectio Conica evadet circulus.* Si ex trapezii A B D C circulo inscripti angulo quovis D, agatur recta D N, lateri A C parallela, & lateri A B occurrens in N, deindè ex altero angulo B, ducatur B d, lateri A C parallela circulo occurrens in d, jungaturque C d rectam D N, secans in N, erit D N × D M = A N × N B. Nam jungatur A K, & quoniam arcus C D, & A K, D d, & K B, inter easdem parallelas intercepti æquales sunt, anguli D C d, & BAK, CDK & AKD, iis arcubus insistentes & æqualium arcuum chordæ C D, A K, æquantur; quarè triangula A K N, C D M, similia & æqualia sunt; est igitur D M = N K; sed ex naturâ circuli A N × N B = K N × D N, ergò AN × N B = DM × DN.



305. Si ergo sectio conica trapezio circumscripta vertatur in circulum, hoc est, si sectionis planum basi coni fiat parallelum, erit rectangulum P Q × P R ad rectangulum P S × P T, ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R... Dem... factâ constructione Cas. 3ⁱ. Lem. XVII. agantur rectæ D N, B d, lateri A C parallelæ, ut in articulo superiori; & erit per demonstrationem casus 2ⁱ. Lem. XVII. N D × D M : A N × N B = P q × P r : P s × P t, hoc est (304) P q × P r = P s × P t. Jam verò angulorum sinubus litterâ S designatis



PR, ducuntur. (f) Cæteris in casibus locus puncti P erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. (g) Vice autem trapezii $ABCD$ substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & è punctis quatuor A, B, C, D possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEM-

figuratis erit S. P q A = S. C A B, & S. P r C = S. A C D, ob parallelas P q, A C, & S. P s S = S. P s C = S. C A B, & S. P t T = S. A B D, ob parallelas s t, A B, & angulum A C D, complementum anguli A B D ad duos rectos, S. P t T = S. ACD. Porrò

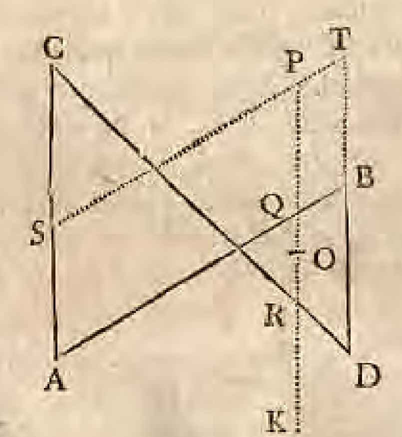
P Q : P q = S. P q A (S. C A B) : S. P Q B
P S : P s = S. P S C : S. P s S (S. C A B).
P R : P r = S. P r C (S. ACD) : S. P R C.
P T : P t = S. P T t : S. P t T. (S. A C D).

Ergo per compositionem rationum
P Q × P R × P s × P t : P S × P T × P q × P r
= P Q × P R : P S × P T
= S. P S C × S. P T t : S. P Q B × S. P R C.
Q. e. D.

306. Coroll... Eâdem manente proportione, si omnes anguli ad S, T, Q, R, fuerint æquales, rectangulum P Q × P R, erit quoque æquale rectangulo P S × P T.

(f) * Nam vel punctum P, locabitur in sectione rectilineâ per verticem coni transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliquâ trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

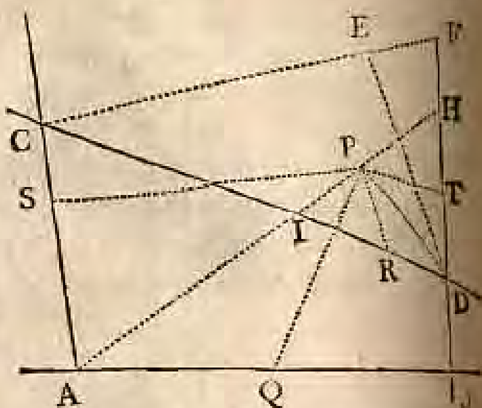
(g) 307. *Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum A B D C, cujus latera duo A B, C D, se mutuò instar diagonalium decussant*; huic enim quadrilatero absque mutatione aptari possunt tam constructiones quam demonstrationes Lemmatum X V I I. & XVIII. Exemplum sit



Cas. 1. Lem. X V I I. ponamus lineas ex puncto P, ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà P Q & P R, lateri A C & P S, ac P T, lateri A B; sintque insuper latera duo ex oppositis putà A C & B D, sibi invicem parallela & recta quæ bisecat &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum CABD.

LEMMA XIX.

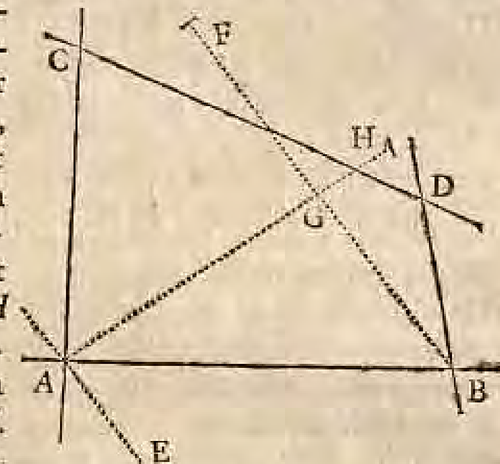
Invenire punctum P, *à quo si rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT *ad alias totidem positione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,* PQ×PR, *sit ad rectangulum sub aliis duabus,* PS×PT, *in datâ ratione.*

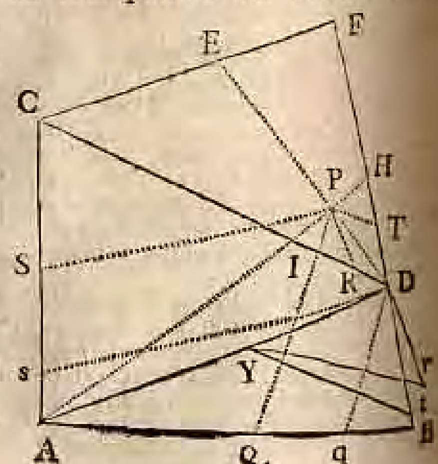


Lineæ AB, CD, ad quas rectæ duæ PQ, PR unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet AH, in quâ velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas BD, CD, nimirum BD in H & CD in I, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA & PA ad PS, ideoque ratio PQ ad PS. Auferendo hanc à datâ ratione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$, dabitur ratio PR ad PT, & addendo datas rationes PI ad PR, & PT ad PH dabitur ratio PI ad PH, atque ideo punctum P. Q.E.I.

Corol. 1. Hinc (h) etiam ad loci punctorum infinitorum P punctum quodvis D tangens duci potest. Nam chorda PD, ubi puncta P ac D conveniunt, hoc est, ubi AH ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescendum IP & PH invenietur ut supra. Ipsi igitur AD duc parallelam CF, occurrentem BD in F, & in eâ ultimâ ratione sectam in E, & DE tangens erit, propterea quod CF & evanescens IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium P definiri potest. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc loci tangentem AE, & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem loco in F. Invenietur autem punctum F per Lem. XIX. Biseca BF in G, & actâ indefinitâ AG erit positio diametri ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat loco in H, (i) & erit AH diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut BGq ad $AG \times GH$. Si (k) AG nusquam occurrat loco, lineâ AH existente infinitâ, locus erit parabola, & latus rectum ejus ad diametrum AG pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta A & H sita sunt ad easdem partes ipsius G: & ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit, & insuper BG *quad.* æquale rectangulo AGH, quo in casu circulus habebitur.





(h) 308. Minima sit punctorum P, D, distantia PD, agantur Ds, Dq, ad AC, AB, in angulis datis PSC, PQA, & junctâ AD, ex illius quovis puncto Y, ducantur Yr, lateri CD, parallela, & Yt, ad DB, in angulo dato PTH; tum ex puncto D, ad Yr, ducatur Dr, in angulo dato PRI; punctis P, D, coeuntibus erit PQ : PA = Dq : DA, & PA : PS = DA : Ds, adeóque PQ : PS = Dq : Ds, & proinde PQ×PR : PS×PT = Dq×PR : Ds×PT. Ratio data rectanguli PQ×PR ad PS×PT sit A ad B, & erit Dq×PR : Ds×PT = A : B, adeóque

PR : PT = A×Ds : B×Dq

& evanescente PD, ob similia triangula PIR, DYr, erit

PI : PR = DY : Dr,

& ob similia triangula PTH, YtD, erit

PT : PH = Yt : DY

[illegible] per compositionem rationum

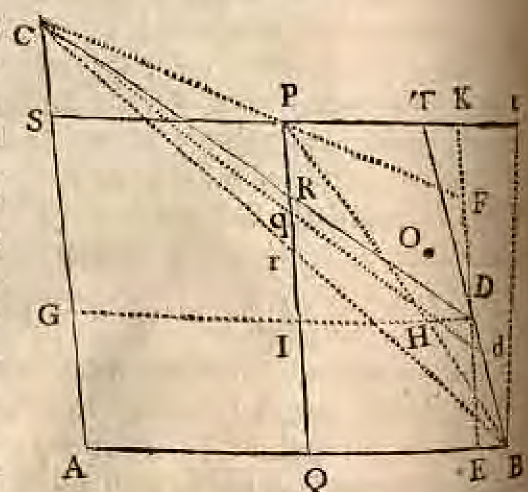
PI : PH = A×Ds×Yt : B×Dq×Dr = CE : EF, ob parallelas IH : CF, ducta DE, erit tangens in D.

(i) * Et erit AH, diameter (per prop. [illegible] lib. 2. conic. Apoll. Lemma IV. de Conic. 224.) sive latus transversum ad quod latus rectum erit ut BG² ad AG×GH (per prop. 21. lib. 1. conic. Apoll. Theor. II. de Hyp. & de Ellip. & Theor. I. de Parab. n. 224.)

(k) 309. Locus omnium punctorum P. est aliqua ex quinque coni sectionibus, per Lem. XVIII. & ipsius scholium. Si locus sit, Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incœpti & ab *Appollonio* continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant in hoc corollario exhibetur. (l)

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A *&* P *tangit sectionem quamvis conicam in punctis* A *&* P; *& lateribus unius angulorum illorum infinitè productis* AQ, AS *occurrit eidem sectioni conicæ in* B *&* C; *à punctis autem occursuum* B *&* C *ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T *&* R: *erunt semper abscissæ laterum partes* PR *&* PT *ad invicem in datâ ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum* D *tanget sectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*



Cas. 1. Jungantur BP, CP & à puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipsi AB parallela sit & occurrat PB, PQ, CA in H, I, G; altera DE parallela sit ipsi AC & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per lem. XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$

fuerit linea recta ac proindè tangens ipsa AE, (303) recta BF, tangenti parallela nullibi occurret loco, si verò locus fuerit alia coni sectio, recta BF, huic sectioni occurret in puncto aliquo F, tumque diameter AG, vel utrinque terminabitur ad hyperbolas oppositas, quo casu, puncta A & H, sita erunt ad easdem partes ipsius G, vel claudetur Ellipsi aut circulo, & punctum G, inter A & H positum erit; vel tandem nullibi occurret loco qui proinde erit parabola. Porrò datis sectionis conicæ vertice, diametro, hujus latere recto ac ordinatarum angulo sectio describi potest (per prop. 52. 53. 54. 55. lib. 1. conic. Apoll. sive ex iis quæ in notis tradita de Conicis tradita fuere).

(l) * Hoc veterum problema primus in suâ Geometriâ Cartesius per calculum analyticum generaliter resolvit.

in ratione datâ. Sed est PQ ad DE (seu IQ) ut PB ad HB, ideoque ut PT ad DH; & vicissim PQ ad PT ut DE ad DH. Est & PR ad DF ut RC ad DC, ideoque ut (IG vel) PS ad DG, & vicissim PR ad PS ut DF ad DG; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur PQ & PS, & propterea ratio PR ad PT datur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Quod si PR & PT ponantur in datâ ratione ad invicem, (m) tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione datâ, ideoque punctum D (per lem. XVIII.) contingere conicam sectionem transeuntem per puncta A, B, C, P. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si agatur BC secans PQ in r, & in PT capiatur Pt in ratione ad Pr quam habet PT ad PR: erit Bt tangens conicæ sectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut chordâ BD evanescente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB & Bt.

Corol. 2. Et vice versâ si Bt sit tangens, & ad quodvis conicæ sectionis punctum D conveniant BD, CD; erit PR ad PT ut Pr ad Pt. Et contra, si sit PR ad PT ut Pr ad Pt: convenient, BD, CD ad conicæ sectionis punctum aliquod D.

Corol. 3. Conica sectio non secat conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ conicæ sectiones per quinque puncta A, B, C, P, O; easque secet recta BD in punctis D, d, & ipsam PQ secet recta Cd in q. Ergo PR est ad PT ut Pq ad PT; (n) unde PR & Pq sibi invicem æquantur, contra hypothesin.

LEM-

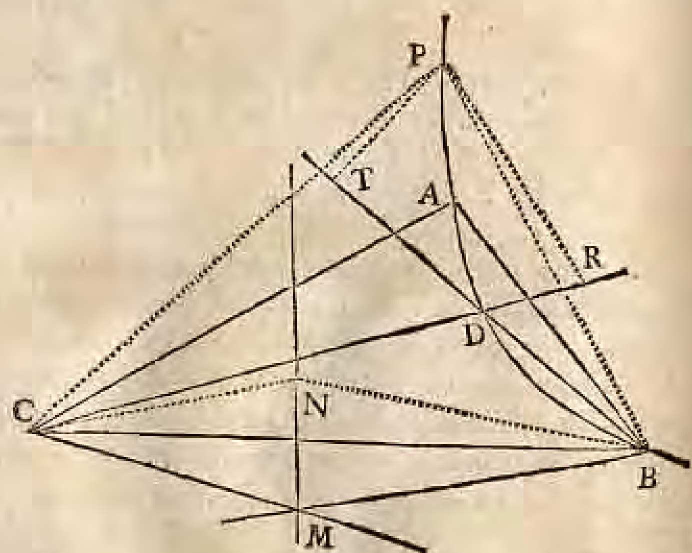
(m) * *Nam si* PR *&* PT *ponantur in ratione datâ*, erit quoque ob datas PQ, PS, rectangulum PQ × PR, ad rectangulum PS × PT, in ratione datâ; sed per demonstrata in 1°. casu PQ × PR : PS × PT = DE × DF : DH × DG; ergò DE × DF ad DH × DG in ratione datâ.

(n) * Cum enim duæ sectiones conicæ se mutuò intersecent in punctis O & B, (per hyp.) duci poterit recta BD, quæ duos sectionum arcus in B & O convenientes secet in punctis duobus, eritque per coroll. 1. Lem. XX. PR : PT = Pr : Pt = Pq : PT, adeóque PR : PT = Pq : PT, unde PR & Pq. sibi invicem æquantur, ac proinde Cd, coincidit cum CD, & punctum d, cum puncto D, (contra hyp.).

LEMMA XXI.

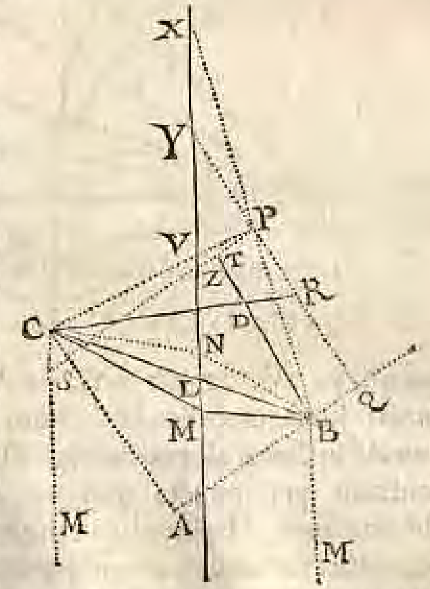
Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD, *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur: dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versâ, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant sectionem conicam per data puncta* B, C, A *transeuntem, & sit angulus* DBM *semper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *semper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam in rectâ *MN* detur punctum *N*, & ubi punctum mobile *M* incidit in immotum *N*; incidat punctum mobile *D* in im-



motum *P*. Junge *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, & a puncto *P* age rectas *PT*, *PR* occurrentes ipsis *BD*, *CD* in *T* & *R*, & facientes ab-

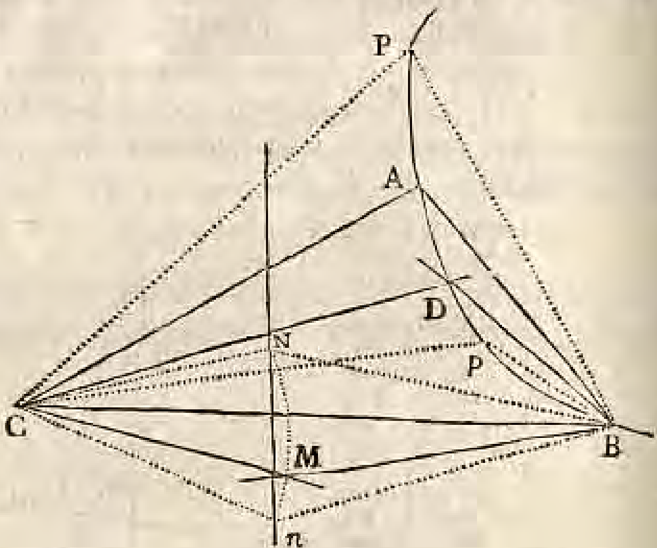
angulum *BPT* æqualem angulo dato *BNM*, & angulum *CPR* æqualem angulo dato *CNM*. Cum ergo (ex hypothesi) æquales sint anguli *MBD*, *NBP*, ut & anguli *MCD*, *NCP*; aufer communes *NBD* & *NCD*, & restabunt æquales *NBM* & *PBT*, *NCN* & *PCR*: ideoque triangula *NBM*, *PBT* similia sunt, ut & triangula *NCM*, *PCR*. Quare *PT* est ad *NM* ut *PB* ad *NB*, & *PR* ad *NM* ut *PC* ad *NC*. Sunt autem puncta *B*, *C*, *N*, *P* immobilia. Ergo *PT* & *PR* datam habent rationem ad *NM*, proindeque datam rationem inter se; atque ideo (per lem. xx. (o)) punctum *D*, perpetuus rectarum mobilium *BT* & *CR* concursus, contingit sectionem conicam, per puncta *B*, *C*, *P* transeuntem. *Q. E. D.* Et



(o) *Atque ideo per Lemma XX. &c.* Ut pateat Lemma XX. ad hanc demonstrationem applicari, hæc sunt supplenda demonstrationi Newtonianæ.

Concurrunt lineæ BM, CM in puncto lineæ NM infinite distanti, hoc est, sint ipsi lineæ NM parallelæ, & ducantur lineæ BA, CA facientes cum illis lineis BM, CM angulos MBA, MCA datis MBD, MCD æquales. Dico lineas BA, CA fore parallelas lineis PT, PR secundum constructionem Newtonianam descriptis: Productis enim BP & PT (si necesse sit) donec secent rectam datam MN in X & Z, erit angulus BPZ exterior respectu Trianguli PZX, ideoque æqualis angulis X & PZX, & angulus BNM erit exterior respectu Trianguli BNX ideoque æqualis angulis X & XBN, anguli vero BPZ & BNM æquales sunt per constructionem Newton. ergo anguli X & PZX æquales sunt angulis X & XBN, unde angulus PZX, quem facit linea PT cum recta NM est æqualis angulo XBN sive angulo dato MBD quem facit linea BA cum linea BM ipsi NM parallela, ergo per naturam Parallelarum, est linea PT parallela lineæ BA. Eodem planè modo demonstrabitur lineam CA esse Parallelam lineæ PR. Quibus positis, sit sectio Conica per puncta B, C, P & A transiens; lineæ BD, CD juxta conditiones in Lemmate præscriptas ductæ concursu suo D percurrent eam sectionem Conicam: Productis enim lineis PT, PR, donec secent lineas CA, BA, in S & Q fiet *Parallelogrammum ASPQ,* *quod in Angulis suis oppositis A & P tangit sectionem conicam & lateribus anguli A productis occurrit eidem sectioni in B & C, & lineæ BD, CD à punctis occursuum B & C ductæ* (secundum conditiones Lemmatis hujusce XXI.) *abscindunt à Parallelogrammi lateribus PS, PQ partes PT, PR quæ sunt ad invicem in data ratione* (per demonstrationem Newtonianam hujusce) *ergo* (per 2. casum Lem. XX.) *punctum D tangit sectionem Conicam per puncta quatuor A, B, C, P transeuntem.*

Et contra, si punctum mobile *D* contingat sectionem conicam transeuntem per data puncta *B*, *C*, *A*, & sit angulus *DBM* semper æqualis angulo dato *ABC*, & angulus *DCM* semper æqualis angulo dato *ACB*, & ubi punctum *D* incidit successivè in duo quævis sectionis puncta immobilia *p*, *P*, punctum mobile *M* incidat successivè in puncta duo immobilia *n*, *N*: per



eadem *n*, *N*, agatur recta *nN*, & hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis *M*. Nam, si fieri potest, versetur punctum *M* in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum *D* sectionem conicam per puncta quinque *B*, *C*, *A*, *p*, *P* transeuntem, ubi punctum *M* perpetuò tangit lineam curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum *D* sectionem conicam per eadem quinque puncta *B*, *C*, *A*, *p*, *P*, transeuntem, (p) ubi punctum

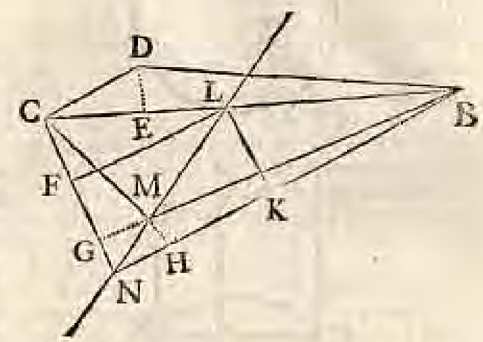
(p) * *Ubi punctum M, perpetuò tangit lineam rectam* n N &c. cum enim angulorum datorum A B C, A C B, latera duo coincidunt cum rectâ C B, punctum A, aliorum laterum B A, C A, intersectio, locatur in sectione conicâ per polos C, B, transeunte; dum verò latera duo Bn, & Cn, B N, & C N, sese intersecant in n, N, aliorum laterum B p, & C p, B P & C P intersectiones p, P, sunt in eâdem sectione conicâ ex demonstratis.

tum *M* perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra corol. 3. lemmat. xx. Igitur punctum *M* versari in lineâ curvâ absurdum est. *Q.E.D.* (q)

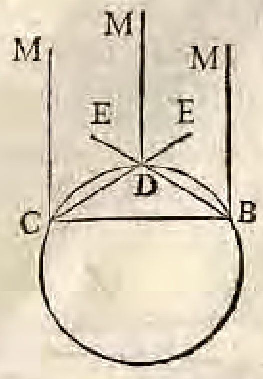
(q) 310. In hâc organicâ sectionum conicarum descriptione, angulorum circà polos immobilium crura utrinque producantur, ut cum duo crura v. gr. C P, B P supra lineam C B divergunt, infrà eandem producta convergant.

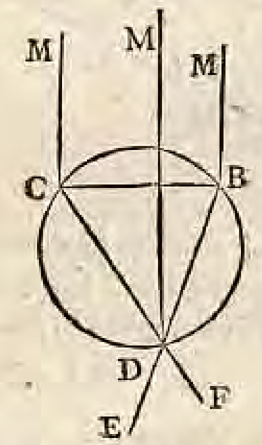
Si recta N M, per polorum alterutrum C, vel B, transeat, aut si anguli B C D, C B D, simul evanescant, punctum D describet lineam rectam. Nam in 1°. casu angulorum datorum unus immobilis manet, dum alter circà polum suum rotatur & crurum suorum cum immobilis anguli cruribus intersectione lineam rectam describit; Si enim recta N M cum anguli dati D C M crure altero C M coincidat, immobili manente angulo D C M, alterius D B M crura rectas M C, C D perpetuò intersecabunt; deindè si crure B M, coincidente cum C B, ut rectam C M positione datam perpetuò secet in C, immobilis maneat angulus D B M, alterius D C M circà polum C rotati crus C D rectam B D perpetuò intersecabit.

In 2°. casu anguli B C N, C B N circa polos C, B mobiles, crurum duorum C N, B N concursu, rectam N M L potentem datam & aliorum crurum C B, B C, seu C D, B D concursu D lineam quamlibet percurrant, sintque N punctum fixum M & D puncta mobilia; ductis ex puncto L dato ad latera data C N, B N perpendicularibus L F, L K ex puncto mobili M ad easdem perpendicularibus M G, M H & ex puncto D ad rectam C B, perpendiculari D E; sit C E $= x$, D E $= y$, C B $= a$, ac proinde E B $= a - x$, M N $= z$, L N $= b$, L F $= c$, F N $= d$, C N $= e$, L K $= f$, N K $= h$, N B $= g$, & ob triangula N M G, N F L similia, N L (b) : L F (c) = M N (z) : G M $= \frac{cz}{b}$, & L N (b) : F N (d) = M N (z) : G N $= \frac{dz}{b}$, adeóque C G = C N − G N

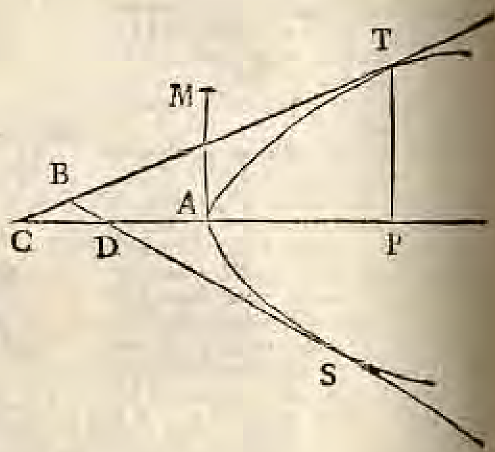


$= \frac{be - dz}{b}$; porrò ob angulos æquales DCE, MCG, & DEC, MGC, triangula D C E, M C G similia sunt; quare C G $(\frac{be-dz}{b})$: G M $(\frac{cz}{b})$ = C E (x) : D E (y). Undè $czx = bey - dzy$, & $z = \frac{bey}{cx + dy}$; ob triangula N L K, N M H, similia N L (b) : L K (f) = N M (z) : M H $= \frac{fz}{b}$; & N L (b) : N K (h) = M N (z) : N H $= \frac{hz}{b}$. undè B H $= \frac{gb - hz}{b}$; ob similia triangula B E D, B H M, B H $(\frac{gb-hz}{b})$: M H $(\frac{fz}{b})$ = B E $(a - x)$: D E (y) quarè $faz - fzx = gby - hzy$, & $z = \frac{gby}{fa + hy - fx} = \frac{bey}{cx + dy}$, adeóque $gcx + gdy = fae + hey - fex$. Cum igitur æquatio sit unius dimensionis, locus punctorum D, est linea recta.

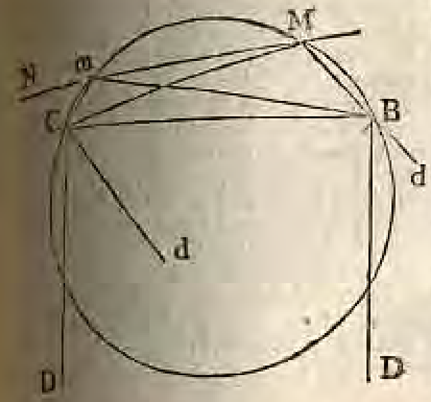




311. Si angulorum mobilium M C D, M B D crura C M, B M sibi invicem parallela maneant, seu, si recta N M ad distantiam infinitam abeat, crura alia C D, B D concursu suo D circulum describent, & contrà. Concurrant enim C M, D M, B M ad distantiam infinitam, & angulus M C D æqualis erit angulo M D F, ac M B D æqualis M D E; quoniam igitur dati sunt anguli M C D, M B D dabuntur quoque anguli M D F, M D E ac etiam angulus E D F & ei æqualis C D B. quarè cum curva concursu D descripta, necessariò transeat per puncta data C, & B, patet punctum D seu verticem anguli dati C D B chordæ C B insistentis esse in circuli peripheriâ. Et contrà, si concursus D, tangat circulum per puncta C, & B transeuntem, dabuntur tres anguli C D B, M C D, M B D atque adeo in quadrilatero M C D B M, cujus duo latera C M, B M concurrunt in M, dabitur angulus C M B, quod fieri nequit, nisi recta N M ad distantiam infinitam abeat, hoc est, nisi parallela fiant crura C M, B M.



312. Lemma..: Si duæ rectæ parabolam tangant, & puncta contactuum in infinitum abeant, binæ tangentes se mutuo intersecant ad angulum infinitesimum & evadunt parallelæ axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis C P, vertex A, C T tangens in T & axem secans in C, T P ad axem ordinata, A M latus rectum axis, erit C P = 2 A P, & A P : P T = P T : A M, adeóque 2 A P (C P) : P T = 2 P T : A M. Si punctum contactûs T, in infinitum abeat, erit 2 P T, infinita respectu A M, & proinde C P, infinita respectu P T, hoc est, sinus totus C P infinitus evadit respectu tangentis P T anguli T C P, quare angulus ille infinitesimus est, & tangens axi C P parallela, altera tangens B S, axem secet in D, & tangentem C T in B, & punctum contactûs S in infinitum abeat, erit angulus S D P infinitesimus & angulus T B D duobus internis atque infinitesimis B C D, B D C æqualis, erit quoque infinitesimus.

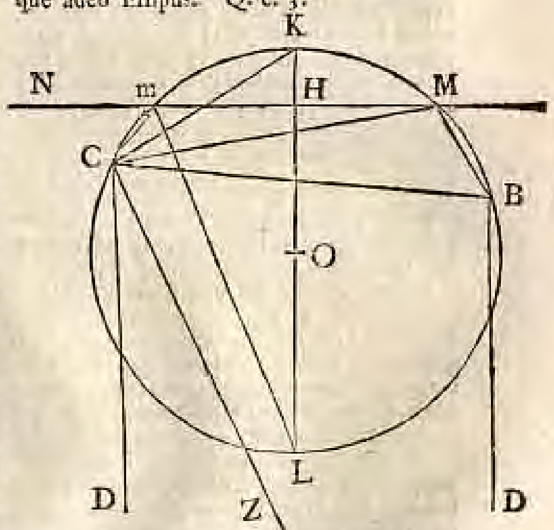


313. Super datâ rectâ C B, describatur segmentum circuli B M m C, quod capiat angulum B M C, datorum M C D, M B D supplementum ad quatuor rectos & compleatur circulus. Si recta data N M, quam in descriptione sectionis conicæ percurrit crurum B M C M concursus M hunc circulum secet, describetur hyperbola; si recta N M circulum contingat, describetur parabola; si recta N M circulo nullibi occurrat, describetur ellipsis.

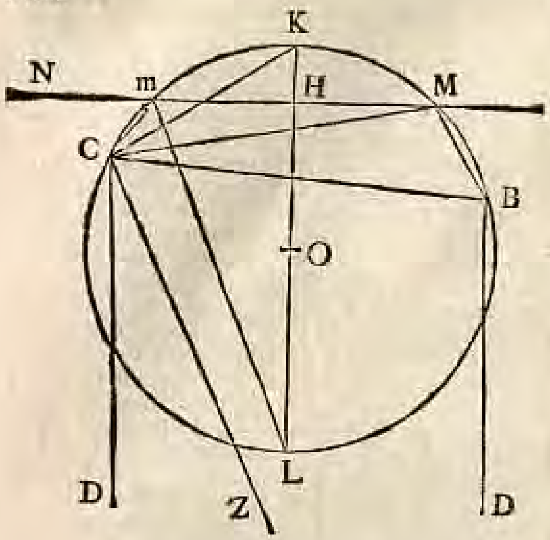
Cas. 1. Recta N M circulum secet in punctis m, M, & crura C d, B d, & C D, B D, sibi invicem parallela erunt sive concurrent ad distantiam infinitam; nam cum in quadrilatero D C M B D d C m B d angulus M vel m sit complementum angulorum C & B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d, evanescit, ideoque lineæ C D, B D erunt parallelæ. Cum verò in omni Sectione Conicâ inveniri possit Tangens parallela chordæ cuivis datæ (per Lemma IV. de Conicis pag. 129.) ductæ intelligantur Tangentes Sectionis chordis C D C d Parallelæ, illæ Tangentes facient inter se angulum æqualem angulo D c d quem faciunt inter se illæ chordæ, & puncta contactuum erunt ad distantiam infinitam, nulla verò est sectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam distantiam tangentes angulum finitum communi intersectione faciant; in Ellipsi enim nulla est tangens ad distantiam infinitam, & in parabolâ hujusmodi tangentes angulum infinitesimum duntaxat, facerent (per Lemma superius 313). Si igitur recta M N circulum secet, describetur hyperbola cujus asymptoti seu tangentes ad distantiam infinitam rectis C D, C d parallelæ sunt & se mutuò intersecant in centro trajectoriæ. Q. e. 1.

Cas. 2. Quoniam angulus m C M, in 1°. casu æqualis est asymptotorum angulo D C d, ob æquales D C M, d C m; si manentibus circulo & distantiâ polorum C B, puncta intersectionum m, M ad se mutuò accedant, decrescet angulus D C d, & tandem punctis m, M coeuntibus, hoc est, secante M N in tangentem mutatâ angulus ille evanescet, dum rectæ C D, B D manent parallelæ, & ad distantiam infinitam cum trajectoriâ conveniunt. In hoc igitur casu duæ rectæ, ipsis C D, C d parallelæ & trajectoriam ad distantiam infinitam tangentes, se mutuò intersecant in angulo infinitesimo, seu in unicam lineam coeunt axi trajectoriæ parallelam, & proindè hyperbola casus primi mutatur in parabolam (312). Q. e. 2.

Cas. 3. Si recta N M nullibi circulo occurrat, rectæ B D, C D quarum concursu D sectio conica describitur nunquam possunt fieri parallelæ, & proindè curva non abit in infinitum, sed in se redit, estque adeò Ellipsis. Q. e. 3.

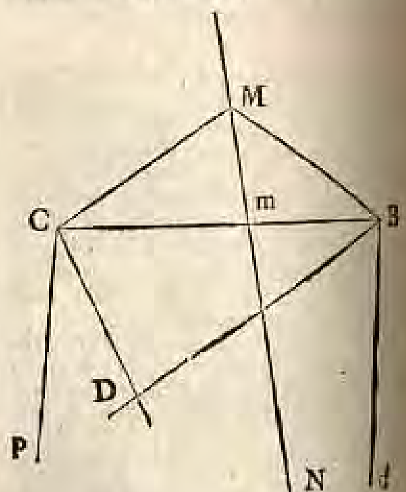


314. Coroll. 1. Ex his axes trajectoriæ facilè determinantur. Sit O centrum circuli C m M B ut suprà (313) descripti, ab hoc centro in rectam N M cadat perpendicularis O H circulo occurrens in



punctis K & L, & rectæ N M in H, jungatur C K, & fiat angulus K C Z æqualis angulo mobili M C D, aut quod idem eſt, anguli M C D crus C M ducatur ad poſitionem C K, & alterum crus C Z erit parallelum axi majori, & perpendiculare axi minori trajectoriæ, modò punctum K ſit rectæ M N propius quam punctum oppoſitum L; nam arcus K m, K M ſunt æquales & angulus $KCm = KCM = \frac{1}{2} mCM = DCZ$; cumque m C M æqualis ſit angulo quo aſymptoti ſe mutuò interſecant, erit D C Z dimidium illius anguli, adeóque C Z parallela axi qui aſymptotorum angulum biſecat; & ſi punctum K regulæ propius ſit quam punctum oppoſitum L, erit angulus m C M acutus, ac proindè axis major qui angulum aſymptotorum acutum biſecat, erit rectæ C Z parallelus, axis verò minor huic rectæ perpendicularis; undè ſi detur trajectoriæ centrum dabuntur axes, & ſi deſcripta ſit trajectoria, invenitur axis poſitio, ductâ ad C Z normali ad trajectoriam utrinque terminatâ quam axis perpendiculariter & bifariam dividit; inventâ autem axium poſitione, habetur centrum in eorum interſectione communi. Superior autem conſtructio non ſolum hyperbolæ convenit, ſed & parabolæ in quam hyperbola mutatur, dum puncta m, M coeunt, atque etiam Ellipſi in quam vertitur parabola, dum recta M N, extra circulum tranſit.

315. Coroll. 2. Axium trajectoriæ quadrata ſunt ad invicem ut K H, ad L H, nam axes ſunt inter ſe ut coſinus dimidii anguli aſymptotorum ad ſinum dimidii ejuſdem anguli; eſt verò K C m qui æqualis eſt dimidio anguli aſymptotorum, etiam æqualis angulo m L K, adeóque L H ad H m ut axis ad axem; ſed $LH : Hm = Hm : KH$, ac proindè $LH : KH = LH^2 : Hm^2$. Ergò quadrata axium ſunt ad invicem ut L H ad K H.



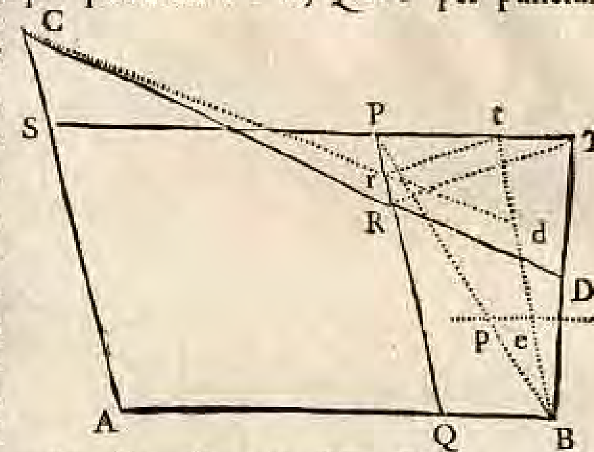
316. Corol. 3. Si angulorum mobilium ſumma duobus rectis æqualis fuerit, rectæ B D, C D fiunt parallelæ, quandò punctum M pervenit ad m, ubi recta N M occurrit rectæ C B productæ, ſi opus eſt, & quandò M abit in infinitum, cum in utroque caſu evaneſcat angulus B M C. Si itaque linea M N, in hac hypotheſi alicubi occurrat rectæ B C productæ, duæ rectæ trajectoriam in diſtantiâ infinitâ contingent, & ſe mutuò ad angulum datum interſecabunt, adeóque deſcribetur hyperbola; at ſi M N rectæ C B non occurrat, ſed ipſi parallela ſit, rectæ C D, B D non evadent parallelæ, niſi quandò punctum M abit in infinitum, ac proindè trajectoria erit parabola. Quoniam igitur recta M N rectæ C B productæ occurrit, vel ipſi parallela eſt, patet nunquam poſſe Ellipſim deſcribi, ſi angulorum mobilium ſumma, duobus rectis æqualis fuerit.

Scholium. Si crura C M, B M concurſu ſuo M percurrant ſectionem conicam per polum alterum C tranſeuntem, crura duo reliqua C D, B D concurſu ſuo D deſcribunt curvam ſecundi generis per polum alterum B tranſeuntem, præterquam ubi anguli B C D, C B D ſimul evaneſcunt, quo caſu punctum D deſcribet ſectionem conicam per polum C tranſeuntem, & eâdem methodo curvas varias tertii, quarti, ſuperiorum generum deſcribere licet. Sed hæc ad præſens inſtitutum non pertinent, qui plura deſideraverit legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheſeos Profeſſoris Colini Mac-Laurin, ex quo eximio opere non pauca excerpſimus.

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta deſcribere.

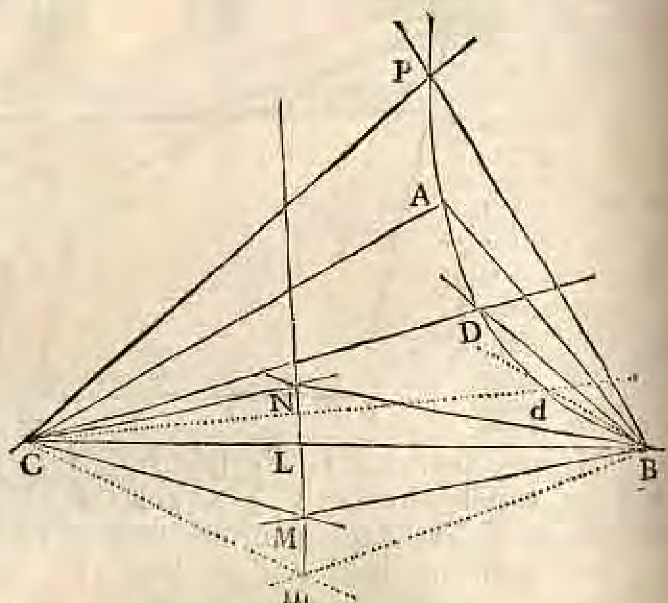
Dentur puncta quinque A, B, C, P, D. Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B, C, quæ poli nominentur, age rectas AB, AC, hiſque parallelas TPS, QRP per punctum quartum P. Deinde a polis duobus B, C age per punctum quintum D, infinitas duas BDT, CRD, noviſſimè ductis TPS, PRQ (priorem priori & poſteriorem poſteriori) occurrentes in T & R. Denique de rectis PT, PR, actâ rectâ tr ipſi TR parallelâ, abſcinde quaſvis Pt, Pr ipſis PT, PR proportionales; & ſi per earum terminos t, r & polos B, C actæ Bt, Cr concurrant in d, locabitur punctum illud d in trajectoriâ quæſitâ. Nam punctum illud d (per lem. xx.) verſatur in conicâ ſectione per puncta quatuor A, B, C, P tranſeunte; & lineis Rr, Tt evaneſcentibus, coit punctum d cum puncto D. Tranſibit ergo ſectio conica per puncta quinque A, B, C, P, D. *Q. E. D.*



Idem

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis A, B, C; & circum duo eorum B, C, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB, applicentur crura BA, CA primò ad punctum D, deinde ad punctum P, & notentur puncta M, N in qui-



bus altera crura BL, CL casu utroque se decussant. Agatur recta infinita MN, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B, C, eâ lege ut crurum BL, CL vel BM, CM intersectio, quæ jam sit m, incidat semper in rectam illam infinitam MN; & crurum BA, CA, vel BD, CD, intersectio, quæ jam sit d, trajectoriam quæsitam $PADdB$ delineabit. Nam punctum d (per lem. XXI.) continget sectionem conicam per puncta B, C transeuntem; & ubi punctum m accedit ad puncta L, M, N, punctum d (per constructionem) accedet ad puncta ADP. Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque A, B, C, P, D. *Q. E. F.*

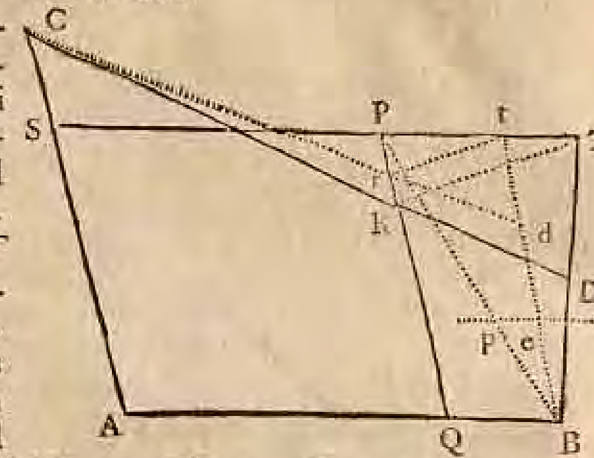
Corol.

Corol. 1. (r) Hinc recta expeditè duci potest, quæ trajectoriam quæsitam in puncto quovis dato B continget. Accedat punctum d ad punctum B, & recta Bd evadet tangens quæsita.

Corol. 2. (s) Unde etiam trajectoriarum centra, diametri & latera recta inveniri possunt, ut in corollario secundo lemmatis XIX.

Scholium.

Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo BP, & in eâ, si opus est, productâ capiendo Bp ad BP ut est PR ad PT; & per p agendo rectam infinitam pe ipsi SPT parallelam, & in eâ (t) capiendo semper pe æqualem Pr; & agendo rectas Be, Cr concurrentes in d. Nam cum sint Pr ad



Pt, PR ad PT, pB ad PB, pe ad Pt in eâdem ratione; erunt pe & Pr semper æquales. Hâc methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditissimè, nisi mavis curvam, ut in constructione secundâ, describere mechanicè.

PRO-

(r) 315. Tangens in B, coincidit cum [illegible] Bd anguli mobilis dBm, dum [illegible] anguli dCm, crus Cd, coincidit cum rectâ CB. Nam in hoc casu, [illegible] Bd evanescit & positione congruit cum tangente; unde tangens per punctum quodvis datum expeditè duci potest [illegible] descriptâ sectione conicâ, [illegible] illud datum pro polo usurpetur.

(s) 318. Per quodvis punctorum datorum puta B, duc trajectoriæ tangentem, & per aliud quodvis punctum datum C, [illegible] tangenti parallelam occurrentem trajectoriæ jam descriptæ in puncto aliquo; [illegible] descripta non fuerit trajectoria circa polos, rotentur anguli mobiles, donec crurum CD, BD concursus D, reperiatur in rectâ tangenti parallelâ; vel [illegible] punctum illud in quo recta tangenti parallela trajectoriæ occurrit, geometricè quæratur per lem. XIX. Nam (vid. fig. & demonstr. Lem. XX) cum data sint quinque puncta C, A, B, D, P, dabitur ratio constans rectangulorum PQ×PR, PS×PT, hoc est, rectangulorum DE×DF, DG×DH, adeoque (per Lem. XIX.) invenietur punctum concursus trajectoriæ cum lineâ per punctum datum C ductâ. Cætera fiant ut in coroll. 2°. Lem. XIX. possent etiam trajectoriarum axes & centra inveniri eo modo quo docuimus num. 314.

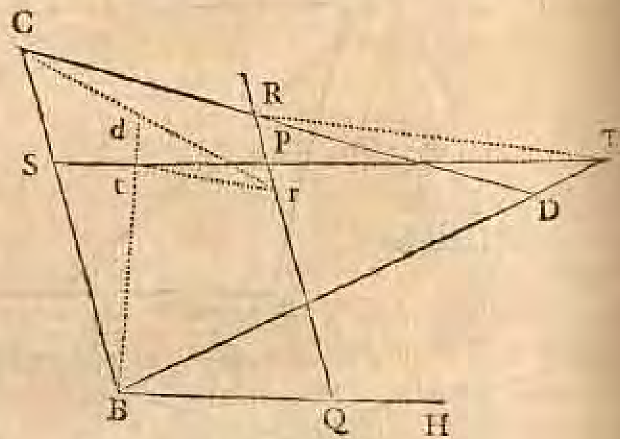
(t) * Hoc est linearum pe, Pr, alterutra ad arbitrium capiatur, & altera assumptæ æqualis fiat, aganturque rectæ Be, Cr, concurrentes in d; nam (per priorem constr.) Pr : Pt = PR : PT = pB : PB, (per hanc constr.), & junctâ Bt, ob parallelas pe, Pt, erit pB : PB = pe : Pt, atque adeo Pr : Pt = pe : Pt, unde Pr = pe.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

Cas. 1. Dentur tangens HB, punctum contactus B, & alia tria puncta C, D, P. Junge BC, & agendo PS parallelam rectæ BH, & PQ parallelam rectæ BC, comple parallelogrammum $BSPQ$. Age BD secantem SP in T, & CD secantem



PQ in R. Denique, agendo quamvis tr ipsi TR parallelam, de PQ, PS abscinde Pr, Pt ipsi PR, PT proportionales respectivè; & actarum Cr, Bt concursus d (per lem. xx.) (u) incidet semper in trajectoriam describendam.

Idem aliter.

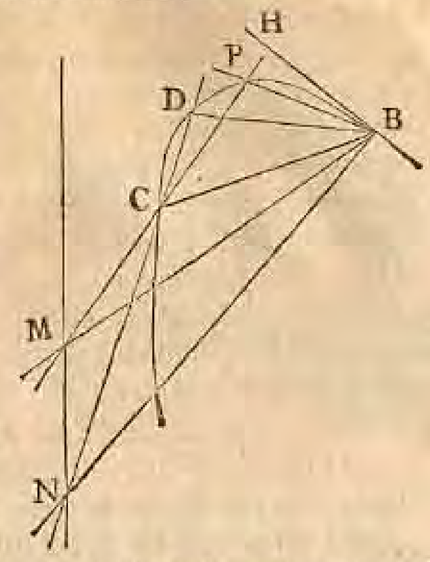
Revolvatur tum angulus magnitudine datus CBH circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus DC circa polum C. Notentur puncta M, N, in quibus anguli crus BC

(u) * Demonstratio clara fit, si in figurâ Lem. XX: punctum B accedat ad punctum A, & recta A B Q sectioni conicæ tangens evadat.

* Nam

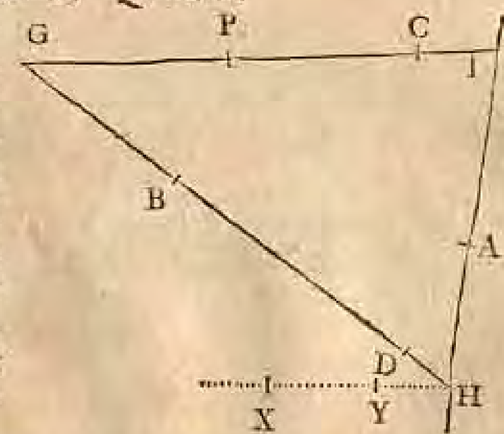
LIBER PRIMUS.

BC secat radium illum, ubi crus alterum BH concurrit cum eodem radio in punctis P & D. Deinde ad actam infinitam MN concurrant perpetuo radius ille CP vel CD & anguli crus BC, & cruris alterius BH concursus cum radio delineabit trajectoriam quæsitam.



Nam si in (x) constructionibus problematis superioris accedat punctum A ad punctum B, lineæ CA & CB coincident, & linea AB in ultimo suo situ fiet tangens BH; atque ideo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem conicam per puncta C, D, P transeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B. *Q. E. F.*

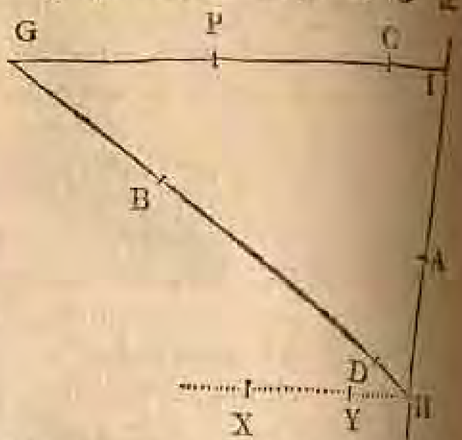
Cas. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P extra tangentem HI sita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G, tangentique occurrentibus in H & I. Secetur tangens in A, ita ut sit HA ad IA, ut est rectangulum sub mediâ proportionali inter CG & GP & mediâ proportionali inter BH & HD,



(x) * Nam in alterâ problematis XXII. solutione ABC, ACB, sunt anguli circa polos C & B mobiles; undè si punctum A accedat ad punctum B, coincident crura CA, CB, & unicam rectam constituunt, evanescente angulo ACB, manet verò angulus ABC quem tangens AB cum BC continet; quarè dum anguli ABC, crus BC cum radio AC, si necessum sit, producto, perpetuò concurrit in rectâ aliquâ positione datâ ut NM, cruris AB & radii CA concursus trajectoriam describit.

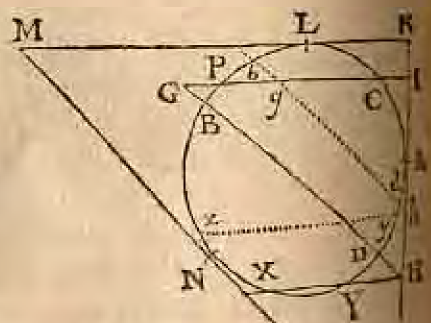
DE MOTU CORPORUM.

ad rectangulum sub mediâ proportionali inter *D G* & *G B* & mediâ proportionali inter *P I* & *I C*; & erit *A* punctum contactus. Nam si rectæ *P I* parallela *H X* trajectoriam secet in punctis quibusvis *X* & *Y*: erit (ex conicis) (y) punctum *A* ita locandum, ut fuerit *HA quad.* ad *AI quad.* in ratione compositâ ex ratione rectanguli *XHY* ad rectangulum *BHD*, seu rectanguli *CGP* ad rectangulum *DGB*, & ex ratione rectanguli *BHD* ad rectangulum *PIC*. Invento autem contactus puncto *A*, describetur trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.*



Capi autem potest punctum *A* vel inter puncta *H* & *I*, vel extra; & perinde trajectoria dupliciter describi.

(y) 319. *Erit ex Conicis*; scilicet si A sit punctum contactus erit (per Cor. 3. Lem. III. de Conic. p. 119.) HA² ad AI² ut rectangulum XHY ad rectangulum PIC, sed ratio rectanguli XHY ad rect. PIC, potest considerari ut composita ex ratione rect. XHY ad rect. BHD, & ex ratione ejusdem rect. BHD ad rect. PIC. Est verò rect. XHY ad rect. BHD ut rect. CGP ad rect. DGB (per Lem. III. de Conic. p. 117.) sunt enim HX, GC, duæ Parallelæ in Sectione Conicâ ductæ & per tertiam lineam GH sectæ, ideoque factum partium HX, HY Parallelæ HX, quæ sumuntur ab intersectione H ad curvæ puncta X & Y, est ad BH × HD factum partium lineæ secantis GH sumptarum ab intersectione H ad puncta curvæ B & D, sicut factum partium alterius Parallelæ CG × GP, ad DG × GB factum partium correspondentium lineæ secantis. Est ergo ratio HA²



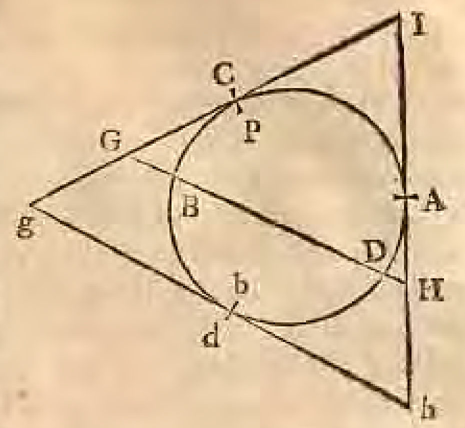
ad AI² æqualis rationi compositæ ex ratione rect. CGP ad rect. DGB & [illegible] BHD ad rect. PIC ideoque est HA ad AI ut √CGP × √BHD ad √DGB × √PIC, sed Radices quadratæ illorum Rectangulorum sunt ipsæ [illegible]

LIBER PRIMUS.

[illegible] proportionales inter illorum latera; [illegible] est HA ad AI ut est rect. sub media [illegible] inter CG & GP & media [illegible] inter BH & HD ad rect. sub [illegible] proportionali inter DG & GB & [illegible] proportionali inter PI & IC. Si [illegible] HI in A secetur in eâ ratione, [illegible] punctum contactus.

[illegible] Coroll. 1. Si ex punctis quibuslibet H & I rectæ HI sectionem conicam tangentis in A, agantur duæ quævis [illegible] IG, HG convenientes in G, & [illegible] conicam secantes in punctis [illegible] C, P, D, B; factum CGP × BHD, erit ad factum DGB × PIC, in [illegible] nempe in ratione HA², ad AI². Ducta enim linea HYX lineæ ICP [illegible], erit ut prius (per Lem. III. de Conic. p. 117.) DGB : BHD = CGP : [illegible] $= \frac{CGP \times BHD}{DGB}$, est verò HA² : AI² = HXY $\left(\frac{CGP \times BHD}{DGB}\right)$: PIC (per Cor. 3. ejusdem Lem.) ergo HA² : AI² = CGP × BHD : DGB × PIC.

Quod si linea HYX, extra sectionem [illegible] tangat, ex puncto quovis h [illegible] HAI, ducatur alia linea hyx lineæ ICP parallela quæ sectioni occurrat in x & y, & ducatur alia linea hdbg [illegible] HDBG Parallela ita ut sectioni occurrat in d & b, & lineæ PC in g, habebimus ut prius hA² : AI² = CgP × bhd : dgb × PIC. Sed cum ob parallelas GH, bh [illegible] (per Lemma 3um. de Con. p. 117.) CgP : dgb = CGP : DGB, & (per Cor. [illegible] ejusd. Lem.) sit hA² : bhd = HA² : BHD substitutis his ultimis rationibus loco priorum in proportione hA² : AI² = CgP × bhd : dgb × PIC fiet HA² : AI² = CGP × BHD : DGB × PIC ut [illegible]. Unde satis patet demonstrationem [illegible] universalem esse, quomodocumque rectæ GI, GH flectantur; adeóque [illegible] valere, ubi recta HX sectioni non occurrit.



321. Coroll. 2. Coeuntibus punctis C, P, recta IG fit tangens in C & GP = GC, CI = PI, adeóque CGP = GC², & PIC = CI²; unde in hoc casu HA² : AI² = GC² × BHD : CI² × DGB. Coeuntibus quoque punctis B & D, & secante GH, in tangentem gh, mutatâ erit hA² : AI² = gC² × dh² : CI² × gd², ac proinde hA : AI = gC × dh : CI × gd; & hA × CI × gd = AI × gC × dh. Quare si ducantur tres rectæ sectionem conicam tangentes & inter se concurrentes in punctis I, g, h, facta ex tribus tangentium partibus inter concursuum & contactuum puncta alternatim sumptis AI, Cg, dh, & Ah, IC, gd, sunt æqualia.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.

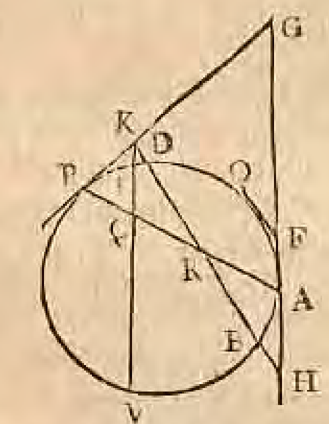
Dentur tangentes HI, KL & puncta B, C, D. Per punctorum duo quævis B, D age rectam infinitam BD tangentibus occurrentem in punctis HK. Deinde etiam per alia duo quævis C, D age infinitam CD tangentibus occurrentem in punctis I, L. Actas ita seca in R & S, ut sit HR ad KR ut est media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD; & IS ad LS ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL & LD. Seca autem pro lubitu vel inter puncta K & H, I & L, vel extra eadem; dein age RS secantem tangentes in A & P, & erunt A & P puncta contactuum. Nam si A & P supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum H, I, K, L quodvis I, in tangente alterutra HI situm, agatur recta IY tangenti alteri KL parallela, quæ occurrat curvæ in X & Y, & in ea sumatur IZ media proportionalis inter IX & IY, erit, ex conicis, (z) rectangulum XIY seu IZ *quad.* ad LP *quad.* ut rectangulum CID ad rectangulum CLD, id est (per constructionem) ut SI *quad.* ad SL *quad.* atque ideo IZ ad LP ut SI ad SL. Jacent ergo puncta S, P, Z

(z) *Erit ex Conicis rect. XIY ad LP² ut rect. CID ad rect. CLD.* Scilicet cum P supponatur punctum contactus alicubi in Tangente KL situm & cum linea IY sit (per const.) parallela Tangenti KL & [illegible] que secetur per lineam IL, illa in [illegible] hæc in L erit (per Lem. III. de Con. p. 117.) rect. partium Parallelæ IY [illegible]

Liber Primus.

in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in G, erit (ex conicis) rectangulum XIY seu IZ *quad.* ad IA *quad.* ut GP *quad.* ad GA *quad.* ideoque IZ ad IA ut GP ad GA. Jacent ergo puncta P, Z & A in unâ rectâ, ideoque puncta S, P & A sunt in unâ rectâ. Et (a) eodem argumento probabitur quod puncta R, P & A sunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum A & P in rectâ RS. Hisce autem inventis, trajectoria describetur ut in casu primo problematis superioris (b). *Q. E. F.*

In



[illegible] I ad curvæ puncta X & Y [illegible] ad Rectang. partium Parallelæ [illegible] intersectione L ad curvæ puncta [illegible] coeunt in uno P quia LP [illegible] Tangens, ideoque illud rectangulum est quadratum LP) sicut rect. CID, [illegible] CLD quia nempe hæc rectangula [illegible] partium lineæ secantis IL factis [illegible] angulæ Parallelæ correspondentia, [illegible] (per const.) $IZ^2 : LP^2 = SI^2 : SL^2$ [illegible] ideo $IZ : LP = SI : SL$, cum igitur [illegible] parallela LP (per const.) puncta S, P, Z jacent in unâ rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G, cum supponatur punctum contactus alicubi situm in [illegible] GA erit (per Cor. 2. ejusdem Lem. III. de Con. p. 118.) XIY (sive [illegible]) : $IA^2 = GP^2 : GA^2$ ideoque &c.

(a) *Eodem argumento probabitur puncta R, P & A, sunt in unâ rectâ,* [illegible] punctum K, agatur recta KV, tangenti GH, parallela, quæ occurrat curvæ in T & V, & in eâ sumatur KQ, media proportionalis inter KT & KV, cum [illegible] KH secet Parallelas KV & AH [illegible] (per Lem. III. de Con. p. 117.) [illegible] VKT (sive KQ^2) ad AH^2 sicut rect. BKD ad rect. BHD hoc est KR^2 ad HR^2 (per const.) adeóque [illegible] $KQ : AH = KR : RH$, quare puncta [illegible] R, & A erunt in eadem rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G erit (per [illegible] Lem. III. de Conic.) VKT (KQ^2) : $PK^2 = GA^2 : GP^2$ & $KQ : PK = GA : GP$, [illegible] erunt P, Q & A in eâdem rectâ, [illegible] P, R, & A in eâdem rectâ.

(b) 322. Coroll. 1. Hinc si duæ rectæ [illegible] HG, PG (vid. fig. Newt.) concurrentes in G, sectionem conicam tangant in A & P, junganturque AP & producatur, & ex punctis quibusvis I & H, in unâ tangentium GH, sumptis agantur ad idem sectionis conicæ punctum D, duæ rectæ ID, HD, quarum altera ID secet sectionem conicam in C, rectam AP in S, & tangentem GP in L, altera verò HD secet sectionem in B, rectam AP, in R, & tangentem GP, in K; erit semper $HR^2 : KR^2 = BHD : BKD$. & $IS^2 : LS^2 = CID : CLD$, quomodocumque inflectantur rectæ ID, HD, & tangentes GA, GP.

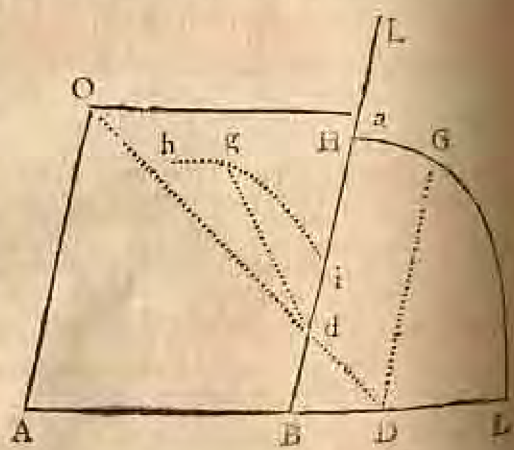
323. Coroll. 2. Si puncta D & C, coeant, (vid. fig. Newt.) ut ILS, tangens evadat in D, seu C, erit $CI = DI$, & $CL = DL$, adeóque $IS^2 : LS^2 = DI^2 : DL^2$, & $IS : LS = DI : DL$. h. e. si Tangens IL, terminata per duas alias Tangentes, secet in S lineam AB jungentem puncta contactus earum Tangentium, ejus partes à sectione S ad utramque Tangentem sumptæ, erunt inter se sicut ejus partes à puncto contactus ad easdem Tangentes terminatæ.

In hâc propositione, & casu secundo propositionis superioris constructiones eædem sunt, sive recta XY trajectoriam secet in X & Y, sive non secet; eæque non pendent ab hâc sectione. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam secat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultra demonstrandis brevitatis gratiâ non immoror.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ AO, BL tertiam quamvis positione datam AB secantes in A & B, & a figuræ puncto quovis G, ad rectam AB ducatur quævis GD, ipsi OA parallela. Deinde à puncto aliquo O, in linea OA dato, ad punctum D ducatur recta OD, ipsi BL occurrens in d, & à puncto occursûs erigatur recta dg datum quemvis angulum cum rectâ BL continens, atque eam habens rationem ad Od quam habet DG ad OD; & erit g punctum in figurâ novâ hgi puncto G respondens. Eâdem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratiâ nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; AD abscissam primam,



mam,

mam, ad abscissam novam; O polum, OD radium abscindentem, OA radium ordinatum primum, & Oa (quo parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.

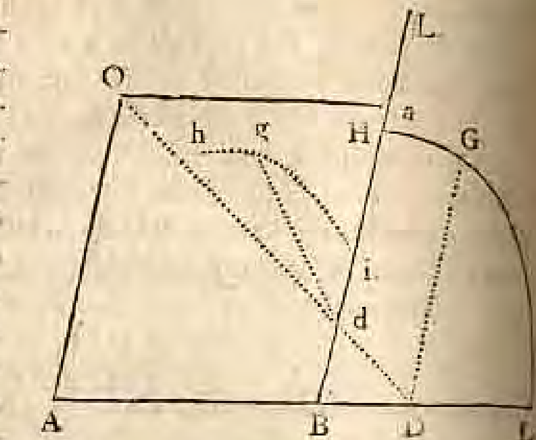
Dico jam quod, si punctum G tangit rectam lineam positione datam, punctum g tanget etiam lineam rectam positione datam. Si punctum G tangit conicam sectionem, punctum g tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annumero. Porro si punctum G tangit lineam (c) tertii ordinis analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis analytici quas puncta G, g tangunt. (d) Etenim ut est ad ad OA ita sunt Od ad OD, dg ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum G tangit rectam lineam, atque adeo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abscissam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hâc æquatione

OA

(c) 324. Newtonus lineas geometricas in ordines analyticos distinguit secundum numerum dimensionum æquationis qua relatio inter ordinatas & abscissas definitur, vel (quod perinde est) secundum numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ secari possunt; tot enim dimensiones habet æquatio ad curvam quot possunt esse ... curvæ & rectæ intersectiones; nam ... intersectiones illæ seorsim quærantur, ... eadem est omnium lex & conditio, ... idem erit calculus in casu unoquoque ... proptereà eadem semper conclusio, quæ ... debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere, adeóque tot esse debent æquationis radices ac ... dimensiones quot sunt intersectiones. Hinc linea primi ordinis erit recta ..., lineæ secundi sive quadratici ordinis erunt sectiones conicæ & circulus, & ... tertii sive cubici ordinis parabola cubica, parabola Neiliana, Cissois veterum & aliæ. Cum autem recta inter curvas non sit numeranda, curva primi generis eadem est cum lineâ secundi ordinis, & curva secundi generis eadem cum lineâ tertii ordinis, & linea ordinis infinitesimi ea est quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est spiralis, cyclois, quadratrix & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

(d) 325. Etenim ob similia triangula adO, AOD, $ad : OA = Od : OD$, (& per constr.) $Od : OD = dg : DG$, & ob rectas AO, Bd parallelas $Od : OD = AB : AD$; unde $ad : OA = dg : DG = AB : AD$, atque adeò $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, & $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Sit $OA = a$, $AB = b$, $AD = x$, $DG = y$, $ad = z$, $dg = u$, & erit $x = \frac{ba}{z}$, $y = \frac{au}{z}$.

De Motu Corporum. $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, (e) producetur æquatio nova, in qua abſciſſa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimenſionem aſcendent, atque ideo quæ deſignat lineam rectam. (f) Sin AD & DG, vel earum alterutra, aſcendebant ad duas dimenſiones in æquatione primâ, aſcendent itidem ad & dg ad duas in æquatione ſecundâ. Et (g) ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus. Indeterminatæ ad, dg in æquatione ſecundâ, & AD, DG in primâ aſcendent ſemper ad eundem dimenſionum numerum, & propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt ſunt ejuſdem ordinis analytici.



Dico

(e) * Sit GI, recta poſitione data & ad illam æquatio quævis $cx + dy + ef = o$, in qua $+$, ſignificat vel $+$, vel $-$ loco x & y, ſubſtituantur eorum valores (325) $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$ & producetur $\frac{cba}{z} + \frac{dau}{z} + ef = o$, hoc eſt, reductione ad communem denominatorem factâ $cba, + dau + efz = o$ æquatio nova unius dimenſionis ad rectam lineam g i.

(f) * Sit G I, ſectio conica & ad illam æquatio generalis, $cxx + dyy + exy + g^2x + m^2y + n^3 = o$, loco x, y, ſubſtituantur $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$, & prodibit æquatio nova ad conicam ſectionem $\frac{cb^2a^2}{z^2} + \frac{da^2u^2}{z^2} + \frac{eba^2u}{z^2} + \frac{bag^2}{z} + \frac{m^2au}{z} + n^3 = o$, hoc eſt, reductione factâ, $cb^2a^2 + da^2u^2 + eba^2u + bag^2z + m^2auz + n^3z^2 = o$.

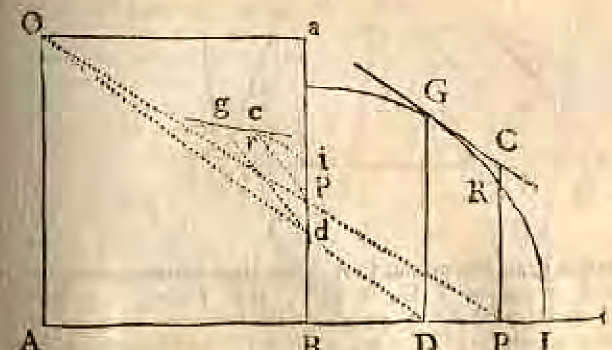
(g) * *Et ſic de tribus vel pluribus dimenſionibus*, nam ſi in ſerie $1, x, x^2, x^3, x^4$ &c. loco x, & dignitatum ejus ſubſtituantur $\frac{1}{z}$, & ipſius dignitates prodibit ſeries nova $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}, \frac{1}{z^4}$ &c. & reductione ad communem denominatorem factâ habebitur $\frac{z^4, z^3, z^2, z^1}{z^4}$. Similiter & in ſerie y, y^2, y^3, y^4 &c. loco y, ſubſtituatur $\frac{u}{z}$, prodibit ſeries nova $\frac{u}{z}, \frac{u^2}{z^2}, \frac{u^3}{z^3}, \frac{u^4}{z^4}$ &c. & per reductionem ad denominatorem communem $\frac{uz^3, u^2z^2, u^3z, u^4}{z^4}$ iiſdem x & y valoribus ſubſtitutis in [illegible] factorum x, y, xy^2, xy^3 &c. & [illegible] x^3y &c. & reductione ad communem denominatorem z^4 factâ, habebuntur [illegible] $\frac{z^2u, zu^2, zu^3}{z^4}$, & $\frac{zu, u}{z^4}$. Porro [illegible] æquatio omnis ex hujuſmodi dignitatibus & factis compoſita eſt, & abjici poteſt [illegible] communis omnium terminorum denominator qui hic eſt z^4, ergò hujuſmodi ſubſtitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonſtrari poſſunt ex eo quod ſi linea recta curvam HGI, ſecet in quotlibet punctis, eadem recta tranſlata curvam hgi in totidem punctis interſecare debeat, quoniam ſingulæ nec plures interſectiones in novam figuram transferuntur.

Liber Primus.

(h) Dico præterea, quod ſi recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta eodem modo cum curvâ in figuram novam tranſlata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; & contra. Nam ſi curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figurâ primâ, puncta eadem tranſlata accedent ad invicem & coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, ſimul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi poſſent harum aſſertionum demonſtrationes more magis geometrico. Sed brevitati conſulo.

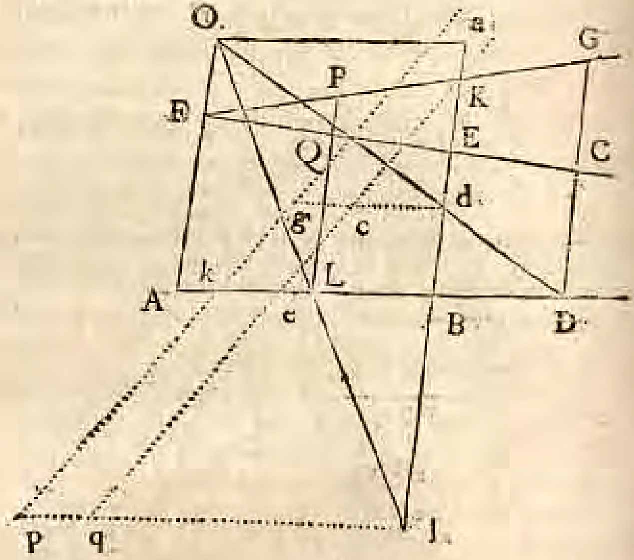
Igitur



(h) 326. Recta G C curvam G I tangat in G, transferatur punctum G, in g, & ductâ P C parallelâ D G, quæ curvam occurrat in R & tangenti in C; transferatur punctum C, in c, faciendo ut OP : PC = Op : pc parallelam d g, & recta gc, quæ puncta g, & c, jungit, novam curvam gi, tanget in g; nam accedat PC, ad DG, & accedat correſpondens pc, ad dg, & punctis C, R, G, coeuntibus, coibunt in figurâ novâ puncta c, r, g, adeoque linea g c, poſitione coincidit cum chordâ evaneſcente g r, hoc eſt cum tangente in g. Idem aliâ ratione poteſt demonſtrari; quoniam enim PC : pc = PO : po = PR : pr, & proinde PC : PR = pc : pr, ergo punctum c, non eſt in curvâ g i, niſi cum C reperitur in curvâ G I, hoc eſt, niſi C & G coeant.

327.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, à quibus conflatur, intersectiones transferre, & per easdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, & lineæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam (i) rectæ quævis convergentes



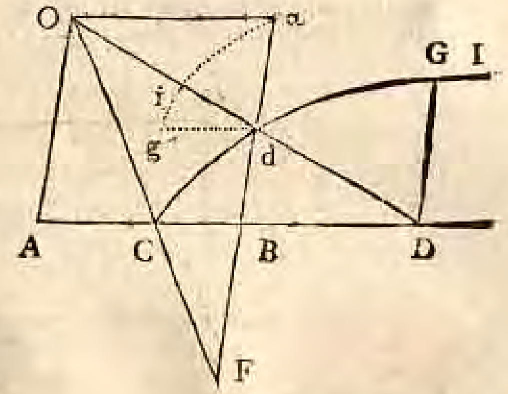
(i) 327. Radius ordinatus primus O A, per concursum F rectarum F G, F C transeat, ductâ G D radio O A parallelâ, transferantur puncta G, C, in g, c, & puncta K, E, in k, e, rectæ k g, e c, erunt parallelæ; nam ducta intelligatur O L radio O A infinitè proxima, & rectas A D, A B secans in L & l, & actâ L Q P radio O A, parallelâ, puncta P, Q in p, q, translata concipiantur, & erit O L : O l = P L : p l = Q L : q l, coeuntibus verò punctis P, Q, F erit O l infinita & Q L = F A = P L, adeóque p l = q l. Punctum igitur concursus F ad distantiam infinitam transfertur, & lineæ g p, c q, ad illud convergentes sunt parallelæ.

328. Coroll. 1. Puncta K & E, seu intersectiones linearum F G, F C cum a B, transferuntur capiendo in novâ ordinatâ B k = B K, B e = B E; est enim (per constr.) B K : B O = B k : B O. & B E : B O = B e : B O.

329. Coroll. 2. Si punctum F, cum puncto A, coincidat, erunt g k, c e, rectæ O A, a B parallelæ; nam ob parallelas B K, D G, A O & (per constr.) A B : A D = O d : O D = d g : D G, & coeuntibus punctis F, A, A B : A D = B K (B k) : D G, adeóque d g : D G = B k : D G, ac proindè B k = d g, undè g k lineæ B d est parallela.

gentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, (k) habebitur solutio quæsita.

(l) Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsin: deinde ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item & sectio conica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.



330. Coroll. 3. Si recta linea F G, parallela cum A D, transformabitur in rectam coincidentem cum a B, nam punctum D, transfertur in d, punctum L, in l.

(k) 331. (Vide fig. Newt. pag. 218.) Figura lgi data in figuram primam H G I, transformatur, faciendo ut O d, ad d g, ita O D, ad D G, parallelam radio O A.

(l) 332. Sit curva C G I, parabola cujus diameter C D, diametri vertex C, ordinata G D radio ordinato primo A O parallela, latus rectum l, sitque O A $= a$, A B $= b$, A C $= c$, A D $= x$, C D $= x - c$, G D $= y$, nova abscissa, a d $= z$, nova ordinata g d $= u$, erit ex naturâ parabolæ $lx - lc = yy$, & substitutis pro x, & y, eorum valoribus $\frac{ba}{z}$, $\frac{bu}{z}$ (325) producitur æquatio nova ad novam curvam g i, $\frac{lba}{z} - lc = \frac{b^2u^2}{z^2}$, hoc est, reductione factâ, $b^2u^2 - lbaz + lcz^2 = 0$, æquatio ad Ellipsim cujus diameter a F $= \frac{ba}{c}$, latus rectum $= \frac{la}{b}$, nam $\frac{baz}{c} - z^2 : u^2 = \frac{ba}{c} : \frac{la}{b}$.

Si nova ordinata g d, ponatur ad abscissam a d, perpendicularis, & præterea fiat $lc = b^2$, sive $l \times$ A C $=$ A B^2 superior ad Ellipsim æquatio in hanc mutabitur $u^2 - \frac{baz}{c} + zz = 0$, quæ est ad circulum cujus diameter $\frac{ba}{c}$, ex tribus autem rectis a, b, c, binæ a & b, vel a & c, possunt ad arbitrium assumi, & tertia deterterminatur per æquationem $lc = bb$, in circulo.

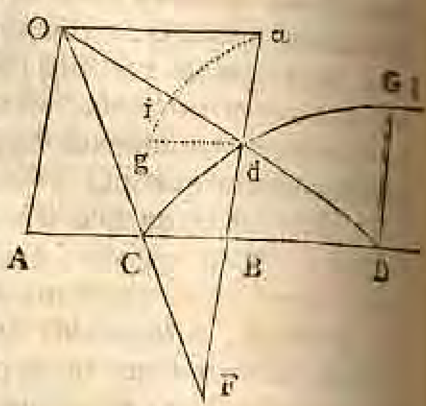
Si vertex C cum puncto A coeat, hoc est, si $AC = c = o$ æquatio ad novam curvam erit $b^2u^2 - lbaz = o$, hoc est, curva g i, erit parabola; & eodem modo invenitur Ellipsim & Hyperbolam atque adeò Sectiones omnes conicas in parabolam transformari, dum diametri A D radio O a parallelæ vertex C coincidit cum puncto A radii ordinati primi O A ordinatis ad diametrum paralleli.

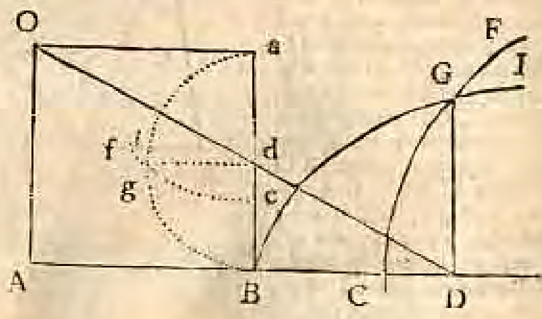
Si parabolæ vertex C cum puncto B coeat, erit $b = c$, adeóque Ellipsis vel circuli g i diameter $\frac{ba}{c}$, erit $a = OA = aB$.

Si curva C G I, fuerit hyperbola cujus sit diameter d, latus rectum l, manentibus cæteris denominationibus ut suprà, erit ex naturâ hyperbolæ $dy^2 = lx^2 - 2clx + dlx - ldc + lcc$, & substitutis loco x & y, eorum valoribus & reductione ad communem denominatorem factâ producetur.

$$db^2u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2a^2 = o$$
$$- dlbaz - lc^2z^2$$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipsim prout assumitur linea c, æqualis vel major vel minor diametro d. Ellipsis autem in circulum abit posito $ldc - lc^2 = db^2$, & angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eâdem ratione transformatur Ellipsis.





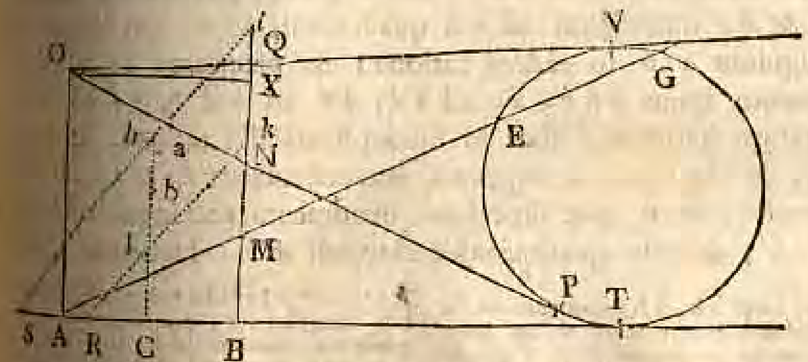
333. His præmissis facilè intelligitur hujus lemmatis usus in solidorum aut etiam planorum problematum solutione. Nam sit quærenda intersectio G conicæ sectionis B G I cum alterâ sectione conicâ aut rectâ lineâ C G F positione datâ. transformetur (332.) sectio conica B G I in circulum B G a, & linea C G F, in lineam c g f, tum ex puncto intersectionis g, circuli B g a, & lineæ c g f, demittatur ad a B nova ordinata sive perpendicularis g d, & per punctum d, agatur radius abscindens O d D secans rectam A B in D, denique per D agatur G D radio ordinato primo O A parallela quæ sit ad O D ut g d, ad O d, & erit G punctum intersectionis quæsitum. Cum enim in puncto intersectionis duarum linearum B G I, C G F, communis sit ordinata G D manifestum est intersectionem illam transformari in intersectionem linearum B g a, c g f, & vice versâ (33?).

PRO-

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, & rectas tres continget positione datas.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. ([m]) In hâc figura tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tan-

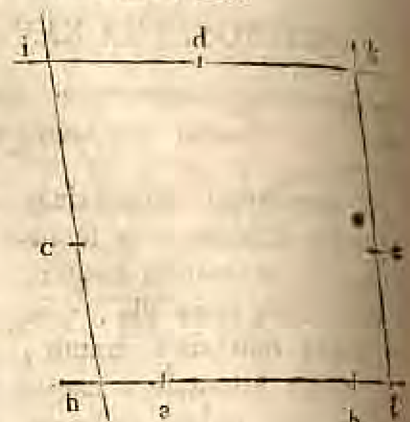


(m) 334. Sit O, concursus tangentium duarum OV, OP, A concursus tangentis tertiæ AT, cum rectâ AG, quæ per puncta duo E, G, data transit, age rectam infinitam OA, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, & OX parallelâ AT, pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod facillimum est, si ordinatæ novæ parallelæ ducantur radio ordinato novo OX, nam recta AT transformatur in rectam BXi (3?c), recta AG in rectam Ch ipsi OX parallelam (329) & punctum illius C, reperitur, capiendo $BC = BM$ (328), rectæ OV, OP transmutantur in rectas parallelas Rk, Si, (327); earumque puncta R, S, habentur capiendo $BR = BN$, $BS = BQ$, & alia puncta duo (per Lem. XXII.) facile reperiuntur. Puncta E, & G, transferantur in b, & a, & productis lineis parallelis Bi & Ch, Rk, & Si, donec sibi mutuò occurrant, compleatur parallelogrammum Ihik, & nova sectio conica transibit per puncta b, & a, & tangetur à rectis tribus hi, Ik, ki (326).

* Inter

DE MOTU CORPORUM.

gens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data tranſeunti. Sunto hi, kl tangentes illæ duæ parallelæ, ik tangens tertia, & hl recta huic parallela tranſiens per puncta illa a, b, per quæ conica ſectio in hâc figurâ novâ tranſire debet, & parallelogrammum $hikl$ complens. (n) Secentur rectæ hi, ik, kl in c, d, e, ita ut ſit hc ad latus quadratum rectanguli ahb, ic ad id, & ke ad kd ut eſt ſumma rectarum hi & kl ad ſummam trium linearum, quarum prima eſt recta ik, alteræ duæ ſunt latera quadrata rectangulorum ahb & alb: & erunt c, d, e puncta contactuum. Etenim, ex conicis, ſunt hc quadratum ad rectangulum ahb, & ic quadratum ad id quadratum, & ke quadratum ad kd quadratum, & el quadratum ad rectangulum alb in eâdem ratione; & propterea hc ad latus quadratum ipſius ahb, ic ad id, ke ad kd & el ad latus quadratum ipſius alb ſunt in ſubduplicatâ illâ ratione, & compoſitè, in datâ ratione omnium antecedentium hi & kl ad omnes conſequentes, quæ ſunt latus quadratum rectanguli ahb, & recta ik, & latus quadratum rectanguli alb. Habentur igitur

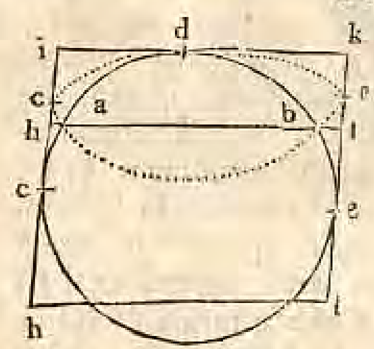


* (n) Inter ah, hb, quæratur media proportionalis quæ dicatur M, & inter al, lb, media proportionalis N; & deinde ita ſecentur rectæ hi, ik, kl, in c, d, e, ut ſit hc, ad M, ic, ad id, & ke ad kd, ut eſt $hi + kl$, ad $ik + M + N$, & erunt c, d, e, puncta contactuum; Etenim ſi fuerint c, d, e, puncta contactuum, ob hl parallelam tangenti ik, quæ cum alterâ tangente hi, concurrit in i, erit (per prop. 16. & 18. lib. 3. conic. Apoll. ſive per Corol. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2$, & ob. hi, occurrentem ſectioni in ſolo puncto c, & parallelam tangenti lk, quæ alteri tangenti ik occurrit in k, erit (per eaſdem prop. Apoll.) $ic \times ic$ ($= ic^2$) $: id^2 = ke^2 : kd^2$, & ob. hl, parallelam tangenti ik, quæ cum alterâ tangente lk, convenit in k, erit (per eadem prop. Apoll.) $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, adeóque $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, & propterea $hc : \sqrt{ah \times hb}\,(M) = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al \times lb}\,(N)$, & compoſitè ſumma omnium antecedentium eſt ad ſummam omnium conſequentium ut quilibet antecedens ad ſuum conſequentem, hoc eſt $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc + ic + ke + el\ (hi + kl) : M + id + kd + N\ (ik + M + N)$. Habentur igitur (per conſtr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e, in figurâ novâ per inverſas operationes (331).

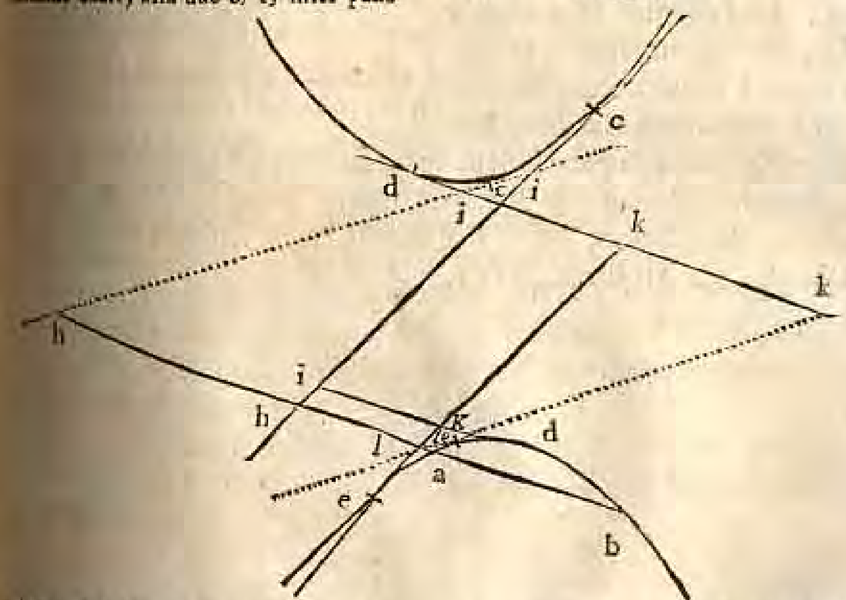
LIBER PRIMUS.

ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e, in figura nova. Per inverſas operationes lemmatis noviſſimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per prob. XIV.) deſcribetur trajectoria. Q. E. F. (o) Cæterum perinde ut puncta a, b jacent vel inter puncta h, l, vel extra, debent puncta c, d, e vel inter puncta h, i, k, l capi, vel extra. Si punctorum a, b alterutrum cadit inter puncta h, l, & alterum extra, problema impoſſibile eſt.

PRO-



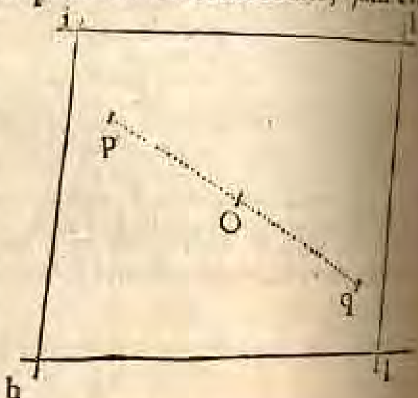
(o) 335. Quoniam duæ parallelæ hi, [illegible] neque parabolam, neque hyperbolam ſimplicem contingere poſſunt, tangunt hyperbolas oppoſitas vel ellipſim, circulo inter ellipſes annumerato. Porrò ellipſis tota inter tangentes parallelas, & hyperbolæ oppoſitæ totæ extra eaſdem [illegible], quare in Ellipſi puncta a, b, inter puncta h, l, ſita ſunt; in hyperbolis extra, atque adeò ſi punctorum a, b, alterutrum cadit inter puncta h, l & alterum extra, problema impoſſibile eſt. In Ellipſi punctum contactûs d, inter puncta i, k, [illegible] cadit; alia duo c, e, inter puncta h, i, & k, l, vel aliquandò extrà eſſe poſſunt; in hyperbolis oppoſitis contactuum puncta duo ut c, d, extrà puncta [illegible] k, l, neceſſariò poſita ſunt, tertium ut e, vel extrà vel intra eſſe poteſt, undè præſcribit Newtonus ut puncta c, d, e, vel inter puncta h, i, k, l, vel extrà capiantur, perindè ut puncta a, b, jacent vel inter puncta h, l, vel extrà.



PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura (per lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ hi & kl, ik & hl continentes parallelogrammum $hikl$. Sitque p punctum in hâc novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. (P) Per figuræ centrum O agatur pq, & existente Oq aquali Op, erit q punctum alterum per quod sectio conica in hâc figurâ novâ transire debet. Per lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*



LEM-

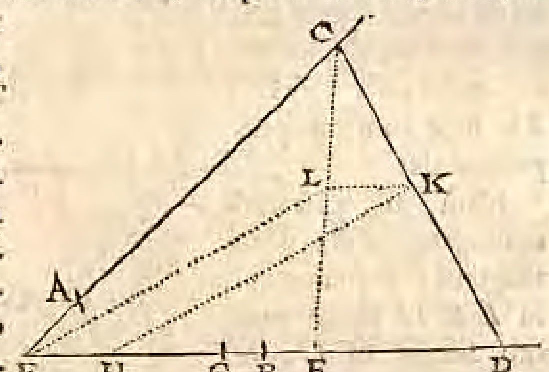
(p) 336. Parallelogrammi h, i, k, l, sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis centro O, se mutuò intersecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum puncta jungunt, sunt sectionis diametri centro O bisectæ (per prop. 27. & 31. Lib. I. conic. Apoll. utque sequitur ex Lem. IV. de Conic. p. 119).

* Vid.

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ A C, B D *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta* C D, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione datâ in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in rectâ positione datâ.*

(q) Concurrant enim rectæ AC, BD in E, & in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC, sitque FD semper æqualis datæ EG; & erit ex constructione EC ad GD, hoc est, ad EF ut AC ad BD, ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur specie triangulum EFC. Secetur CF in L ut sit CL ad CF in ratione CK ad CD; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum EFL; proindeque punctum L locabitur in rectâ EL positione datâ. Junge LK, & similia erunt triangula CLK, CFD; & ob datam FD & datam rationem LK ad FD dabitur LK. Huic æqualis capiatur EH, & erit semper $ELKH$ parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK. *Q. E. D.*



Corol. Ob datam specie figuram $EFLC$, rectæ tres EF, EL & EC, id est GD, HK & EC, datas habent rationes ad invicem.

L E M-

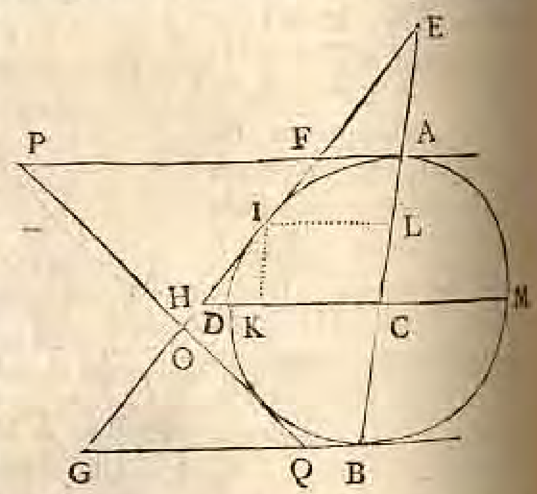
(q) * Vid. not. 67. pag. 39.

* Erit

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque coni ſectionem, quarum duæ parallelæ ſint ac dentur poſitione; dico quod ſectionis ſemidiameter hiſce duabus parallela, ſit media proportionalis inter harum ſegmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ coni ſectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia coni ſectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; ſitque *CD* ſemidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quod *AF*, *CD*, *BG* ſunt continuè proportionales.



Nam ſi diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H* ſeque mutuo ſecent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; [r] erit ex naturâ ſectionum conicarum ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *CL*, & ita diviſim *EC*−*CA* ad *CA*−*CL*, ſeu *EA* ad *AL*, & compoſitè *EA* ad *EA*+*AL* ſeu *EL* ut *EC* ad *EC*+*CA* ſeu *EB*; ideoque, ob ſimilitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*, *AF* ad *LI* ut *CH* ad *BG*. Eſt itidem, ex naturâ ſectionum conicarum, *LI* ſeu *CK* ad *CD* ut *CD* ad *CH*; [s] atque ideo ex æquo perturbatè *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q. E. D.*

(r) * *Erit ex naturâ ſectionum conicarum &c.* (per prop. 37. 38. Lib. 1. conic. Apoll. vide cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.).

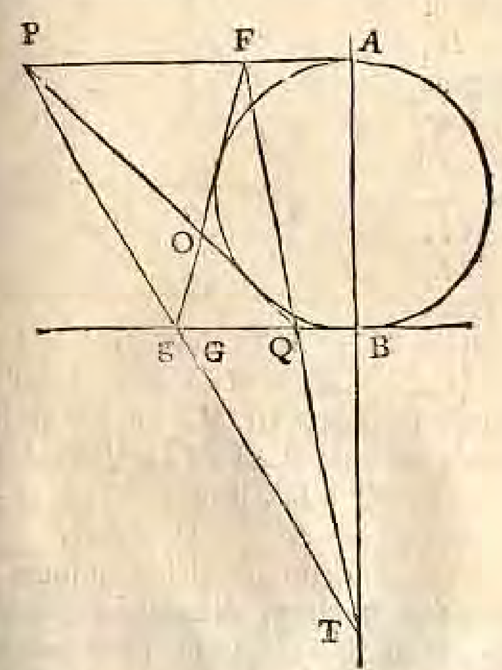
(s) * Cum ſit EA : EL = EC : EB, & ob ſimilitudinem triangulorum EAF, EIL ſit EA : EL = AF : LI, ſeu CK, & ob ſimilitudinem triangulorum ECH, EBG, EC : EB = CH : BG, erit AF : CK = CH : BG, & quia (ex conic. loco citato) CK : CD = CD : CH, erit AF × CK : CK × CD = CH × CD : BG × CH, hoc eſt, AF : CD = CD : BG.

Corol. 1. Hinc ſi tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, ſeque mutuo ſecent in *O*; erit ex æquo perturbatè *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, [t] & diviſim ut *FP* ad *GQ*, atque ideo ut *FO* ad *OG*.

Corol. 2. [u] Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ*, per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum figuræ & puncta contactuum *A*, *B* tranſeuntem.

LEM-

(t) * Eſt enim AF : CD = CD : BG, & ſimiliter BQ : CD = CD : AP, ſeu CD : BQ = AP : CD, adeóque AF × CD : CD × BQ = CD × AP : BG × CD, hoc eſt AF : BQ = AP : BG = AP − AF : BG − BQ = FP : GQ = FO : OG, ob ſimilia triangula FOP, GOQ.

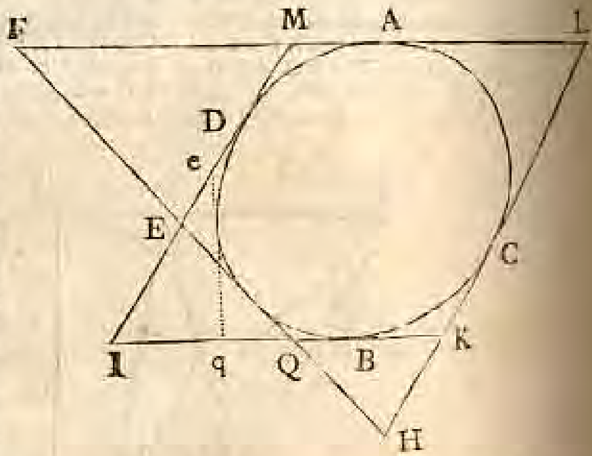


(u) * Agatur enim recta FQ, ipſi AB occurrens in T, & jungatur PT, rectam BG, ſecans in g, erit AF : BQ = AT : BT = AP : Bg, ſed per coroll. 1. AF : BQ = AP : BG, eſt igitur BG = Bg ac proinde punctum g, cum G coincidit.

* Nam

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant ſectionem quamcunque conicam, & abſcindantur ad tangentem quamvis quintam; ſumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abſciſſæ terminatæ ad angulos oppoſitos parallelogrammi: dico quod abſciſſa alterutra ſit ad latus illud à quo eſt abſciſſa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium eſt ad abſciſſarum alteram.



Tangant parallelogrammi $MLIK$ latera quatuor ML, IK, KL, MI ſectionem conicam in A, B, C, D, & ſecet tangens quinta FQ hæc latera in F, Q, H & E; ſumantur autem laterum MI, KI abſciſſæ ME, KQ, vel laterum KL, ML, abſciſſæ KH, MF: dico quod ſit ME ad MI ut BK ad KQ; & KH ad KL ut AM ad MF. Nam per corollarium primum lemmatis ſuperioris eſt ME ad EI ut AM ſeu BK ad BQ, & componendo ME ad MI ut BK ad KQ. *Q. E. D.* Item KH ad HL ut (x) BK ſeu AM ad AF, & dividendo KH ad KL ut AM ad MF. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi datur parallelogrammum $IKLM$, circa datam ſectionem conicam deſcriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$. Æquantur enim rectangula illa ob ſimilitudinem triangulorum KQH, MFE.

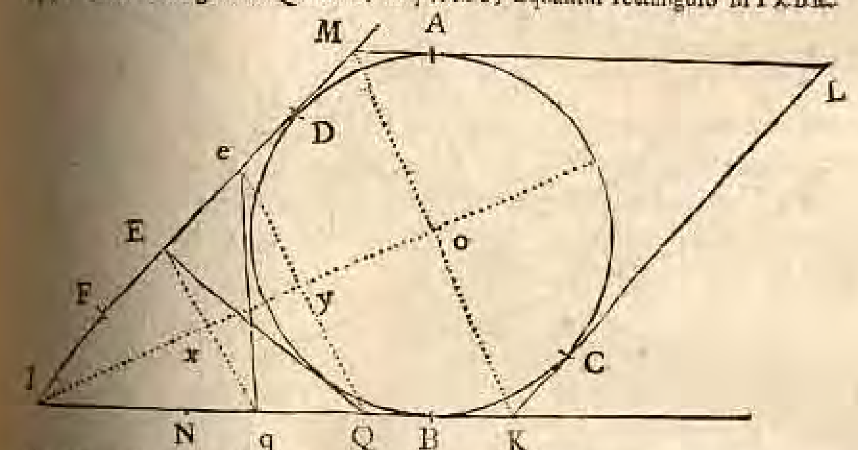
(x) * Nam ſi puncta contactuum A, & B, rectâ jungantur, hæc tranſibit per centrum commune ſectionis conicæ & parallelogrammi; (336) adeóque erit AM = BK.

Corol. 2. Et ſi ſexta ducatur tangens eq tangentibus KI, MI occurrens in q & e; (y) rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque KQ ad Me ut Kq ad ME, & diviſim ut Qq ad Ee.

Corol. 3. Unde etiam ſi Eq, eQ jungantur & biſecentur, & recta per puncta biſectionum agatur, tranſibit hæc per centrum ſectionis conicæ. Nam cum ſit Qq ad Ee ut KQ ad Me, tranſibit eadem recta per medium omnium Eq, eQ, MK (z) (per lem. XXIII.) & medium rectæ MK eſt centrum ſectionis. (a)

PRO-

(y) * Nam rectangula K Q × M E, K q × M e, æquantur rectangulo M I × BK.



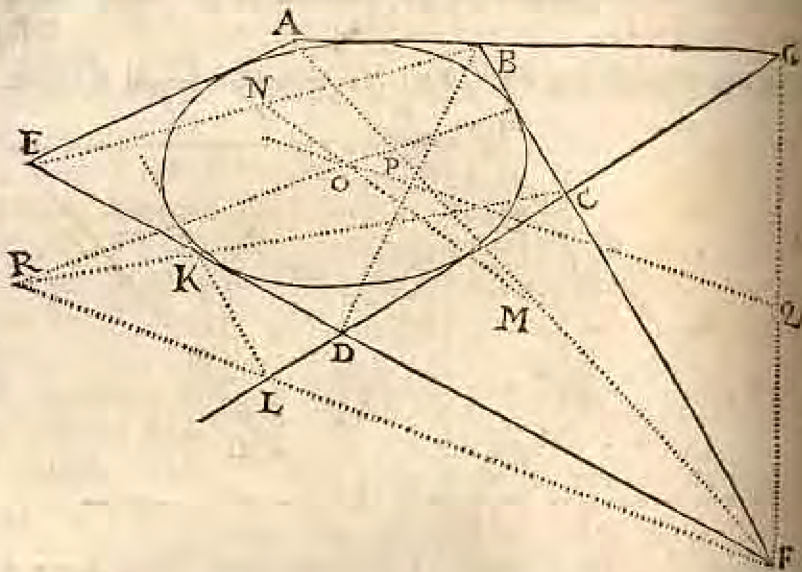
(z) * In rectis I M, I K, poſitione datis ... qN, ad E F, ut eſt q Q, ad ..., & puncta N, F, tanquam data ſeu ... conſiderentur, & erit N q : F E = q Q : ... = Q K : e M; & compoſite, N q : F E = N Q : F e = N K : F M; quare ſi rectæ ..., e Q, M K, quibus puncta indeterminata E, & q, E, Q, M & K junguntur, ſecentur in ratione datâ in x, y, ... puncta omnia x, y, o, locantur in ... eâdemque rectâ x y. (per Lem. XXIII). ... itaque recta x y, lineas E q, e Q, biſecat, rectam M K biſecabit, adeóque (1°) per centrum ſectionis conicæ tranſibit.

(a) Hinc ſi lineæ quatuor ut E D, ..., E Q, Q B ſectionem Conicam tangant & ſibi mutuò occurrant in punctis ..., Q jungantúrque puncta oppoſita ..., Q & E, q, bifariamque dividantur ... e Q, E q, linea eas biſecans erit locus centri figuræ: Idque ſemper verum erit quamcumque figuram faciant lineæ E D, e q, E Q, Q B ſive ſeſe decuſſent ſive Trapezium conſtituant, Concipiatur illas Diametros duci quarum vertex eſt in puncto contactûs harum linearum donec occurrant curvæ altero ſuo vertice, Tangentes in eo vertice ductæ erunt parallelæ prioribus: Dabuntur ergo Parallelæ duabus lineis E D, Q B, quæ erunt Tangentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemmatis Hypotheſi Parallelogrammum MIKL conſtans quatuor Tangentibus quarum oppoſitæ erunt inter ſe Parallelæ, & Tangentes E Q & e q conſiderari poterunt ut quinta & ſexta Tangens de quibus agitur in hoc Lemmate, ideoque per ejus corollarium 3. *ſi biſecentur lineæ E q e Q & recta per biſectionum puncta agatur tranſibit hæc per centrum Sectionis Conicæ, &c.*

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas continget.



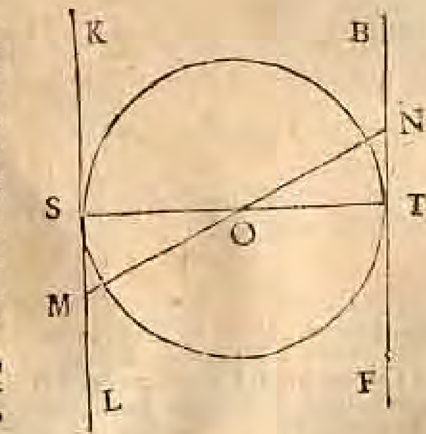
Dentur positione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$ diagonales AF, BE biseca in M & N, & (per corol. 3. lem. xxv.) recta MN per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ $BGDF$, sub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD, GF biseca in P & Q: & recta PQ per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo

LIBER PRIMUS.

centrum in concursu bisecantium. Sit illud O. (b) Tangenti cuivis BC parallelam age KL, ad eam distantiam ut centrum in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas GCD, FDE in L & K. Per harum tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concursus C & K, F & L age CK, FL concurrentes in R, & recta OR ducta & producta secabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2. lem. XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per construct. prob. XIV. trajectoriam describere. $Q. E. F.$

Scholium.

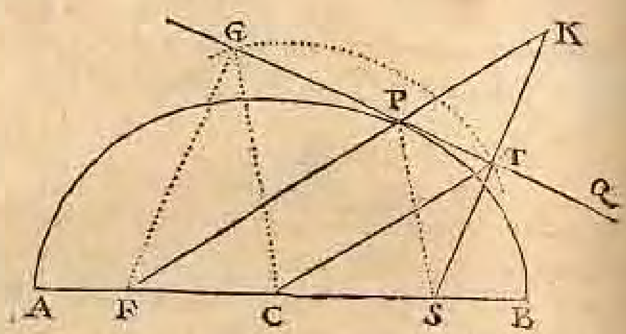
Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. (c) Nam datis punctis & tangentibus unà cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes à centro ex alterâ parte æqualiter distantes. Asymp-

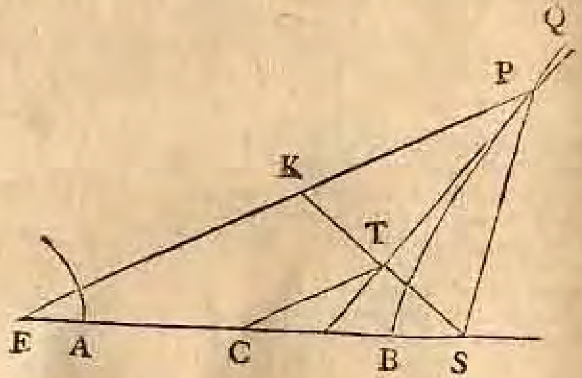


(b) 337. Datis sectionis conicæ centro O, & tangente quavis B F, altera tangens L K datæ parallela facile invenitur; nam per centrum O ducatur recta quævis infinita M O N tangenti datæ occurrens in N, & sumptâ O M = O N per M ducatur M K tangenti datæ F B parallela, erit M K tangens; si enim per punctum contactus T & centrum O agatur secunda diameter T O S, erit S O = O T & tangens in S tangenti in T parallela, rectam N O M ita secabit in M, ut sit M O = O N, ob, S O : O T = M O : O N.

(c) 338. Hinc datis præter centrum tribus tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus & puncto, vel tangente & punctis duobus, vel punctis tribus, dantur sex tangentes, vel tangentes quatuor & puncta duo, vel tangens & puncta quatuor, vel puncta sex, quibus data trajectoria describi potest per prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro, alterutro axe, & duabus tangentibus non parallelis, vel tangente & puncto trajectoriæ Ellipticæ & Hyperbolicæ ex lemmatis sequentibus facilè describuntur.

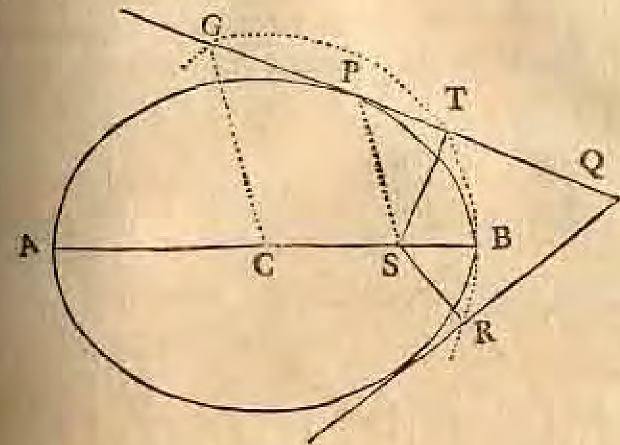
Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinitè distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atque constructiones problematum præcedentium vertentur in constructiones ubi Asymptotos datur.





339. Lemma. Si ex sectionis conicæ umbilico utrovis S demittantur ad tangentem PQ normales ST, FG, rectæ CT, CG centrum sectionis C & puncta intersectionum T, G jungentes æquales erunt semiaxi principali CB, & parallelæ lineis FP, SP ex altero umbilico F & S ad punctum contactûs P ductæ. Producantur enim FP, ST, donec concurrant in K, & erit (per Lem. XV. Newt.) $FK = 2CB$, $KT = TS$, cumque sit etiam $FC = CS$, erit $ST : SK = SC : SF$, & ideo quia latera SK SF secantur proportionaliter in T & C erit CT parallela FK sive FP, ideoque erit $ST : SK = CT : FK$ & quia $ST = \frac{1}{2} SK$ erit CT æqualis $\frac{1}{2}$ FK, seu æqualis CB. Eodem modo probabitur, CG esse æqualem CB & parallelam lineæ PS.

340.

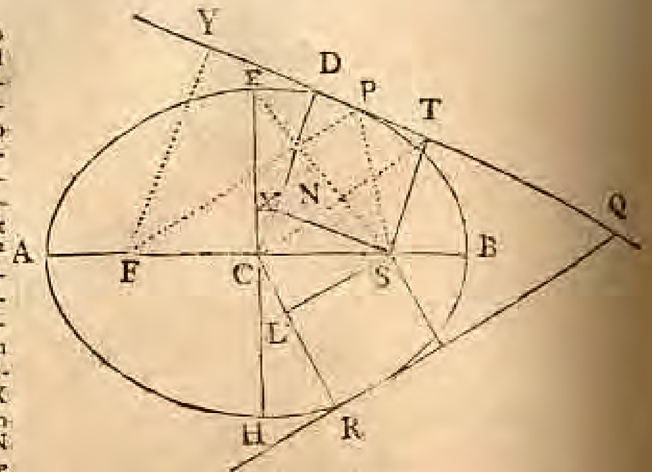


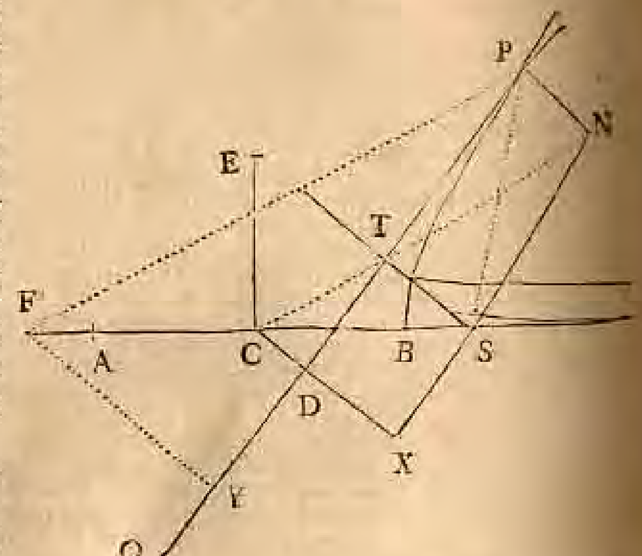
340. Datis centro C, duabus tangentibus PQ, RQ convergentibus & axe principali AB, describitur sectio conica. Nam si centro C & intervallo CB æquali semiaxi principali describatur circulus tangentes secans in T & R, agantur tangentibus perpendiculares TS, RS, concurrentes in S, erit punctum S, alteruter umbilicus quo dato cum centro C, datur positio axis principalis CB, & ipsa longitudo ac umbilici duo.

341. Datis centro C, tangente PQ & puncto contactûs P, cum axe principali, trajectoria conica describitur. Centro enim C, & intervallo æquali semiaxi principali describatur circulus tangentem secans in T & G; in T excitetur perpendiculum TS, & junctâ CG, per punctum contactûs ducatur PS ipsi CG parallela perpendiculo TS occurrens in S, erit S umbilicus (339).

342. Si

342. Si ex centro C sectionis conicæ ad tangentem PQ, demittatur perpendicularis CD, & ex altero umbilico S ad CD agatur normalis SX, sitque CE semiaxis minùs principalis, erit in ellipsi $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 = CD^2 + CE^2$, & demissâ ex umbilico in tangentem perpendiculari ST, junctâque CT, rectam SX secante in N, erit in utrâque sectione XN æqualis DP distantiæ puncti contactûs P à perpendiculari CD; Nam in Ellipsi $CS^2 = CT^2\ (CB^2) - CE^2$, in Hyperbolâ $CS^2 = CT^2 + CE^2$, & in utrâque sectione $CS^2 = CX^2 + SX^2 = CX^2 + DT^2$; Ergò in Ellipsi $CX^2 + DT^2 = CT^2 - CE^2 = CD^2 + DT^2 - CE^2$, & hinc $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 + DT^2 = CT^2 + CE^2 = CD^2 + DT^2 + CE^2$, adeòque $CX^2 = CD^2 + CE^2$. Q. e. 1.





Ex altero umbilico F, in tangentem demittatur perpendicularis FY, & junctis FP, SP, similia erunt triangula FPY, SPT, ob angulos æquales (Per natur. Tangentium & focorum) FPY, SPT, & STP, FYP rectos; & quoniam FP & CT, FY & CD sunt parallelæ, similia quoque erunt triangula CTD, FPY, ideóque duo triangula CTD, SPT sunt similia; quare CD : DT = ST (DX) : PT, & divisim CD : DT = CD − DX : DT − PT, & composite CD : DT = CD + DX : DT + PT.

Undè quoniam in Ellipsi CD − DX = CX, & DT − PT = DP; in hyperbolâ verò CD + DX = CX, & DT + PT = DP, erit in utrâque sectione CD : DT = CX : DP. Verùm ob SX tangenti DT parallelam, CD : DT = CX : XN, ergo XN = DP. Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C, semiaxe minùs principali CE, tangentibus datis

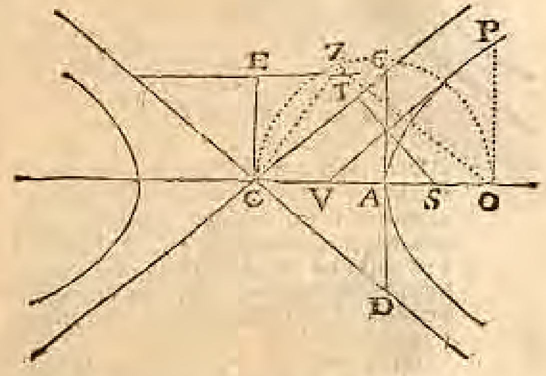
parallelis, DQ, RQ, trajectoria Elliptica & Hyperbolica describitur. Nam ex centro C, ad tangentes demittantur perpendicula CD, CR, & capiantur CX, CL, ita ut $CX^2 = CD^2 - CE^2$, $CL^2 = CR^2 - CE^2$, si describenda sit ellipsis, vel ita ut $CX^2 = CD^2 + CE^2$, & $CL^2 = CR^2 + CE^2$, si describenda sit hyperbola; & per X & L puncta, erigantur ad CD, CR perpendicula XS, LS concurrentia in S, erit S focus ex quo si ad tangentem alterutram DQ, demittatur normalis ST, juncta CT, erit semiaxis principalis.

344. Datis centro C, semiaxe minùs principali CE, tangente PQ, & puncto contactûs P, sectio conica describitur. Nam ductâ XS, infinitâ ut suprà (343) capiatur XN = DP & jungatur CN, producaturque donec tangenti occurrat in T, & TS, tangenti normalis secabit rectam XS in umbilico S, eritque CT semiaxis principalis.

345. Dato centro cum tangente & altero axe datur positio rectæ per umbilicum transeuntis; unde si præterea detur punctum extra tangentem, facile erit umbilicum invenire. Eâdem ferè methodo quâ superiora Lemmata demonstravimus, Hermannus in Tom. IV. Academiæ Petropolitanæ solvit problema de Ellipsi Conicâ, cujus axis alteruter datus est, angulo positione & magnitudine dato ita inscribenda ut centrum ejus intrà datum angulum sit etiam positione datum.

346. Datis asymptotis, dantur hyperbolæ centrum seu asymptotorum concursus; & datur positio axium qui asymptotorum angulos deinceps positos bifariam dividunt, & datur eorum axium ratio, sunt enim sicut tangentes dimidiorum illorum angulorum CGA, ACG, ideóque datis asymptotis cum puncto vel tangente, hyperbola describi potest (per prop. 4. & 9am. lib. 2. conic. apoll.). Si enim per punctum P ducatur PO perpendicularis in axem & PV Asymptoto Parallela & descripto circulo super Diametrum CO in eo secetur chorda OZ = OV, & sumatur CA = CZ & erit A Vertex Hyperbolæ. Nam sit a verus Hyperbolæ Vertex, sit Ca semi axis major & ag semi axis minor, erit $Ca^2 : ag^2 = CO^2 - Ca^2 : PO^2$ (per nat. Hyp. vid. Theor. 2. de Hyp. p. 122. & Cor. I. Lem. 3. de Conic. p. 128.) sed (per const.) est $Ca : ag = OV : PO$, sive $Ca^2 : ag^2 = OV^2 : PO^2$ est ergo $OV^2 = CO^2 - Ca^2$, Rursus (per Constr.) est OV^2 sive $OZ^2 = CO^2 - CZ^2$ ergo $CO^2 - Ca^2 = CO^2 - CZ^2$ & $Ca = CZ = CA$, ergo erit A vertex Hyperbolæ.

Si detur Tangens, producatur illa usque ad utramque Asymptoton ubi utrinque terminetur, ejus medium erit punctum contactûs, sive punctum ad Hyperbolam pertinens, cujus ope axis major invenietur ut suprà.

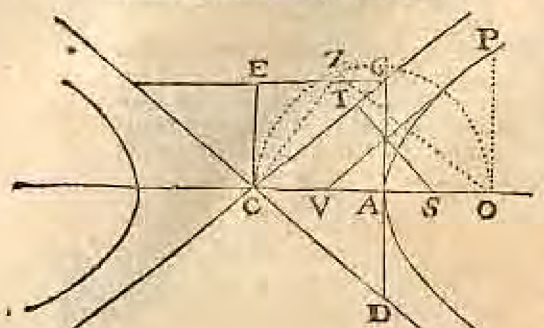


347. Datis asymptotis & umbilico vel alterutro axe, facile est hyperbolam describere. Sunto asymptoti CG, CD concurrentes in C, S umbilicus, CA, CE semiaxes; si ex umbilico S, in asymptotum quæ est tangens, demittatur perpendiculum ST, erit CT, æqualis semiaxi principali CA, (339), & ST æqualis semiaxi minùs principali CE seu GA, ob triangula CAG, CTS, similia & æqualia propter latus CA æquale lateri CT, Quare dato præter asymptotos semiaxe principali CT seu CA, datur umbilicus S, & contrà. Dato præter asymptotos semiaxe minùs principali CE, seu GA, invenitur alter semiaxis CA, seu EG, rectæ CE normalis in E, & asymptoto occurrens in G, & hinc reperitur umbilicus.

348. Asymptotus data, ut notum est, in problematum solutione æquivalet tangenti datæ cum puncto contactûs ad distantiam infinitam posito, atque a eò recta quævis ex puncto dato ad punctum contactûs asymptoti ducta ipsi asypmtoto paral-

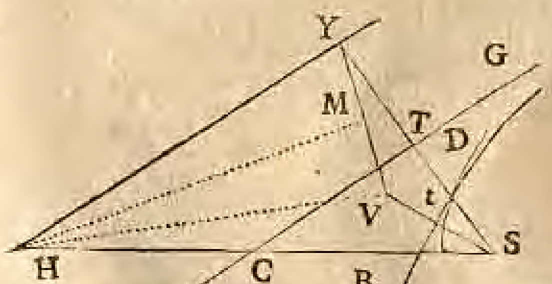
 lela

lela est & positione data. Hinc facile erit problematum sectionis IV. constructiones ad hyperbolam transferre ubi asymptotus alterutra cum umbilico data est.

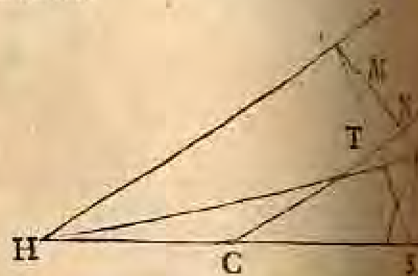


Datis umbilico S, axe principali, & asymptoto C G, invenitur axis positio, demittendo ex umbilico S ad asymptotum perpendicularem S T, & capiendo T C æqualem semiaxi dato, est enim C hyperbolæ centrum, C S axis principalis positio, T S semiaxis minùs principalis (348).

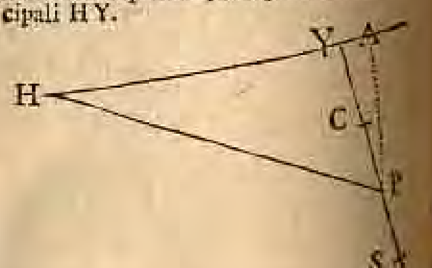
Datis umbilico & asymptoto describitur hyperbola specie data, per constr. Cas. 3. Prop. XIX. vel brevius, observando datam esse T S semiaxem minus principalem, unde ob datam axium rationem, dabitur centrum & axium positio cum alterâ asymptoto, & hyperbola describitur (348).



Datis asymptoto, umbilico & tangente, invenitur umbilicus alter ac proindè axis transversi positio & centrum. Sit enim asymptotus data C G, umbilicus S, tangens BD, ex umbilico S, ad asymptotum & tangentem, demittantur perpendicula S T, S t, & producantur ad Y & V ut sint T Y $=$ S T, t V $=$ S t, per punctum Y, agatur Y H, asymptoto parallela, & juncta Y V, bisecetur in M, perpendiculo M H, perpendiculi hujus & rectæ Y H communis intersectio H, est umbilicus alter, recta enim H Y, asymptoto parallela transit per punctum contactûs asymptoti, adeóque ob T Y $=$ T S, transit etiam per umbilicum H; Porrò rectæ Y H, V H, per umbilicum H, ductæ sunt æquales axi principali hyperbolæ per Lem. XV., & ideò æquales inter se; quare perpendiculum H M, ex umbilico H in rectam Y V demissum eam in M bisecat.

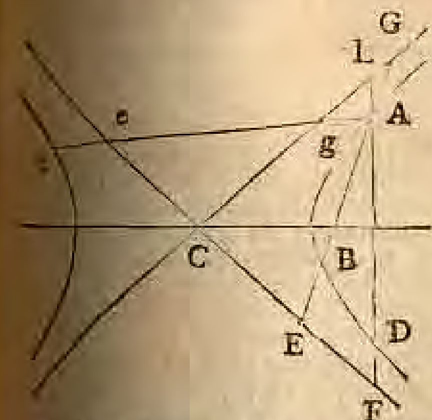


Datis asymptoto C G, puncto P, & umbilico S, invenitur umbilicus alter H, demisso ad asymptotum perpendiculo S T, & sumptâ T Y $=$ S T, actâque Y H asymptoto parallelâ jungatur Y P, & in eâ capiatur M N $=$ S P, & ità locetur ut sit Y M $=$ P N, hyperbola umbilicis Y, P, & axe principali M N, descripta, rectam Y H secabit in altero umbilico H quæsito. Nam P S seu M N est rectarum H Y, H P differentia, quæ semper æqualis est axi principali H Y.



Aliter, Huc redit problema, datis in triangulo H Y P latere P Y, angulo Y, & laterum H Y, H P differentia P S, invenire

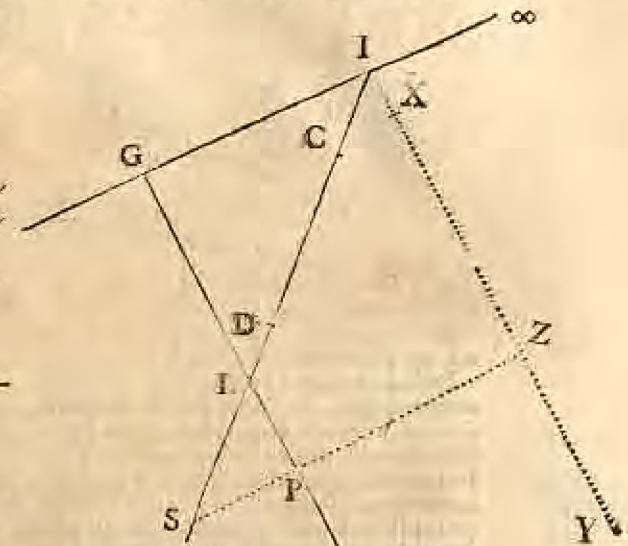
reliqua latera. Ex puncto P, in H Y, demittatur perpendicularis P A, capiatur laterum H P, H Y, differentia P C $=$ P S, & fiat ut Y H ad C Y, ut est Y S ad 2 Y A, scribendo $-$ 2 Y A, si angulus H Y P est obtusus, & $+$ 2 Y A, si acutus, & delendo $\mp$ Y A, si fuerit rectus, erit H punctum quæsitum, facilis est demonstratio ob angulum rectum A. Sectionis V^{æ}. problemata, ubi asymptotus alterutra data est ad sequentia reducuntur.



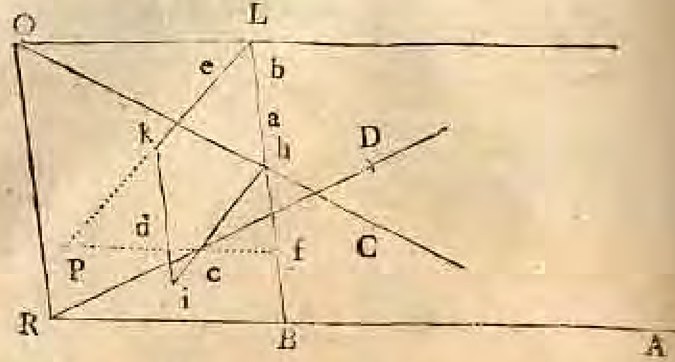
[illegible] Datâ asymptoto C G, cum tribus punctis A, D, B, vel b, hyperbolam describere. Per punctum quodvis A, datum & [illegible] D, B, vel b, agantur lineæ infinitæ A D, A B vel A b, asymptoto datæ occurrentes in L & G, vel g; tum capiatur F D $=$ A L, B E $=$ G A, vel b e $=$ g A, juncta F E, aut F e, erit asymptotus altera (per prop. 8^{am}. lib. 2. Conic. Apoll. per Lem. I. de Conic. p. 115.) [illegible] (346) hyperbola describitur, cum [illegible] inveniri possint quinque sectionis puncta, per angulos mobiles organicè potest describi.

350. Datis asymptoto G I, tangente [illegible] punctisque duobus C, D, Hyperbolam describere, constructio & demonstratio eadem ferè sunt ac problematis [illegible] XVI.)

Per puncta duo data C, D, age rectam infinitam C D, asymptoto & tangenti occurrentem in punctis I, L, actam ita secari in S, ut sit I S ad L S, ut est media proportionalis inter C I & I D ad mediam proportionalem inter C L & L D; deinde age S P asymptoto G I parallelam, hæc secabit tangentem G L, in puncto contactûs P; nam si P supponatur esse punctum contactûs, & per punctum I agatur I Y tangenti G L parallela quæ occurrat hyperbolæ in X & Y, & in eâ sumatur I Z, media proportionalis inter I X & I Y erit (per prop. 3. & 10. lib. 2. conic. Apoll.) I X $\times$ I Y sive I Z^2 $=$ P G^2, sit enim ∞ punctum contactus Hyperbolæ & Asymptoti erit ∞ I^2 : ∞ G^2 $=$ I X $\times$ I Y : P G^2 (par Cor. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) sed cum ∞ I & ∞ G sint lineæ infinitæ quantitate finitâ G I differentes, pro æqualibus habentur, ergo etiam I X $\times$ I Y sive I Z^2 $=$ P G^2, atque adeò I Z $=$ P G, & consequenter juncta P Z, parallela est asymptoto G I; recta Z P producta secet rectam I L, in puncto aliquo S, & ob similia triangula S I Z, S L P, erit I Z^2 : L P^2 $=$ I S^2 : L S^2; verùm (vid. Not. ad probl. XVI. aut Lem. III. de Conic. p. 117.) X I $\times$ I Y (I Z^2) : L P^2 $=$ C I $\times$ I D : C L $\times$ L D; ergò I S^2 : L S^2 $=$ C I $\times$ I D : C L $\times$ L D, quarè si recta I L ita secetur in S, ut sit I S^2 : L S^2 $=$ C I $\times$ I D : C L $\times$ L D, & agatur S P, asymptoto G I parallela, erit P punctum contactûs. Datis autem tribus punctis C, P, D, Hyperbola describitur (349).

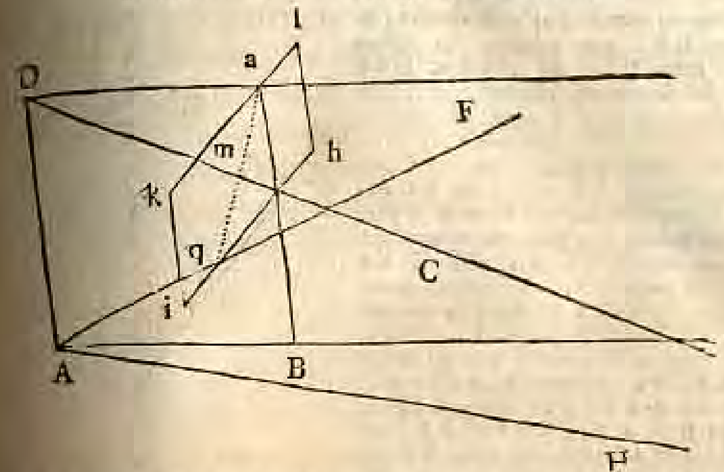


351.



351. Datis asymptoto O L, duabus tangentibus O C, R D, & puncto A, Hyperbolam describere; (solutio facile deducitur ex problemate XVII).

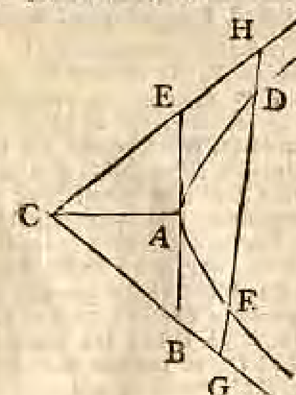
Per concursum O asymptoti O L cum tangente O C, & concursum R tangentis alterius R D cum rectâ R A quæ per punctum datum A & punctum contactûs asymptoti transit, seu quæ est asymptoto parallela; age rectam infinitam O R, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, O L verò pro radio ordinato novo usurpatâ, sumptisque ordinatis novis asymptoto parallelis (ad majorem constructionis facilitatem), transmutetur figura per Lem. XXII. in figuram novam, nimirùm linea B A in lineam B a, (330), punctum A in a, linea R D in i k ipsi B L parallelam (329) O C in i h, O L in k L ipsi i h parallelam (327) & punctum contactûs asymptoti infinite distans transferetur in L; Nam punctum contactûs asymptoti est communis intersectio Linearum R A, O L infinitarum, & ideò transfertur in L communem intersectionem rectarum k L, B L parallelogrammi h i k L; Tria ergo latera h i, i k, k L tangunt novam sectionem conicam quæ transire debet per punctum a, dicantur c & d puncta contactuum linearum h i, i k, sic invenietur punctum c, sumatur Radix quadrata facti $hL \times ha$ & addatur lineæ i k, illa summa erit ad duplum lineæ h i ut ea ipsa Radix quadrata ad portionem h c. Hoc est $ik + \sqrt{hL \times ha} : 2hi = \sqrt{hL \times ha} : hc$. Nam (per Cas. 2. & 3. Lem. III. de Conic. p. 118.) est $dk^2 : kL^2 = di^2 : ic^2 = hL \times ha : hc^2$ inde est $dk : kL = di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$, & sumendo summam Antec. & Conseq. est $dk + di + \sqrt{hL \times ha} : kL + ic + hc$ sive $ik + \sqrt{hL \times ha} : kL + hi$ $(2hi) = \sqrt{hL \times ha} : hc$: Invento autem puncto c invenitur punctum d, si quidem sit $di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$: Construitur autem hæc solutio capiendo h f, æqualem mediæ proportionali inter L h & a h, & productâ L k ad P, ut sit $kP = kL$, agendo per f & P rectam f P, illa f P latera h i, i k secabit in punctis quæsitis c, d; nam ob parallelas c h, P L & i k, f L est $Lf\ (ik + \sqrt{ah \times hL}) : LP$ $(2kL$ sive $2ih) = hf\ (\sqrt{ah \times hL}) : hc$, & $hc : hf = ic : id$; per inversas operationes Lem. XXII. (331), transferantur puncta c, d, in figuram primam, nimirùm in C, D, & data erunt tria hyperbolæ puncta D, C, A, cum asymptoto O L, quare describetur hyperbola (349).



352. Datâ asymptoto O a, & tribus tangentibus O C, A F, A H hyperbolam describere, solvitur ut problema XVIII. In intersectione communi O asymptoti O a, & tangentis O C, ad intersectionem communem A aliarum tangentium A F, A H agatur recta infinita O A, & eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, O a verò asymptoti parte pro radio ordinato novo sumptâ, transmutetur figura in figuram novam, nimirùm tangens O C & asymptotus in parallelas i h, k l punctum contactûs asymptoti in a, & duæ tangentes A F, A H in parallelas i k, h l, & parallelogrammi h l k i, latera singula novam sectionem conicam tangunt, & qui- [illegible] k l, in a, per a, & parallelogrammi centrum m, agatur a q, tangenti i h occurrens in q, & erit q, punctum contactûs quo i h, novam sectionem tangit. Per Lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, nempe in C, & erit C, punctum contactûs tangentis O C, quare datis asymptoto O a, duabus tangentibus A F, A H, & puncto C, describetur hyperbola. (351).

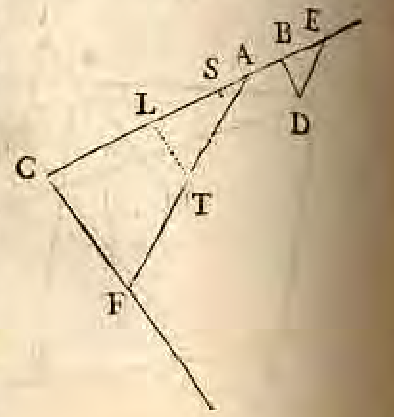
353. Datis asymptoto, axium ratione, & duobus punctis vel puncto & tangente aut duabus tangentibus, hyperbolam describere. Sint hyperbolæ asymptoti C F, C G, centrum C, vertex principalis A, semiaxis transversus C A, semiaxis conjugatus A E ad C A, normalis; in triangulo rectangulo C A E datâ ratione crurum C A, A E, datur angulus E C A, est enim C A, ad E A, ut sinus totus ad tangentem anguli E C A, quare datâ specie hyperbolæ seu axium ratione datur asymptotorum angulus E C B, & viceversâ dato asymptotorum angulo datur specie hyperbola; his positis problema facile solvitur.

Cas. 1. Data sit asymptotus C H, cum axium ratione seu asymptotorum angulo & punctis duobus D, F, per puncta illa age rectam infinitam D F, asymptoto datæ occurrentem in H, fac $FG = HD$, & per punctum G, age rectam infinitam G C, quæ cum asymptoto C H, efficiat

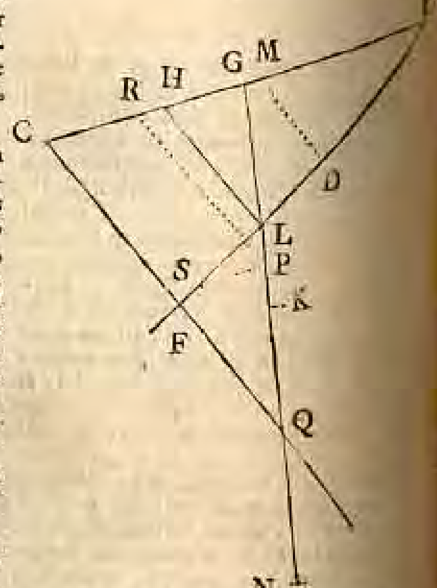


angulum H C G, æqualem angulo asymptotorum dato, erit C G, asymptotus altera (per prop. 8^{vam}. Lib. 2. conic. Apoll. sive Lemma I. de Conic.) quare describetur hyperbola (346).

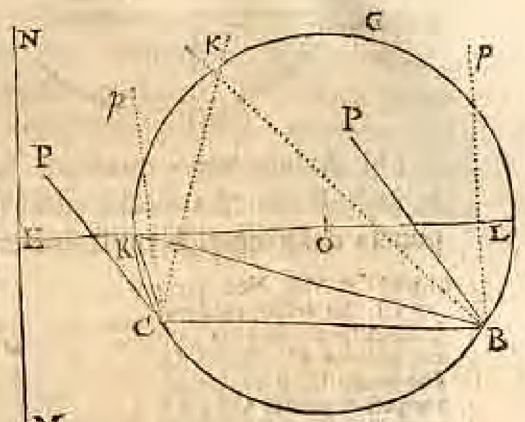
Caſ. 2. Data ſit aſymptotus CE, cum aſymptotorum angulo, puncto D, & tangente FA; per punctum D datum agantur recta BD, ad angulum DBE datum, ſeu æqualem aſymptotorum angulo, & DE tangenti FA parallela, capiantur BS æqualis mediæ proportionali inter BE & AE, & AC æqualis $2SE$, erit C hyperbolæ centrum, CF verò rectæ BD parallela aſymptotus altera. Nam ſit T punctum contactûs, CF aſymptotus altera, ductâ TL aſymptoto FC parallelâ, erit $FT = TA$ (per prop. 3^am. Lib. 2. conic. apoll. ſup. Theor. I. de Hyp. p. 122.) ac proindè $LA = CL$: Eſt autem ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos $CL \times LT$, hoc eſt $AL \times LT = CB \times BD$, adeóque $BD : LT = AL : CB.\ (2AL + AB)$ & ob triangula ſimilia ALT, EBD, $BD : LT = BE : AL$; ergò $BE : AL = AL : 2AL + AB$, ſed (per conſtr.) $BE : BS = BS : BE + AB$, & compoſite $BE : BS = SE : SE + AB$, & $BE : SE = SE : 2SE + AB$, eſt igitur $AL = SE$, & $2AL$ ſeu $AC = 2SE$.



Caſ. 3. Data ſit aſymptotus GI, cum aſymptotorum angulo & duabus tangentibus FI, GQ ſe mutuò interſecantibus in L & aſymptotum in G & I; ex puncto L agatur ad aſymptotum GI recta LH, in angulo aſymptotorum dato LHG, producatur GL ad N, ut ſit LN ad HI, ut eſt GL ad GH, capianturque GK æqualis mediæ proportionali inter GL, & LN, & LP æqualis $\frac{1}{2}LK$, erit P punctum contactûs tangentis GQ. Nam ſi ſupponamus P, D eſſe puncta contactuum, & CQ aſymptotum alteram tangenti GQ occurrentem in Q & alteri aſymptoto in C, & ex punctis D, P ductæ intelligantur rectæ DM, PR & PS, aſymptotis CI & CQ parallelæ ac DM, PR aſymptoto CI occurrant in M, R, PS verò tangenti FI in S, erit $CR = RG$, & $CM = MI$; & ob ſimilia triangula GLI, PLS, $GL : LP = LI : LS$, adeóque componendo $GP : LP = IS : LS$, ſed (323.) $IS : LS = DI : LD$; quare $GP : LP = DI : LD$, ac proindè $GP + LP : GP = LI : DI$. Porrò in triangulis ſimilibus ILH, IDM, $LI^2 : HI \times LH = DI^2 : DM \times MI$, & in triangulis ſimilibus GLH, GRP, $GH \times LH : GL^2 = GR \times RP : GP^2 = DM \times MI : GP^2$, ob $MI \times DM = CM \times DM = CR \times RP = GR \times RP$ ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos, quare per compoſitionem ratio[num] $LI^2 \times GH \times LH : GL^2 \times HI \times LH = DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GH : GL^2 \times HI$. Verùm (per conſtruct.) $GH : HI = GL : LN = GL^2 :$ $GL \times LN$, & $GK^2 = GL \times LN$, [ac] proindè $GH : HI = GL^2 : GK^2$, [&] $DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GL^2 : GL^2 \times GK^2 = LI^2 : GK^2$, & $DI : GP = LI : GK$, atque adeò $LI : DI = GK : GP$; ſed [ſu]prà invenimus $GP + LP : GP = LI : DI$, ergò $GK : GP = GP + LP : GP$, [atque]



Poſtquam trajectoria deſcripta eſt, invenire licet axes & um[bili]cos ejus hâc methodo. In conſtructione & figurâ lemmatis [XXI.] ſic ut angulorum mobilium PBN, PCN crura BP, CP, [quo]rum concurſu trajectoria deſcribebatur, ſint ſibi invicem pa[ral]lela, cumque ſervantia ſitum revolvantur circa polos ſuos B, [C] in figurâ illâ. Interea vero deſcribant altera angulorum illorum crura CN, BN, concurſu ſuo K vel k, circulum $BGKC$.



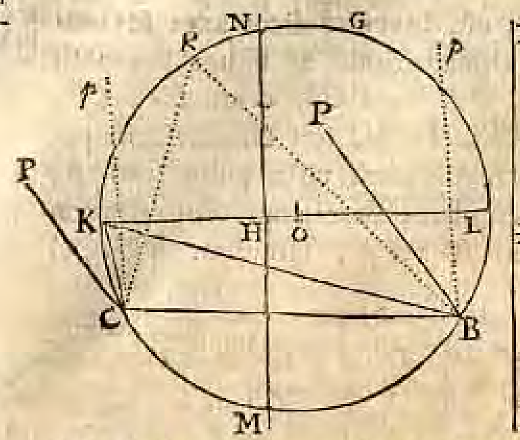
[Si]t circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad regulam [M]N, ad quam altera illa crura CN, BN interea concurre[ba]nt, dum trajectoria deſcribebatur, demitte normalem OH [cir]culo occurrentem in K & L. Et ubi crura illa altera CK, BK concurrunt ad punctum illud K quod regulæ propius [eſt], crura prima CP, BP parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, ſi crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde ſi detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. (d) Hiſce autem datis, umbilici ſunt [in] promptu.

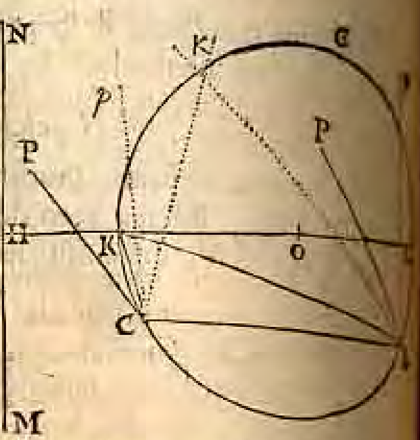
Axium

[ergò] $GK = GP + LP$, ſeu $GL + LK = GL + 2LP$, ac proindè $LK = 2LP$, & $LP = \frac{1}{2}LK$. Invento autem puncto contactûs P, ſi capiatur $PQ = PG$, & per punctum Q, agatur QC, ipſi LH parallela, erit QC altera aſymptotus, & hyperbola deſcribetur (346).

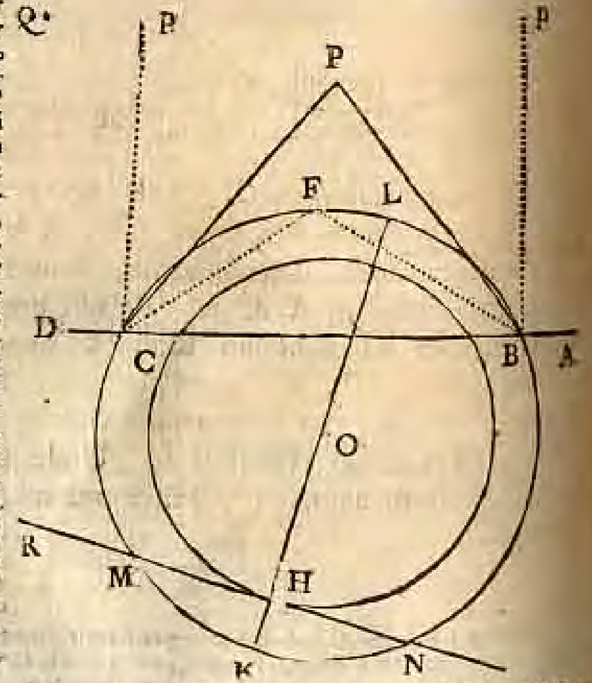
(d) * Vid. Not. 314.

De Motu Corporum.





(e) Axium vero quadrata sunt ad invicem ut KH ad LH, & inde facile est trajectoriam (f) specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli C,



(e) * Vid. Not. 315.

(f) Sit describenda trajectoria specie data per puncta quatuor C, B, P, Q, duo puncta C, B constituantur poli & junctis CP, BP erunt PCB, PBC anguli mobiles, fac ut angulorum illorum crura BP, CP sint sibi invicem parallela, nempè in positione quâvis Bp, Cp, & crura alia B, CB se mutuò intersecent in F; & centro O describe circulum per tria puncta C, F, B transeuntem cujusque proindè segmentum CFB capit angulum CFB, centro O radio OH describatur circulus, (punctum verò H, ita determinetur in Diametro KL ut sit KH ad LH ut sunt ad invicem quadrata axium trajectoriæ). Tum crurum BP, CP concursus adducatur ad punctum Q & intereà notetur punctum R ubi concurrunt alia crura CA, BD, & ex puncto R agatur recta RMN tangens circulum radio OH descriptum, *erit NM regula cujus ope trajectoria describetur* (314).

Liber Primus.

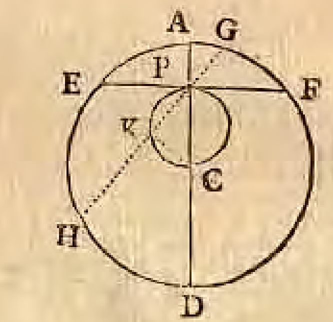
B, tertium dabit angulos mobiles, PCK, PBK; his autem datis describi potest circulus $BGKC$. Tum ob datam specie trajectoriam, dabitur ratio OH ad OK, ideoque ipsa OH. Centro O & intervallo OH describe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum CK, BK, ubi crura prima CP, BP concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa MN cujus ope trajectoria describetur. (g) Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in datâ quâvis sectione conicâ inscribi potest.

Sunt & alia lemmata quorum ope trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. (h) Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam coni sectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam coni sectionem ejusdem speciei cum priore, atque

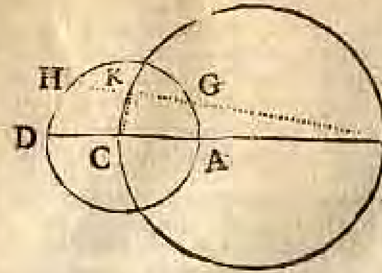
Si describenda foret parabola, ducenda esset ex puncto R recta RN, circulum CKH tangens; nam in parabolâ punctum H, coincidit cum puncto K (313).

Quoniam autem ex puncto R, duæ tangentes ut RN duci possunt, patet duas trajectorias specie datas per data quatuor puncta posse describi.

(g) * Nam si describatur trapezium quodvis specie datum, & huic circumscribatur sectio conica datæ similis Methodo in notâ præcedente expositâ, deindè in sectione conicâ datâ quatuor agantur lineæ in eâ similiter positæ ac quatuor trapezii latera in sectione trapezio circumscriptâ, habebitur trapezium specie datum in datâ sectione conicâ inscriptum.

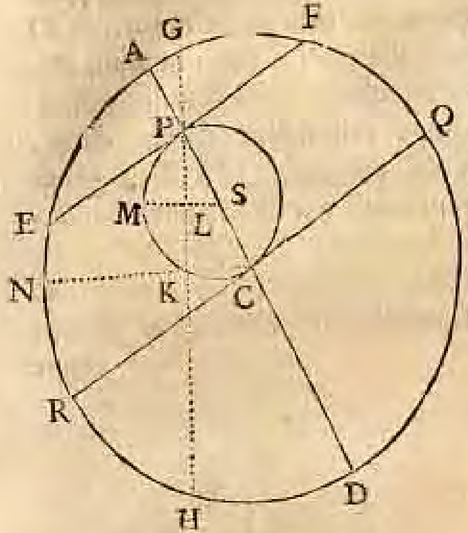


(h) * Hoc Lemma facilè demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum AFDE datum sit punctum P per quod & per centrum circuli C agatur PD; tum diametro PC describatur circulus PKCP, chorda quælibet GH per punctum P ducta, bifariam divisa est in puncto K ubi circulo PKC occurrit; Nam junctâ KC, erit angulus CKP rectus ac proinde chorda HG bisecta in K.

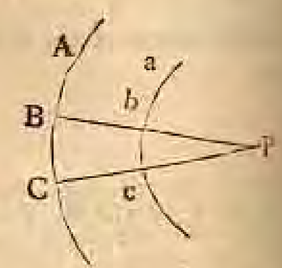


atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

LEM.



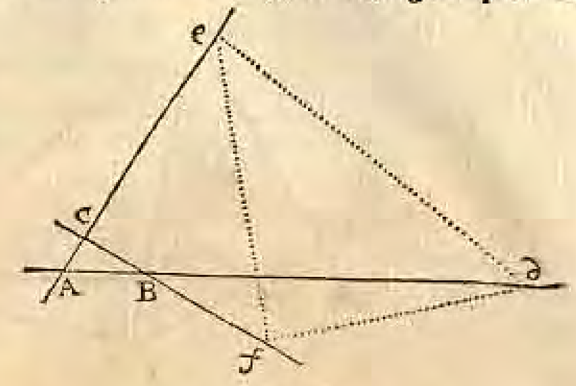
(h) * Idem Lemma pari facilitate in cæteris sectionibus conicis demonstratur. Datum sit punctum P, per hoc & per centrum C sectionis conicæ AFDE agatur diameter AD, tùm diametro PC, quæ similis sit diametro AD, describatur alia sectio conica PMKC, ejusdem speciei cum datâ, & diameter conjugata ipsius PC, similis erit & parallela diametro RQ, conjugatæ ipsius AD, & quia in duabus figuris similibus, si duo latera homologa parallela sint, cætera omnia latera similia sunt etiam parallela, ambarum sectionum conicarum similes diametri omnes, adeóque & axes paralleli erunt, agatur nunc per punctum datum P, chorda quævis GPH, sectioni PMC occurrens in K, dico esse KH = KG. Nam jungatur CK, & producatur donec trajectoriæ AHD occurrat in N, & per centrum S trajectoriæ PKC, agatur SM parallela CK, chordæ PK occurrens in L & sectioni in M, erunt SM, NC diametri similes, & earum ordinatæ parallelæ, sed quia in triangulis similibus PSL, PCK est PS = SC erit quoque PL = LK, ac proinde PLK erit ordinata ad diametrum SM, adeóque GKH erit ordinata ad diametrum NC; quare GK = KH *ergo punctum bisectionis K tanget curvam priori similem & axes habentem prioris axibus parallelos.* Eadem est demonstratio, si punctum P extrà sectionem sumatur.



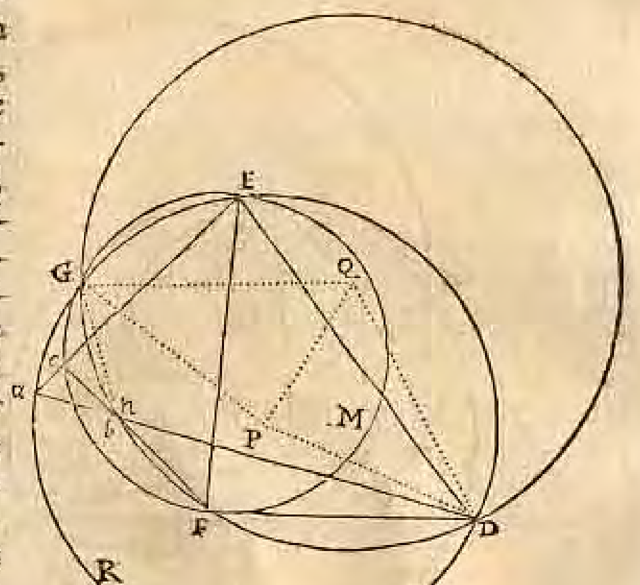
354. Adjungemus aliud Lemma maximè universale. Si ex puncto quovis P dato ducatur recta PB, curvæ cuilibet ABC occurrens in B, & recta illa PB ità dividatur in b, ut sit semper Pb ad PB in ratione datâ, punctum b, tanget curvam abc ejusdem speciei & ordinis cum curvâ ABC, atque lineas habentem similibus curvæ ABC lineis parallelas. Nam si fuerit ABC polygonum rectilineum cujus latus unum BC, cum sit (per hyp.) Pb : PB = Pc : PC, similia erunt triangula PBC, Pbc, & latera BC, bc, parallela & in datâ ratione PB, ad Pb, ac proindè totum polygonum ABC simile polygono abc, & eorum latera homologa parallela erunt. Laterum polygoni ABC numerus augeatur in infinitum & ipsorum longitudo in infinitum minuatur & duo polygona ABC, abc mutabuntur in curvas similes in quibus latera homologa sunt parallela.

LEMMA XXVI.

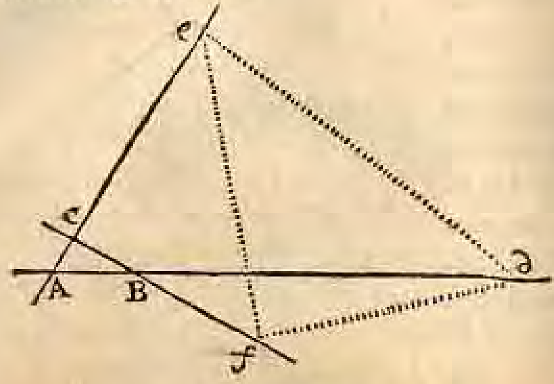
Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

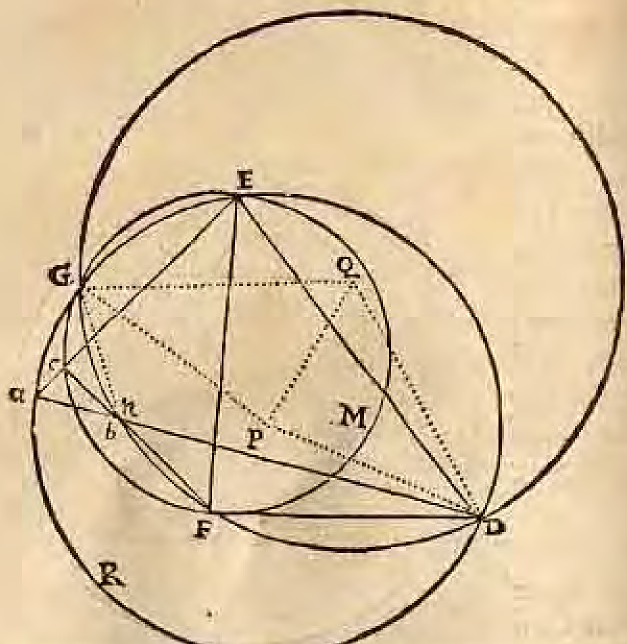


Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF*, describe tria circulorum segmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales respectivè. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF*, ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tum *aE*



secans circulum tertium EMF in c. Et jam licet figuram $ABCdef$ constituere similem & æqualem figuræ $abcDEF$. Quo facto perficitur problema.





Agatur enim Fc ipsi aD occurrens in n, & jungantur aG, bG, QG, QD, PD. Ex constructione est angulus EaD æqualis angulo CAB, & (i) angulus acF æqualis angulo ACB,

(i) * *Angulus acF æqualis angulo ACB*, nam angulus FcE est anguli acF atque etiam anguli in segmento EMF complementum ad duos rectos, quare angulus acF, est æqualis angulo quem capit segmentum EMF, hic autem angulus æqualis est angulo ACB (per constr.).

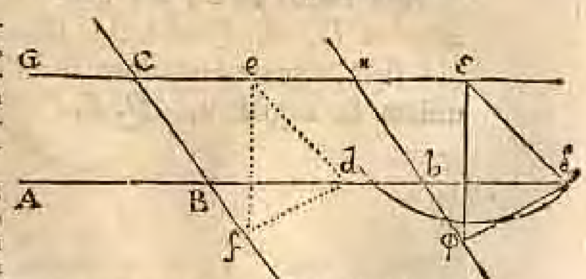
* An-

ideoque triangulum anc triangulo ABC æquiangulum. Ergo angulus anc seu FnD angulo ABC, ideoque angulo FbD æqualis est; & propterea punctum n incidit in punctum b. Porro angulus GPQ, (k) qui dimidius est anguli ad centrum GPD, æqualis est angulo ad circumferentiam GaD; & angulus GQP, qui dimidius est anguli ad centrum GQD, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam GbD, ideoque æqualis angulo Gba; suntque ideo triangula GPQ, Gab similia; & Ga est ad ab ut GP ad PQ; id est (ex constructione) ut Ga ad AB. Æquantur itaque ab & AB; & propterea triangula abc, ABC, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli DEF anguli D, E, F trianguli abc latera ab, ac, bc respectivè, compleri potest figura $ABCdef$ figuræ $abcDEF$ similis & æqualis, atque eam complendo solvetur problema. *Q.E.F.*

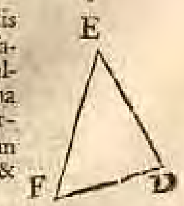
Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum DEF, puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE, DF in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data DE rectis positione datis AB, AC, & pars data DF rectis positione datis AB, AC, interponi debet;

(k) * Angulus GPQ dimidius est anguli ad centrum GPD, recta enim PQ, quæ circulorum DRGD, DGFD centra jungit, perpendicularis est ad rectam GD, quæ puncta intersectionum circulorum jungeret, adeóque angulum GPD bisecat.

(l) Si trium rectarum GC, AB, CB positione datarum duæ GC, AB sint parallelæ & oporteat triangulum datum DEF ita locare ut angulus ejus D lineam AB, angulus E lineam GC, & angulus F lineam BC tangat, centro quovis ε in linea GC, ad arbitrium sumpto & radio εδ, æquali ED, describatur circulus rectam AB, occurrens in δ; super basi εδ construatur triangulum εδφ simile & æquale triangulo dato EDF, & ex angulo illius φ agatur φn rectæ BC parallela secans GC in n, & AB in b,



& compleatur figura CBfde similis & æqualis figuræ nbφδε, patet factum. Si recta ED minor sit parallelarum GC, AB distantiâ, problema impossibile est; si major fuerit circulus radio εδ, descriptus, rectam AB in duobus punctis secabit, & duæ erunt rectæ εδ positiones.



* Si

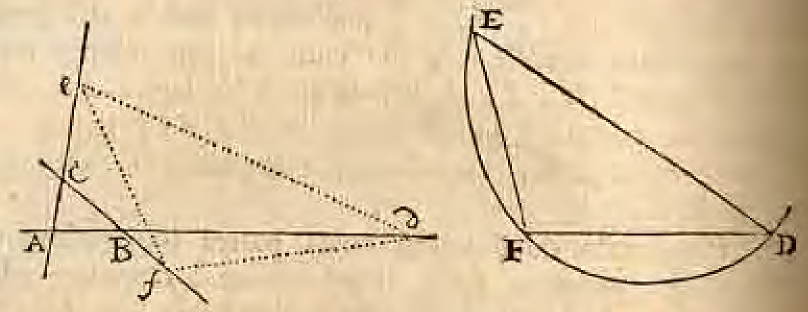
De Motu Corporum.

& applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ *DEF*, quæque à rectis tribus *AB*, *AC*, *BC* positione



datis, in partes datis hujus partibus *DE* & *EF* similes & æquales secabitur.

Age rectas *DE*, *EF*, *DF*, & trianguli hujus *DEF* pone angulos *D*, *E*, *F* ad rectas illas positione datas (per lem. XXVI) (1) dein circa triangulum describe trajectoriam curvæ *DEF* similem & æqualem. *Q. E. F.*

LEM-

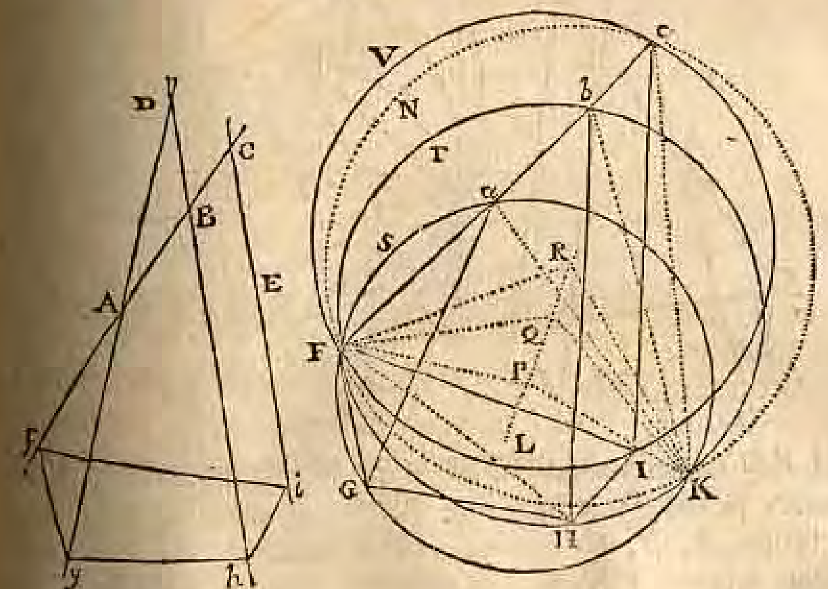
(1) * Si enim data sit curva D E F, triangulo dato E F D circumscripta, dabitur diametrorum & axium ejusdem curvæ positio ad trianguli E F D latera, & hinc habebitur positio diametrorum & axium curvæ similis & æqualis circà triangulum e f d describendæ.

Liber Primus.

LEMMA XXVII.

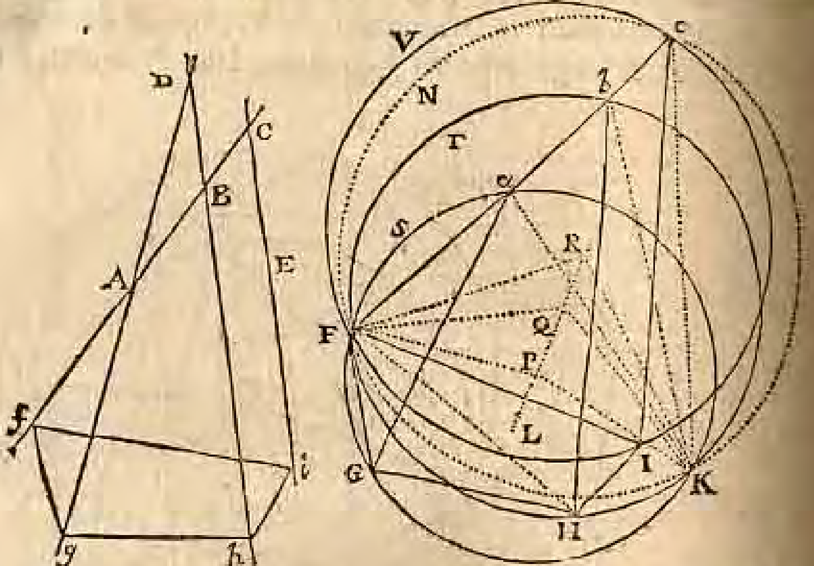
Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.

Dentur positione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*; quarum prima secet secundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & describendum sit trapezium *fghi*, quod sit trapezio *FGHI* simile; & cujus angulus *f*, angulo dato *F* æqualis, tan-



gat rectam *ABC*; cæterique anguli *g*, *h*, *i*, cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* respectivè. Jungatur *FH* & super *FG*, *FH*, *FI* describantur totidem circulorum segmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*; quorum primum *FSG* capiat angulum æqualem angulo *BAD*, secundum *FTH* capiat angulum æqualem angulo *CBD*, ac tertium

tium *FVI* capiat angulum æqualem angulo *ACE*. Deſcribi autem debent ſegmenta ad eas partes linearum *FG*, *FH*, *FI*, ut literarum *FSGF* idem ſit ordo circularis qui literarum *BADB*, utque literæ *FTHF* eodem ordine cum literis *CBDC*, & literæ *FVIF* eodem cum literis *ACEA* in orbem redeant. Compleantur ſegmenta in circulos integros; ſitque *P* centrum circuli primi *FSG*, & *Q* centrum ſecundi *FTH*. Jungatur & utrinque producatur *PQ*, & in eâ capiatur *QR* in eâ ratione



ad *PQ* quam habet *BC* ad *AB*. Capiatur autem *QR* ad eas partes puncti *Q* ut literarum *P*, *Q*, *R* idem ſit ordo atque literarum *A*, *B*, *C*: centroque *R* & intervalo *RF* deſcribatur circulus quartus *FNc* ſecans circulum tertium *FVI* in *c*. Jungatur *Fc* ſecans circulum primum in *a*, & ſecundum in *b*. Agantur *aG*, *bH*, *cI*, & figuræ *abcFGHI* ſimilis conſtitui poteſt figura *ABCfghi*. Quo facto erit trapezium *fghi* illud ipſum, quod conſtituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi *FSG*, *FTH* ſe mutuo in *K*. Jungantur *PK*, *QK*, *RK*, *aK*, *bK*, *cK*, & producatur *QP* ad *L*. Anguli ad circumferentias *FaK*, *FbK*, *FcK* ſunt ſe-
miſſes

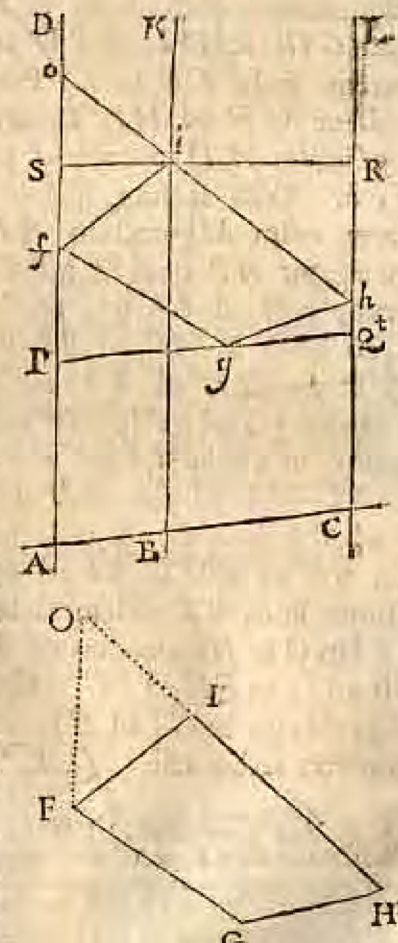
miſſes angulorum *FPK*, *FQK*, *FRK* ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis *LPK*, *LQK*, *LRK* æquales. (a) Eſt ergo figura *PQRK* figuræ *abcK* æquiangula & ſimilis, & propterea *ab* eſt ad *bc* ut *PQ* ad *QR*, id eſt, ut *AB* ad *BC*. Angulis inſuper *FaG*, *FbH*, *FcI* æquantur *fAg*, *fBh*, *fCi* per conſtructionem. Ergo figuræ *abcFGHI* figura ſimilis *ABCfghi* compleri poteſt. Quo facto trapezium *fghi* conſtituetur ſimile trapezio *FGHI*, & angulis ſuis *f*, *g*, *h*, *i* tanget rectas *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*. *Q. E. F.*

Co-

(a) * Eſt enim angulus Kab = KPR, angulus Kba = KQP, ac proinde triangulum aKb, ſimile triangulo PQK, & ſimiliter patet triangulum bKc, eſſe ſimile triangulo QKR, adeoque totam figuram abcK, ſimilem eſſe figuræ PQRK.

* Si ex quatuor rectis poſitione datis duæ vel tres fuerint parallelæ manet eadem conſtructio. Poteſt tamen hæc alia adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor ſunt parallelæ. Datæ ſint tres parallelæ AD, BK, CL quas quarta AC in A, B, C ſecet & oporteat deſcribere trapezium ſimile trapezio FIHG & cujus anguli angulis F, I, H, G æquales, rectas AD, BK, CL, AC, tangant. per punctum quodvis i, rectæ BK, agatur SiR, parallelis AD, BK, CL normalis, iiſque occurrens in S, & R, producatur HI, ad O, ut ſit HI ad IO ut eſt Ri ad iS junganturque FO; tum per punctum i, agatur if, parallelam AD ſecans in f, ità ut ſit angulus fiB ſeu fiD, æqualis angulo IFO, & ſuper latere fi, ſimili FI conſtruatur trapezium fihg ſimile trapezio FIHG, ac per angulum g agatur recta PQ ipſi AC parallela, & tandem ſuper rectâ AC, conſtruatur figura ſimilis figuræ PQhifg. Dico factum.

Demonſtrandum eſt angulum h eſſe in parallelâ CL; ſi punctum h, non eſt in rectâ CL producatur ih donec rectæ CL occurrat in t, & producatur ti, donec occurrat rectæ AD in o & erit HI:IO = hi:io = Ri:iS, ob figuras oifh, OIFH, (per conſtr.) ſimiles; ſed ob ſimilia triangula tiR, oiS, ti:io = Ri:iS, ergo hi:io = ti:io, atque adeò hi = ti; quare punctum t, cum h, coin-



* Nam.

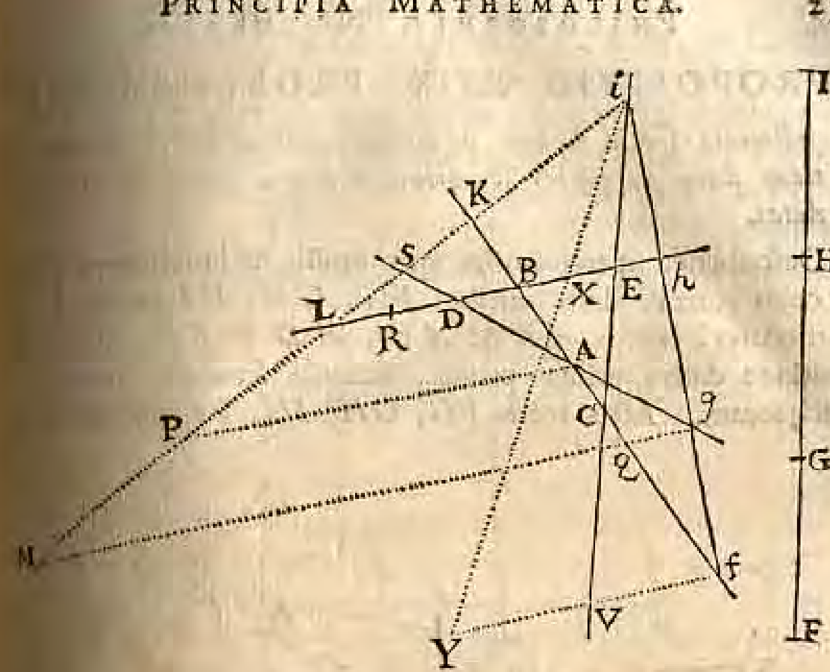
Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI usque eo, ut rectæ, FG, GH, HI in directum jaceant, & in hoc casu construendo problema ducetur recta $fghi$, cujus partes fg, gh, hi, rectis quatuor positione datis AB & AD, AD & BD, BD & CE interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

Producantur AB ad K, & BD ad L, ut sit BK ad AB ut HI ad GH; & DL ad BD ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i. Producatur iL ad M, ut sit LM ad iL ut GH ad HI, & agatur tum MQ ipsi LB parallela, rectæque AD occurrens in g, tum gi secans AB, BD in f, h. Dico factum.

Secet enim Mg rectam AB in Q, & AD rectam KL in S, & agatur AP quæ sit ipsi BD parallela & occurrat iL in P, & erunt gM ad Lh (gi ad hi, (n) Mi ad Li, GI ad HI, AK ad BK) & AP ad BL in eâdem ratione. Secetur DL in R ut sit DL ad RL in eâdem illâ ratione, & ob proportionales gS ad gM, AS ad AP, & DS ad DL; erit, (o) ex æquo, ut gS ad Lh ita AS ad BL & DS ad RL; & mixtim, $BL-RL$ ad $Lh-BL$ ut $AS-DS$ ad $gS-AS$. Id est BR ad Bh ut AD ad Ag, ideoque ut BD ad gQ. Et vicissim BR ad BD ut Bh ad gQ, seu fh ad fg. Sed ex constructione linea BL eâdem ratione secta fuit in D & R atque linea FI in G & H: ideoque est BR ad BD ut FH ad FG. Ergo fh est ad fg ut FH ad FG. Cum igitur sit etiam gi ad hi ut Mi ad Li, id est, ut GI ad HI, patet lineas FI, fi in g & h, G & H similiter sectas esse. *Q. E. F.*

(n) * Nam (per constr.) $LM:iL = GH:HI = AB:BK$, ac proindè componendo consequentes cum antecedentibus $Mi:Li = GI:HI = AK:BK = AP:BL$ ob parallelas.

(o) * Quoniam enim $gM:Lh = AP:BL = DL:RL$ & $gS:gM = AS:AP = DS:DL$ patet esse $gS:Lh = AS:BL = DS:RL$, & consequenter $gS-AS:Lh-BL = AS-DS:BL-RL = gS:Lh$; unde invertendo permutando & alternando $BL-RL:Lh-BL = AS-DS:gS-AS$ id est $BR:Bh = AD:Ag = BD:gQ$, ob similia triangula ADB, AgQ.



In constructione corollarii hujus postquam ducitur LK secans CE in i, producere licet iE ad V, ut sit EV ad Ei ut FH ad HI, & (p) agere Vf parallelam ipsi BD. (q) Eodem recidit si centro i, intervallo IH, describatur circulus secans BD in X, & producatur iX ad Y, ut sit iY æqualis IF, & agatur Yf ipsi BD parallela.

Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisius* olim excogitarunt.

PRO-

(p) * Si enim ex puncto f, per superiorem constructionem invento agatur fV parallela BD & lineæ iE productæ occurrens in V, erit ob similia triangula iEh, iVf, $EV:Ei = fh:hi$, sed ex suprà demonstratis $fh:hi = FH:HI$, ergo $EV:Ei = FH:HI$.

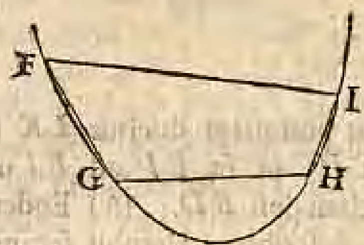
(q) * Nam si ex puncto f, ut suprà invento agatur fY, ipsi BD, parallela & rectæ iX, productæ occurrens in Y, erit ob similia triangula iXh, iYf, $ih:hf = iX:XY = IH:HF$. Unde cum sit $iX = IH$ (ex hyp.) erit $XY = HF$.

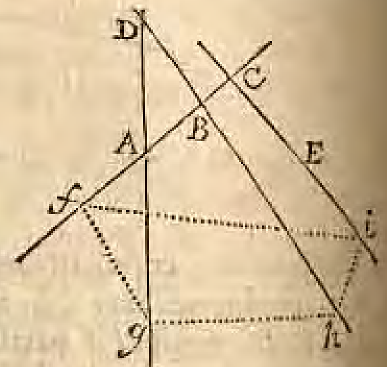
De Motu Corporum.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ à rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.

Describenda sit trajectoria, quæ similis sit lineæ curvæ *FGHI*, & cujus partes, illius partibus *FG*, *GH*, *HI* similes & proportionales, rectis *AB* & *AD*, *AD* & *BD*, *BD* & *CE* positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* describatur (per





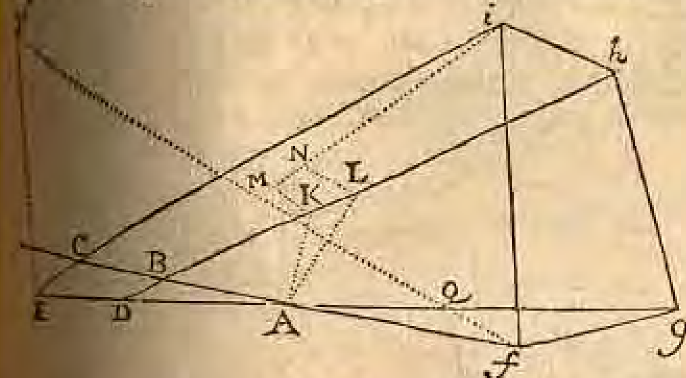
lem. XXVII.) Trapezium *fghi*, quod sit trapezio *FGHI* simile, & cujus anguli *f*, *g*, *h*, *i* tangant rectas illas positione datas *AB*, *AD*, *BD*, *CE*, singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectoria curvæ lineæ *FGHI* consimilis.

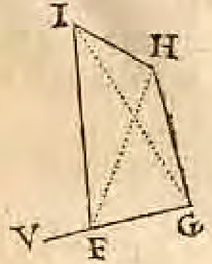
Scholium.

Construi etiam potest hoc problema ut sequitur. Junctis *FG*, *GH*, *HI*, *FI* produc *GF* ad *V*, jungeque *FH*, *IG*, & angulis *FGH*, *VFH* fac angulos *CAK*, *DAL* æquales. Concurrant *AK*, *AL* cum recta *BD* in *K* & *L*, & inde agantur *KM*, *LN*, quarum *KM* constituat angulum *AKM* æqualem angulo *GHI*, sitque ad *AK* ut est *HI* ad *GH*; & *LN* constituat angulum *ALN* æqualem angulo *FHI*, sitque *AL*

Liber Primus.

AL ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND*, eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, sitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*, & per *P* agatur *PQf*, quæ cum rectâ *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat

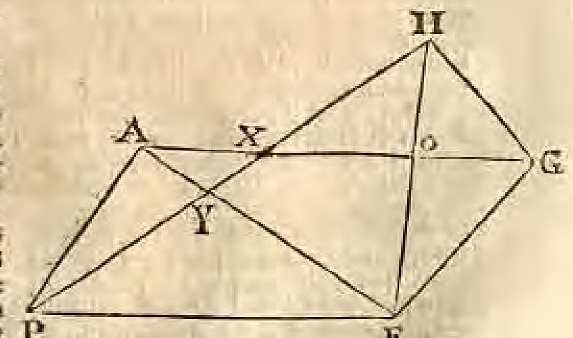




in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & si super lineâ *fi* eodem quoque literarum ordine constituatur trapezium *fghi* trapezio *FGHI* simile, & circumscribatur trajectoria specie data, solvetur problema. (r)

(r) Hæc nova constructio hoc præmisso Lemmate Demonstratur.

Lemma. Si ex puncto A extrà triangulum FGH dato, agatur ad angulum F recta AF, & ad angulum G recta AG, secans latus trianguli HF in O, & super rectam AF, constituatur triangulum FAP, simile triangulo FGH, jungaturque PH secans AG in X, & AF in Y, similia erunt triangula PHF, AGF, & anguli HXG, HFG æquales; quoniam enim anguli AFP, HFG sunt æquales (per hyp.) æquales quoque erunt anguli PFH, AFG; & quoniam triangula PFA, HFG, similia sunt (per hyp.) erit PF : AF = HF : FG, adeoque triangula AFG, PFH, quorum latera proportionalia æqualem angulum continent sunt similia, & hinc anguli HPF, GAF æquantur; cumque anguli oppositi



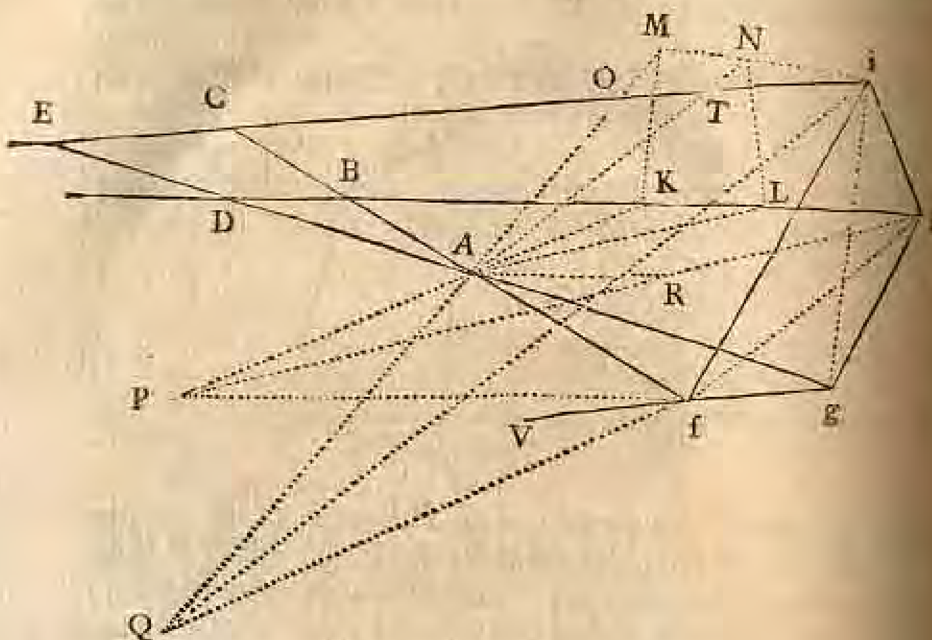
PYF, AYX, sint etiam æquales, liquet angulum AXY sive HXG, æqualem esse angulo AFP = HFG. Q. e. D.

Tom. I.

De Motu Corporum.

Hactenus de orbibus inveniendis. Supereſt ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

SEC-



357. Hoc itaque, poſito, demonſtratur Newtoniana conſtructio. Trapezii f g h i, anguli quatuor tangant rectas C i, B h, A g, A f. Super rectâ A f, conſtruantur triangula f A P, f A Q, triangulis f g h, f g i, ſimilia; jungantur P h, Q i, & latera P A, Q A, producantur, ut rectis B h, C i, occurrant in K, & O; erunt anguli B A K, B A O, æquales angulis datis f g h, f g i, agantur A L, A T, rectis P h, Q i parallelæ, & producto latere g f, ad V, erit angulus D A L, æqualis angulo V f h; angulus enim D A L = D A B + B A K + K A L = f A g + P A f + h P A; ſed (per conſtr.) P A f = f g h, & f P A = f h g; cumque ſit triangulum f P h, ſimile triangulo f A g, (356), angulus f P h = f A g, adeóque h P A + f A g = h P A + f P h = f P A = f h g; quare D A L = f g h + f h g = V f h (per 32. 1. Elem.). Et ſimiliter oſtenditur angulum D A T, eſſe æqualem angulo V f i, ob triangula f A Q, f Q i, triangulis f g i, f A g, ſimilia. Agantur rectæ K M, L N, quæ cum rectis A K, A L conſtituant angulos A K M, A L N angulis g h i, f h i æquales, rectiſque A L, A T productis occurrant in M & N, & triangula A K M, A L N ſimilia erunt triangulis g h i, f h i, (undè juxta conſtructionem Newtoni erit K M : A K = hi : h g, & L N : A L = hi : h f). Etenim angulus M A K = P A Q = P A f − Q A f = f g h − f g i = i g h, (per conſtr.) quare cùm ſit quoque (per conſtr.) angulus A K M = g h i, triangula A K M, g h i ſunt ſimilia, angulus verò N A L = D A L − D A T = V f h − V f i (per Dem.) ſed V f h − V f i = i f h, ergò triangula i f h, N A L ſimilia ſunt. jungatur M N, demonſtrandum [illegible] hanc lineam productam tranſire per angulum i, quo trapezium tangit lineam [illegible] ex puncto A, ad rectam P h, agatur [illegible]

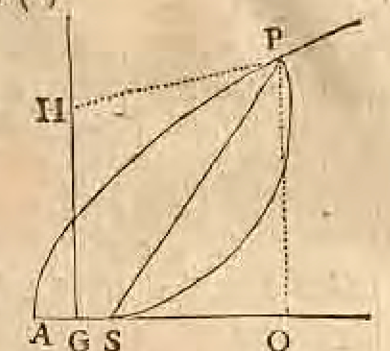
Liber Primus.

SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus aſſignatum. (f)



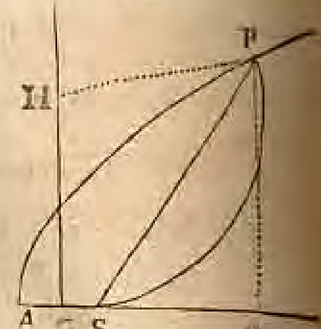
(t) Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis parabolæ, ſitque $4AS \times M$ æquale areæ parabolicæ abcindendæ *APS*, quæ radio *SP*, vel poſt exceſſum corporis de vertice deſcripta fuit, vel [illegible] appulſum ejus ad verticem deſ-

[illegible] B h, parallela, ob ſimilia triangula [illegible] f A P erit . . . . . f g : h g = A f : P A
[illegible] ſim. tri. f g i, f A Q . . . . g i : f g = Q A : A f
[illegible] ſim. tri. g h i, A K M . . . . h g : g i = A K : A M
[illegible] ſim. tri. A K L, P A R . . . . A K : A L = P A : P R
[illegible] ſim. tri. f Q i, f P h, ... f h : f i = P h : Q i;
[illegible] ob ſim. tri. f h i, A L N,
[illegible] f i = A L : A N.
[illegible] A L : A N = P h : Q i
[illegible] A L : A N = P h − A L : Q i − A N
[illegible] quia A L = R h eſt A L : A N = P R : Q i − A N
[illegible] per compoſitionem rationum & ex æquo A K : A N = Q A × A K : A M × (Q i − A N)
[illegible] A K × A M : A N × A M = Q A × A K × A M × Q i − A N, ac proindè A M : [illegible] = Q A : Q i − A N, adeóque A M : [illegible] = Q M ſeu Q A + A M : Q i ſeu [illegible] − A N + A N. Quoniam igitur rectæ A N, [illegible] ſunt parallelæ (per conſtr.) patet [illegible] M, N, i, eſſe in unâ rectâ, atque [illegible] eſt prima pars conſtructionis Newtonianæ quæ erat demonſtranda.

[illegible] illius pars facilè oſtenditur. Nam [illegible] (ead. fig. Newt.) junctâ P i, erit (per [illegible]) triangulum P i H, ſuper rectâ E i [illegible] conſtructum ſimile triangulo f i g, ad cujus angulos i & g, ductæ ſunt ex puncto [illegible] rectæ E i, E g; quare (356), ſi per punctum P agatur recta P Q, quæ cum rectâ E g, contineat angulum P Q E æqualem angulo f i g, recta illa P Q, producta tanget angulum f, trianguli f i g, ſeu trapezii f g h i. Q. e. D.

(f) 358. Newtonus in hâc totâ ſectione ſupponit corpus in trajectoriâ conicâ datâ ità moveri, ut radiis ad trajectoriæ umbilicum ductis areas ſeu ſectores deſcribat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phenomenis lib. 3°. oſtendit. Prætereà ſupponit notum eſſe tempus quo corpus ex puncto trajectoriæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejuſdem trajectoriæ punctum datum pervenit, datamque eſſe aream ſeu trajectoriæ ſectorem huic tempori correſpondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoriâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrà quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoriæ punctum attingit; nam cum ſint areæ temporibus proportionales; dato tempore quovis, datur area hoc tempore deſcripta, & viciſſim datâ areâ deſcriptâ datur tempus quo deſcribitur.

(t) * Sit S umbilicus, & A, vertex principalis parabolæ, datumque ſit tempus quo



cribenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale $3M$, & circulus centro H, intervallo HS descriptus secabit parabolam in loco quæsito P. Nam, demissâ ad axem perpendiculari PO & ductâ PH, (u) est $AGq+GHq$ $(=$(x)$\,HPq=\overline{AO-AG}:quad.+\overline{PO-GH}:quad.)=AOq+POq-2GAO-2GH\times PO+AGq+GHq$. (y) Unde $2GH\times PO\,(=AOq+POq-2GAO)=AOq+\frac{3}{4}POq$. Pro AOq scribe $AO\times\frac{POq}{4AS}$; & applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH\times AS\,(=\frac{1}{6}AO\times PO+\frac{1}{2}AS\times PO=\frac{AO+3AS}{6}\times PO=\frac{4AO-3SO}{6}\times PO=$ areæ $\overline{APO-SPO})$ $=$ areæ APS. Sed GH erat $3M$, & inde $\frac{4}{3}GH\times AS$ est $4AS\times M$. Ergo area abcissa APS æqualis est abscindendæ $4AS\times M$. *Q. E. D.*

Cor

corpus in parabolâ motum, ut modò exposuimus (358.) ex vertice A ad punctum P, aut ex puncto P ad verticem A pervenit, seu datum sit tempus quo sector quilibet APS describitur.

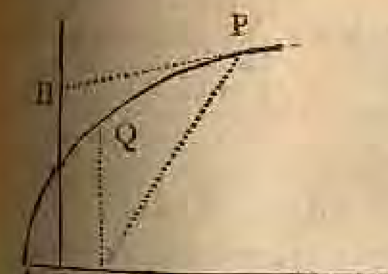
(u) * Est $AG^2+GH^2=HP^2$; nam $AG=GS$, $HP=HS=HA$, & angulus G rectus (per constr.) quare $HA^2=HP^2=AG^2+GH^2$.

(x) * $HP^2=\overline{AO-AG}^2+\overline{PO-GH}^2$. Nam ex puncto H, ad rectam PO demissa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipsi $GO=AO-AG$, & pars rectæ PO inter perpendicularem & punctum P intercepta æqualis erit $PO-GH$.

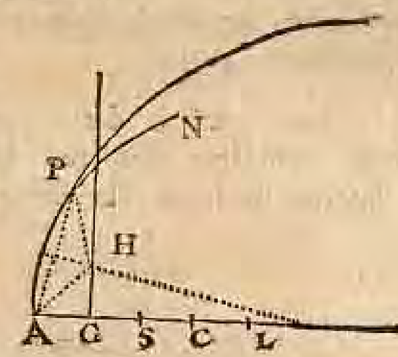
(y) * Unde sublatis utrinque quadratis AG^2+GH^2, & addito utrinque rectangulo $2GH\times PO$, est $2GH\times PO=AO^2+PO^2-2GAO$; quoniam autem in parabolâ latus rectum $=4AS=8AG$, est $8AG\times AO$ sive $8GAO=PO^2$, & $2GAO=\frac{1}{4}PO^2$, & $PO^2-2GAO=\frac{3}{4}PO^2$. Cum verò sit $4AS\times AO=PO^2$, adeóque $4AS\times AO^2=AO\times PO^2$, & $AO^2=\frac{AO\times PO^2}{4AS}$, erit igitur $2GH\times PO=\frac{AO\times PO^2}{4AS}+\frac{3}{4}PO^2$ & dividendo utrinque per $3PO$, fiet $\frac{2}{3}GH=\frac{AO\times PO}{12AS}+\frac{1}{4}PO$, ductisque omnibus terminis in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH\times AS=\frac{1}{6}AO\times PO+\frac{1}{2}AS\times PO=\frac{AO+3AS}{6}\times PO=\frac{\overline{4AO-3SO}}{6}\times PO$ nam $AS=AO-SO$ unde est $3AS=3AO-3SO$. Verum $\frac{4AO\times PO}{6}$ seu $\frac{2}{3}AO\times PO$, est area parabolica APOA, (Archimed. prop. 17. quadr. Parab. [illegible] Theor. IV. de Parab. pag. [illegible]) & $\frac{3SO\times PO}{6}$ seu $\frac{1}{2}SO\times PO$, est area trianguli PSO, ergò area sectoris parabolici APS, æqualis est $\frac{4AO-3SO}{6}\times PO$, atque $\frac{4}{3}GH\times AS=$ areæ APS; & $GH=3M$, (*per constr.*) &c.

Corol. 1. Hinc GH est ad AS, ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & (a) perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. (b) Et circulo ASP per corpus motum P perpetuo transeunte, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus



(a) * Sit perpendiculum illud SQ, erit area ASP, ad aream ASQ, ut $\frac{4}{3}GH\times AS$, ad $\frac{4}{3}AS\times SQ$ (Theor. IV. de Par. p. 133.); sed ex naturâ Parabolæ (Vid. Cor. 2. Theor. I. de Par. p. 131.) SQ æqualis dimidio lateri recto $=2AS$, ergo area ASP est ad aream ASQ, seu tempus per AP ad tempus per AQ, ut $\frac{4}{3}GH\times AS$ ad $\frac{4}{3}AS^2$, hoc est, ut GH ad AS. Dato igitur tempore quo describitur arcus AQ, & tempore quo describitur AP, per simplicem proportionem invenitur HG, & inde punctum P habetur.



(b) * Jungatur AP, & ad medium ejus punctum q, erigatur perpendiculum qL, axem secans in L, & quoniam (ex Dem.) est semper $HP=HA$, ideoque est AP chorda circuli cujus centrum est H. Itaque (per 1. 3i. Elem.) perpendiculum illud qL, rectæ GH, occurrit in H; & ob similitudinem triangulorum LGH, LqA, est $GH:qA$ seu $\frac{1}{2}AP=LG:Lq$. Sumatur $AC=2AS$ dimidio nempè lateris recti parabolæ & centro C, & intervallo CA, describatur circulus AN, hic parabolam osculatur in A (241); coeuntibus verò punctis P & A, H & G, coeunt etiam L & C, fitque $Lq=LA=CA=2AS=4GS$, & $LG=CG=3GS$, atque arcus AP æqualis chordæ AP, (Lem. VII.); undè cum in proportione superiori sit $GH:\frac{1}{2}AP=LG:Lq$ erit in hoc casu $GH:\frac{1}{2}AP=3GS:4GS$

 hoc

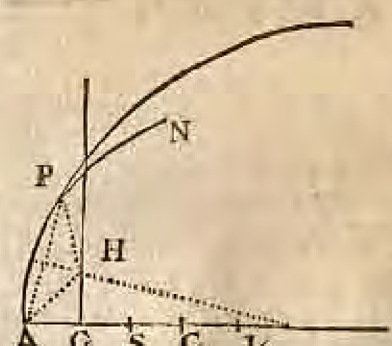
pus habuit in vertice A ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P, eâ cum velocitate quam habuit in vertice A, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versâ inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

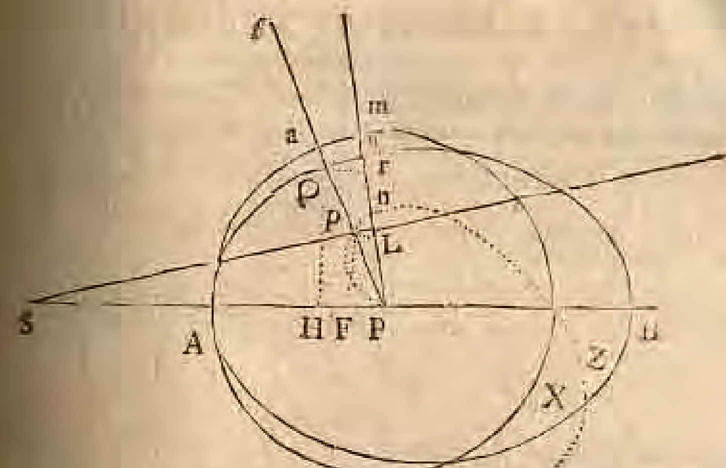
([c]) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, per-gat-



hoc est, G H : A P = 3 : 8. Verùm ob motum æquabilem & æquidiuturnum per nascentes A P, G H, velocitas puncti H in G, est ad velocitatem corporis P in A ut G H ad A P, & quoniam (ex Dem.) est semper $\frac{4}{3}$ AS × GH æqualis areæ A P S, & $\frac{4}{3}$ A S, est quantitas constans, erit semper G H, ut area A P S, hoc est, ut tempus quo punctum H, percurrit G H, estque proinde motus illius æquabilis & velocitas ubique eadem. Quare velocitas puncti H, est ubique ad velocitatem quam habet corpus P in A, ut nascens G H, ad nascentem A P, hoc est, ut 3. ad 8. Q. e. D.

(c) 359. Intrà ovalem A C B A detur punctum quodvis P, circà quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta infinita P S, uniformi cum motu, ità ut punctum datum A illius lineæ circuli A a m X arcus æquales æqualibus temporibus describat, & intereà in rectâ illâ P S, exeat punctum mobile p de polo P, pergatque semper in eâdem rectâ P f cum velocitate quæ sit ut rectæ illius intrà ovalem quadratum, hoc est, cum linea P S pervenit ad situm P f, & punctum mobile p ad p, velocitas puncti p sit ut quadratum rectæ P Q inter polum P & ovalem A Q C B contentæ, hoc motu punctum illud p describet spiralem P p n Z, gyris infinitis.

gatque semper eâ cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet spiralem gyris infinitis. Jam si areæ ovalis à rectâ illâ abscissæ portio per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti à polo, ([d]) quæ huic areæ proportionalis est, ideoque omnia spiralis puncta per æquationem fini-

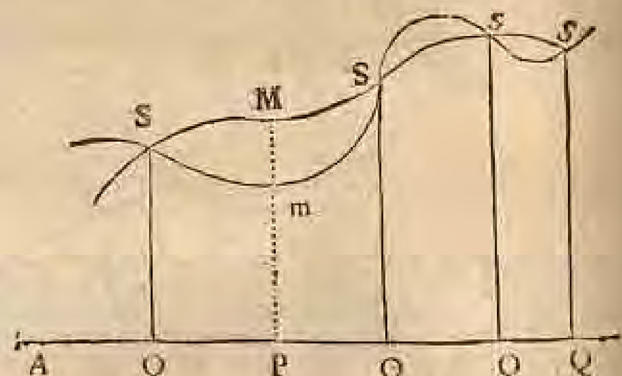


([d]) 360. His suppositis erit semper recta P p ut area P A Q P; nam circulus A a m X divisus intelligatur in arcus innumeros æquales ut a m, & ductis radiis P Q, P q spirali, circulo & ovali occurrentibus in p & n, a & m, Q & q, demittantur ex punctis Q & p, ad P f perpendicula Q r, p L, & eodem tempore quo punctum a, percurret arcum a m, punctum p percurret rectam L n; [illegible] nascente arcu a m, erit L n ut velocitas puncti p in rectâ P f, hoc est, (ex Hyp.) ut quadratum rectæ P Q; [illegible] ob triangula similia P a m, P Q r [illegible] $Pa : PQ = am : Qr = \frac{PQ \times am}{Pa}$, ac [illegible] sectoris nascentis P Q q area $\frac{1}{2}$ $Qr \times PQ = \frac{PQ^2 \times am}{2Pa}$. Cum igitur a m & $2Pa$, sint quantitates constantes (ex hyp.) erit sector P Q q, nascens seu fluxio areæ P A Q ut PQ^2, atque ideò ut nascens L n, seu ut fluxio rectæ P p, & hinc tota area fluens P A Q, erit ut tota recta fluens P p, (coroll. Lem. IV.) Q. e. D.

361. Puncta p & Q referantur ad rectam A B, positione datam demissis ad A B perpendicularibus Q H, p F sitque area P A Q, æqualis quantitati finitæ E ex lineis variabilibus P H, Q H & aliis constantibus quomodolibet compositæ, & quoniam linea P p areæ P A Q seu quantitati finitæ E proportionalis est (360) linea illa exprimi poterit per factum ex quantitate E in quantitatem constantem B, eritque $Pp\,E = \times B$ æquatio finita. Verùm ob similia triangula P F p, P H Q & angulum ad H rectum, $Pp : pF = PQ$, seu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : QH$, & $Pp : PF = PQ$ seu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : PH$, & præte-reà

finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis, numero infinitis, & (e) æquatio, quâ intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones

reâ ex naturâ ovalis A Q C B, datur alia æquatio inter P H & Q H, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ simul quinque tantum variabiles, nimirum P p, P F, p F, P H, Q H continent, quæque proinde ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variabiles P F, p F reperientur, adeoque per hanc æquationem finitam omnia spiralis puncta inveniri poterunt, & propterea rectæ cujusvis S p positione datæ intersectio p cum spirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ S p, S B positione datæ sint, linea S P magnitudine & triangulum S P F specie datur, & hinc datur ratio lineæ S F ad S P ∓ P F ad F p, & nova invenitur æquatio inter P F & F p; per hanc igitur æquationem & per alteram quæ ad spiralem est, determinabuntur P F, & F p, punctumque intersectionis p invenietur per æquationem finitam.



(e) 362. Lineæ duæ SMS, S m s se mutuò intersecantes in punctis S, s ad eandem rectam A Q positione datam referantur, sintque A Q, A P abscissæ communes, & Q S, P M, P m ad eas ordinatæ; quoniam in communibus linearum S M s, S m s, intersectionibus S, S, ordinatæ P M, P m sunt æquales, si in duabus ad lineas S M s, S m s æquationibus, manente abscissâ communi, loco ordinatarum P M, P m, eadem scribatur littera, v. gr. y, & deindè ex illis æquationibus eliminetur littera quæ abcissam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex solâ y, & constantibus composita. Porrò hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem S Q, seu primam intersectionem S, quam secundam aut tertiam &c. determinabit, cum sit eadem omnium lex & conditio, idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatas Q S, omnesque intersectiones S, simul complecti & indifferenter exhibere, & ità tot radices seu ipsius y valores reddere quot sunt communes ordinatæ seu intersectiones; æquatio autem tot dimensiones habet quot radices; Si itaque linearum S M s, S m s intersectiones S, s, sunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita est; at si fuerint intersectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimensionum & radicum infinita. * Lem.

num quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, quâ intersectio altera etiam inveniatur. (f) Quoniam duarum sectionum conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, quâ omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones sectionum conicarum & curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & intersectiones duarum curvarum tertiæ potestatis; quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. (g) Id nisi necessario fieret, reducere liceret, problemata omnia solida ad plana, & plusquam solida, ad solida. (h) Loquor hic de

(f) * Exempli causâ. Sint $ap + px = yy$, & $bx - xx = yy$, æquationes ad parabolam & circulum, & invenietur $x = \frac{yy - ap}{p}$, & $\frac{byy - bap}{p} - \frac{y^4 + 2apyy - aapp}{p^2} = yy$, æquatio quatuor dimensionum, quoniam quatuor esse possint parabolæ & circuli intersectiones. Sint $ap^2 + p^2x = y^3$, & $bx - xx = y^2$ æquationes ad parabolam 3æ. potestatis & ad circulum, erit $x = \frac{y^3 - ap^2}{p^2}$ & $\frac{by^3 - bap^2}{p^2} - \frac{y^6 + 2ap^2y^3 - a^2p^4}{p^2} = yy$ æquatio sex dimensionum quod esse possint intersectiones sex, & ità de cæteris. Generatim vero tot esse possunt curvarum duarum intersectiones quot sunt unitates in facto ex potestatis curvæ unius indice seu exponente in alterius exponentem; index autem potestatis curvæ idem est cum numero dimensionum æquationis ad illam curvam.

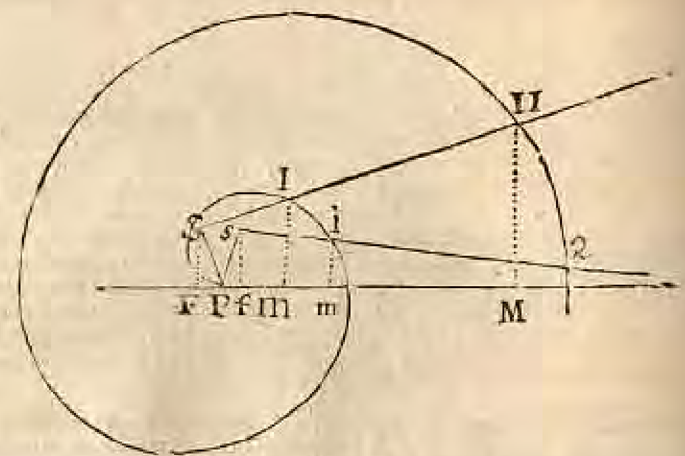
(g) * Nam in solidorum problematum constructione duæ adhibentur sectiones conicæ quarum intersectiones, seu ordinatæ duabus coni sectionibus communes, problematis solutionem seu ultimæ æquationis radices suppeditant. Quarè si hujusmodi intersectiones vel ordinatæ communes generaliter possent per æquationem quadraticam inveniri, problemata solida per æquationes duarum dimensionum solvi ac construi possent, atque ità ad plana reducerentur, eâdemque ratione plus quam solida ad solida, indeque ad plana revocarentur.

(h) Nonnunquam proposita ad curvam æquatio ad inferiorem potestatem aut in duas æquationes inferioris potestatis resolvi potest. Sic æquatio $ax^3 - a^2x^2 - bx^2y + axy^2 + abxy - by^3 = o$ resolvi potest in duas $xx - ax + yy = o$, & $ax = by = o$ quarum prior est ad circulum, posterior ad parabolam. Parabolæ autem & circuli cum lineâ quavis intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt.

Lem. I.

Sit

de curvis poteſtate irreducibilibus. Nam ſi æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem poteſtatem reduci poſſit: curva non erit unica, ſed ex duabus vel pluribus compoſita, quarum interſectiones per calculos diverſos ſeorſim inveniri poſſunt. Ad eundem modum interſectiones binæ rectarum & ſectionum conicarum prodeunt ſemper per æquationes duarum dimenſionum, ternæ rectarum & curvarum irreducibilium tertiæ poteſtatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & curvarum irreducibilium quartæ poteſtatis per æquationes dimenſionum quatuor, & ſic in infinitum. Ergo rectæ & ſpiralis interſectiones numero infinitæ, cum curvâ hæc ſit ſimplex & in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimenſionum & radicum infinitas, quibus interſectiones omnes poſſunt ſimul exhiberi. Eſt enim eadem omnium lex & idem calculus. (i) Nam ſi à polo in rectam illam ſecantem demittatur perpendiculum, & perpendi-



(i) * Sit polus P, ſecans SI, II, ad eam ex polo normalis Ps, interſectio prima in i, ſecunda in II, &c. circà polum P, revolvatur perpendiculum Ps, unà cum ſecante SI, II ad illud ſemper normali, ubi perpendiculum pervenit ad ſitum Ps, & ſecans SI, II ad ſitum si2, interſectio prima I, percurſo arcu Ii, pervenit ad i, & poſt integram revolutionem cum si2, redit ad ſitum SI, II, prima interſectio I, ſeu i, pervenit ad II, & fit ſecunda, & poſt duas revolutiones fit tertia & ſic deinceps. Ex punctis S, s, ad rectam PM infinitam & poſitione datam demittantur perpendicula SF, sf; manente ſecantis SI, II, poſitione, [illegible] conſtantes ſunt rectæ SF, FP, [illegible] quibus illa poſitio determinatur, & [illegible] ex I ad PM perpendiculari Im [illegible] æquatio aliqua inter Pm vel Im [illegible] datas SP, FP, SF, quà interſectio I [illegible]; ubi verò ſecans SIII, pervenit ad ſitum si2, manente ſecantis si2 [illegible], datur æquatio inter im vel Pm [illegible] sP, ſeu SP, Pf, sf, & æquatio [illegible] priori diverſa non eſt, niſi rationes quantitatum FP FS, quæ mutatæ ſunt [illegible] fs, per quas ſecantis si2, poſitio [illegible], cum utraque æquatio in ſitu [illegible] & ſitu si2, ab æquatione ad ſpiralem [illegible] eadem ſemper manet & ab æquatione ſecantis poſitionem determinantes [illegible] Quoniam igitur lineæ fs, [illegible] poſt primam revolutionem ac proindè [illegible] ſingulas redeunt ad magnitudines primas FS, FP interſectione prima in ſecundam tranſeunte, ſecundâ in tertiam, & ſic deinceps, æquatio inter IIM, vel PM, & datas PF, PS, SF, redibit ad formam primam quam habebat æquatio inter Im, vel Pm, & eaſdem datas quantitates PF, PS, SF, adeóque una eademque æquatio exhibebit interſectiones omnes I, II, &c., ſeu valores Im, IIM, &c., proptereà radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi poſſint.

[illegible]culum illud unà cum ſecante revolvatur circa polum, interſectiones ſpiralis tranſibunt in ſe mutuo, quæque prima erat ſeu proxima, poſt unam revolutionem ſecunda erit, poſt duas tertia, & ſic deinceps: nec interea mutabitur æquatio niſi pro mutata magnitudine quantitatum per quas poſitio ſecantis determinatur. Unde cum quantitates illæ poſt ſingulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit interſectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi poſſunt. Nequit ergo interſectio rectæ & ſpiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abciſſa, poſſit per talem æquationem generaliter exhiberi.

(k) Eodem argumento, ſi intervallum poli & puncti, quo ſpiralis deſcribitur, capiatur Ovalis perimetro abſciſſæ proportionale, probari poteſt quod longitudo perimetri nequit per finitam æqua-

(k) * Eâ enim ratione ſpiralis deſcribetur gyris infinitis ad quam proindè æquatio erit numero dimenſionum infinita, quæ quidem finita deberet eſſe, ſi longitudo perimetri ovalis pro lubitu abſciſſa ſeu intervallum puncti ſpiralem deſcribentis & poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi poſſet.

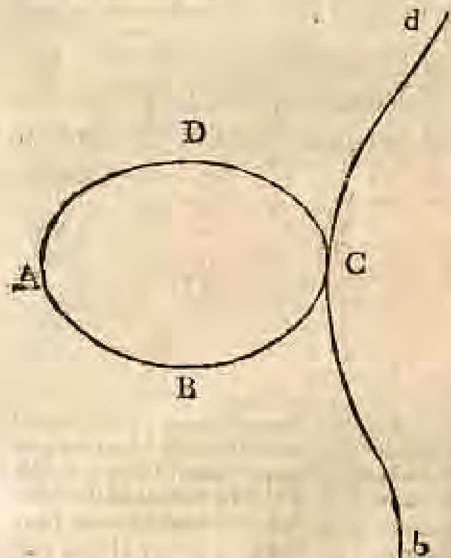
* Ova-

De Motu Corporum.

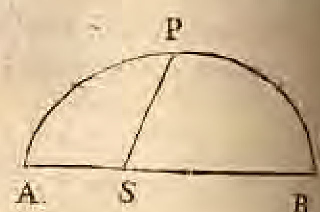
æquationem generaliter exhiberi. (l) De ovalibus autem hîc loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

Corollarium.

(m) Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices, trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmeticè rationales vel irrationales. Aream igitur ellipseos tempori proportionalem abscindo per curvam geometricè irrationalem ut sequitur.



(l) * Ovalem ABCD tangat in C curva conjugata bCd, cujus rami Cb, Cd in infinitum pergant, pro hujusmodi ovalibus non valet Newtoni demonstratio. Supponit enim circà punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ sit ad peripheriam ovalis terminata, & abscindat areas sibi proportionales; si autem ovalis tangatur à figurá conjugatá bCd, cujus rami in infinitum pergunt, evidens est lineá rectá intrà ovalem revolvente non percurri totam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis simplicem spiralem describi.

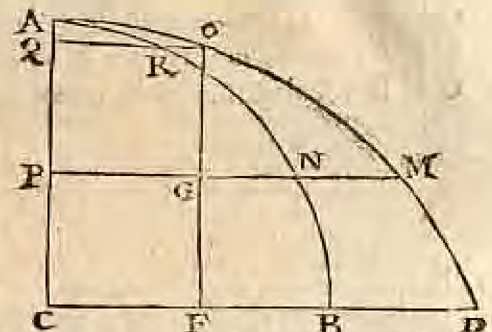


(m) 363. Sit Ellipseos APB, axis AB, umbilicus S, radius vector SP, itaque sint totius Ellipsis area & tempus periodicum, sitque tempus periodicum ad tempus per arcum AP, ità area totius ellipseos ad aream sectoris APS, obtinebitur æquatio inter aream APS & tempus quo illa describitur. Unde si possit inveniri posset æquatio finita inter aream indefinitam APS & radium vectorem SP ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis AP, & radium vectorem SP, qui ita ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et viceversâ, si ex tempore quo arcus AP describitur, radii vectoris SP longitudo per æquationem finitam posset determinari, ope hujus æquationis & superioris proportionis inter tempora & areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet ASP & radium vectorem SP ac datas quantitates, quod impossibile esse demonstratum est; & propterea longitudo (ac proindè positio quæ ex longitudine data est) radii vectoris SP, per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinatarum & abscissarum rectarum relatio æquatione finitá exprimi potest, quarumque proinde puncta omnia per hasce rectarum linearum rationes complicatas determinari possunt. Si in æquatione ad curvam $ax^m + by^n +$ &c. $= 0$ numerus terminorum finitus sit & exponentes m, n, rationales fuerint, curva erit geometricè rationalis contrà si numerus terminorum infinitus fuerit, & summari nequeat, aut si exponens aliquis irrationalis fuerit, curva est geometricè irrationalis.

364. Circuli (adeóque & Ellipsis) quadraturam seu rectificationem indefinitam æquatione exhiberi non posse demonstravit Saurinus in Commentariis Parisiensibus an. 1720. illius demonstrationem ut pote faciem & brevem referemus. In quadrante circuli CAB, & ex puncto quovis N arcûs AB demittatur ad radium AC perpendicularis NP, demonstrandum est arcûs AN, & rectarum AP, PN relationem nullâ æquatione finitâ posse exprimi. Descripta intelligatur curva AOMD cujus hæc sit natura ut recta MP ex puncto quovis M ad radium AC perpendiculariter demissa, sit æqualis arcui abscisso AN, ope curvæ AMD arcus AN in ratione quavis datá rectæ PG ad PM dividi potest in R; nam si per punctum G ducatur recta Go, ipsi PM normalis & curvæ AMD occurrens in o, atque ex puncto o, ducatur ad AC perpendicularis arcum AN secans in R, erit AR = Qo, adeóque AR : AN = PG : PM. Jam verò demonstravit Clariss. Hospitalius prop. 113. lib. 10, Sectionum Conicarum,

Liber Primus.

PROP.



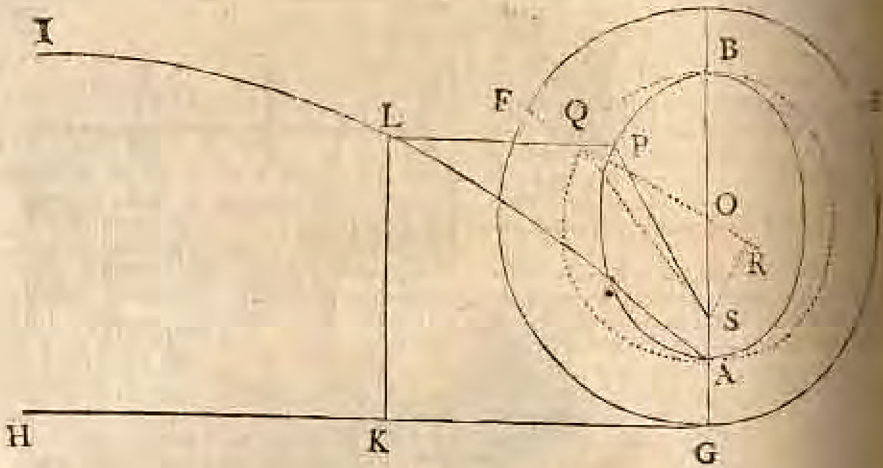
quod si arcus AN sit in partes æquales dividendus quarum una sit AR, æquatio quá determinatur partis unius Chorda AR, tot dimensiones obtinet quot sunt in arcu AN, partes æquales, atque adeò si dividendus sit arcus AN in ratione indefinitá rectæ PG ad PM, æquatio illa finita esse nequit. Ergo curva AMD, quá arcus quilibet AN in ratione quávis PG ad PM per eandem semper constructionem dividitur geometricè, rationalis non est; sed si arcus AN & rectarum AP, PN relatio posset æquatione finitá exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abscissæ AP ad ordinatam PM, ac proinde curva AMD esset geometricè rationalis. Ergo rectificatio arcûs AN, æquatione finitá generaliter exhiberi non potest. Q. E. D.

365. Hinc patet curvas omnes quarum descriptio pendet à quadraturá vel rectificatione circuli & ovalium indefinitá quales sunt spirales, quadratrices, trochoides esse geometricè irrationales. Ex demonstratis autem minimè sequitur circuli & ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam seu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aut portionis illius determinatæ impossibilem esse.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos APB sit A vertex principalis, S umbilicus, & O centrum, sitque P corporis locus inveniendus. Produc OA ad G, ut sit OG ad OA ut OA ad OS. Erige perpendiculum GH, centroque O & intervallo OG describe circulum GEF, & super regula GH, ceu fundo, progrediatur rota GEF revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo A



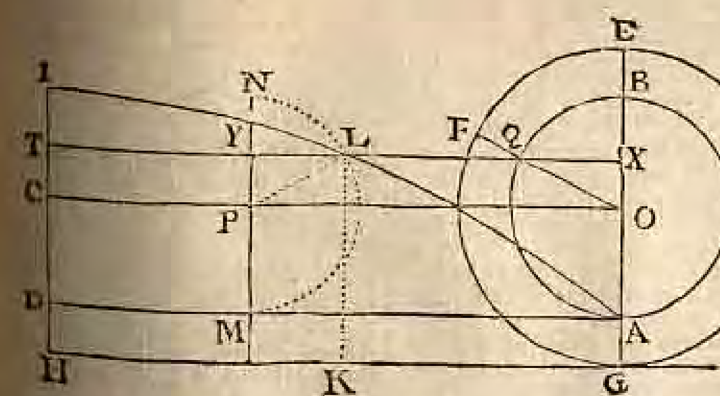
describendo trochoidem ALI. Quo facto, cape GK in ratione ad rotæ perimetrum $GEFG$, ut est tempus, quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum AP, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendiculum KL occurrens trochoidi in L, & acta LP ipsi KG parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito P.

Nam centro O, intervallo OA describatur semicirculus AQB, & arcui AQ occurrat LP si opus est producta in Q, junganturque SQ, OQ. Arcui EFG occurrat OQ in F, & in ca-

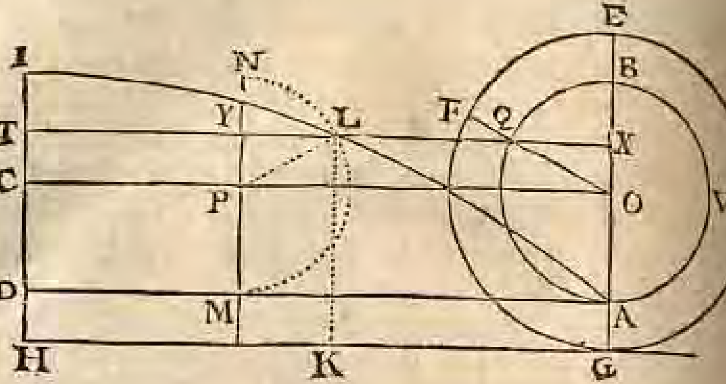
eandem OQ demittatur perpendiculum SR. (n) Area APS, est ut area AQS, id est, ut differentia inter sectorem OQA & triangulum OQS, sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2} OQ \times AQ$ & $\frac{1}{2} OQ \times SR$, hoc est, ob datam $\frac{1}{2} OQ$, ut differentia inter arcum AQ & rectam SR, ideoque (cum (p) eædem sint datæ rationes SR ad sinum arcus AQ, OS ad OA, OA ad OG, AQ ad GF, & divisim (q) $AQ-SR$ ad $GF-$sinu arcus AQ) ut GK differentia inter arcum GF & sinum arcus AQ. *Q. E. D.*

(n) 166. *Area APS est ut area AQS* [illegible] sed area AQS æqualis est *differentiæ inter sectorem O Q A & triangulum* [illegible] sector verò $OQA = \frac{1}{2} OQ \times AQ$, triangulum $OQS = \frac{1}{2} OQ \times SR$. Ergo ob datum $\frac{1}{2} OQ$, area AQS adeóque area APS est ut differentia inter arcum AQ & rectam SR ex foco S in radium QO perpendiculariter demissam.

(p) 167. Si ex puncto Q ad diametrum AB, demittatur perpendiculum seu sinus arcûs AQ, triangulum OSR, simile erit triangulo contento sub radio OQ sinu & cosinu arcûs AQ; unde erit SR ad sinum arcûs AQ, in datâ ratione OS ad OQ seu OA; sed (per constr.) $OS : OA = OA : OG$, & OA ad OG ut arcus AQ ad arcum GF, & divisim AQ $-$SR est ad GF$-$sinu arcûs AQ ut SR ad sinum arcûs AQ, sive in datâ ratione OS ad OA. Est igitur differentia inter arcum AQ, & rectam SR, adeóque & area APS, ut differentia inter GF, & sinum arcûs AQ.



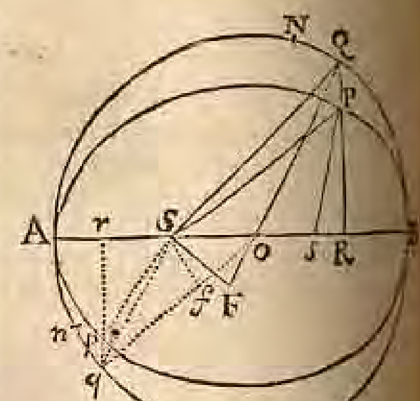
(q) Quod autem sit GK æqualis differentiæ inter arcum GF & sinum arcûs AQ facile est demonstrare. Sit enim HLI dimidia trochois semirevolutione rotæ GFE descripta, erit GH, æqualis semiperipheriæ GFE, & HI æqualis & parallela rectæ GB; Per puncta A, O, L agantur rectæ AD, OC, XT parallelæ & æquales rectæ GH, & trochois descripta intelligatur duplici motu circuli AVBQ, al-



altero quidem quo centrum O cum plano circuli uniformiter feratur per rectam O C, altero quo eodem tempore punctum A in circuli periferiâ uniformiter percurrat semiperiferiam AVB, & centrum O, circuli mobilis A V B sit in P quando punctum A pervenit in L & jam percurrit arcum ML; Quoniam in motu æquabili spatia eodem tempore percursa sunt in datâ ratione, erit recta O C (hoc est semicircumferentia rotæ G F E) quam centrum O percurrit, ad semiperiferiam A V B, quam eodem tempore percurrit punctum A, ut O P ad arcum M L, sed semiperiferia G F E est quoque ad semiperiferiam A V B, ut arcus G F ad arcum A Q seu æqualem M L, est igitur $GF = OP = YX$, ac proindè $YX - QX = YX - YL = LX = GK = GF - QX$ est vero Q X sinus arcus A Q, ergo est GK æqualis differentiæ inter GF & sinum arcus A Q. Q. e. D.

Itaque area A P S, est ut G K, adeóque area A P S, est ad aream semiellipsis A P B (vid fig. Newt.) ut G K ad G H, & area A P S, est ad aream totius ellipseos ut G K ad 2 G H, seu tempus per arcum A P, est ad tempus unius revolutionis in Ellipsi ut G K ad perimetrum rotæ. Si ergò capiatur G K ad rotæ perimetrum ut est tempus per A P, ad tempus periodicum & cætera fiant ut in Newtonianâ constructione, erit P locus corporis in Ellipsi. Ex demonstratis quædam deducuntur corollaria.

368. Cor. 1. Planeta revolvatur in El-



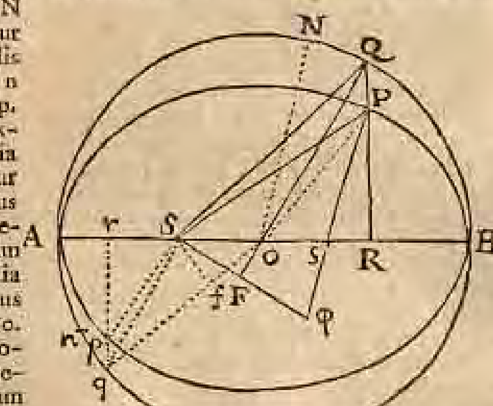
lipsi A P B vi tendente ad umbilicum S quem sol occupat, sitque linea apsidum seu axis major A B, centrum O, ac proindè excentricitas seu distantia centri O à sole S, S O; B aphelion seu punctum in orbitâ à sole remotissimum, A perihelion sive punctum soli proximum, locus planetæ in P; centro O radio O B describatur circulus B Q A qui dicitur circulus excentricus, & per P agatur recta Q R axi A B normalis & circulo occurrens in Q, junganturque S P (quæ dicitur intervallum) & S Q. Ex demonstratis (341) manifestum est aream S Q B esse ad aream totius circuli ut est area S P B ad aream totius ellipseos. Quare si area circuli B Q A rectâ S Q ex foco S ductâ in datâ ratione divisa fuerit, demisso ex puncto Q, perpendiculo Q R ellipsi occurrente in P, junctâ S P, erit etiam area ellipseos in eâdem datâ ratione divisa. Ut itaque rectâ ex umbilico S ductâ abscindatur ellipseos area data, seu quæ sit ad aream totius ellipseos in ratione datâ; sufficit rectam S Q, in circulo ducere quæ aream circuli in illâ datâ ratione secet.

369. Cor. 2. In radium Q O si opus est productum, ex umbilico S demittatur perpendiculum S F; & erit, (ex Dem.) area S Q B ut arcus $BQ +$ recta S F si planeta ab aphelio B ad perihelium A pergit per B Q A, sed si planeta à perihelio A ad aphelion B feratur per A p B, area A S q, ut arcus $Aq -$ recta S f; Quod si capiatur arcus B N, vel A n, proportionalis tempori quo planeta percurrit arcum B P, vel A p, erit $BQ + SF = BN$, vel $Aq - Sf = An$, adeóque $SF = QN$, vel $Sf = qn$. Et si datus fuerit arcus B Q vel A q, & priori addatur arcus N Q vel posteriori dematur arcus n q æqualis rectæ S F vel S f, erit arcus B N proportionalis tempori quo planeta fertur per arcum B P, arcus A n proportionalis tempori per arcum A p, & arcus B A n proportionalis tempori per arcum B P A p.

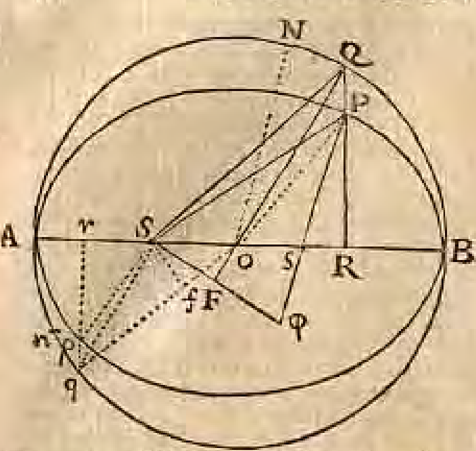
370. Arcus B Q dicitur anomalia excentri, angulus B S P sub quo distantia planetæ ab aphelio B P ex sole videtur anomalia vera vel coæquata seu angulus [illegible] dicitur; tempus verò quo planeta ab aphelio B ad orbitæ suæ punctum [illegible] P digreditur, anomalia media [illegible] simplex appellatur. Unde si tempus periodicum tota circuli peripheriâ seu 360. gradibus exprimatur, erit arcus B N anomaliæ mediæ æqualis, seu anomaliam mediam exhibebit; cum sit B N ad totam peripheriam ut tempus per B P ad tempus periodicum (369). Differentia inter anomaliam mediam & veram seu differentia inter angulum N O B & angulum P S B æquatio centri seu prosthaphæresis vocatur.

371. Ex datâ anomaliâ verâ seu angulo B S P, facile invenitur ei congrua anomalia media, seu arcus B N, quoniam enim assumpta rectâ S R pro sinu toto; est P R tangens anguli P S R, & Q R tangens anguli Q S R, atque P R ad Q R ut minor axis ellipseos ad majorem; si fiat ut axis minor ad majorem, ita tangens anguli dati P S B ad 4^{um}., invenietur tangens anguli Q S B sive Q S O, ac proindè angulus Q S O; hinc datis in triangulo S Q O, duobus lateribus S O, O Q cum angulo Q S O, invenietur angulus S O Q, & illius ad duos rectos complementum Q O B seu anomalia excentri BQ dabitur. Fiat ut QO, ad S O, ità $57^{\circ}.29578$ (qui arcus est radio æqualis) ad quartum & dabitur arcus æqualis S O in gradibus gradûsque partibus decimalibus, dicatur hic arcus *B*, & quoniam est S O ad S F, ut O Q ad QR, seu ut radius ad sinum anguli QOB sive arcus BQ, fiat ut radius ad sinum arcûs BQ, ità S O sive arcus *B*, ad 4^{um}., & dabitur in gradibus arcus in peripheriâ BQA sumendus æqualis rectæ S F; cumque sit recta S F æqualis arcui Q N, (369.) dabitur arcus Q N, & proinde B N anomalia media, atque hinc facile est anomaliarum & æquationum centri tabulas construere.

372. In orbitis planetarum non admodùm excentricis, datâ anomaliâ mediâ facile per approximationem duabus methodis sequentibus invenitur anomalia coæquata.

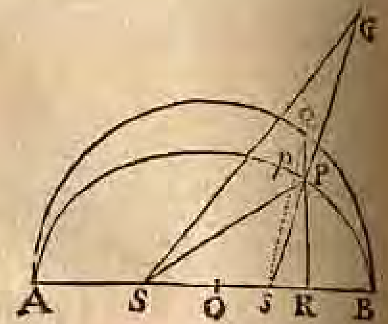


Methodus Wardi. Ad secundum focum s, fiat angulus B s P, æqualis anomaliæ mediæ, jungatur S P, erit angulus PSB, anomalia vera, quod quidem ipse Wardus assumebat ut verum ex Hypothesi merâ, sed quod etiam ex suppositione areas esse temporibus proportionales deducitur, saltem quam proximè: est enim angulus N O B sive anomalia media, æqualis angulis Q O B & NOQ, & QOB sive anomalia excentri, est æqualis angulis Q S B (sive P S B neglecto QSP) & SQO, ergo angulus NOB est æqualis

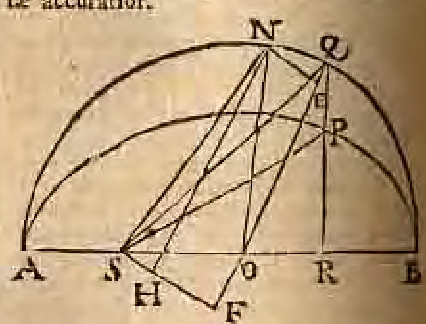


lis angulis PSB, SQO, NOQ quibus etiam quam proximè æqualis est angulus PsB, nam coeuntibus focis S & s cum centro O, puncta Q & P etiam coeunt & angulus SPO angulo SQO est quam proximè æqualis; pariter ut QO proximè coincidit cum PO fingatur SF esse perpendicularem in ipsam PO, & produci donec cum Ps producto in φ concurrat, erunt quam proximè OF, sφ parallelæ, ideoque ob æquales SO, Os, æquales erunt SF & Fφ, SP & Pφ, ut & anguli SPF & FPφ sive OPs, sed ob SF æqualem QN & SQ sive SP propè æqualem OQ est angulus SPF sive OPs prope æqualis angulo NOQ: ergo totus angulus SPs est æqualis angulis SQO & NOQ simul sumptis, & cum angulus PsB sit æqualis angulis PSB & SPs, æqualis prope erit angulis PSB, SQO, NOQ sicut angulus NOB, ergo angulus PsB est quam proximè anomalia media cujus anomalia coæquata est PSB.

Dato autem angulo BsP, angulum PSB, ità quærit Wardus. Producatur sP, ad G, ut sit $PG = PS$, & jungatur SG, erit $sG = SP + Ps = AB$ (ex nat. Ellips.) adeoque in triangulo GsS, datis lateribus Gs, Ss, angulo SsG dantur anguli SGs ($= GSP$, ob $SP = PG$) & GSs, unde cognoscetur angulus PSs sive PSB æqualis nempe differentiæ angulorum GSs, GSP, quare in triangulo SPs, datis angulis duobus PsS, PSs, angulo SPs, qui est summa angulorum GSP, SGP, & latere Ss, invenietur latus SP seu intervallum.



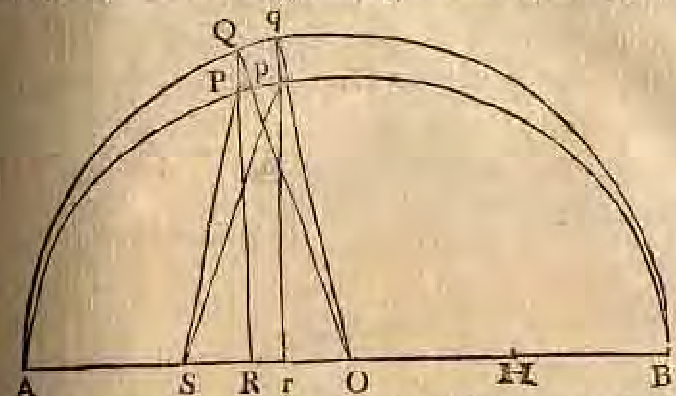
Ubi excentricitas paulo major est, Wardi methodum ità corrigit Bulliadus. Per punctum P Wardi methodo determinatum agatur QR axi AB normalis, & excentrico occurrens in Q, jungaturque sQ, orbitam secans in p, erit p, locus planetæ accuratior.



Methodus Cassini. Omnibus positis (ut suprà num. 369.) jungantur SN, ON & agantur NH rectæ QF parallela & lineæ SF occurrens in H, & NE parallela SF rectæ QF occurrens in E, erit $NE = HF$ sinus arcûs NQ; cumque sit $SF = NQ$ (369) erit SH differentia inter arcum NQ & ipsius sinum NE; si excentricitas SO exigua fuerit erit ferè $NQ = NE = HF = SF$ & proinde SN parallela FQ, ideoque angulus SNO, æqualis angulo NOQ. Porro in triangulo SNO, datis duobus lateribus NO, SO, & angulo intercepto SON (complemento nempe anomaliæ mediæ datæ ad duos rectos) invenietur angulus SNO seu NOQ, & ipsius mensura nempe arcus NQ; & inde innotescet anomalia excentri BQ; Hinc in triangulo SQO, datis lateribus SO, OQ & angulo SOQ, invenie-

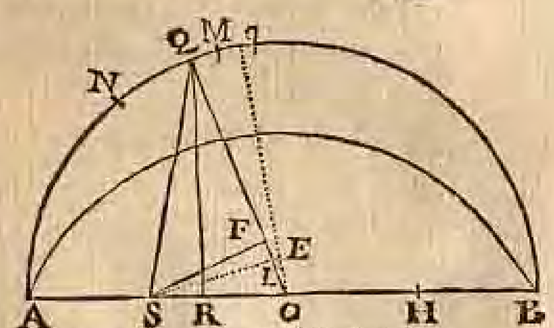
Scholium.

(r) Cæterum, cum difficilis sit hujus curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57.29578, quem



arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia *SH* ad ellipseos diametrum *AB*; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eâdem ratione inversè. Quibus semel inven-

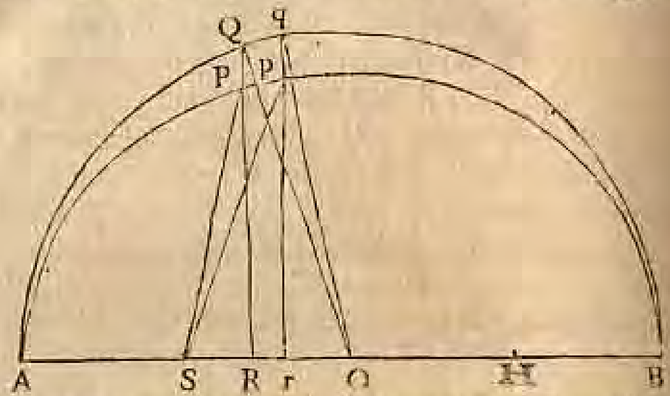
tur angulus QSO, & sumptâ SR pro sinu toto, erit QR ad PR seu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati QSB ad tangentem anguli quæsiti PSB, qui ità obtinebitur. Hæc satis sunt in orbitis planetarum non valde excentricis, sed in orbitis Mercurii & Martis quarum major est excentricitas, ità invenitur arcus NQ. Ex datis in triangulo SNO, lateribus SO, NO, & angulo SON, inveniuntur latus SN, & angulus SNO; deindè quæritur in partibus decimalibus radii ON differentia inter arcum qui metitur angulum SNO, & ejus sinum quæ citrà errorem sensibilem supponi potest æqualis rectæ SH, seu differentiæ inter arcum NQ anguli NOQ mensuram & ejus sinum NE. Sit ille decimalium numerus *A*. Inveniatur numerus decimalium radii SN quem tunc linea SH continet dicendo ut SN ad NO sic *A* ad numerum quæsitum *B*, & quoniam in triangulo rectangulo SHN est SN ad sinum totum ut SH sive *B* ad sinum anguli SNH, invenietur ergò angulus SNH, ex angulo invento SNO subducendus, ut relinquatur angulus HNO, seu æqualis NOQ, sive arcus NQ.



(r) 373. Sit axis major ellipseos AB, centrum O, umbilici S & H, & feratur planeta à perihelio A ad aphelium B, radio AO describatur circulus excentricus AQB; quoniam radius circuli æqualis est arcui graduum 57.29578, si fiat AB ad SH seu QO ad SO, ut arcus vel angulus 57.29578, ad arcum *B*, erit *B* arcus æqualis rectæ SO. Cognoscitur arcus AN tempori proportionalis, & dicatur *N*; deindè per methodum Wardi aut Cassini vel aliâ ratione inveniatur arcus

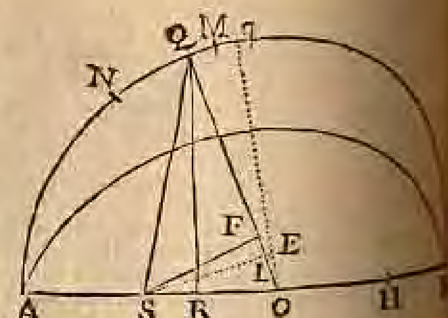
 AQ,

ventis, problema deinceps confit per fequentem analyfin. Per conftructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognofcatur corporis locus P proximus vero ejus loco p. Demiffâque ad axem ellipfeos ordinatim applicatâ PR, ex proportione diametrorum ellipfeos, dabitur circuli circumfcripti AQB ordinatim applicata RQ, quæ finus eft anguli AOQ exiftente AO radio, quæque ellipfin fecat in P. Sufficit angulum illum



rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognofcatur etiam angulus tempori proportionalis, id eft, qui fit ad quatuor rectos, ut eft tempus, quo corpus defcripfit arcum Ap, ad tempus

AQ, proximè æqualis anomaliæ excentri à perihelio A fumptæ, erit arcus NQ æqualis rectæ SF ex umbilico S in radium QO perpendiculariter demiffæ (369). fiat ut SH ad AB five ut SO ad QO, ità radius R ad longitudinem quandam L, & erit $QO = \frac{SO \times L}{R}$. & quoniam triangulum SOF, fimile eft triangulo QOR erit $QO : QR = SO : SF$, hoc eft, radius ad finum anguli QOA, ut arcus B ad alium arcum D qui erit æquales rectæ SF: Si itaque arcus AQ rectè affumptus fuiffet foret arcus D æqualis arcui NQ (369): Si verò arcus AQ accuratus non eft, capiatur $NM = D$, punctum M cadet fuprà vel infra punctum Q. Sit anomalia excentri accurata (quæ eft incognita) Aq, & in radium qO cadat perpendiculum SE erit æquale Nq



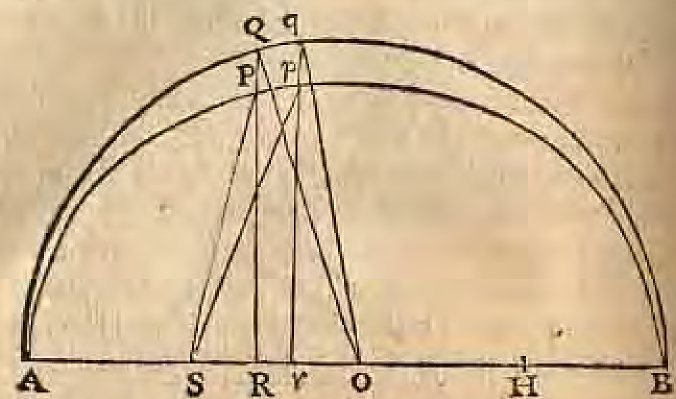
(369) undè SE−SF, hoc eft ferè IE = $Nq - NM = Mq = Qq - QM$. Quoniam verò angulus QOq, parvus eft, erit OI : Oq five $OQ = IE : Qq = Qq - QM : Qq$. Undè $OQ - OE : OQ = QM : Qq$.

revolutionis unius in ellipfi. Sit angulus ifte N. Tum capiatur angulus D ad angulum B, ut eft finus ifte anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum $N - AOQ + D$, ut eft longitudo L ad longitudinem eandem L cofinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus ifte recto minor eft, auctam ubi major. Poftea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut eft finus anguli $AOQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - AOQ - E + F$ ut eft longitudo L ad longitudinem eandem cofinu anguli $AOQ + E$ diminutam ubi angulus ifte recto minor eft, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut eft finus anguli $AOQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - AOQ - E - G + H$, ut eft longitudo L ad eandem longitudinem cofinu anguli $AOQ + E + G$ diminutam, ubi angulus ifte recto minor eft, auctam ubi major. Et fic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo $AOQ + E + G + I + \&c.$ Et (f) ex cofinu

...OE, eft ferè æqualis OF, ergò OQ −OE : OQ = QM : Qq. Porrò OQ, ...RO, feu radius ad cofinum an... AOQ, ut SO, ad OF, adeóque ... $\frac{SO \times cof.\ AQ}{R}$. Crefcentibus AN, ...AQB, decrefcit RO, & evanefcit ubi AQ ... quadrans, ac tandem fit negati... AQ quadrante major eft. Quare ... $+OQ : +SO = RO : OF$, OF ... fignum + vel − habere debet cum ... adeóque fi angulus AOQ, feu ar... AQ eft quadrante minor, OF eft quan... affirmativa; Si AQ quadrans eft, OF ...; Si AQ eft quadrante major, OF ... negativa. Eft igitur $OQ - \frac{SO \times cof.\ AQ}{R}$; ...$OQ = QM : Qq$, feu ob $QO = \frac{SO \times L}{R}$, eft $\frac{SO \times L - SO \times cof.\ AQ}{R} : \frac{SO \times L}{R}$, fi... $-$ cof. AQ : L = QM : Qq, fi fue... AQ minor quadrante, & L + cof. AQ : L = QM : Qq, fi fuerit AQ major ... Eft autem arcus $QM = AN - AQ + NM = N - AQ + D$, quare fi arcus Qq, dicatur E, erit $E : N - AQ + D = L : L \mp cof.\ AQ$ & $AQ + E$, erit æqualis Aq; invento itaque E per ultimam proportionem, fi loco AQ capiatur arcus accuratior Aq, feu angulus $AOQ + E$, & inftituatur proceffus priori fimilis, capiendo arcum F, ad arcum B, ut eft finus arcûs $AQ + E$ feu Aq ad radium, & arcum G ad arcum $N - Aq + F$, feu, $N - AQ - E + F$, ut eft longitudo L, ad longitudinem eandem cofinu anguli AOq feu $AOQ + E$ diminutam ubi angulus AOq recto minor eft, auctam ubi major, erit $AQ + E + G$, feu $Aq + G$, arcus magis verus, & fimiliter fi loco arcûs Aq, ufurpetur arcus $Aq + G$ & idem repetatur proceffus, invenietur novus arcus $AQ + E + G + I$, feu $Aq + G + I$, accuratior arcu $Aq + G$, & fic pergere licet in infinitum & quantumvis proximè ad veritatem accedere.

(f) * *Ex cofinu O r.* Eft enim radius ad cofinum anguli inventi AOq, ut qO ad Or, invenientur ergò punctum r, & ordinata qr. Deindè fi fiat ut axis major ad minorem, ità qr ad pr, habebitur locus corporis p.

* Si



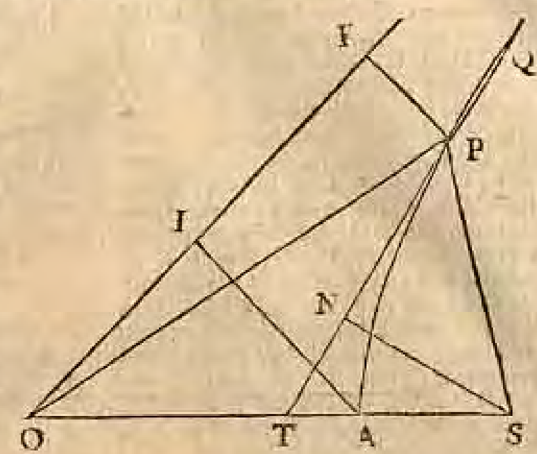
sinu ejus *Or* & ordinata *pr*, quæ est ad sinum ejus *qr* ut ellipseos axis minor ad axem majorem; habebitur corporis locus correctus *p*. (t) Si quando angulus N−*AOQ*+D negativus est, debet signum + ipsius E ubique mutari in −, & signum − in +. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli N−*AOQ*−E+F, & N−*AOQ*−E−G+H negativi prodeunt. Convergit autem series infinita *AOQ*+E+G+I+ &c. quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area *APS* sit ut differentia inter arcum *AQ* & rectam ab umbilico *S* in radium *OQ* perpendiculariter demissam.

Non

* (t) Si quandò angulus *N*−AQ+*D*, seu arcus QM, (vid fig. Not.) negativus est, seu si punctum M, cadit infrà punctum Q, debet signum ipsius +*E*, ubique mutari in −, & signum − in +. Quoniam enim suprà invenimus *E*:*N*−AQ +*D*=*L*:*L*∓cos. AQ, si fuerit arcus *N*−AQ+*D*, negativus, debet quoque arcus E esse negativus, & arcus Aq erit AQ−*E*. Idem intelligendum est de signis ipsorum *G* & I &c. ob eandem rationem.

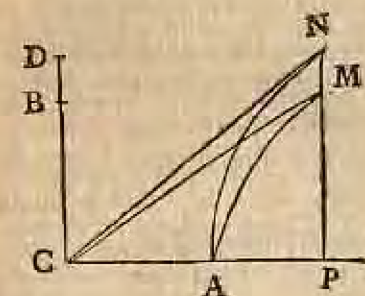
Di-

Non dissimili calculo [illegible] problema in [illegible]perbola. Sit ejus cen[illegible] *O*, vertex *A*, um[illegible] *S* & asymptotos [illegible]*K*. Cognoscatur quan[illegible] areæ abscindendæ [illegible] proportionalis. [illegible] A, & fiat conje[illegible] de positione rectæ [illegible]*T*, quæ aream *APS* [illegible] veræ proxi[illegible]. Jungatur *OP*, [illegible] ab *A* & *P* ad asymptoton agantur *AI*, *PK* asymptoto alte[illegible] parallelæ, & (a) per tabulam logarithmorum dabitur area



(a) Diximus superius (Theor. IV. de [illegible]) aream inter asimptotum, [illegible], ordinatam in vertice erec[illegible] ordinatam comprehensam, [illegible] abscissæ, idem verò, mo[illegible] demonstrare & ad hanc Pro[illegible] propius accommodare hic non [illegible].

[illegible] Sint duæ hyperbolæ AM, [illegible] centrum C, semidiameter [illegible] AC, semidiametri conjugatæ [illegible] CD, per punctum quodvis P aga[illegible] ordinatim ad diametrum CP [illegible], hyperbolis occurrens in punc[illegible] N, junganturque CM, CN [illegible] hyperbolica AMP, ANP & sec[illegible] AMC, ANC sunt ad invicem in [illegible] semidiametrorum conjugatarum [illegible] CD, vel etiam ordinatarum PM, [illegible] ex naturâ hyperbolæ (Theor. [illegible]) $PM^2:CB^2=CP^2-CA^2$; [illegible] $PN^2:CD^2=CP^2-CA^2$: [illegible] $PM^2:CB^2=PN^2.CD^2$, [illegible] $PN^2=CB^2:CD^2$, ac PM: [illegible] CD, cùmque idem semper eve[illegible] in parte cadat ordinata [illegible] spatia hyperbolica AMP, [illegible] esse inter se ut CB ad CD, vel PM

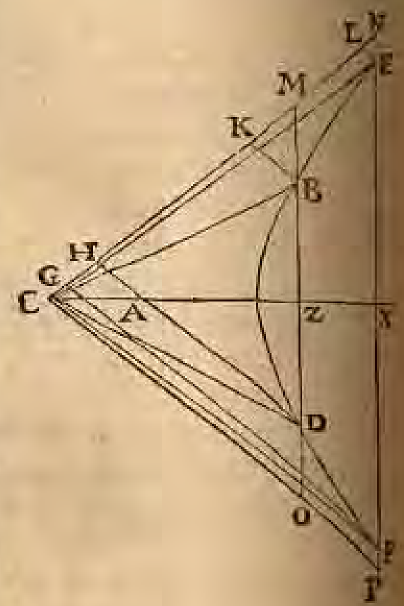


ad PN, sed triangula CPM, CPN sunt ad invicem ut PM ad PN vel CB ad CD; ergò CPM−AMP:CNP−ANP=AMC:ANC=PM:PN=CB:CD. Q. e. D.

375. Coroll. Si duæ semidiametri conjugatæ CA, CD fuerint æquales, hyperbola AN erit æquilatera; quare inventâ quadraturâ spatiorum hyperbolicorum ANP vel ANC in hyperboli æquilateris, habebitur etiam quadratura spatiorum hyperbolicorum AMP vel AMC in aliis quibusvis hyperbolis.

376.

376. Lemma. Si ſuper hyperbolæ EBDF aſymptoto CN ſumantur quatuor partes CG, CH, CK, CL, ut ſit CG : CH = CK : CL; ducantur autem rectæ GF, HD, KB, LE alteri aſymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in punctis F, D, B, E, junganturque ſemidiametri CF, CD, CB, CE, ſectores hyperbolici CBE, CDF erunt æquales. Agantur enim rectæ BD, EF aſymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, & ob parallelas KB, HD, CO erit MB : MK = DO : CH, & ob parallelas LE, GF, CP erit etiam NE : NL = FP : CG; ſed, ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos (Lem. I. de Conic. pag. 115.) MB = DO, & NE = FP, unde MK = CH & NL = CG; Porrò CG : CH = CK : CL (per hyp.) hoc eſt, NL : MK = CK : CL = LE : KB, ex naturâ hyperbolæ intrà aſymptotos (Theor. IV. de Hyp. p. 124.) rectæ igitur NE, MB, hoc eſt, EF, BD erunt parallelæ, ac proinde, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, tranſibitque per centrum C; (Lem. IV. de Conic. p. 119.) unde facile deducitur trapezia MXZN, OXZP fore æqualia ut & areæ mixtilineæ BXZE, DXZF, unde ſingulis ex correſpondenti trapezio ſubſtractis relinquentur areæ MBEN & ODFP æquales, quibus addantur Triangula MBC, ODC, æqualia ob baſes æquales MB, OD in eâdem linea poſitas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ CMNEBC, COPFDC, ex quibus denique ſubſtractis Triangulis NEC, PFC quæ æqualia ſunt ob baſes æquales NE, PF in eâdem lineâ poſitas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, ſupererunt ſectores hyperbolici CBE, CDF inter ſe æquales. Q. e. D.



377. Lemma. Si per puncta quævis aſymptoti CL, agantur duæ rectæ GF, HD alteri aſymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in F & D, junganturque ſemidiametri CF, CD, trapezium hyperbolicum GFDH æquatur ſectori CFD. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter aſymptotos, triangula CHD, CGF, æquantur ob æquales angulos G & H & latera reciproca (per Theor. IV. de Hyp. p. 124.) adeóque ſublato communi triangulo CGA, reſidua ſpatia GADH, CAF erunt æqualia, quibus ſi addatur [illegible] tium hyperbolicum DAF, ſummæ GFDH, CFD erunt æquales. Q. e. D.

378. Coroll. 1. Hinc iiſdem poſitis [illegible] (num. 376.) trapezia hyperbolica GF[illegible] KBEL ſunt æqualia.

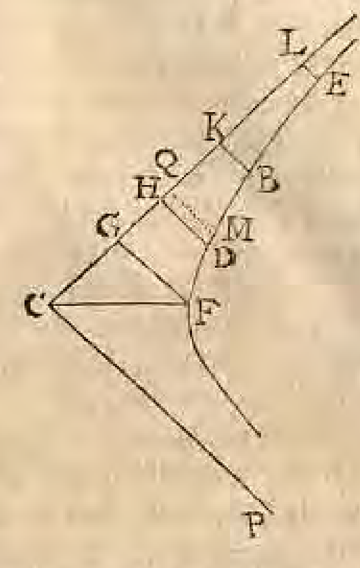
379. Coroll. 2. Si aſymptoti par[illegible] CG, CH, CK fuerint contin[illegible] tionales, duo ſectores CFD, C[illegible] & duo trapezia hyperbolica GF[illegible] HDBK, æquantur. Eâdem enim [illegible] quâ num. 376. oſtendetur rectam B[illegible] genti per punctum D ductæ eſſe parall[illegible] Undè ſi ſuper aſymptoto CL ſumantur [illegible] tes quotcumque CG, CH, CK, C[illegible] &c. in continuâ progreſſione geometr[illegible] & ex punctis G, H, K, L &c. [illegible] rectæ GF, HD, KB, LE &c. [illegible] aſymptoto parallelæ, trapezia hyperboli ca GFDH, HDBK, KBEL erunt æqualia; & viciſſim ſi trapezia illa [illegible] tur, erunt rectæ CG, CH, CK [illegible] &c. in continuâ progreſſione geometr[illegible]

[illegible] Coroll. 3. Sit hyperbola FDBE [illegible] cujus centrum C, aſymptotus CL, [illegible] tranſverſus CF, capiantur in aſymp[illegible] CG, CH, CK, CL, &c. in con[illegible] progreſſione geometricâ, aganturque [illegible] HD, KB, LE &c., alteri aſymp[illegible] CP parallelæ, trapezia hyperbolica [illegible] HDBK, KBEL &c. erunt æ[illegible] quare eorum ſummæ, ſcilicet GFDH, GFBK, GFEL, &c. erunt [illegible] progreſſione arithmeticâ. Si [illegible] CG ſit unitas, CH, CK, CL, [illegible] numeri, erunt o, GFDH, GFBK, [illegible] illorum numerorum logarithmi.

[illegible] Coroll. 4. Itaque per logarithmo[illegible] hyperbolicorum tabulas, inveniri poſ[illegible] trapeziorum quorumvis GFDH, [illegible] &c. areæ; Sumptâ enim CG pro uni[illegible] quærantur in numeris valores rectarum [illegible] CK, &c. & horum numerorum lo[illegible] exhibebunt trapezia hyperbolica GFDH, GFBK, &c.

[illegible] Coroll. 5. Sit CG = 1, GH = x, [illegible] $1+x$, HD = y, & erit, ex natu[illegible] hyperbolæ inter aſyptotos $1+x \times y = 1$, [illegible] $y = \frac{1}{1+x}$, & trapezii GFDH [illegible] DHQM ſeu $y\,dx = \frac{dx}{1+x}$; Si [illegible] $1+x$, denotet logarithmum nu[illegible] $1+x$, erit $L.\,1+x$ = GFDH, [illegible] elementum logarithmi ſeu $d.\,L.\,1+x$ [illegible] $\frac{dx}{1+x}$. Et ſimiliter elementum [illegible] numeri cujuſvis z ſeu $d.\,L.\,z$ [illegible] $\frac{dz}{z}$.

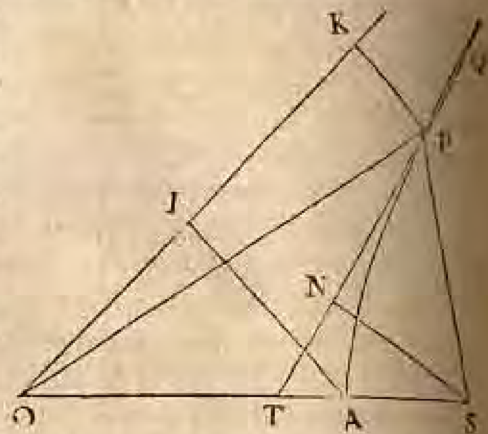
[illegible] Coroll. 6. Cum ſit $y = \frac{1.}{1+x}$, ſi [illegible] diviſio, erit $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ [illegible] infinitum, ac proinde $y\,dx = dx$ [illegible] $+ x^2\,dx - x^3\,dx$ &c. in infini[illegible] & ſumptis utrinque fluentibus $S.\,y\,dx$ [illegible] HD = $L.\,1+x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ [illegible] $+ \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum. Si au[illegible] numerus propoſitus ſit unitate minor, [illegible] eodem modo invenietur ipſius logarithmus $S.\,-y\,dx = L.\,1-x = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ &c.



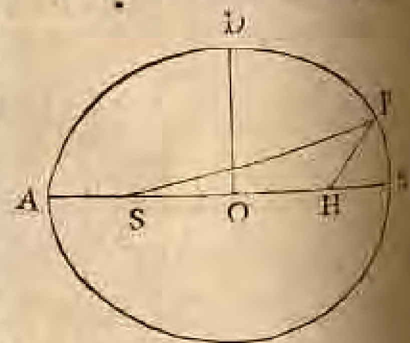
384. Scholium. Obſervandum eſt logarithmos hyperbolicos Neperi à logarithmis Briggii quibus vulgò utimur differre; verùm cum hyperbolici ſint ſemper ad Briggianos ſeu vulgares in eâdem conſtanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 eſt ad logarithmum Briggianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejuſdem numeri logarithmum Briggianum, facile eſt hyperbolicos ad Briggianos & contrà Briggianos ad hyperbolicos reducere, adeóque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585 &c., quotiens 0. 4342948 &c. per logarithmum quemvis Hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, & viceversâ, ſi logarithmus quilibet vulgaris per 0. 43429481 & dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

* *Et per tabulam.* (381. 384.)

$AIKP$, (b) eique æqualis area OPA, quæ subducta de triangulo OPS relinquet aream abscissam APS. Applicando areæ abscindendæ A & abscissæ APS differentiam duplam $2\,APS - 2\,A$ vel $2\,A - 2\,APS$ ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem TP perpendicularis est, (c) orietur longitudo chordæ PQ. Inscribatur autem chorda illa PQ inter A & P, si area abscissa APS major sit areâ abscindendâ A, secus ad puncti P contrarias partes; & punctum Q erit locus corporis accuratior. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.



Atque his calculis problema generaliter confit analyticè. Verùm usibus astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus AO, OB, OD semiaxibus ellipseos, & L ipsius latere recto, ac D differentia inter semiaxem minorem OD & lateris recti semissem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus sinus sit ad radium ut est rectangulum sub differentia illa D, & semisumma axium $AO+OD$ ad quadratum axis majoris AB; tum angulum Z, cujus sinus sit ad radium ut est



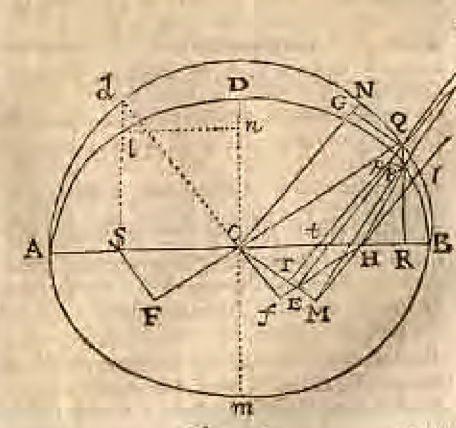
* (b) *Eique æqualis area OPA* (377).

* (c) *Orietur longitudo.* Nam cum arcus PQ exiguus sit, accipi potest pro chordâ PQ seu parte PQ tangentis TP productæ; unde triangulum rectilineum SQP, quam proximè æquatur differentiæ spatiorum hyperbolicorum APS, ASQ seu A; sed triangulum rectilineum $SQP = \frac{PQ \times SN}{2}$, ergò $\frac{PQ \times SN}{2} = A - APS$, vel $= APS - A$, ac proinde $PQ = \frac{2A - 2APS}{SN}$ vel $= \frac{2APS - 2A}{SN}$, prout area A major vel minor est areâ APS.

385

duplum rectangulum sub umbilicorum distantiâ SH & differentiâ illâ D ad triplum quadratum semiaxis majoris AO. His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V, primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem secundam, ad angulum Z, æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel summæ T+X+V, si angulus T recto minor est, vel differentiæ T+X−V, si recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum BHP, motum medium æquatum; & si HP occurrat ellipsi in P, acta SP abscindet aream BSP tempori proportionalem quam proximè. Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X, in minutis secundis, si placet, positorum, figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed & satis accurata est ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipsius, cujus æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati BHP, angulus veri motus BSP & distantia SP in promptu sunt per methodum notissimam. (d) Hacte-

(d) 385. Ellipseos quam Planeta describit sit Centrum O, umbilici S, H, semiaxes OB, OD; Sole in S posito umbilicus alter H erit ferè centrum medii motus Planetæ, (372) id est, si ex umbilico H agatur linea HI, quæ cum lineâ apsidum OB, constituat angulum IHB anomaliæ mediæ æqualem, recta illa HI, ferè transibit per locum Planetæ in orbita elliptica parum excentricâ revolventis. Jungatur autem HP, per locum verum Planetæ P & erit angulus PHI, anomaliæ mediæ IHB, addendus (vel detrahendus) ut motus medius æquatus BHP habeatur, & angulus PHI aut ipsi æqualis dicetur æquatio tota medii motus, quam in duas partes dividit Newtonus, quarum unam primam æquationem & al-



De Motu Corporum.

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

SEC

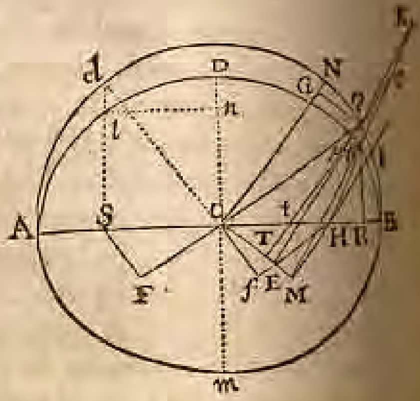
teram secundam æquationem vocat; determinat singulas in iis punctis ubi maximæ sunt, & rationem maximæ æquationis ad aliam in dato quovis puncto adhibendam indicat.

Præcedentes Methodos illustrarunt demonstrationibus & exemplis Keillius & Gregorius, hanc non minus ingeniosam intactam reliquerunt, vestigiis Newtoni insistere conabimur, & aperire quibus fundamentis ni atur hæc approximatio.

386. Producatur I H in M donec occurrat perpendiculo OM, à centro O in ipsam IH demisso jungaturque MP, erit angulus PHI æqualis angulis PMH & MPH, quorum sinus erunt inter se sicut P H ad M H; sed cum M H sit semper minor O H distantia centri à foco, sitque P H distantia foci H ad punctum P Ellipseos, exigua erit M H respectu H P, ideoque minimus est angulus M P H respectu anguli P M H, illum itaque negligit, & hunc solum PMH ut æquationem totam considerat Newtonus.

Ducto verò ut superius expositum est, circulo B Q N A super magnum axem Ellipseos A B, & ex P loco Planetæ ducta PR perpendiculari in eum magnum axem eâque P R producta donec secet circulum B Q N A in Q; ducatur T Q perpendicularis in O M (ideoque parallela lineæ I M) & producatur ita ut secet in C lineam MP etiam productam, erit (per 29. 1. El.) angulus T C M æqualis Angulo C M H sive P M H, eritque T C M æquatio totalis motus medii: Ducatur pariter Q O quæ producatur in F donec secetur à perpendiculo SF à foco S in quo sol versatur ducto, sumaturque arcus Q N æqualis S F & ducatur N O, erit N O B anomalia media (369) & erit N O parallela lineis I M, T Q, sit Q G perpendicularis ducta ex Q in O N, erit Q G sinus arcus Q N, & erit O T illi sinui æqualis.

Ducatur denique in O, O f, perpendicularis in lineam O Q, ideoque parallela lineæ S F, & ex H in illam ducatur perpendiculum H f, Triangulum O f H æquale erit Triangulo S O F, ob lineas æquales S O, O H, angulos rectos in F & f, & angulos æquales in S & O ob parallelas S F, O f; erit ergo O f = S F = Q N. Concurrant lineæ f H, O M in E, & ex E ducatur per Q linea E Q secans M C (productam si necesse sit) in K, angulus T C M erit æqualis angulis E K M & E Q C sive T Q E (per 32 1 Elem.) sic ergo Newtonus dividit æquationem totam T C M in angulos E K M, T Q E, quos separatim determinat.



Prima ergo æquatio determinatur ducta H M ex foco quæ faciat cum axi angulum anomaliæ mediæ æqualem, & ducta ex centro linea O M in illam perpendiculari, tum etiam ducta ex foco linea H f quæ faciat cum axi angulum anomaliæ excentri æqualem, seceтque lineam O M (productam si necesse sit) in E, ex M ducatur linea per locum planetæ P & ex E ducatur linea per Q punctum correspondens in circulo, & concurrant illæ lineæ in K, & angulus E K M est prima æquatio, & si sit K M radius, M E est sinus illius æquationis.

Ut ergo determinetur M E, observandum angulum M H E esse æqualem

angulo N O Q, cum sit N O parallela M H & Q O parallela E H per constructionem, sumpto verò M H pro radio [illegible] tangens ejus anguli M H E quæ [illegible] angulo pro Arcu ipso sumi potest, ideoque Radius O N sive O B erit ad arcum N Q ut M H ad lineam M E; [illegible] autem angulus anomaliæ mediæ T [illegible] (per constru.) H O M ejus complementum ad duos Rectos, fiatque ut Radius [illegible] hoc calculo sumitur æqua- (OB) ad Cos. T sic O H ad M H $= \frac{OH \times Cos.\,T}{OB}$. Præterea arcus $NQ = SF$, & est OQ (sive OB) ad QR ut est OS (sive OH) ad SF ideoque SF sive $NQ = \frac{OH \times QR}{OB}$ [illegible] proportio superius inventa $OB : NQ = MH : ME$ in hanc vertitur $OB : \frac{OH \times QR}{OB} = \frac{OH \times Cos.\,T}{OB} : ME = \frac{OH^2 \times QR \times Cos.\,T}{OB^3}$ [illegible] quia (per nat. Ellips.) $OH^2 = OB^2 - OD^2 = \overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD}$ (per 6. 2. Elem.) est $ME = \frac{\overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD} \times QR \times Cos.\,T}{OB^3}$.

Radius verò K M hac ratione determinatur. Ducatur ex P linea P p, perpendicularis in TQ ac proinde parallela lineæ M E, ejus portio terminata in linea E K [illegible] quidem ita proxime æqualis ipsi P p, [illegible] P p pro illa sumi possit, est verò ob parallelas $ME : Pp = KM : KP$.

Facile autem determinatur ratio M E ad P p, nam angulus T Q R est complementum anomaliæ mediæ Q t R, unde est, [illegible] O B, ad Cos. T sicut Q P ad P p $= \frac{Cos.\,T}{OB} \times QP$, est autem QP differentia [illegible] Q R & P R, est verò Q R ad P R [illegible] semiaxis major O B ad minorem O D, [illegible] ergo $PR = \frac{OD \times QR}{OB}$ & $QP = QR - \frac{OD \times QR}{OB} = \frac{QR}{OB} \times \overline{OB - OD}$, itaque $Pp = \frac{Cos.\,T \times QR}{OB^2} \times \overline{OB - OD}$, [illegible] M E ad P p sicut $\frac{\overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD} \times QR \times Cos.\,T}{OB^3}$ ad $\frac{\overline{OB - OD} \times QR \times Cos.\,T}{OB^2}$ utroque autem termino multiplicato per $\frac{OB^3}{\overline{OB - OD} \times QR \times Cos.\,T}$ superest ratio $OB + OD$ ad OB, æqualis rationi M E ad P p sive K M ad K P, unde convertendo est $OD : OB + OD = KM - KP\,(MP) : KM$; sive quia $OB + OD$ est fere $2\,OB$, est $OD : 2\,OB = MP : KM$.

Erit autem M P proxime æqualis lineæ T p, hæc verò lineæ Q t, cum enim parva sit excentricitas, Q p compensat fere partem neglectam T t, est verò Q t parallela N O, ideoque est Q t R æqualis anomaliæ mediæ, ergo est sinus anomaliæ mediæ ad radium ut Q R ad Q t; sive $fin.\,T : OB = QR : Qt = \frac{OB \times QR}{fin.\,T} = MP$ unde cum sit O D ad 2 O B sicut M P sive $\frac{OB \times QR}{fin\,T}$ ad K M erit $KM = \frac{2\,OB^2 \times QR}{OD \times fin\,T}$, sed inventa erat $ME = \frac{\overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD} \times QR \times Cos.\,T}{OB^3}$ multiplica ergo valores K M & M E per $\frac{2\,fin\,T \times OD}{QR}$ eritque K M ad M E sive radius ad sinum anguli K ut $4\,OB^2$ (sive AB^2) ad $\frac{2\,OD \times \overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD} \times fin\,T \times Cos.\,T}{OB^3}$

& cum sit semi latus rectum $\frac{1}{2}L = \frac{OD^2}{OB}$, erit $OD - \frac{1}{2}L = OD - \frac{OD^2}{OB} = \frac{OD}{OB} \times \overline{OB - OD}$, vocetur D ea differentia semiaxis minoris & semilateris recti, & substituto D loco $\frac{OD}{OB} \times \overline{OB - OD}$ erit Radius ad sinum anguli K ut AB^2 ad $D \times \overline{OB + OD} \times \frac{2\,Cos.\,T \times fin.\,T}{OB^2}$.

387. Ergo in quovis gradu anomaliæ mediæ erit, est semper Radius ad AB^2 ut sinus Anguli K, ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2\,Cos.\,T \times fin.\,T}{OB}$ cum verò ratio Radii ad AB^2 sit constans, hæc altera etiam erit constans, ideoque in omni casu sinus Anguli K ubi anomalia media est T, erit ad ejus sinum ubi anomalia media erit t, ut $D \times \overline{OB + OD} \times 2\,Cos.$

Liber Primus. Prop. XXXI.

$\times \frac{2\, \text{Cof.} T\, \text{fin.} T}{OB^2}$ ad $D \times OB + OD \times \frac{2\, \text{Cof.}\, t \times \text{fin.}\, t}{OB^2}$ five multiplicando utrumque terminum per conftantes $\frac{OB}{D \times OB + OD}$ ut $\frac{2\, \text{Cof.}\, T \times \text{fin.}\, T}{OB}$ ad $\frac{2\, \text{Cof.}\, t\ \text{fin.}\, t}{OB}$ fed conftat ex Trigonometricis, quod duplum facti finus anguli dati cujufvis per ejus Cofinum, divifum per radium, eft æquale finui Anguli qui eft duplus ejus anguli dati, ergo finus angulorum K in diverfis anomaliæ mediæ gradibus funt inter fe ut finus dupli anguli anomaliæ. Unde fequitur, quod cum duplum anomaliæ mediæ 45. graduum fit 90. ejufque finus fit æqualis Radio feu finui totali, angulus K erit maximus in 45° gradu, five eft illic anomaliæ mediæ æquatio prima maxima, & fi ea data fit, invenientur in aliis gradibus æquationes adhibendæ, dicendo ut Radius ad finum dupli anomaliæ mediæ ita finus æquationis maximæ primæ ad finum æquationis quæfitæ, five (quia hic de minimis angulis agitur qui funt inter fe ut fui finus) ita ipfa æquatio maxima ad æquationem quæfitam: Invenietur autem facile maxima illa æquatio, cum enim fit Radius ad AB^2 ut finus K ad $D \times \frac{OB + OD \times \text{fin}\, 2T}{OB}$ fi T fit 45°, fin. $2T$ eft ipfe Radius OB; Eft ergo Radius ad AB^2 ut finus K ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times OB$ five, ut ftatuit Newtonus, eft Radius ad finum æquationis primæ maximæ ut AB^2 ad $D \times OB + OD$. Quod erat 1°. Dem.

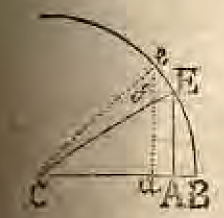
388. Secunda æquatio TQE continetur lineis ductis à puncto Q circuli BQNA ad puncta T & E lineæ OM quæ perpendiculariter in ON lineam motus medii ducitur, eft vero OT æqualis finui arcus $QN = SF = Of$, & fi ex f ducatur ad focum linea fH, interfectio ejus lineæ fH (productæ fi neceffe fit) cum linea OM dat alterum punctum E. In hâc ergo æquationis parte eft QE radius, TE finus, eorumque ratio eft inveftiganda, eft verò QE paulo major quam QT & QT eft æqualis OG, quâ paulò major eft ON five OB unde QE pro OB commode affumi poteft,

quamvis eâ fit paulo minor; Ut [illegible] valor lineæ TE affignetur, notandum eft quod cum fit OM in ON perpendicularis, & Of in OQ, eft angulus fOM æqualis angulo NOQ.

Cognofcetur ergo arcus menfurans angulum fOM five fOE, affumpto Of pro radio, dicendo radius ON five OB ad arcum NQ ut Of (five NQ) ad arcum menfurantem angulum fOE [illegible] ideo erit $\frac{NQ^2}{OB}$, fecans illius arcus eft OE, cum verò TO fit finus arcus NQ (æqualis Of) feratur longitudo Of fecundum lineam OM, cadet tantum ultra T quantum arcus NQ fuum finum excedit, & tantùm citra E quantum radius ille Of à fecante anguli cujus arcus eft $\frac{NQ^2}{OB}$ deficit: Dato ergo arcu NQ, inveniatur ejus exceffus fuper ejus finum, & dato arcu $\frac{NQ^2}{OB}$ inveniatur exceffus ejus fecantis fuper radium NQ five Of & ex [illegible] his duobus habebitur linea TE quæfita.

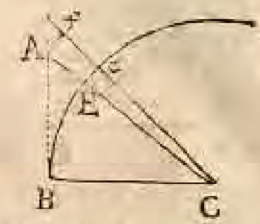
Lemma I. *Dato Arcu invenire ejus finum.* Sit radius CB, r, finus quæfitus [illegible] x, ejus Cofinus CA, $\sqrt{rr - xx}$, Arcus datus BE, v, ejus fluxio Ee fit dv.

Ducto radio CE, & radio proximo Ce & finu arcus Be, ductoque ex E in F perpendiculo, erit ef fluxio finus quæfiti five dx. Triangula verò ECA, efE, pro fimilibus funt habenda, nam angulus fEA [illegible] [illegible]

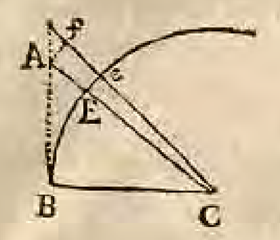


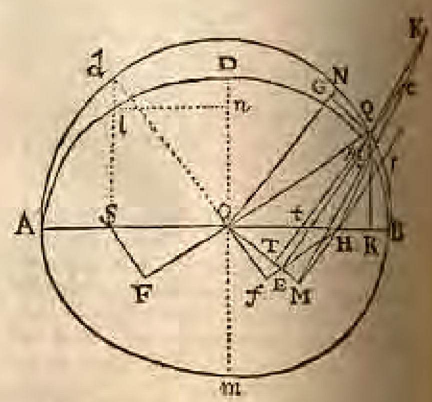
[illegible] & angulus CEe quia circulus eft [illegible] in radium, & dempto communi CEf remanent CEA & fEe æquales, & ob rectos in f & A, angulus [illegible] fEe æqualis erit tertio ECA [illegible] hæc proportio, CA ad [illegible] five $\sqrt{rr - xx} : r = dx : dv$ [illegible] $dv = \frac{r\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ & $dv^2 = \frac{rr\,dx^2}{rr - xx}$ [illegible] $rr - xx^2 = \frac{rr\,dx^2}{dv^2}$.

[illegible] fupponatur valorem x hac ferie [illegible], $x = Av + Bv^3 + Cv^5$ &c. [illegible] $Adv + 3Bv^2dv + 5Cv^4dv$ &c. [illegible] $= A^2dv^2 + 6ABv^2dv^2 + 9BBv^4dv^2 + 10ACv^4dv^2$ &c. [illegible] $= A^2v^2 + 2ABv^4 + BBv^6 + 2ACv^6$ &c. [illegible] $rr - xx = rr - A^2v^2 - 2ABv^4$ &c. [illegible] $= rrA^2 + 6rrABv^2 + 9rrBBv^4 + 10ACv^4$ &c. [illegible] duæ feries æquales funt, & terminorum A, B, C &c. valor ex comparatione terminorum correfpondentium [illegible] eruitur, erit ergo [illegible] $- A^2v^2 - 2ABv^4$ &c. [illegible] $+ 6rrABv^2 + 9rrBBv^4 + 10rrACv^4$ &c. [illegible] $rr = rrAA$, idoque $A = 1$. [illegible] $= 6rrABv^2$, unde $-1 = 6rrB$ [illegible] $= \frac{-1}{6rr}$ [illegible] $= 9rrBBv^4 + 10rrACv^4$, [illegible] fubftitutione facta & terminis per v^4 [illegible] $+ \frac{2}{6rr} = \frac{9}{36rr} + 10rrAC$, five [illegible] $rrAC = \frac{3}{36rr}$ [illegible] $= \frac{3}{10 \times 36r^4} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5r^4}$, &c. [illegible] $Av + Bv^3 + Cv^5$ &c. $= x$, ad hanc redit $x = v - \frac{v^3}{2 \times 3r^2} + \frac{v^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5r^4}$ &c. quæ feries facile continuatur, & arcu exiftente parvo citiffime convergit.



Lemma II. *Dato arcu invenire fecantem.* Sit ut prius radius CB, r, fecans quæfita CA, y, Tangens BA $\sqrt{yy - rr}$, Arcus datus BE, v, ejus fluxio Ee, dv; Ducatur ex centro fecans Ca, proxima propofitæ, & radio CA centro C, defcribatur arcus Af erit fA fluxio fecantis quæfitæ five dy, erunt autem arcus Ee & Af ut eorum radii CE, CA ideoque eft $r : y = dv : \text{Af} = \frac{y\,dv}{r}$; præterea Triangula ACB, aAf, funt fimilia, nam ob angulum rectum fAC angulus fAa eft complementum anguli CAB five eft æqualis angulo ACB, anguli verò B & f funt ambo æquales utpote recti, eft ergo CB : BA = Af : fa, five $r : \sqrt{yy - rr} = \frac{y\,dv}{r} : dy$ & quadrando, $rr : yy - rr = \frac{yy\,dv^2}{rr} : dy^2$ five $r^4 \frac{dy^2}{dv^2} = y^4 - rry^2$, Fingatur ergo effe $y = A + Bv^2 + Cv^4 + Dv^6$ &c. eft $dy = 2Bv\,dv + 4Cv^3\,dv + 6Dv^5\,dv$ &c. & $dy^2 = 4B^2v^2dv^2 + 16BCv^4dv^2 + 16C^2v^6dv^2 + 24DBv^6dv^2$ &c. & $y^2 = A^2 + 2ABv^2 + 2ACv^4 + BBv^4$ &c. & $y^4 = A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4 + 4A^3Cv^4$ &c. eft ergo $\frac{r^4dy^2}{dv^2} = 4r^4B^2v^2 + 16r^4BCv^4 + 16r^4C^2v^6 + 24r^4DBv^6$ &c. & $y^4 - rry^2 = A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4 - r^2A^2 - 2r^2ABv^2 + 4A^3Cv^4 - 2r^2ACv^4 - r^2B^2v^4$ &c.





Unde collatis terminis correſpondentibus harum ſerierum eſt $A^4 - r^2 A^2 = 0$, ideoque $A^2 = r^2$, & $A = r$; eſt $4r^4 B^2 v^2 = 4A^3 B v^2 - 2r^2 A B v^2$, ſive diviſis omnibus terminis per Bv^2 & poſito r loco A; $4r^4 B = 4r^3 - 2r^3$

ideoque eſt $B = \frac{1}{2r}$,

eſt $16r^4 B C v^4 = 6A^2 B^2 v^4 + 4A^3 C v^4 - 2r^2 A C v^4 - r^2 B B v^4$, quæ diviſa per v^4 ſubſtitutiſque valoribus A & B dant

$8r^3 C = \frac{6}{4} + 4r^3 C - 2r^3 C - \frac{1}{4}$ unde eſt

$6r^3 C = \frac{5}{4}$ & $C = \frac{5}{2 \times 3 \times 4r^3}$ &c.

Series ergo ad ſecantis valorem exprimendum $A + Bv^2 + Cv^3$ &c. in hanc vertitur $r + \frac{v^2}{2r} + \frac{5v^3}{2 \times 3 \times 4r^3}$ &c. Quæ ſatis prompte convergit ſi modo arcus v ſit exiguus, ut iſto in caſu.

HIS poſitis, invenientur commodè partes lineæ TE, ſive ſinus ſecundæ æquationis, ea enim conſtat ex differentia inter arcum NQ & ejus ſinum (dato radio OB) & ex differentia inter eum ipſum arcum NQ ſumptum ut radium in angulo fOE & illius anguli ſecantem.

Primum ergo differentia inter arcum NQ & ejus ſinum, ex primâ ſerie invenitur, ſit enim $v = NQ$ & $r = OB$, ſinus arcus NQ per eam ſeriem invenitur $NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ &c. & omiſſis reliquis terminis ſeriei, hic admodum exiguis, liquet differentiam inter arcum NQ & ejus ſinum eſſe terminum $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ qui erat in eâ ſerie ex arcu NQ tollendus ut obtineatur ſinus.

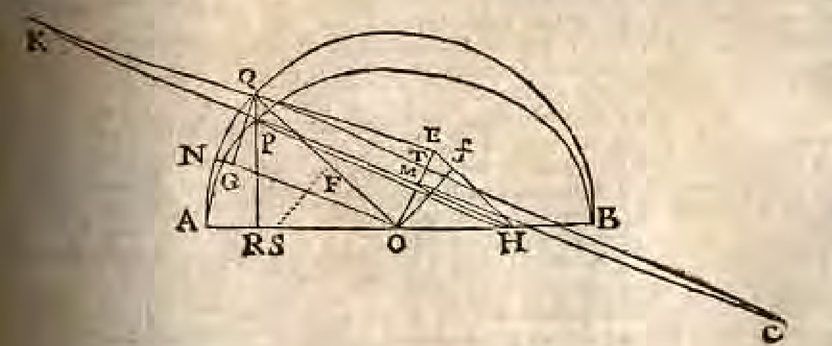
Secundo, ut differentia inter radium & ſecantem anguli fOE obtineatur, loco radii r in ſerie ſuperius inventâ valor radii OF ſive NQ eſt ſubſtituendus, & loco arcus v, valor arcus qui menſurat eum angulum & qui inventus fuit $= \frac{NQ^2}{OB}$, ergo ſeries quæ ſecantem exprimit in hanc abit $NQ + \frac{NQ^4}{2 OB^2 \times NQ}$ &c. reliquis terminis ut pote minimis omiſſis, exceſſus ſecantis ſuper radium eſt $\frac{NQ^3}{2 OB^2}$, qui junctus cum exceſſu arcus ſuper ſinum ſuperius invento $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ efficit ſummam $\frac{4 NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ ſive $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2}$ pro valore ſinus æquationis ſecundæ; ſed eſt (369) ut Radius OB ad QR ita SH ſive OH ad SF ſive NQ, ergo $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$ & $\frac{2NQ^3}{3 OB^2} = TE = \frac{2 OH^3}{3 OB^5} \times QR^3$

Itaque cum in hâc ſecundâ æquatione radius QE ſit in omni anomaliæ gradu idem aut prope idem, & anguli ſunt inter ſe erunt inter ſe quam proxime ut eorum ſinus TE

[illegible] cumque in valore TE quantitas $\frac{2 OH^3}{3 OB^5}$ [illegible] conſtans, ſinus illi ſunt inter ut QR^3, [illegible] QR eſt ſinus anomaliæ excentri, & [illegible] iidem prope ſunt ratione ſinus anomaliæ mediæ, hinc iſtæ æquationes ſecundæ [illegible] anomaliæ mediæ gradibus adhi[illegible], ſunt inter ſe ut cubi ſinuum anomaliæ mediæ. Si itaque ſumatur anomalia [illegible] 90. graduum ejus ſinus eſt ipſe [illegible], eritque illic maxima æquatio, [illegible] ad aliam quamvis, ut cubus Radii ad cubum ſinus anomaliæ mediæ ipſi [illegible] ut ſtatuit Newtonus.

Ut verò determinetur hæc æquatio ubi maxima, notandum quod ſi in foco S [illegible] uſque ad Ellipſim ordinata Sl ea [illegible] ſemi lateri recto, & ſi ducatur [illegible] ordinata in minorem axem erit $ln =$ [illegible] ſive OH, & Dn erit differentia ſemi [illegible] recti & minoris axis quam Newtonus vocat D, & ex natura Ellipſeos erit [illegible] ſive $OB^2 : ln^2 (OH^2) = OD^2 :$ [illegible] (ſive $D \times nm$) ſed nm eſt ſe[illegible] minori 2OD æqualis, ergo erit $OB^2 : OH^2 = OD^2 : D \times 2OD$ & $OH^2 = \frac{2D \times OB^2}{OD}$, quo poſito valor TE $= \frac{2OH^3}{3OB^5} QR^3$ eſt æqualis $\frac{2OH \times 2D}{3OB^3 \times OD} \times QR^3$ [illegible] 2OH = SH eſt TE $= \frac{2D \times SH}{3 OB^3 \times OD} QR^3$.

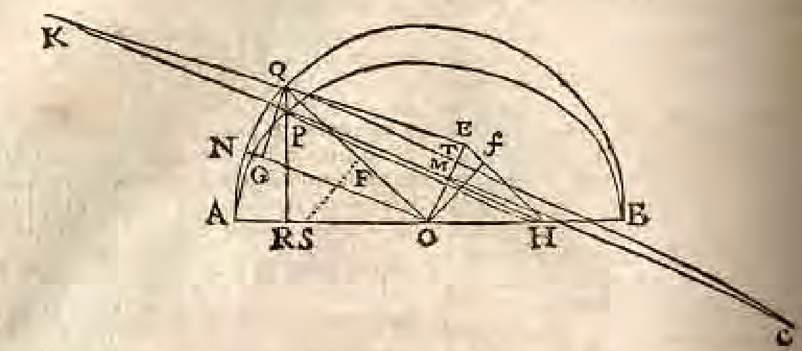
In nonageſimo verò gradu anomaliæ mediæ linea OM ſive OE in axem OB cadit & QT cui fere æqualis eſt QE coincidit cum QR, unde QE pro QR ſumi poteſt, & prætereà QR nonnihil excedit lineam Sd ſive axem minorem DO, cum non nihil citra focum cadat, minor tamen eſt radio OB, unde QR^2 pro $OB \times OD$ ſatis accuratè ſumi poteſt, ſicque valor $TE = \frac{2D \times SH}{3 OB^3 \times OD} QR^3$ in hanc abit $TE = \frac{2D \times SH}{3 OB^2} QE$. ſed Radius eſt ad ſinum æquationis maximæ ſecundæ ut QE ad TE (ſive $\frac{2D \times SH}{3OB^2} \times QE$) & QE ad $\frac{2D \times SH}{3 OB^2}$ QE ſicut $3 OB^2$, ad $2D \times SH$, ergo æquatio ſecunda maxima invenietur dicendo ut triplum Quadrati ſemi axis majoris ad duplum Rectangulum ſub umbilicorum diſtantiâ SH & differentia D ſemi axis minoris & ſemi Lateris Recti, ita Radius ad ſinum ſecundæ æquationis ubi eſt maxima, & ea data reliquæ invenientur dicendo ut cubus Radii ad cubum ſinus anomaliæ mediæ propoſitæ ita hæc maxima æquatio, ad quæſitam. Q. E. D.



[illegible] Annihilatur prima æquatio in 90. [illegible] anomaliæ mediæ & in primo, negativa [illegible] in ſecundo quadrante, poſitiva in [illegible], negativa iterum in quarto. [illegible] in 90. gradu anomaliæ mediæ OM coincidit cum OH ex conſtructione, ſicque linea fH non amplius ſecat lineam OM in E, evaneſcit itaque ME ſinus primæ Æquationis.

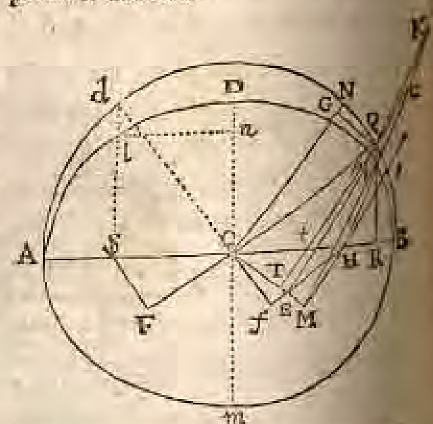
[illegible] Fig. 1.

Excedat verò anomalia media 90. fiatque



que alia figura secundum constructionem à nobis indicatam, sit locus verus Planetæ P, describatur circulus BQNA, in magnum axem BA, sitque PR perpendicularis à loco Planetæ in axem ducta, quæ producta secet circulum BQNA in Q, ducatur QO, in quam ex sole S, ducatur perpendiculum SF, cui æqualis sumatur arcus QN, erit NOB anomalia media, ducaturin lineam ON perpendicularis OM quæ termineur in M per perpendiculum à foco altero H ductum, erit ergo MH parallela ON & MHB æqualis anomaliæ mediæ, ex H ducatur ad Planetam linea HP, erit ergo angulus MHP angulus anomaliæ mediæ addendus ut prodeat motus medius æquatus PHB, fiat etiam super OH Triangulum OfH simile & æquale Triangulo SFO, & producatur Hf donec secet in E lineam OM productam; Ducatur ex Q ad T linea QT, parallela lineæ NO ideoque etiam parallela lineæ MH, & erit OT æqualis QG sinui arcus QN. Ducatur etiam linea PM quæ producta secabit in C lineam QT productam & angulus C erit æqualis angulo HMC, qui erit æqualis angulis MHP & MPH (per 32. I^{mi}. Elem.) sed ob exiguitatem lineæ MH respectu MP, omittitur angulus MPH, & angulus HMC, sive angulus C, pro angulo MHP æquatione motus medii assumitur; Denique ex E per Q ducatur linea EQK quæ lineam PMC secabit in K erit angulus EQT æqualis angulis K & C: (per 32. I. Elem.) ergo si ex angulo EQT subtrahatur angulus K remanebit angulus C, sive æquatio quæsita, est vero angulus EQT secunda æquatio & angulus K sive EKM prima, ut liquet ex constructione, ergo in secundo quadrante primæ æquationis pars subtrahi debet sive negativè sumi, secunda verò positiva remanet.

In tertio quadrante hæc eadem figura deorsum convertatur sub axe AB, liquebitque angulum MHB seu Anomaliam mediam, quæ hic 180° gradus superat, angulo MHP sive angulo C esse minuendam ut habeatur anomalia æquata PHB, ideoque cum sit C = EQT − K secunda æquatio EQT subtractivè sumi debebit, & prima K additive.



In ultimo denique quadrante invertetur figura prima, liquebit ex anomalia media IHB, seu HMP, detrahendum esse angulum IHP, seu HMP, sive angulum ipsi æqualem, ut prodeat motus medius æquatus sed angulus C est summa utriusque partis æquationis, nempe anguli K, & anguli KQC sive TQE, ergo in ultimo quadrante utraque æquatio negativè assumitur.

Exemplum sit in orbe Martis ADB, qui maximum, si orbem Mercurii excipias, ellipticitate excentricus. Excentricitas SO, sit partium 141. & semiaxis major = 1523. 69. & semiaxis minor OD = 1516. 93. semilatus rectum seu $\frac{1}{2}$ L = 1510. 184. differentia inter semiaxem minorem & semilatus rectum $\frac{1}{2}$ L, = 6. 746. = D. Differentia inter logarithmum radii & logarithmum quadrati axis AB, per tabulas.

erit = 3. 0321367. 62.
Log. AO + OD = 3. 3097621. 36.
Log. D = 0. 7580391. 75.
Summa = 7. 0999380. 73.

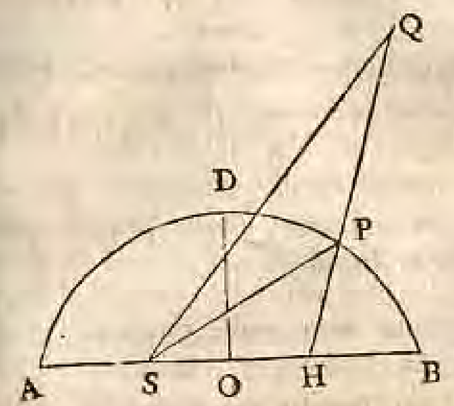
æqualis logarithmo sinûs anguli Y, per primam proportionem Newtoni, atque hinc in tabulis invenietur angulus Y, minutorum primorum 4', secundorum 21. 14''.

Differentia inter logarithmum radii & Logarithmum facti 3AO².

erit = 3. 1570755. 62.
Log. facti 2SH × D = 3. 5093282. 75.
Summa = 6. 6664038. 37.

æqualis logarithmo sinûs anguli Z, qui per tabulas invenitur esse minutorum secundorum 100,19''. Inventis jam æquationibus maximis Y + Z, anguli V, & X, pro quolibet anomaliæ mediæ gradu facile reperiuntur, v. gr. pro 45°.

Est enim Log. anguli Z = 2. 0016853. 46.
Log. cubi sinûs 45°. = 29. 5484550.
horum summa = 31. 5501403. 46.



Ex hâc summa detrahe logarithmum cubi radii 30. 0000000; residuum 1. 5501403. 46. erit logarithmus sinûs anguli X, qui per tabulas invenietur esse minutorum secundorum 35. 41''. Quarè cum in 45°. anomaliæ gradu angulus V, æqualis sit angulo Y, erit motus medius æquatus, seu angulus PHB, = 45°, 4', 56. 55''.

Jam verò ut inveniatur anomalia vera, seu angulus PSB, dato angulo PHB, producatur HP ad Q ut sit PQ = SP, & erit HQ = AB, ex natura ellipseos, atque angulus PHB, æqualis summæ angulorum QSH, SQH; Quare semisumma laterum SH, HQ, est ad eorum semi differentiam, hoc est, AO + SO, ad AO − SO, ut tangens dimidii anguli PHB, ad tangentem semidifferentiæ angulorum QSH, SQH.

Log. tang. $\frac{1}{2}$ PHB = 9. 6181066. 717.
Log. AO − SO = 3. 1407247. 98.
horum summa = 12. 7588314. 698.
Log. AO + SO = 3. 2212068. 41.
Differentia = 9. 5376246. 246.
= Log. tang. Ang. $\frac{1}{2}$ QSH − $\frac{1}{2}$ SQH.

Undè invenietur $\frac{1}{2}$ QSH − $\frac{1}{2}$ SQH = 15°. 1', 35. 5''; & hinc anomalia vera = QSH − SQH (sive − QSP) = 1°. 3' 11'', quam proximè; Nam si ex datâ hâc anomaliâ verâ, quæratur (271) anomalia media, invenietur esse 45°. graduum quam proximè.

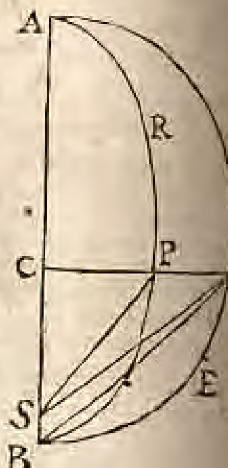
SECTIO VII.

De corporum ascensu & descensu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Posito quodvis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, spatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus describit.

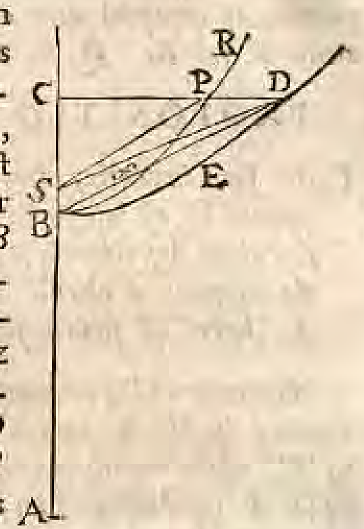
Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per corol. 1. prop. XIII.) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica $ARPB$ & umbilicus ejus S. Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore AB describatur semicirculus ADB, & per corpus decidens transeat recta DPC perpendicularis ad axem; actisque DS, PS erit area ASD areæ ASP, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB minuatur perpetuo latitudo ellipseos, & semper manebit area ASD tempori proportionalis. (e) Minuatur latitu-



(e) 391. Lemma. Si sectionis conicæ latus rectum ad axem transversum pertinens perpetuò minuatur, & tandem evanescat, manente sectionis axe transverso, omnes ad axem ordinatæ perpetuò minuuntur & tandem evanescunt, ac perimeter sectionis cum axe & umbilici cum axis verticibus coincidunt. Est enim, (ex conic.) ordinatæ cujusvis quadratum ad rectangulum abscissarum in ratione datâ lateris recti ad axem transversum; quare si manente axe transverso, adeóq. & abscissarum rectangulo, latus rectum perpetuò minuatur ac tandem evanescat, ordinatæ quadratum adeóque & ordinata ipsa perpetuò minuitur & tandem evanescit, & perimeter sectionis conicæ cum axe coincidit. Porrò ordinata per umbilicum æqualis est dimidio lateri recto (Vid. sup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola & de Ellipsi & Cor. I. Theor. I. de Parab.) adeóque quadratum dimidii lateris recti est ad rectangulum ex distantiis umbilici à verticibus, ut latus rectum ad axem transversum, undè rectangulum sub quartâ parte lateris recti & axe transverso æquatur rectangulo ex distantiis umbilici à verticibus; quarè evanescente latere recto & manente axe transverso, rectangulum sub distantiis umbilici à verticibus nullum fit, & umbilicus cum proximo vertice coincidit.

tudo illa in infinitum: & orbe APB jam coincidente cum axe AB & umbilico S cum axis termino B, descendet corpus in rectâ AC, & area ABD evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium AC, quod corpus de loco A perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area ABD, & à puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC (f). *Q. E. I.*

Cas. 2. Si figura illa RPB hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem AB hyperbola rectangula BED: & (g) quoniam areæ CSP, $CBfP$, $SPfB$ sunt ad areas CSD, $CBED$, $SDEB$, singulæ ad singulas, in datâ ratione altitudinum CP, CD; & area $SPfB$ proportionalis est tempori quo corpus P movebitur per arcum PfB; erit etiam area $SDEB$ eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ RPB in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus PB cum rectâ CB & umbilicus S cum vertice B & recta SD cum rectâ BD. Proinde area $BDEB$ proportionalis erit tempori quo corpus C recto descensu describit lineam CB. *Q. E. I.*

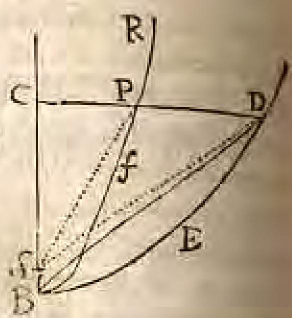


Cas.

(f) 392. *Perpendicularis DC.* Quoniam area ABD, semper proportionalis est tempori quo corpus ex puncto A per rectam AC cadit, erit totius semicirculi area ADEB, proportionalis tempori quo corpus idem cadendo percurrit lineam AB, & divisim area segmenti BDEB, proportionalis tempori quo corpus ex A, cadendo percurrit lineam CB.

(g) 393. *Quoniam areæ.* Nam 1°. triangula CSP, CSD quorum est basis communis CS, sunt ut altitudines CP, CD. 2°. areæ hyperbolicæ CBfP, CBED sunt ut eædem altitudines CP, CD (374) undè 3°. divisim CBfP − CSP ad CBED − CSD, hoc est, sector SPfB ad sectorem SDEB ut CP ad CD.

Cas. 3. (h) Et simili argumento si figura RPB parabola est, & eodem vertice principali B describatur alia parabola BED, quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ CB; fiet segmentum parabolicum $BDEB$ proportionale tempori quo corpus illud P vel C descendet ad centrum S vel B. *Q. E. I.*

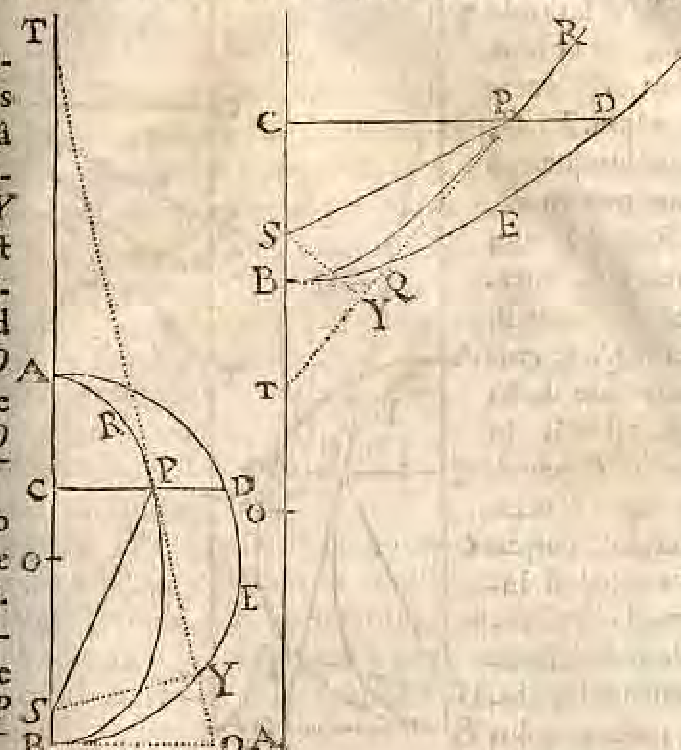


PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in subduplicatâ ratione quam* AC *distantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ semidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ AB.

Bisecetur AB, communis utriusque figuræ RPB, DEB diameter, in O; & agatur recta PT, quæ tangat figuram RPB in P, atque etiam secet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T; sitque SY ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ RPB latus rectum ponatur L. Constat per corol. IX. prop. XVI. quod corporis in lineâ RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem

centrum circulum describentis in subduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2}L \times SP$ ad SY quadratum. Est autem ex conicis ACB ad CPq ut $2AO$ ad L, ideoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicatâ ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad SY *quad.* (i) Porro ex conicis est CO ad BO ut BO ad TO, & compositè vel divisim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit $BO -$ vel $+ CO$ ad BO ut CT ad BT, id est, AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est, $\frac{BQq \times AC \times SP.}{AO \times BC}$ Minuatur jam in infinitum figu-



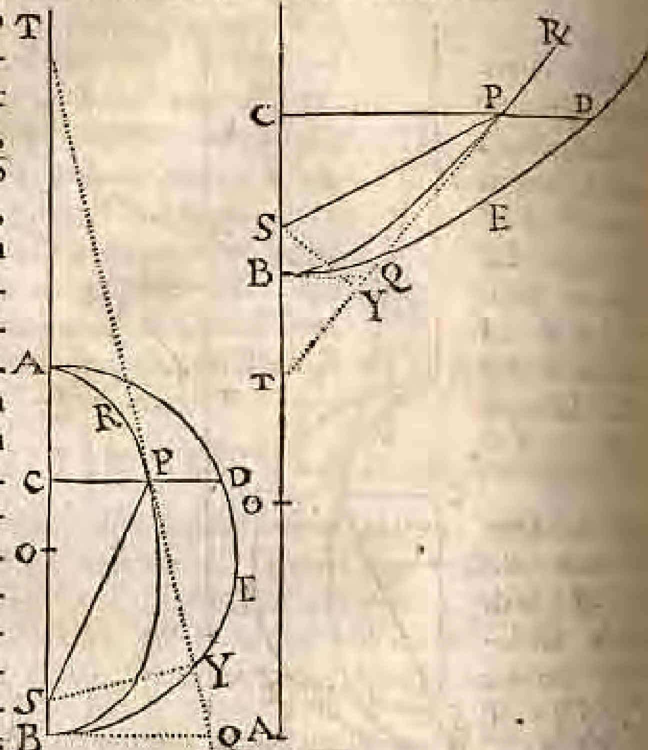
(h) 394. *Simili argumento.* In Parabolâ 1°. CSP : CSD = CP : CD. 2°. sit latus rectum Parabolæ BfP $= l$, latus rectum Parabolæ BED $= L$, erit, ex naturâ Parabolæ $CP^2 = l \times CB$ & $CD^2 = L \times CB$, adeóque $CP : CD = \sqrt{l} : \sqrt{L}$, hoc est, in ratione datâ, ergò area CBEP est ad aream CBED, in eâdem ratione datâ CP ad CD; Quare 3°. divisim SPfB : SDEB = CP : CD. Cætera se habent ut in demonstratione casûs secundi.

395. Scholium. Corporis per rectam CS, ad centrum S, cadentis velocitas in loco quovis C, est ad velocitatem corporis alterius ad candem à centro distantiam circulum describentis, vel in ratione minore quam $\sqrt{2}$, ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1°. casu recta SC, usurpanda est pro ellipsi latitudinis evanescentis; in 2°. casu recta SC, est hyperbola cujus latus rectum evanescit; in 3°. casu, recta SC, est parabola lateris recti evanescentis. Illa omnia patent ex coroll. 7°. Prop. XVI. lib.

(i) 396. *Porrò ex conicis.* (Vid. Lem. 2. de Conicis, Cor. 2.) est TO : AO = AO : CO & quia AO = BO, invertendo & alternando est CO : BO = BO : TO & in ellipsi compositè CO : BO = CB (seu CO + BO) : BT (seu BO + TO); & in hyperbolâ divisim, CO : BO = CB (seu CO − BO) : BT (seu BO − TO); ergo in utraque sectione, CO : BO = CB : BT. Unde in ellipsi dividendo fit AC, seu BO − CO, aut AO − CO : BO = CT, seu BT − CB : BT, & in hyperbolâ, componendo AC seu CO + BO : BO = CT seu CB + BT : BT; adeóque in utrâque sectione AC : BO seu AO = CT : BT. Sed propter similitudinem triangulorum TCP, TBQ, CT : BT = CP : BQ, ergò AC : AO = CP : BQ, & $CP = \frac{BQ \times AC}{AO}$, ac $CP^2 = \frac{BQ^2 \times AC^2}{AO^2}$; indéque $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB} = \frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times CB}$.

De Motu Corporum.

ræ RPB latitudo CP, ſic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaque SY cum lineâ BQ; & corporis jam rectà deſcendentis in lineâ CB velocitas fiet ad velocitatem] corporis centro B intervallo BC circulum deſcribentis; in ſubduplicatâ ratione ipſius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad SYq, hoc eſt (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad SYq) in ſubduplicatâ ratione AC ad AO ſive $\frac{1}{2}AB$. *Q. E. D.*



Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. (k) Corpus ad datam à centro diſtantiam in circulo quovis revolvens, motu ſuo ſurſum verſo aſcendet ad duplam ſuam à centro diſtantiam.

P R O-

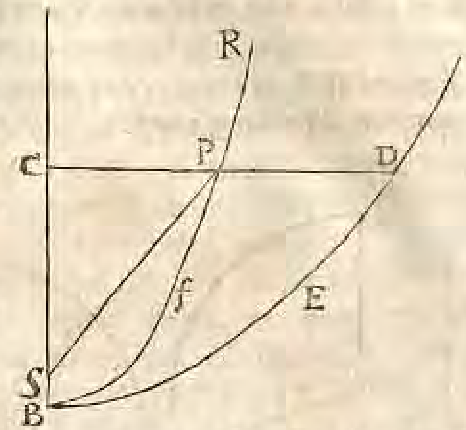
(k) 397. *Corpus ad datam.* Si fuerit BED circulus, & punctum C coincidat cum puncto O, erit $AC = AO = \frac{1}{2}AB$, adeóque velocitas per radium AO cadendo acquiſita eſt æqualis velocitati corporis centro B intervallo $BO = AO$ circulum deſcribentis. Unde ſi corpus illud, ad datam à centro diſtantiam BO in circulo revolvens, ſurſum per OA, projiciatur cum eâ velocitate quâ circulum deſcribit, ſeu quam per AO cadendo acquiſivit, aſcendet ad punctum A, per ſpatium OA (25) ſeu ad duplam ſuam à centro B diſtantiam $BA = 2BO$.

398. Coroll. 1. Velocitas in puncto quovis C, eſt ad velocitatem in alio puncto c, in ratione ſubduplicatâ rectanguli $Ac \times BC$ ad rectangulum $AC \times BC$. Nam velocitas in C, eſt ad velocitatem corporis intervallo BC circulum deſcri-

Liber Primus. Prop. XXXIV.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

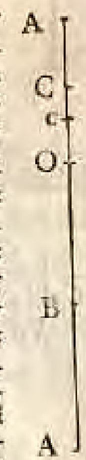
Si figurâ BED *parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *circulum uniformiter deſcribere poteſt.*



Nam corporis parabolam RPB circa centrum S deſcribentis velocitas in loco quovis P (per corol. VII. prop. XVI.) æqualis eſt velocitati corporis dimidio intervalli SP circulum circa idem centrum S uniformiter deſcribentis. Minuatur parabolæ latitudo CP in infinitum eo, ut arcus parabolicus PfB cum rectâ CB, centrum S cum vertice B, & intervallum SP cum intervallo BC coincidat, & conſtabit propoſitio. *Q. E. D.*

P R O-

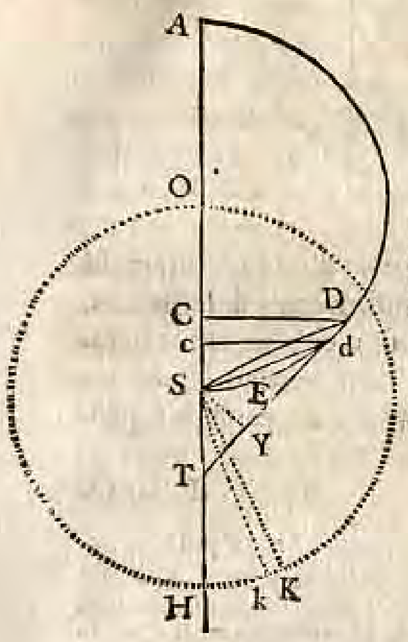
ut $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, (per hanc prop.); Velocitas corporis intervallo BC circulum deſcribentis eſt ad Velocitatem corporis intervallo Bc circulum deſcribentis, (per Cor. 6. Prop. 4.) reciprocè in ratione ſubduplicatâ Radiorum, hoc eſt, ut $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$; Denique Velocitas Corporis intervallo Bc circulum deſcribentis eſt ad Velocitatem in c corporis ex A cadentis ut $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$ (per hanc propoſitionem); Ergo (per compoſitionem rationum) eſt velocitas in C ad velocitatem in c, in ratione compoſitâ ex ratione $\sqrt{AC}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, ratione $\sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{BC}$, & ratione $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad $\sqrt{Ac}$, ſive ut $\sqrt{AC} \times \sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{Ac} \times \sqrt{BC}$, hoc eſt, in ratione ſubduplicatâ rectanguli $AC \times Bc$ ad rectangulum $Ac \times BC$. Q. E. D.

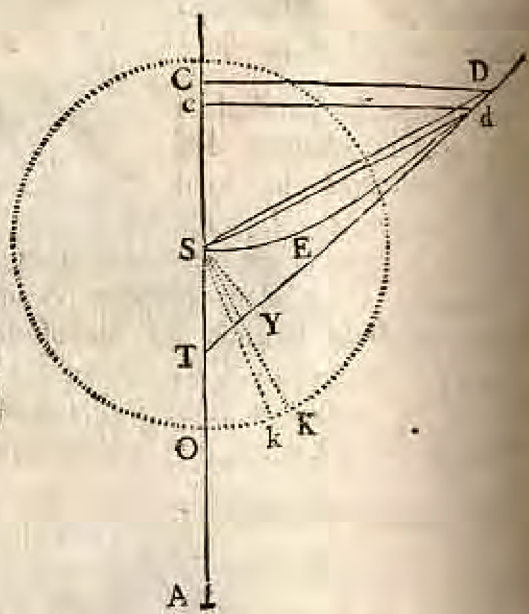


399. Coroll. 2. Si fuerit BfP Parabola, corporis in ea moti velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad diſtantiam SP, circulum deſcribentis in ratione $\sqrt{2}$, ad 1; ſi ſit Ellipſis in minori ratione, in majori verò ſi fuerit hyperbola (per Cor. 7. Prop. 16.) & latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat BfP cum axe BC, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad diſtantiam BC circulum deſcribentis ut $\sqrt{2}$ ad 1. adeóque $AC : \frac{1}{2}AB = 2 : 1$ in 2°. caſu ratio AC, ad $\frac{1}{2}AB$, minor erit quam ratio 2 ad 1; in 3°. caſu major, & contrà.

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iiſdem poſitis, dico quod area figuræ DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore deſcribere poteſt.*





Nam concipe corpus C quam minimâ temporis particulâ lineolam Cc cadendo deſcribere, & interea corpus aliud K, uniformiter in circulo OKk circa centrum S gyrando, arcum Kk deſcribere. Erigantur perpendicula CD, cd occurrentia figuræ DES in D, d. Jungantur SD, Sd, SK, Sk & ducatur Dd axi AS occurrens in T, & ad eam demittatur perpendiculum SY.

Caſ. 1. Jam ſi figura DES circulus eſt vel hyperbola rectangula, biſecetur ejus tranſverſa diameter AS in O, & erit SO

SO dimidium lateris recti. (l) Et quoniam eſt TC ad TD ut Cc ad Dd, & (m) TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Sed (per corol. I. prop. XXXIII.) (n) eſt TC ad TS ut AC ad AO, puta ſi in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC eſt ad AO ſeu SK ut $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$. Porro corporis deſcendentis velocitas in C eſt ad velocitatem corporis circulum intervallo SC circa centrum S deſcribentis in ſubduplicatâ ratione AC ad AO vel SK (per prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis deſcribentis circulum OKk in ſubduplicatâ ratione SK ad SC (per corol. VI. prop. IV.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc eſt lineola Cc ad arcum Kk in ſubduplicatâ ratione AC ad SC, (o) id eſt in ratione AC ad CD. Quare eſt $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & (p) propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $SY \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $SY \times Dd$, & $\frac{1}{2}$ $SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2}$ $SY \times Dd$, id eſt area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ KSk, & SDd, quæ, ſi magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per corollarium lemmatis IV.) areæ totæ ſimul genitæ ſunt ſemper æquales. *Q. E. D.*

Caſ.

(l) * *Et quoniam eſt* TC *ad* TD *ut* Cc *ad* Dd. Quia in Triangulo TCD, eſt cd parallela baſi CD, ideoque TC : TD ut partes correſpondentes Cc, Dd.

(m) * *Et* TD *ad* TS *ut* CD *ad* SY. Sunt enim propter angulos Y, & C, rectos & angulum T, communem, triangula TCD, TSY, ſimilia.

(n) * *Eſt* TC : TS. Nam punctis D, d, coeuntibus, fit TD, tangens; adeóque (98.) TC : TS = AC : AO.

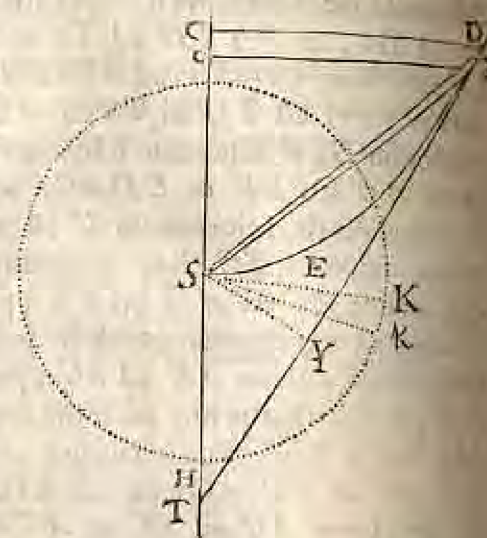
(o) * *In ratione* AC *ad* SC, *id eſt in ratione* AC *ad* CD. Eſt enim SED, circulus, vel hyperbola æquilatera cujus vertices S & A, ſed in circulo & hyperbolâ æquilaterâ ob axium æqualitatem eſt $CD^2 = AC \times SC$, & proinde $AC : CD = CD : SC$, & hinc AC ad CD, in ratione ſubduplicatâ AC ad SC.

(p) * *Et propterea.* Nam ex ſuperius demonſtratis $AC : SK = CD \times Cc : SY \times Dd$.

* *Hoc*

De Motu Corporum.

Cas. 2. Quod si figura DES parabola sit, invenietur esse ut supra $CD \times Cc$ ad $SY \times Dd$ ut TC ad TS, hoc (q) est ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4}$ $CD \times Cc$ æquale esse $\frac{1}{2}$ $SY \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis est velocitati quâ circulus intervallo $\frac{1}{2}$ SC uniformiter describi possit (per prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola Cc ad arcum Kk (per corol. VI. prop. IV.) est in subduplicatâ ratione SK ad $\frac{1}{2}$ SC, id (r) est, in ratione SK ad $\frac{1}{2}$ CD. Quare est $\frac{1}{2}$ $SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4}$ $CD \times Cc$, ideoque æquale $\frac{1}{2}$ $SY \times Dd$, hoc est, area KSk æqualis areæ SDd, ut supra. *Q. E. D.*



PRO-

(q) * *Hoc est ut 2 ad 1.* Cum enim sit T D tangens, C D ordinata, S C abscissa, est ex naturâ Parabolæ $TS = SC$, adeóque $TC : TS = 2. 1$.

(r) * *Id est in ratione SK, ad $\frac{1}{2}$ CD.* Nam (ex hyp.) SK, æqualis est dimidio lateri recto, quare ex naturâ parabolæ $2SK \times SC = CD^2$, & $\frac{1}{2} SC \times SK = \frac{1}{4} CD^2$. Unde $SK : \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} CD : \frac{1}{2} SC$, & hinc SK ad $\frac{1}{2}$ CD in ratione subduplicatâ SK ad $\frac{1}{2}$ SC.

400. Coroll. 1. Si fuerit SED circulus cujus diameter SA, corpus ex loco A demissum & solâ vi centripetâ sollicitatum cadendo percurret totam diametrum AS, eodem tempore, quo corpus aliud ad dimidiam distantiam S O; describet semicirculum OKH; sunt enim areæ semicirculorum OKH & SEA æquales, tempus verò quo corpus ex A demissum cadendo percurrit spatium quodvis AC est ad tempus quo percurret AS, ut area ASD ad semicirculum ADES, sive ut sector OSK ad sectorem quem describit corpus in circulo OKH revolvens æqualem semicirculo ADES, qui sector est ipse semicirculus OKH.

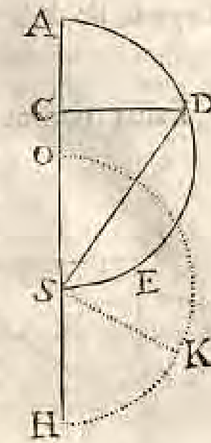
401. Coroll. 2. Si corpus ad distantiam SA, circulum describens omni motu revolutionis privaretur, & ad centrum virium S, solâ vi centripetâ urgeretur, tempus quo ex A usque ad S cadendo perveniret, esset ad tempus unius revolutionis in circulo ut 1, ad $4\sqrt{2}$: est enim tempus periodicum corporis ad distantiam SO circulum describentis (hoc est, duplum temporis quo corpus ex A, cadendo percurrit AS, (400)) ad tempus periodicum corporis ad distantiam AS ($= 2$ SO) in circulo revolventis ut Radices quadratæ cuborum distantiarum 1 & 2, sive ut 1, ad $\sqrt{8}$ (371), hoc est, ut 1 ad $2\sqrt{2}$; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit AS, est ad tempus periodicum corporis ad distantiam AS in circulo revolventis ut $\frac{1}{2}$ ad $2\sqrt{2}$, hoc est, ut 1, ad $4\sqrt{2}$.

402. Scholium. Si planetarum orbitas circulares esse supponamus, vimque centripetam quâ in suis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione distantiarum à centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenirent. Exempli causâ, cum tempus periodicum lunæ circà terram revolventis sit dierum 27. hor. 7. minutorum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343; erit $4\sqrt{2}$, ad 1, hoc est, quam proximè 565685. 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. prim. 55, & secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

Liber Primus. Prop. XXXVI.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.



Super diametro AS distantiâ corporis a centro sub initio, describe semicirculum ADS, et & huic æqualem semicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem constitue sectorem OSK. (s) Patet per prop. XXXV. quod corpus cadendo describet spatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, describere potest arcum OK. *Q. E. F.*

PRO-

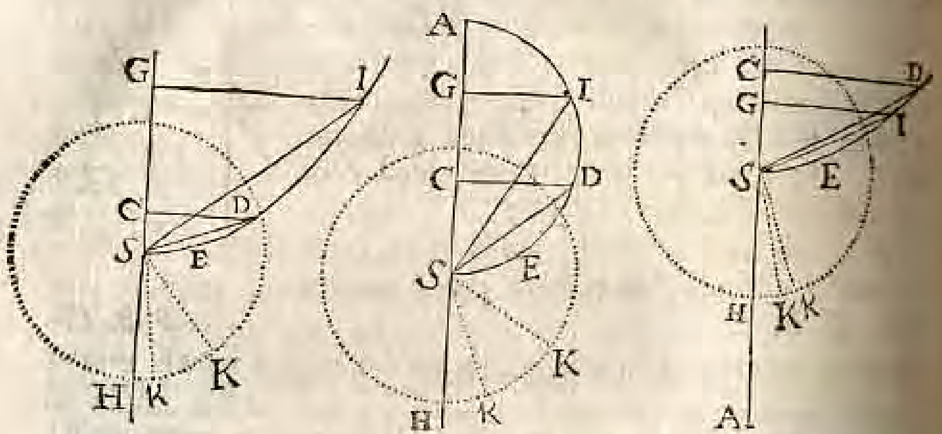
(s) * *Patet per prop. XXXV.* Cum enim semicirculorum ADS, OKH, & sectorum OSK, ASD, areæ æquales sint respectivè, erit quoque sector HSK æqualis segmento SED, adeóque (401.) tempus quo corpus ex A cadendo percurrit CS, æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo OKH revolvens describit arcum KH, & quoniam tempus per AS cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum semicirculum OKH, describit (401), erit tempus per AC, æquale tempori per arcum OK.

403. Coroll. Arcus OK, æqualis est summæ arcus AD & lineæ CD. Est enim sector ASD, æqualis sectori AOD, + triangulo DOS, sive $\frac{1}{2}$ AO × AD + $\frac{1}{2}$ AO × CD: sector verò OSK, $= \frac{1}{2}$ SO × OK $= \frac{1}{2}$ AO × OK, sed est sector OSK = ASD. Quare $\frac{1}{2}$ AO × OK $= \frac{1}{2}$ AO × AD + $\frac{1}{2}$ AO × CD, atque adeò OK = AD + CD. Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 2957[8], qui radio æqualis est, ita CD, ad 4[um]. B, erit B arcus rectæ CD æqualis, & obtinebitur OK = AD + B. Hinc dato tempore quo corpus datam AS ex puncto A cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ AS partem AC describit, si fiat ut semicirculus OKH, seu grad. 180, ad arcum AD + B, seu OK, ità tempus quo corpus ex A cadendo percurrit AS, ad tempus quo percurrit AC.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.

Exeat corpus de loco dato *G* secundum lineam *GS* cum ve-



locitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum *SG* circa centrum *S* revolvi posset, cape *GA* ad $\frac{1}{2}$ *AS*. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum *A* infinite distat, quo casu parabola vertice *S*, axe *SG*, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu circulus, posteriore hyperbola rectangula super diametro *SA* describi debet. (t) Patet per prop. XXXIII. Tum centro *S*, intervallo æquan-

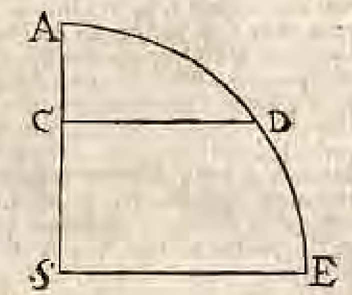
(t) * *Patet per Prop. XXXIII.* Scilicet, fingatur sectio conica latitudinis quam minimæ, ut proxime coincidat cum axe AB, & in ea fingatur esse punctum G ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur species illius sectiones, & ex proportione velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum SG circa Centrum S revolveretur, agnoscetur, ex Cor. 7. Prop. XVI. &, si sit Ellipsis vel Hiperbola ejus axis major ex velocitate in G datâ etiam innotescet, per Prop. XXXIII, quia velocitas corporis cadentis in puncto G, est ad velocitatem corporis in distantia SG revolventis in subduplicatâ ratione distantiæ puncti G à vertice ulteriore Ellipsis vel Hyperbolæ ad ejus semi Axem, unde

[...]ante dimidium lateris recti, describatur circulus *HkK*, & [...] corporis descendentis vel ascendentis locum *G*, & locum [...] quemvis *C*, erigantur perpendicula *GI*, *CD* occurren[...] conicæ sectioni vel circulo in *I* ac *D*. Dein junctis *SI*, [...]*D*, fiant segmentis *SEIS*, *SEDS* sectores *HSK*, *HSk* [...]ales, & per prop. XXXV. corpus *G* describet spatium *GC* [...]dem tempore quo corpus *K* describere potest arcum *Kk*. Q.E.F.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

[...] quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ [...] à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respectivè proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis *A* secundum rectam *AS*; & centro virium [...] intervallo *AS*, describatur circuli [qu]adrans *AE*, sitque *CD* sinus rec[tus] arcus cujusvis *AD*; & corpus *A*, [te]mpore *AD*, cadendo describit spa[tiu]m *AC*, inque loco *C* acquiret velo[ci]tatem *CD*.



Demonf-

[...] si fiat GA ad $\frac{1}{2}$ SA in duplicatâ [...] velocitatis in G ad velocitatem [...] in distantiâ SG revolventis, erit [...] ulterior Ellipsis vel Hyperbolæ, [...] SA semi Axis quæsitus.

[...] ergo in vertice S Parabola quæ[...] curva evanescens in quâ G est, sit [...] vel fiat Circulus, vertice S [...] SA, si sit Ellipsis; vel Hyper[bola] æquilatera eâdem Diametro si ea curva sit Hyperbola, & si Corpus ex G perveniat in C, erectis usque ad curvas descriptas perpendicularibus GI, CD, erunt segmenta SEI, SED proportionalia temporibus quibus corpus propositum ex G ad S, & ex C ad S movebitur per Prop. XXXII: *Sed per Prop. XXXV*, corpus G spatia GS, CS, iisdem temporibus cadendo percurrit, quibus corpus K, describit arcus KH, kH; eodem igitur tempore percurritur GC, quo Kk.

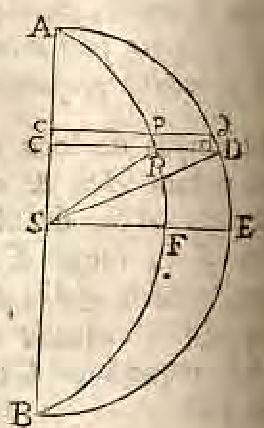
* 404.

(u) Demonstratur eodem modo ex propositione x, quo propositio xxxii, ex propositione xi demonstrata fuit.

Corol. 1. (x) Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco *A* cadendo pervenit ad centrum *S*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem *ADE*.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad (y) usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. iii. prop. iv.) æquantur.

PRO-



(u) * 404. *Demonstratur eodem modo.* Nam si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per Cor. 1. Prop. X.) ellipsim aliquam APFB, cujus centrum congruit cum centro virium S; Super hujus ellipseos axe majore AB, describatur semicirculus ADB, & per corpus decidens transeat recta DPC perpendicularis ad axem, actisque DS, PS, erit area ASD, areæ ASP, atque adeò etiam tempori proportionalis. Manente axe AB, minuatur perpetuò latitudo Ellipseos, & semper manebet area ASD, tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe APB jam coincidente cum axe AB, puncto P cum C, & F cum S, descendet corpus in rectâ AC, & area ASD, seu huic proportionalis arcus AD, evadet tempori proportionalis. In rectâ AC capiatur linea quam minima Cc, agaturque cd, parallela CD, & circulum secans in puncto d, ex quo ad CD, demittatur perpendiculum dr, & arcus Dd proportionalis erit tempori quo percurritur Cc, (ex demonstr.) atque adeò coeuntibus punctis Cc, & dD, erit velocitas in C, ut $\frac{Cc}{Dd}$ (§. 145), sed ob triangula Drd, SCD, similia Cc, seu dr : dD = CD : SD, id est, $\frac{Cc}{dD} = \frac{CD}{SD}$. Quare velocitas in loco C, est ut $\frac{CD}{SD}$, hoc est, ob constantem SD, ut CD. Q. E. D.

(x) * *Cor.* 1. *Hinc æqualia.* Nam per coroll. 2. prop. X. tempora revolutionum in ellipsibus quibusvis APF, ADE adeóque & tempora per ellipseon quadrantes APF seu AS, ADE, sunt æqualia.

(y) * *Ad usque centrum.* Ex quibus cadunt.

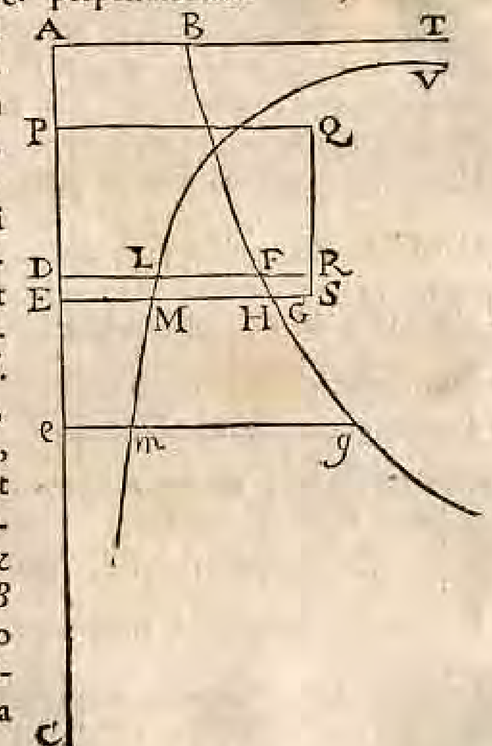
405. Æqualia sunt tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad locum C, & corpus aliud revolvendo describit arcum circuli AD; Cum enim corpus in circulo uniformiter revolvatur, erit tempus per AD ad tempus per AE seu ad tempus per AS, ut arcus AD, ad quadrantem AE, sed est etiam tempus per AC, ad tempus per AS, ut arcus AD, ad quadrantem AE, ergo tempus per AC, æquatur tempori per AD.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Posita cujuscumque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis *A* in rectâ *ADEC* cadat corpus *E*, (z) deque loco ejus *E* erigatur semper perpendicularis *EG*, vi centripetæ in loco illo ad centrum *C* tendenti proportionalis: Sitque *BFG* linea curva quam punctum *G* perpetuo tangit. Coincidat autem *EG* ipso motus initio cum perpendiculari *AB*, & erit corporis velocitas in loco quovis *E* (a) ut recta, quæ potest aream curvilineam *ABGE*. *Q. E. I.*

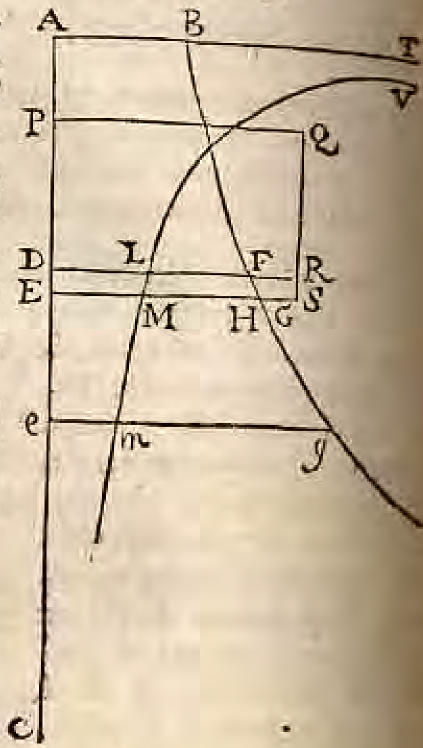
In *EG* capiatur *EM* rectæ, quæ potest aream *ABGE*, reciprocè proportionalis, & sit *VLM* linea curva, quam punctum *M* perpetuo tangit, & cujus asymptotos est recta *AB* producta; & erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam *AE*, ut area curvilinea *ABTVME*. *Q. E. I.*



(z) * *Deque loco ejus E.* Id est, per omnia lineæ AC puncta erigantur perpendicula ut EG, vi centripetæ in singulis illis punctis proportionalia, sitque BFG curva ad quam omnia illa perpendicula terminentur. Possunt autem perpendicula illa ad arbitrium assumi, dummodò singula vi centripetæ in singulis locis proportionalia sint.

(a) *Ut recta, quæ potest aream curvilineam ABGE.* In prioribus Editionibus erat, *ut areæ curvilineæ ABGE latus quadratum*; hæ scilicet phrases synonymæ sunt; frasis quæ hic juxta Editionem Londinensem adhibetur, veteribus Geometris est familiaris: Ea autem linea quæ potest figuram datam, est linea cujus quadratum est æquale illi figuræ datæ.

Etenim in rectâ AE capiatur linea quam minima DE datæ longitudinis, sitque DLF locus lineæ EMG, ubi corpus versabatur in D; & si ea sit vis centripeta, ut recta, quæ potest aream $ABGE$, sit ut descendentis velocitas: erit area ipsa in duplicatâ ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E, scribantur V & $V+I$, erit area $ABFD$ ut VV, & area $ABGE$ ut $VV+2VI+II$, & divisim area $DFGE$ ut $2VI+II$, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id (b) est si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus, quo corpus cadendo describit lineolam



(b) 406. * *Id est, si primæ quantitatum nascentium &c.* Seu coeuntibus punctis, D & E, F & G, fit area DFGE, æqualis rectangulo DF×DE (107) & velocitatis finitæ V, incrementem nascens I, evanescit respectu V, (107) ac proinde cum sit I:V=II:VI, quadratum II, evanescit respectu rectanguli VI, aut 2VI; Quare in hoc casu $\frac{DFGE}{DE} = \frac{DF \times DE}{DE} = DF$, & $\frac{2VI+II}{DE} = \frac{2VI}{DE}$; Est igitur longitudo DF, ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam, ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$: Quoniam autem velocitas per spatium evanescens DE, est uniformis (141), si tempus quo DE percurritur, dicatur T, erit $T = \frac{DE}{V}$, (5). Est autem vis ut $\frac{I}{T}$ (13) adeóque si loco T ponatur $\frac{DE}{V}$, erit vis ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF, *ergò vis ipsi DF, vel EG &c.*

* Por-

neolam DE, ut lineola illa directè & velocitas V inversè; ideoque vis ut velocitatis incrementum I directè & tempus inversè, ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF. Ergo vis ipsi DF vel EG proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut recta quæ potest aream $ABGE$. *Q. E. D.*

(c) Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inversè ut linea recta quæ potest aream $ABFD$; (d) sitque DL, atque ideo area nascens $DLME$, ut eadem linea recta inversè: erit tempus ut area $DLME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea AE describitur ut area tota $ATVME$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si P sit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquisivit eodem loco D, & in perpendiculari DF capiatur DR, quæ sit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, & compleatur rectangulum $PDRQ$, eique æqualis abscindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $DRSE$, (e) cum sit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad $2VI$, ideoque ut $\frac{1}{2}V$ ad I, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæ-

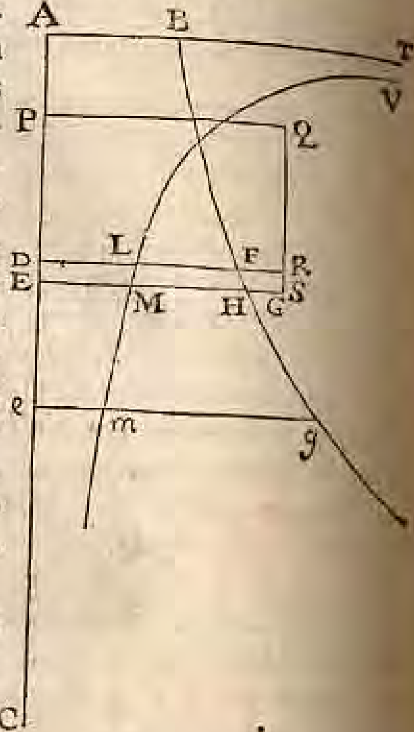
(c) * *Porrò cum tempus.* Tempus quo lineola est ut spatium uniformiter percursum directè & velocitas inversè (5), quare si spatium constans fuerit, tempus est ut velocitas inversè.

(d) * *Sitque DL.* Est enim DL, seu DL in constantem DE ducta, hoc est, ut area nascens DLME, sed DL est ut latus quadratum areæ ABFD inversè (per hypothes.) ergò area nascens DLME, est ut idem latus quadratum inverse, hoc est, ut velocitas inverse, sive, ut tempus per DE. *Quarè summa omnium temporum est ut summa omnium arearum nascentium. Hoc est, &c.*

(e) * *Cum* (coeuntibus punctis D, E) *sit area ABFD ad aream DFGE, ut VV, ad 2V×I;* Si enim A sit locus ex quo corpus cadere debet vi quâcumque ut eamdem in D velocitatem V acquisiverit ac si ex P vi gravitatis decidisset erit area ABFD, ut VV, & area DFGE, ut 2VI+II, hoc est, (406) ut 2VI. Quare ABFD : DFGE = VV : 2VI = ½V : I.

* Et

inæquabili cadentis; (f) & similiter area $PQRD$ ad aream $DRSE$ ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ DF, DR, ideoque ut areæ nascentes $DFGE$, $DRSE$; erunt ex æquo areæ totæ $ABFD$, $PQRD$ ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.



Corol. (g) 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D datâ cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco

(f) * *Et similiter area PQRD ad aream DRSE*, hoc est, linea P D ad lineam D E (propter altitudinem communem DR=SE) *ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis*, scilicet cum velocitas in D sit V, ejus incrementum in E sit X, ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit sunt ut quadrata velocitatum in fine lapsus acquisitarum, ergo erit PD ad PE ut VV ad VV + 2VX + X², & dividendo P D : D E = V V : 2VX + X² (& omisso X² ut pote infinite parvo) VV : 2 VX = $\frac{1}{2}$ V : X; unde P Q R D : D R S E = $\frac{1}{2}$ V : X, sive invertendo DRSE : PQRD = X : $\frac{1}{2}$ V; sunt verò incrementa illa I & X (13) ut vires generatrices id est ut DF ad DR, sive ut DFGE ad DRSE. Est ergo per hanc demonstrationem

$$ABFD : DFGE = \tfrac{1}{2}V : I$$
$$DFGE : DRSE = DF : DR = I : X$$
$$DRSE : PQRD = X : \tfrac{1}{2}V$$

Unde ex compositione rationum ABFD : PQRD = $\frac{1}{2}$V × I × X : I × X × $\frac{1}{2}$V sive in ratione æqualitatis.

(g) * *Coroll. 2. demonstratur.* Sit A punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco D velocitatem cum qua sursum vel deorsum projicitur, erit (ex Dem.) area A B g e proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco e; est autem (ex Dem.) area A B F D, æqualis rectangulo P Q R D, adeóque area A B g e = P Q R D + D F g e si locus e loco D inferior fuerit, & A B g e = PQRD − DFge, si locus e loco D superior, hoc est, si corpus sursum projectum sit; ergo velocitas

loco e, erigendo ordinatam eg, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est recta, quæ potest rectangulum $PQRD$ areâ curvilineâ $DFge$ vel auctum, si locus e est loco D inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rectam quæ potest rectangulum solum $PQRD$.

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD$ + vel − $DFge$, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam PD est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam PE in (h) subduplicatâ ratione PD ad PE, id est (lineola DE jamjam nascente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2}DE$ seu $2PD$ ad $2PD + DE$, & (i) divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam DE ut $2PD$ ad DE, ideoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam De, ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

corporis in loco e, est ut √PQRD ∓ DFge; atque sit velocitas in D, ut √ABFD, sive huic æquali, √PQRD (ex Dem.) erit velocitas in e; ad velocitatem in D, ut √PQRD ∓ DFge, ad √PQRD.

(h) * *In subduplicatâ ratione* P D, ad PE (27), *id est, lineola* D E, *jamjam nascente in ratione* P D, *ad* P D, + $\frac{1}{2}$ D E; quadratis enim his ultimis terminis fiet PD² : PD² + P D × D E + $\frac{1}{4}$ DE²; & cum sit P D quantitas finita, & D E nascens, evanescit (107) $\frac{1}{4}$ D E² respectu P D × D E; adeóque P D × D E ∓ $\frac{1}{4}$ DE² = P D × D E. Unde est P D² : PD² + P D × D E + $\frac{1}{4}$ D E² = PD² : PD² + P D × D E = P D : P D + D E, seu PE; est igitur PD : P E in ratione duplicatâ PD ad P D + $\frac{1}{2}$ D E, atque adeò P D ad PD + $\frac{1}{2}$ E D, in ratione subduplicatâ PD, ad P E.

(i) * *Et divisim.* Tempus per P D, vi uniformi descriptum est ad tempus per D E, ut 2 P D, ad D E, adeóque ut rectangulum 2 P D × D L, ad rectangulum D E × D L, seu ad aream DLME; tempus per rectam PD, vi uniformi descriptam sit T, tempus per D E, sit θ, & tempus per D e, sit t, erit (ex Dem.) T : θ = 2 P D × D L : D L M E, estque idem tempus θ, quo utrumque corpus describit lineam D E, siquidem utriusque eadem est velocitate in D: sed (ex constructione) tempus quo corpus inæ-

DE MOTU CORPORUM.

inæquabili motu describit lineam D E est ad tempus quo describit lineam D e, ut area DLME, ad aream D L M e, ergo θ: T = D L M E : D L m e; unde ex æquo T : t = 2 P D × D L : D L m e.

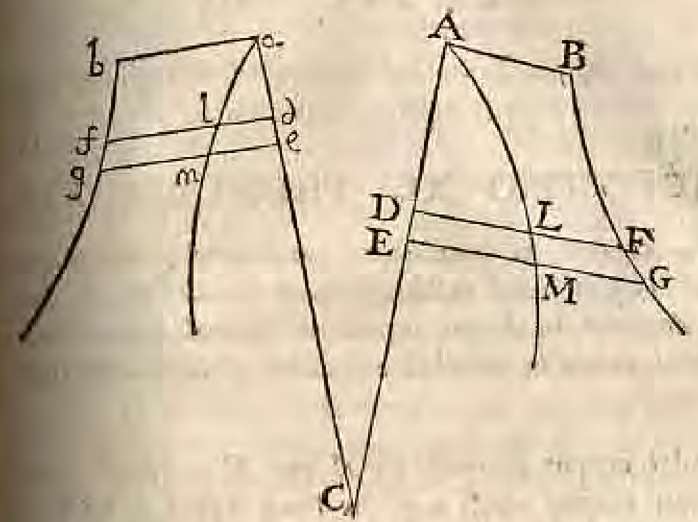
407. Sit spatium à corpore cadente descriptum A E = x, velocitas in E acquisita = v, tempus quo A E, percurritur = t, vis centripeta in E, hoc est, E G = y, erunt dx, dv, dt, quantitatum x, v, t, fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescentia (146. 158), cumque velocitas per spatium nascens D E, sit uniformis (145) erit $v = \frac{dx}{dt}$ (5), ac proindè velocitatis incrementum $dv = \frac{ddx}{dt}$, si sumatur dt, constans (164) sed est (13) $y = \frac{dv}{dt}$, adeóque si loco dv, substituatur $\frac{ddx}{dt}$, invenietur $y = \frac{ddx}{dt^2}$. Hæ sunt formulæ quas tradidit Varignonius in Comm. Parif. an. 1700. Harum formularum ope, datâ inter duas ex variabilibus quatuor y, x, v, t, æquatione quâvis, obtinebuntur tres æquationes quæ simul quatuor duntaxat variabiles complectentur, ex quibus proindè æquationibus per calculum fluxionum & solitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quaslibet ex quatuor variabilibus y, x, v, t, ut demonstravit Varignonius in Comm. Parif. an 1700, qui in iisdem commentariis an. 1707. 1720. præclara de ascensu & descensu corporum perpendiculari theoremata edidit.

408. Coroll. Cum sit juxtà superiores formulas $dt = \frac{dx}{v}$, & $dt = \frac{dv}{y}$, ac proindè $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$, vel $y\,dx = v\,dv$, erit $S.\,y\,dx = \frac{1}{2}v^2$. Sed $y\,dx$ = E G × D E, seu fluxioni areæ $ABGE$; ergò (147) $S.\,y\,dx$ = areæ A B G E, $= \frac{1}{2}v^2$, & $v = \sqrt{2\,ABGE}$. Est igitur ob constantem 2, velocitas in loco E, ut recta quæ potest aream curvilineam A B G E. Hinc est 1^{us}. casus Prop. XXXIX. Newt. Quoniam verò $dt = \frac{dx}{v}$ & $v = \sqrt{2\,ABGE}$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{2ABGE}}$. Quare si capitur EM $= \frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$, erit dt = E M × dx = E M × D E, & sumptis utrinque fluentibus t = area A L M E. Hic est casus 2^{us}. Prop. XXXIX. Newt.

409. Superior expressio vis centripetæ y, $= \frac{dv}{dt}$ si vis centripeta consideretur ut gravitas in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verùm si pondera non sint massis proportionalia, diversæque inter se massæ conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quâ centrum versus urgetur. Sit vis illa = y, & massa = m, erit quidem semper $v = \frac{dx}{dt}$ (5), at fiet $y = \frac{m\,dv}{dt}$. Etenim vis centripeta considerari potest ut potentia motrix, quæ corpori indesinenter applicata, motum in eo suâ actione producit, quæque tempusculo evanescente eadem constanter permanet, & uniformiter agit (117). Porrò factum ex potentiâ motrice uniformiter agente & tempore actionis æquivalet quantitati actionis; crescit enim actionis quantitas cum potentiâ motrice & tempore actionis proportionaliter, & factum ex massâ corporis & celeritate, seu quantitas motûs producti est id quod actione illâ effectum est, seu quantitati actionis æquipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis & quantitatem effectûs & alter alteri æquivaleat. Quare $y\,dt = m\,dv$, & $y = \frac{m\,dv}{dt}$.

410. Si

LIBER PRIMUS. PROP. XXXIX.



410. Si itaque pondera non supponantur massis proportionalia, & corpora duo ... quorum massæ M, m ad idem vel ... virium centra C, perpendiculariter cadant, eorumque vires centripetæ in ... locis E, e, sint Y = E G, y = e g, ... V, v, spatia descripta X = A E, ... tempora quibus descripta sunt T, t, ... (409) $v = \frac{dx}{dt}$, $V = \frac{dX}{dT}$, & $y\,dt = m\,dv$, $Y\,dT = M\,dV$, adeóque (408), ... = a b g e $= \frac{1}{2}m\,v\,v$; & similiter ... = A B G E $= \frac{1}{2}$ M V V, ob constantes M, m; undè $v = \frac{\sqrt{2\,abge}}{m}$, $V = \frac{\sqrt{2\,ABGE}}{M}$; proindèque $v : V = \frac{\sqrt{2\,abge}}{m} : \frac{\sqrt{2\,ABGE}}{M}$. Quarè $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx\sqrt{m}}{\sqrt{2abge}}$, & $dT = \frac{dX\sqrt{M}}{\sqrt{2ABGE}}$; undè si ponatur em, $= \frac{1}{\sqrt{2abge}}$ & EM = $\sqrt{2}$ A B G E, erit dt = d e × e m × $\sqrt{m}$, & dT = D E × E M × $\sqrt{M}$, ac consequenter t = a l m e × $\sqrt{m}$: & T = A L M E × $\sqrt{M}$. Unde t : T = a l m e × $\sqrt{m}$: A L M E × $\sqrt{M}$.

DE MOTU CORPORUM.

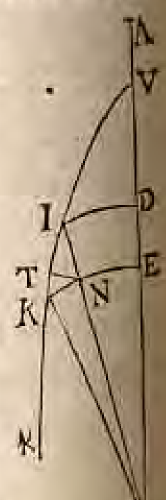
SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab *A* per *D*, *E*, ad centrum *C*, & moveatur corpus aliud a *V* in lineâ curvâ *VIKk*. Centro *C* intervallis quibusvis describantur circuli concentrici *DI*, *EK* rectæ *AC* in *D* & *E*, curvæque *VIK* in *I* & *K* occurrentes. Jungatur *IC* occurrens ipsi *KE* in *N*; & in *IK* demittatur perpendiculum *NT*; sitque circumferentiarum circulorum intervallum *DE* vel *IN* quam minimum, & habeant corpora in *D* & *I* velocitates æquales. Quoniam distantiæ *CD*, *CI* æquantur, erunt vires centripetæ in *D* & *I* æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas *DE*, *IN*; & si vis una *IN* (per legum corol. 2.) resolvatur in duas *NT* & *IT*, vis *NT*, agendo secundum lineam *NT* corporis cursui *ITK* perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus à cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ *ITKk* progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera *IT*, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit



LIBER PRIMUS. PROP. XL.

sibi ipsi proportionalem. (k) Proinde corporum in *D* & *I* accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium *DE*, *IN*, *IK*, *IT*, *NT* rationes primæ) sunt ut lineæ *DE*, *IT*: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus *DE* & *IK* describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ *DE* & *IK*, ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas *DE* & *IK*, sunt ut *DE* & *IT*, *DE* & *IK* conjunctim, id est ut *DE quad.* & *IT×IK rectangulum.* (l) Sed *rectangulum IT×IK* æquale est *IN quadrato*, hoc est, æquale *DE quad.* & propterea accelerationes in transitu corporum à *D* & *I* ad *E* & *K* æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in *E* & *K*: & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiis. *Q. E. D.*

Sed & (m) eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter à centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus vel oscilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politissimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat,

(k) * *Proindè corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ DE, IT.* Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes nascentes, seu celeritatum incrementa nascentia directè & tempora inversè (13), unde temporibus æqualibus accelerationes nascentes sunt ut vires acceleratrices, temporibus autem inæqualibus ut vires acceleratrices & tempora conjunctim; sed lineæ DE, IT, sunt ut vires acceleratrices in directionibus DE, IT; ergò corporum in *D* & I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ DE, IT; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim.

(l) * *Sed rectangulum* IT × IK *æquale est IN quadrato*, cum sit KNI angulus rectus, & linea NT ad basim IK normalis, adeóque crus IN medium proportionale inter hypothenusam IK & illius abscissam IT.

(m) 411. *Et eodem argumento.* Vis enim acceleratrix motum corporis ascendentis eodem modo retardat, quo motum descendentis accelerat in iisdem locis (25); unde vera est propositio sive corpus utrumque descendat aut ascendat, sive descendente uno, alterum ascendat.

412. Si centrum C in infinitum abeat, rectæ AC, IC fiunt parallelæ & arcus DI, EK in rectas, lineis AC, IC perpendiculares, mutantur. Valet igitur propositio etiam ubi vis centripetæ directio AC, IC sibi perpetuò parallela est, dummodò puncta D, I æque alta sint, hoc est, in eâdem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculari sumantur.

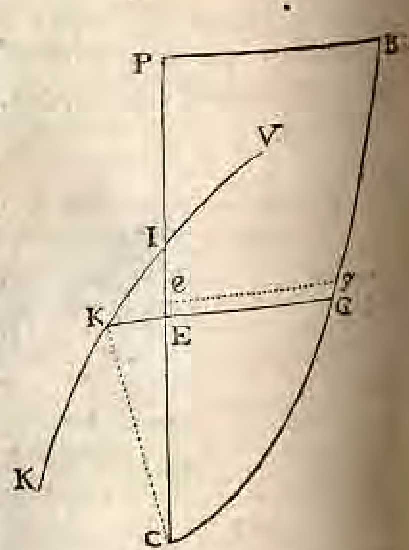
dat, * Im-

DE MOTU CORPORUM. dat, sintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel (n) impedimento vasis absolutè lubrici idem præstatur quod vi transversâ *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima à centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas A distantia corporis à centro in alio quovis orbitæ puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas quælibet A^{n-1}, cujus index $n-1$ est numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. (o) Namque velocitas rectâ ascendentis ac descendentis (per prop. XXXIX.) est in hâc ipsâ ratione.

(n) * *Impedimento vasis.* (Vid. not. 83. 86. 89. 90. 91.

(o) 413. *Namque velocitas rectâ ascendentis ac descendentis (per prop. XXXIX.) est in hâc ipsâ ratione* $\sqrt{P^n - A^n}$; Sit enim centrum virium C, distantiâ C P ex quâ corpus incipit cadere dicatur *P*, visque centripeta sit semper ut abscissarum C E (quæ dicuntur *A* in hoc Corollario) dignitas $n-1$, erigantur in omnibus punctis E perpendiculares E G vi centripetæ CE^{n-1} proportionales, perpendicularis PB in puncto P erecta dicatur b, & per omnium perpendicularium vertices ducatur curva, dicantur x abscissæ CE, dicantur y ordinatæ EG, erit $b : y = P^{n-1} : x^{n-1}$, ideoque $y = \frac{bx^{n-1}}{P^{n-1}}$. Unde liquet curvam hanc esse generis Parabolici & ejus quadraturam facilè obtineri, sit enim $Ee = dx$ fluxio abscissæ CE, erit $EegG = y\,dx$ fluxio areæ CEG, & loco y posito ejus valore $\frac{bx^{n-1}}{P^{n-1}}$ erit $y\,dx = \frac{bx^{n-1}}{P^{n-1}}dx$, cujus fluens est (165) $\frac{bx^n}{nP^{n-1}}$, quæ exprimit aream quæ respondet abscissæ x, sive *A*, itaque ...

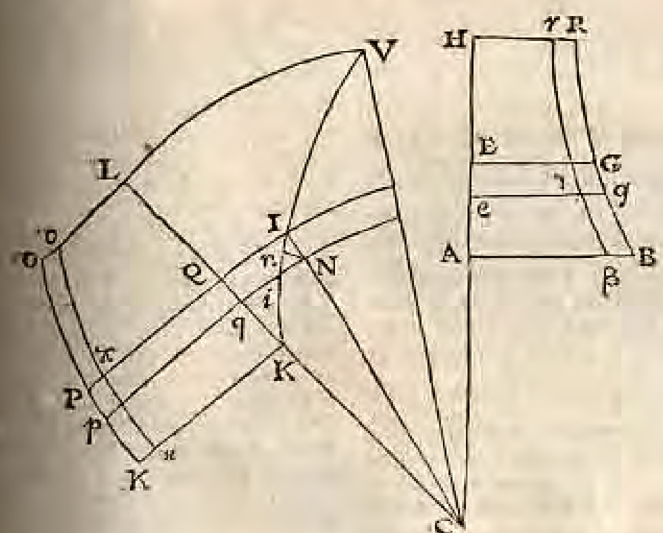


LIBER PRIMUS. PROP. XL.

...antibus, erunt semper areæ CEG sicut ... sive A^n.

... verò per Prop. XXXIX., velocitas ... cadentis in puncto E, est ut li... potest aream PBGE, sive quæ ... differentiam arearum CPB, CEG, ... semper CPB ad CEG ut P^n ... A^n, earum ergo differentiæ erunt semper ut $P^n - A^n$, ideoque velocitas corporis cadentis in E erit semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$. ... positis si corpus vel oscillans vel ... trajectoriâ quâcunque VIK k revolvens ... puncto I velocitatem eam habeat quâ ... CI in P productâ) ex I in P ascendere potuisset, vel quod idem est quam acquireret (25) ex P ad I decidendo, in omni altitudine CK sive A eamdem habebit ... quam corpus acquiret rectâ descendendo ex distantiâ P à centro usque ad altitudinem æqualem CK, per Prop. præsentem, sed celeritates corporis ex P rectâ descendentis erunt semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$, Ergo etiam velocitates corporis in trajectoriâ revolventis erunt semper in quâvis distantiâ A à centro ut $\sqrt{P^n - A^n}$. Q. E. D.

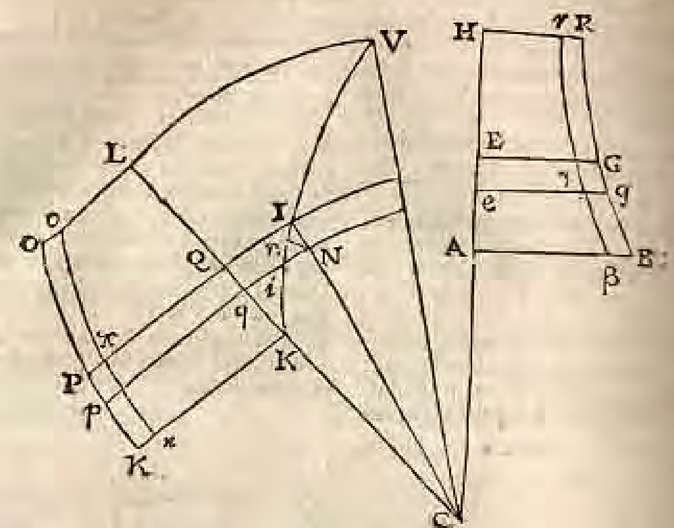
414. Scholium. Vera est Propositio XL, si corporum duorum (quorum unum in rectâ alterum in curvâ lineâ fertur) massæ sint æquales & pondera in locis æquè altis æqualia aut pondera massis inæqualibus proportionalia in locis æquè altis. Illud idem theorema ad majorem universalitatem admodum eleganter reduxit Varignonius in Comm. Paris. an. 1719. Nos quoque principiis suprà positis insistentes, universalius Newtoni propositionem demonstrabimus.



Corpora duo quorum Massæ *M*, *m* ad ... vel diversa virium centra C ex locis quibuslibet datis H, V descendant, alterum quidem *M*, perpendiculariter per rectam H C, alterum verò *m* per rectam vel curvam quamvis VIK.

Primùm. De loco quovis E lineæ HC erigatur semper perpendicularis EG vi centripetæ in loco illo ad centrum tendenti proportionalis, sitque RGB linea curva quam punctum G perpetuò tangit: Perpendiculares in punctis datis H & A sint HR & AB, perpendicularis in puncto variabili E sit EG cui proxima ducatur linea eg, velocitates in punctis datis H & A sint *b* & *a*, velocitas in puncto variabili E sit *V*, & vis centripeta in eo puncto dicatur *F*, cui EG est proportionalis, sit abscissa HE, *s*, ejus fluxio Ee erit *ds*, & tempusculum quo describitur

 Ee



E e lapsu corporis M fit dT; Erit (13 & 409) vis centripeta F sive $EG = \frac{M \times dV}{dT}$, & (5) $ds = V\,dT$. Unde erit $EG \times ds$ sive fluxio areæ $HRGE = MV\,dV$, cujus fluens erit $\frac{1}{2}MVV$ (165) junctâ aut detractâ quâdam constanti quantitate; Coeuntibus enim H & E est in H, $V=b$ ideoque fit $\frac{1}{2}MVV = \frac{1}{2}Mbb$ dum area HRGE evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2}MVV$ detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2}Mbb$ ut areæ HRGE sit æqualis: Coeuntibus verò E & A, cum in puncto A sit $V=a$ erit in eo casu HRGE sive HRBA $= \frac{1}{2}Maa - \frac{1}{2}Mbb$, & sumpto quovis puncto E erit HRBA − HREG sive EGBA $= \frac{1}{2}Maa - \frac{1}{2}Mbb - \frac{1}{2}MVV + \frac{1}{2}Mbb = \frac{1}{2}Maa - \frac{1}{2}VV$, Unde sic tandem incidimus in duas æquationes

$HRGE = \frac{1}{2}MVV - \frac{1}{2}Mbb$ &

$EGBA = \frac{1}{2}Maa - \frac{1}{2}MVV$ quibus comparatis cum iis quas respectu corporis m in curvâ VIK moti simili modo deducemus, velocitates corporum in quibusvis æqualibus vel inæqualibus altitudinibus, in quâvis virium centripetarum hypothesi & in quâlibet ponderum & massarum proportione conferri poterunt.

Secundò itaque, per locum K datum in curva VIK agatur recta CKL æqualis CV & centro C per punctum quodvis I lineæ VIK describatur arcus circularis IQ rectæ CL occurrens in Q per punctum Q erigatur semper perpendiculum PQ proportionale vi Centripetæ quâ Corpus in distantiâ CQ versus C urgetur: sitque OPk curva quam punctum P perpetuò tangit, & perpendiculares in punctis datis L & K sint LO & Kk. Dicatur arcus VI, x, & linea IQ, y, sit linea Ii fluxio arcus VI, & radio Ci describatur arcus lineæ CL occurrens in q, & lineæ CI in N, erit Qq = IN, ex q erigatur perpendicularis qπ usque ad curvam OPK, & ex N ducatur Nn perpendicularis in arcum Ii.

Velocitates corporis m in punctis datis I & K dicantur e & c velocitas in puncto variabili Q sit u: Vis totalis centripeta in Q semper exprimatur per QP, eadem vis QP aget in I (propter æquales CQ, CI,) secundùm directionem IN, resolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus m secundum directionem In, altera secundum directionem Nn, erit IN ad In ut vis tota QP ad vim quâ corpus urgetur secundum curvam, sed ob Triangula INn, INi similia est IN ad In sicut Ii ad IN sive Qq, ideoque Ii ad Qq ut QP ad vim agentem secundum curvam: vis itaque erit $\frac{QP \times Qq}{Ii}$; sit dt, tempusculum quo describetur Ii per eam vim, eritque (13 & 409) ea vis $\frac{QP \times Qq}{Ii} = \frac{m\,du}{dt}$; unde erit $QP \times Qq = \frac{m\,du}{dt} \times Ii$ sed (5) Ii spatiolum percursum tempore dt velocitate u est ergo æquale udt ideoque $QP \times Qq = \frac{mdu}{dt} \times udt = mudu$, sed $QP \times Qq = m\,u\,du$ est fluxio areæ LOQP, cujus fluens est $\frac{1}{2}muu$ (165) additâ vel detractâ quâdam constanti quantitate; coeuntibus enim Q & L, fit in L, $u=e$ ideoque fit $\frac{1}{2}muu = \frac{1}{2}mee$ dum area LOQP evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2}muu$ detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2}mee$, eritque $LOQP = \frac{1}{2}muu - \frac{1}{2}mee$, & coeuntibus Q & K fit $u=c$ & $LOKk = \frac{1}{2}mcc - \frac{1}{2}mee$ & LOKk − LOQP sive $QPKk = \frac{1}{2}mcc - \frac{1}{2}muu$, sicque tandem incidimus in has duas æquationes

$LOQP = \frac{1}{2}muu - \frac{1}{2}mee$ &

$QPKk = \frac{1}{2}mcc - \frac{1}{2}muu$ eâdem methodo quâ in primo calculo sumus usi.

415. Coroll. 1. Ex primâ Æquatione primi calculi est $V = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M}$, ex primâ Æquatione secundi calculi est $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$, unde invenitur $V : u = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M} : \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$.

Ex secundâ verò æquatione primi calculi est $V = \frac{\sqrt{Maa - 2EGBA}}{M}$ & ex secunda Æquatione 2di. calculi $u = \frac{\sqrt{mcc - 2QPKk}}{m}$, & hinc est $V : u = \frac{\sqrt{Maa - 2EGBA}}{M} : \frac{\sqrt{mcc - 2QPKk}}{m}$.

416. Coroll. 2. Si in perpendiculo QP, ità capiatur Qπ, ut factum $\pi Q \times m$, sit ubique gravitati corporis in I proportionale, seu rectæ QP æquale, erit $2Lo\pi Q \times m = 2LOQP$, adeóque $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m} = \sqrt{2Lo\pi Q + ee}$ & $u = \sqrt{cc - 2Q\pi\kappa K}$. Et similiter si ponatur $E\gamma \times M = EG$, erit $V = \sqrt{2Hr\gamma E + bb}$ & $V = \sqrt{aa - 2E\gamma\beta A}$.

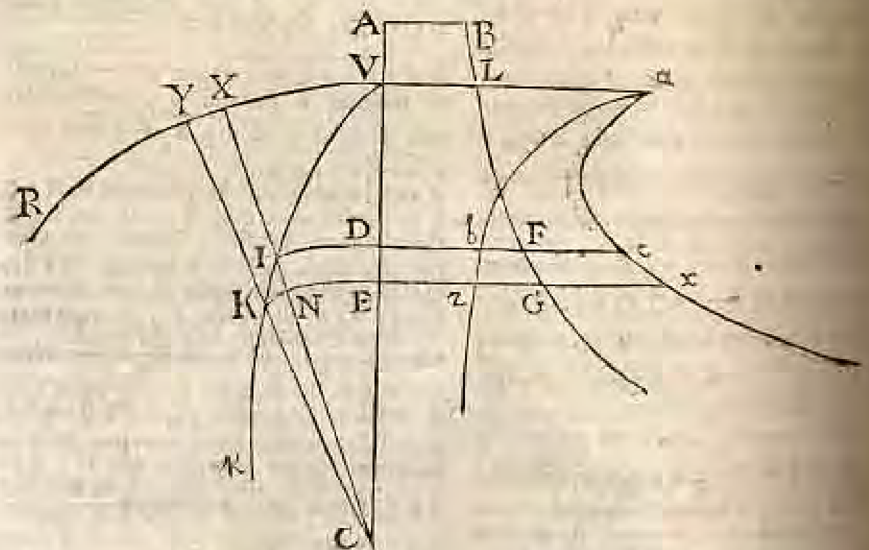
417. Coroll. 3. Si puncta H & V, E & I, fuerint æque alta, & in illis lineæ EG, QP vi centripetæ proportionales, sint semper æquales, erit HRGE = LOPQ. Quare si præterea massæ M, m, & velocitates b, e, in punctis H, V, æquentur, erit $\frac{2HRGE + Mbb}{M} = \frac{2LOQP + mee}{m}$, adeóque $V = u$, in omnibus punctis æquè altis E & I. Si in punctis æque altis H & V, E & I, vires centripetæ massarum M & m rationem semper habeant, erit HRGE : LOQP = $M : m$, proindeque $\frac{2HRGE}{M} = \frac{2LOQP}{m}$. Unde si præterea ponatur $bb = ee$, erit $V = u$, quæ est propositio XL. Newtoni. Patet etiam in 4. superioribus formulis (415), Massas M & m exterminari, si fuerint ponderibus proportionales.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum C & invenienda sit trajectoria $VIKk$. Detur circulus VR centro C intervallo quovis CV descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli ID, KE trajectoriam secantes in I & K rectamque CV



in D & E. Age tum rectam $CNIX$ secantem circulos KE, VR in N & X, tum rectam CKY occurrentem circulo VR in Y. Sint autem puncta I & K sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab V per I & K ad k; sitque punctum A locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in I. Et stantibus quæ in propositione XXXIX, lineola IK, dato tempore quam minimo

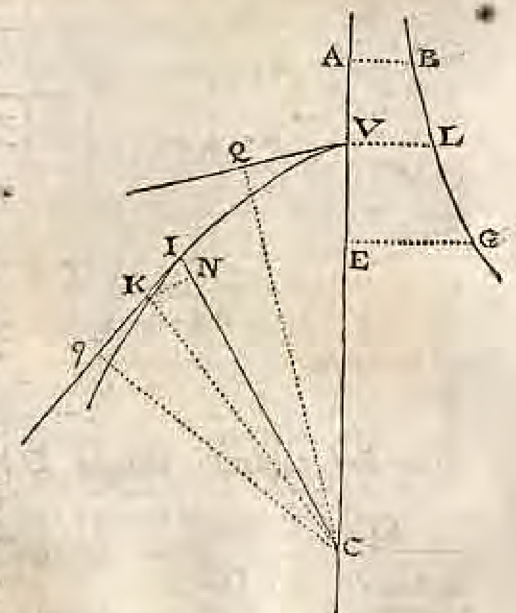
Liber Primus. Prop. XLI.

minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ potest aream $ABFD$, & (p) triangulum ICK tempori proportionale dabitur, ideoque KN erit reciprocè ut altitudo IC, id est, si detur quantitas aliqua Q, & altitudo IC nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut est IK ad KN, & (q) erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN, & $ABFD$ ad ZZ ut IKq ad KNq, & divisim $ABFD - ZZ$ ad ZZ ut IN (r) *quad.* ad KN *quad.*

(p) * *Triangulum ICK tempori quo describitur proportionale* (per Prop. 1.) *dato tempore dabitur*; Est autem trianguli ICK area $= \frac{1}{2}$ KN × IC. Quare erit rectangulum KN × IC quantitati constanti æquale, & hinc lineola KN æqualis quantitati constanti ad IC applicatæ, id est, KN reciprocè ut IC.

(q) * *Erit in omni casu.* Quoniam IK est semper ut $\sqrt{ABFD}$, hoc est IK ad $\sqrt{ABFD}$ in datâ ratione, & similiter Z ad KN in datâ ratione, si in aliquo casu sit $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN adeoque $\sqrt{ABFD}$ ad IK ut Z ad KN, erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad IK ut Z ad KN, ac proindè $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN.

218. Ducatur VL parallela EG quæ curvæ BFG occurrat in L, & ex centro C in QV tangentem in V, ac ad qI, tangentem in I, demissis perpendiculis CQ, Cq, erit CQ × $\sqrt{ABLV}$ quantitas constans & æqualis Cq × $\sqrt{ABFD}$. Nam (per coroll. 1. prop. 1.) velocitas in V (adeoque $\sqrt{ABLV}$) est ut CQ reciprocè, id est, ut $\frac{1}{CQ}$ directè & proinde CQ × $\sqrt{ABLV}$ est quantitas constans 1, & pariter velocitas in I (adeóque $\sqrt{ABFD}$) est ut Cq reciprocè, id est, ut $\frac{1}{Cq}$ directè, & proinde Cq × $\sqrt{ABFD}$, ut quantitas constans 1, adeóque Cq × $\sqrt{ABFD}$ = CQ × $\sqrt{ABLV}$. Si itaque capiatur Q = CQ × $\sqrt{ABLV}$ = Cq × $\sqrt{ABFD}$, & Z $= \frac{Q}{IC}$ (unde est

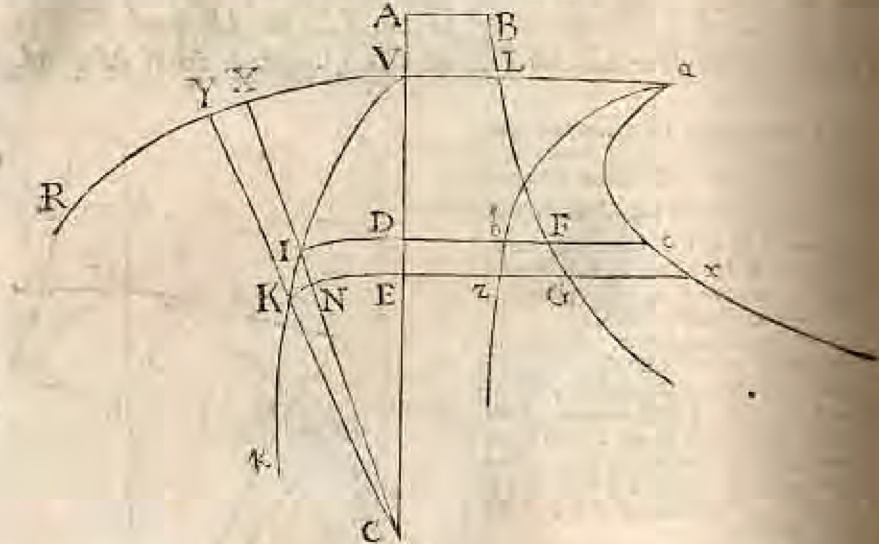


Q = Z × IC) erit semper $\sqrt{ABFD}$: Z = IC : Cq = IK : KN. Nam propter triangula IKN, ICq similia, est IK ad KN ut IC ad Cq, sed quia Z × IC (= Q) = Cq × $\sqrt{ABFD}$ est IC : Cq = $\sqrt{ABFD}$: Z ergo IK : KN = IC : Cq = $\sqrt{ABFD}$: Z.

(r) * *Ut IN^2, ad KN^2.* Est enim ob angulum INK rectum, $IK^2 - KN^2 = IN^2$.

* Uni-

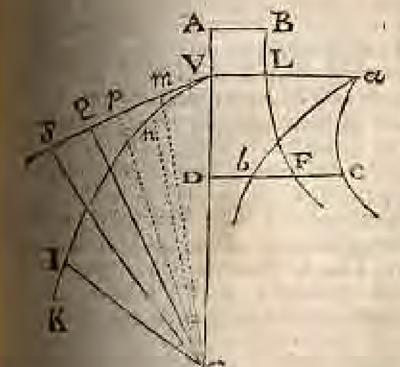
ideoque $\sqrt{ABFD-ZZ}$ ad Z seu $\frac{Q}{A}$ ut IN ad KN, & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD-ZZ}}$. (ſ) Unde cum $YX \times XC$ ſit ad $A \times KN$ ut CXq ad AA, erit rectangulum $XY \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX\ quad.}{AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$. Igitur ſi in perpendi-



culo DF capiantur ſemper Db, Dc ipſis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$, $\frac{Q \times CX\ quad.}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$ æquales reſpectivè, & deſcribantur curvæ lineæ ab, ac, quas puncta b, c perpetuo tangunt; deinde puncto V ad lineam AC erigatur perpendiculum Va abſcindens areas curvilineas $VDba$, $VDca$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db \times IN$ ſeu $DbzE$ æquale eſt dimidio rectanguli $A \times KN$ ſeu triangulo ICK; & rectangulum

(ſ) * *Undè cum* $YX \times XC : A \times KN = CX^2 : AA$. Sunt enim triangula naſcentia CKN, CYX ſimilia & eorum proinde areæ duplæ $YX \times XC$, $ICxKX$ ſeu $A \times KN$, in ratione duplicata homologorum laterum CX, CI, ſive A.

$DcxE$ æquale eſt dimidio rectanguli $YX \times XC$ ſeu triangulo XCY; hoc eſt, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $DbzE$, ICK, & arearum $VDca$, VCX æquales ſemper ſunt naſcentes particulæ $DcxE$, XCY, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, ideoque tempori proportionalis, & area genita $VDca$ æqualis ſectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus diſceſſit de loco V, (†) dabitur area ipſi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $VDca$, eique æqualis ſector VCX unà cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I,



(†) 419. *Dabitur area ipſi proportionalis.* Datâ corporis velocitate & directione tangente in V, datur ſpatium VS quod corpus in illâ tangente dato tempore quo deſcribitur area VIC uniformi motu deſcriberet. Porrò junctâ CS, area trianguli CSV æqualis erit areæ VIC, quam corpus in curva VIK motum deſcribit eodem tempore quo uniformiter percurreretur VS. Nam tempuſculo naſcente velocitate æquabili ſpatium Vm deſcribatur in tangente VS, & eodem tempuſculo arcus Vn deſcribatur in curva VIK, erit (per prop. 1.) area VCm = VCn, & ob velocitatem uniformem in tangente ſingulo tempuſculo lineolæ æquales Vm, mp &c. percurrentur ideoque deſcribuntur triangula VCM, mCp, &c., ſed pariter omnes areæ æqualibus tempuſculis deſcriptæ in curva VIK æquantur areæ VCn ſive VCm, unde patet ſummam arearum VCm + mCp + &c. æqualem eſſe ſummæ arearum quæ eodem tempore in curvâ deſcribuntur, hoc eſt, totas areas VCS, VIC, eodem tempore deſcriptas eſſe æquales. Cum igitur data ſit tangens VS & perpendiculum CQ in eam ductum, ex tempore dato dabitur area trianguli VCS, & area VIC ei æqualis; Hincque conceſſis figurarum quadraturis, invenietur area VDba = VCS = VIC, & indè dabitur VD, atque CD = CV − VD; dabitur quoque conſtans Q = QC × √ABLV (418).

420. Si ponatur variabilis IC = CD = x, data VC = a, erit VD = $a - x$ & $Z = \frac{Q}{x}$, conceſſiſque figurarum curvilinearum quadraturis area ABFD exprimi poterit per datas AV, VC & variabilem x, ac proinde iiſdem quantitatibus exprimi poterunt $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$, ſeu ordinatim applicatæ Db, Dc; & hinc obtinebuntur æquationes ad curvas ab, ac, ex conſtantibus & ſolis variabilibus CD, Db, vel Dc, compoſitæ, curvæque illæ poterunt deſcribi. Quoniam porrò eſt (per conſtr.) ſector VCX, æqualis areæ VDca, erit arcus $VX = \frac{2VDca}{CV}$; quare invenitur angulus VCX, & indè punctum I, in trajectoriâ VIK.

421. Scholium. Datâ vi centripetâ in ſingulis locis trajectoriæ VIK, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, trajectoria VIK deſcribi poteſt, ut in probl. XXVIII, licet gravitates maſſis non ſup-

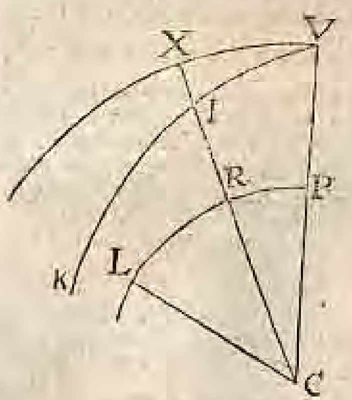
DE MOTU CORPORUM.

in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, apsides trajectoriarum expeditè inveniri possunt. Sunt enim apsides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam *VIK*, id (t) quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, ideoque ubi area *ABFD* æqualis est ZZ.

(u) *Corol.* 2. Sed & angulus *KIN*, in quo trajectoria alicu-

supponantur proportionales, nec vis centripeta æqualis in æqualibus à centro distantiis. Nam factum M×EG, ex corporis massa M in perpendiculum EG, ejusdem corporis gravitatem in loco quovis I exhibeat, sitque BLFG curva quam punctum G perpetuò tangit, velocitas in loco V dicatur C, linea AB ita abscindatur ut sit area ABLV = ½ CC; erit velocitas in I = $\sqrt{2\,\text{VLFD} + 2\,\text{ABLV}}$ (416), id est = $\sqrt{2\,\text{ABFD}}$, adeóque ut $\sqrt{\text{ABFD}}$, undè *lineola IK dato tempore quam minimo descripta erit ut* $\sqrt{\text{ABFD}}$, *& triangulum ICK &c.* Cætera quæ in probl. XXVIII. solutione sequuntur ratiocinia & constructiones manent eadem.



422. Trajectoria VIK, geometricè rationalis est ubi per æquationes finitas inveniri potest sector circuli æqualis areæ VDca: & hujus sectoris radius est ad CX radium, circuli VXY, ut nn ad 1 estque nn numerus rationalis positivus integer vel fractus. Sit enim sector circuli LPC = areæ VDca, id est, æqualis sectori VCX, sitque radius CP ad radium CV, ut n, ad 1, erit CP×PL = CV×VX, & CP : CV = n : 1 = VX : PL, (per hyp.) & CP : CV = n : 1 = PR : VX (ex naturâ circuli). Quare per compositionem rationum & ex æquo nn : 1 = RP : PL. Si ergò fuerit nn, ad 1, ut numerus ad numerum, dato arcu PL, inveniri poterit arcus RP per æquationem finitam, cum possit semper arcus datus in datâ ratione numeri ad numerum per æquationem finitam dividi. Quoniam igitur assumptæ CI positio & punctum I, in curvâ VIK per finitas æquationes determinantur, erit VK curva algebraica seu geometricè rationalis. Hermannus prop. 25. Lib. I. Phoron. hoc elegans & difficile problema solvit: invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expressum.

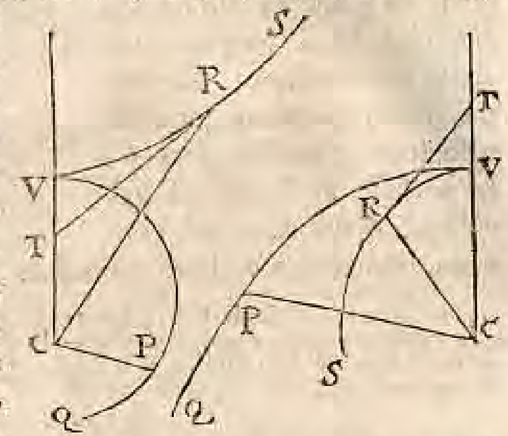
(t) * *Id quod fit ubi rectæ IK & KN æquantur.* Tunc enim punctum N coincidit cum puncto I, ob angulum KIN rectum, adeóque ob proportionem $\sqrt{\text{ABFD}}$: Z = IK : KN, fit ABDF = ZZ = $\frac{QQ}{IC^2}$ & IC² × ABFD = QQ quantitati datæ. Hinc cum concessis curvarum quadraturis data sit area ABFD in quantitatibus constantibus & variabili IC seu CD, invenietur valor IC, hoc est, maximæ & minimæ altitudines corporis trajectoriam VK describentis.

(u) * *Coroll.* 2. Ob angulum KNI rectum in triangulo nascente KIN, sinus anguli KIN est ad sinum totum, ut KN ad IK, id est, ut Z (seu $\frac{Q}{IC}$) ad $\sqrt{\text{ABFD}}$. Verum datâ IC datur area ABFD, & indè ob quantitatem Q datam datur ratio

LIBER PRIMUS. PROP. XLI.

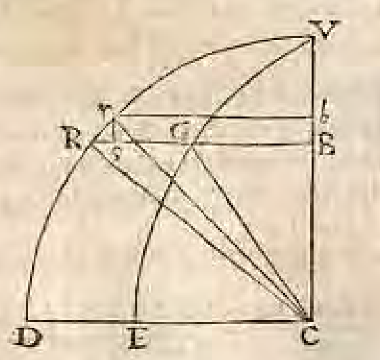
secat lineam illam *IC*, ex datâ corporis altitudine *IC* expeditè invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut *KN* ad *IK*, id est, ut Z ad latus quadratum areæ *ABFD*.

(x) *Corol.* 3. Si centro *C* & vertice principali *V* describatur sectio quælibet conica *VRS*, & à quovis ejus puncto *R* agatur tangens *RT* occurrens axi infinitè producto *CV* in puncto *T*; dein junctâ *CR* ducatur recta *CP*, quæ æqualis sit abscissæ *CT*, angulumque *VCP* sectori *VCR* proportionalem constituat; tendat autem ad centrum *C* vis centripeta cubo distantiæ locorum à centro reciprocè proportionalis, & exeat corpus de loco *V* justâ cum velocitate secundum lineam rectæ *CV* perpendicularem: progredietur



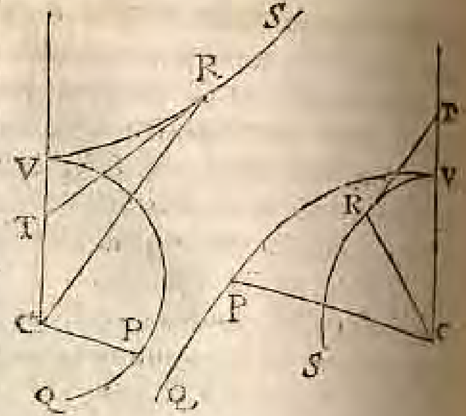
$\frac{Q}{IC}$ ad $\sqrt{\text{ABFD}}$, hoc est, ratio sinûs anguli KIN, ad radium. Invenietur ergò sinus anguli KIN, & hinc angulus ipse innotescetur.

(x) 423. Lemma. Si fuerit DVC, circuli quadrans cujus radius CV = r abscissa CB = z, ordinatæ infinitè propinquæ BR, br, fluxio arcûs DR erit $\frac{r\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$, & fluxio sectoris CDR = $\frac{\frac{1}{2}rr\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Est enim BR = $\sqrt{rr-zz}$, & demissâ ex puncto r in RB, perpendiculari rs, triangula similia RCB, rRs, dant RB ($\sqrt{rr-zz}$) : RC (r) = rs (dz) : Rr = $\frac{r\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Q. e. 1. Porrò sector nascens CRr = ½ CR × Rr = $\frac{\frac{1}{2}rr\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Q. e. 2.

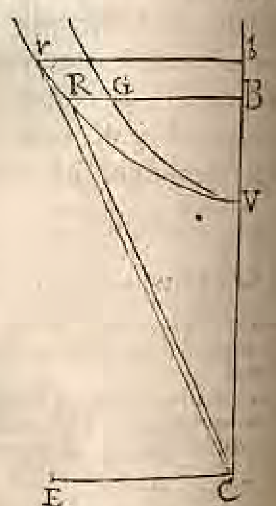


424. Coroll. Si fuerit EGVC, quadrans ellipseos cujus centrum C, semiaxis unus CV = r, alter semiaxis CE = c, abscissa CB = z, & BG ordinatim applicata ad axem CV, sectoris CEG fluxio erit = $\frac{\frac{1}{2}rc\,dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Sunt enim sectores CDR, CEG, adeoque & eorum fluxiones in datâ ratione r ad c, (251).

dietur corpus illud in trajectoriâ VPQ quam punctum P perpetuò tangit; ideoque si conica sectio VRS hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea ellipsis sit, ascendet illud perpetuò & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quâcunque cum velocitate exeat de loco V, & perinde ut inceperit vel obliquè descendere ad centrum, vel ab eo obliquè ascendere, figura VRS vel hyperbola



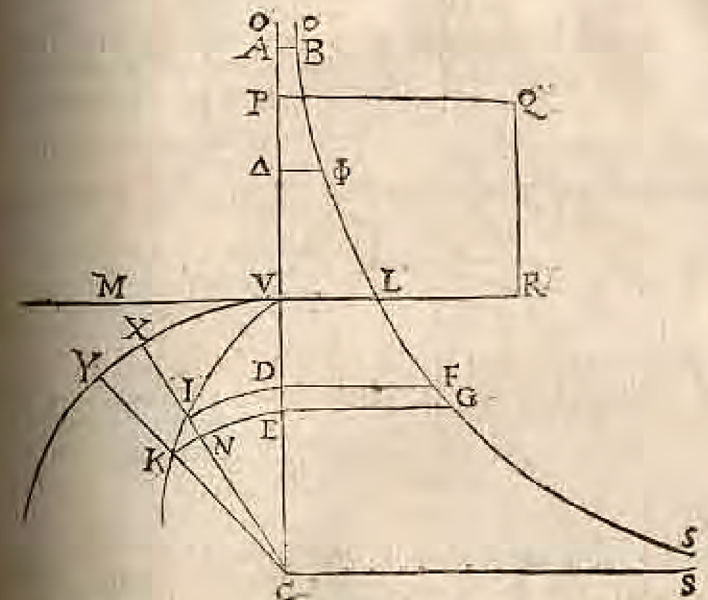
425. Lemma. Si fuerit VRr, hyperbola æquilatera cujus centrum c, semiaxis transversus $CV=r$, abscissa $CB=z$; RB ad axem ordinatim applicata, sectoris hyperbolici CRV fluxio erit $\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Agatur enim rb ordinata, priori RB infinitè propinqua, sitque $RB=y$, erit (ex naturâ hyperbolæ æquilateræ) $yy=zz-rr$, & $y=\sqrt{zz-rr}$. Undè $2ydy=2zdz$, & $dy=\frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Porrò triangulum $CRB=\frac{1}{2}zy$, & illius fluxio $=\frac{1}{2}zdy+\frac{1}{2}ydz=$ trapesio $BbrR+$ triang. CrR; sed trapesium nascens $BbrR=ydz$, ergò sector nascens $CrR=\frac{1}{2}zdy-\frac{1}{2}ydz$ $=\frac{\frac{1}{2}zzdz}{\sqrt{zz-rr}}-\frac{1}{2}dz\times\sqrt{zz-rr}$ $=\frac{\frac{1}{2}zzdz-\frac{1}{2}zzdz+\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$ $=\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Q. e. D.



426. Coroll. 1. Quoniam (ex demonstratis) $dy=\frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$, & $yy=zz-rr$, erit $\frac{dz}{\sqrt{zz-rr}}=\frac{dy}{z}$, & $z=\sqrt{yy+rr}$, adeóque $CrR=\frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}=\frac{\frac{1}{2}rrdy}{\sqrt{yy+rr}}$.

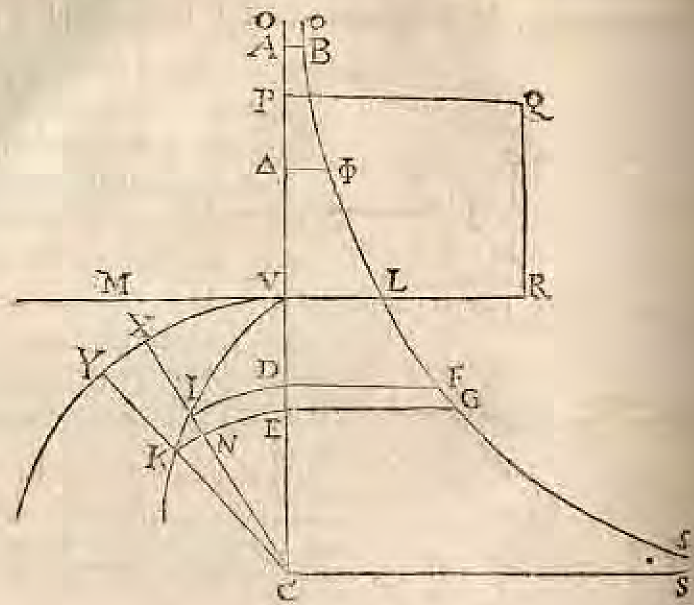
427. Coroll. 2. Si descripta fuerit altera hyperbola GV, cujus idem centrum C, idem semiaxis transversus $CV=r$, semiaxis conjugatus $CE=c$; sectoris CGV fluxio erit $=\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}}=\frac{\frac{1}{2}rcdy}{\sqrt{yy+rr}}$. Est enim sector CRV ad sectorem CGV, adeóque prioris fluxio ad fluxionem posterioris in datâ ratione r ad c. (374. 418.)

vel ellipsis, inveniri potest trajectoria augendo vel minuendo angulum VCP in datâ aliquâ ratione. Sed &, vi centripetâ in centrifugam versâ, ascendet corpus obliquè in trajectoriâ VPQ, quæ invenitur capiendo angulum VCP sectori elliptico VRC proportionalem, & longitudinem CP longitudini CT æqua-



428. Lemma. Iisdem positis quæ in superioribus Newtoni propositionibus, sit $CV=r$, $CA=a$, CD vel $C\Delta=x$, DF vel $\Delta\Phi=y$; & si fuerit vis centripeta in loco quovis D ut $\frac{1}{CD^3}$, sitque $2f^4$ quantitas data, erit $y=\frac{2f^4}{x^3}$, æquatio ad curvam BFG, & quoniam in æquatione y infinita evadit si x ponatur $=0$, & similiter x infinita fit si $y=0$, liquet rectas sibi mutuò perpendiculares CO, CS esse curvæ BFG asymptotos. Area $DFGE=ydx=\frac{2f^4dx}{x^3}$, undè sumptis fluentibus additâque constanti Q, erit area in infinitum versùs S protensa $CDFsSC=Q-\frac{f^4}{xx}$; Ponatur x infinita, & erit $\frac{f^4}{xx}=0$, & area $CDFsS$, mutabitur in aream utrinque infinitè protensam $COosSC$; quarè $COosSC=Q$; & hinc $COosSC-CDFsSC=ODFo=Q-Q+\frac{f^4}{xx}=\frac{f^4}{xx}$, id est, area $ODFo$, vel $O\Delta\Phi o$ versus O in infinitum extensa, æqualis est quantitati finitæ $\frac{f^4}{xx}$.

qualem ut fupra. Confequuntur hæc omnia ex propofitione præcedente, per curvæ cujufdam quadraturam, cujus inventionem, ut fatis facilem, brevitatis gratiâ miffam facio.



429. Coroll. 1. Area infinitè protenfa $OVLo = \frac{f^4}{rr}$; area $OABo = \frac{f^4}{aa}$ & proindè $\sqrt{OVLo} = \frac{ff}{r}$, $\sqrt{OABo} = \frac{ff}{a}$.

430. Coroll. 2. Area $ABLV = OVLo - OABo = \frac{f^4 \times aa - rr}{rraa} = \frac{f^4 cc}{rraa}$, ponendo $aa - rr = cc$ (429) undè $\sqrt{ABLV} = \frac{f^2 c}{ra}$.

431. Coroll. 3. Similiter fi punctum D fit inter puncta data C, V, & punctum Δ inter puncta data V, A; erit area $AB\Phi\Delta$, vel $ABFD = \frac{f^4 \times aa - xx}{aaxx}$, area $VLFD = \frac{f^4 \times rr - xx}{rrxx}$, $\Delta\Phi LV = \frac{f^4 \times xx - rr}{rrxx}$. (428. 429. 430.)

432. Iifdem manentibus quæ in Lemmate fuperiori (428) fi corpus de loco V, cum velocitate quâlibet fecundùm directionem VM ad CV perpendicularem projiciatur ut curvam VIK defcribat, erit VM hujus curvæ tangens in puncto V, CV ad tangentem Vm normalis, & velocitas projectionis æqualis erit velocitati quam corpus ex diftantiâ infinitâ OV, cadendo acquireret in loco V, vel eâ minor, vel major.

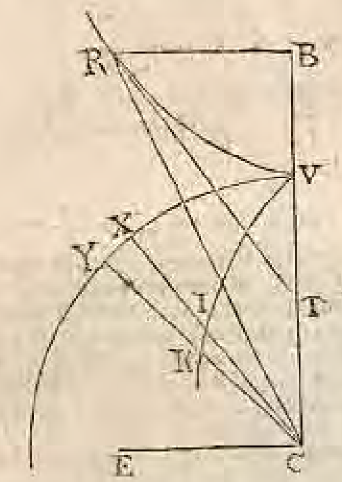
433. Primus cafus. Velocitas projectionis æqualis fit velocitati per fpatium infinitum OV cadendo acquifitæ in loco V, erit (418) quantitas data $Q = CV\sqrt{OVLo} = ff$ (429) & $Z = \frac{Q}{IC} = \frac{ff}{x}$. Sed (per prop. 41.) $\sqrt{ODFo} : Z = IK : KN$, hoc eft, (428) $\frac{ff}{x} : \frac{ff}{x} = IK : KN$, ergo $IK = KN$, proindéque angulus KIN rectus eft (cor. 2. prop. 41.) In hoc igitur [illegible] trajectoria VIK eft circulus [illegible] radio CV defcriptus.

[illegible] Hinc fi velocitas projectionis minor [illegible] velocitate quæ ex infinitâ di[illegible] cadendo acquiritur in loco V, cor[illegible] trajectoriâ VK motum ad centrum C perpetuò accedet, velocitas il[illegible] perpetuò crefcet, & punctum D fem[illegible] inter data puncta V & C fitum. [illegible] projectionis velocitas major fit [illegible] per infinitum fpatium cadendo [illegible], corpus in trajectoriâ VIK, à [illegible] femper recedet, illius velocitas [illegible] decrefcet & punctum Δ pun[illegible] correfpondens, puncto dato V fupe[illegible] erit.

[illegible] Si manente cafûs primi hypothe[illegible] directio VM ad CV perpendicularis [illegible] fit, & perpendiculum e centro C in [illegible] directionem demiffum dicatur p, [illegible] $Q = \frac{pff}{r}$, $Z = \frac{pff}{rx}$, & $\sqrt{ODFo}$ $\left(\frac{ff}{x}\right) : Z \left(\frac{pff}{rx}\right) = r : p = IK : KN$, [illegible] eft, (per coroll. 2. prop. 41.), finus [illegible] ad finum anguli KIN, in datâ ra[illegible] adeóque angulus KIN datus, & tra[illegible] VK fpiralis logarithmica.

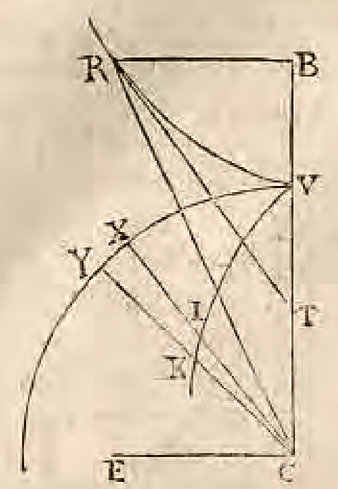
[illegible] Cafus fecundus. Velocitas proje[illegible] æqualis fit velocitati quam corpus [illegible] loco aliquo dato A, cadendo haberet [illegible] erit $Q = CV \times \sqrt{ABLV} = \frac{ffc}{a}$ [illegible] $Z = \frac{ffc}{ax}$, $ZZ = \frac{f^4cc}{aaxx}$, $ABFD = \frac{f^4 \times aa - xx}{aaxx}$ (431.), unde $ABFD - ZZ = \frac{f^4 \times aa - cc - xx}{a^2x^2} = \frac{f^4 \times rr - xx}{a^2x^2}$, ob [illegible] $= rr$ (430) & $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{ff\sqrt{rr - xx}}{ax}$. Cum igitur (in prop. 41.) [illegible] $= IC = CD = x$, $DE = IN = dx$, [illegible] $= CV = r$, erit $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA} \ldots \frac{\frac{1}{2}ffrrcdx}{axx}$ [illegible] $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr - xx}}$ = fectori CXY. Quoniam autem crefcente IC [illegible], decrefcit fector YXC (434) fcribendum eft $CXY = -\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr - xx}}$ (159).

Ponatur $x = \frac{rr}{z}$, erit $xx = \frac{r^4}{zz}$, $rr - xx = \frac{rrzz - r^4}{zz}$, $\sqrt{rr - xx} = \frac{r\sqrt{zz - rr}}{z}$, & $zx = rr$, fumptifque fluxionibus $zdx + xdz = 0$, & proindè $-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, hifque valoribus fubftitutis invenitur $-\frac{\frac{1}{2}rrcdx}{x\sqrt{rr - xx}} = \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz - rr}} = CXY$.



Centro C, femiaxe tranfverfo $CV = r$ femiaxe conjugato $CE = c$, defcribatur hyperbola VR, ex cujus puncto quovis R, demittatur ad axem perpendiculum RB, & tangens RT, axi occurrens in T, & CB, dicatur $= z$, erit (427) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz - rr}}$, fluxio fectoris hyperbolici CRV, & (ex conicis) CB (z) : CV (r) = CV (r) : $CT = \frac{rr}{z} = x = CI$. Itaque cum fit $CXY = \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz - rr}}$, fi fumantur utrinque fluentes additâ conftanti Q erit fector circuli CXV, æqualis fectori hyperbolico CRV + Q. Invenitur autem Q = 0. Nam pofitâ CT feu

$x = r$,



$x=r$, fit quoque $z=r$, ob $\frac{rr}{z}=x$, & puncta B & V coeunt, evanescitque sector CRV, & quoniam positâ $x=r$ corpus projectum est in V, punctum X coincidet quoque in hoc casu cum puncto V, & fit CXV=0, undè æquatio CXV=CRV+Q, mutatur in hanc $0=0+Q$. Nulla igitur est quantitas constans addenda vel subducenda, sed est semper CXV=CRV. Quare invenitur punctum I in trajectoriâ VIK, capiendo sectorem CXV=CRV, & in lineâ CX sumendo CI=CT.

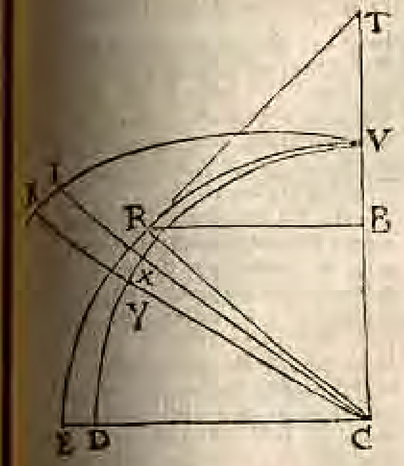
437. Casus 3us. Projectionis velocitas major sit velocitate per spatium infinitum cadendo acquisitâ. Sit P locus de quo corpus cadere debet ut urgente gravitate uniformi velocitatem acquirat in loco V æqualem velocitati projectionis. In perpendiculo VL, capiatur VR ad VL in ratione vis gravitatis uniformis ad vim centripetam variabilem in loco V, & compleatur rectangulum PVRQ cujus latus quadratum dicatur e; & velocitas projectionis erit ut e, (per cor. 1. prop. 39.) Quare (430) $Q=re$, $ZZ=\frac{rree}{xx}$; & quoniam velocitas corporis trajectoriam VIK describentis continuò decrescit atque corpus à centro C perpetuò recedit (434), loco areæ ABFD, (prop. 41.) capienda est quantitas $ee-\Delta\phi LV = ee-\frac{f^4xx-f^4rr}{rrxx}$ (431) $=\frac{rreexx-f^4xx+f^4rr}{rrxx}$, & quantitas ABFD−ZZ, (prop. 41.) erit $=\frac{r^2e^2xx-f^4xx+f^4rr-r^4ee}{rrxx}$. Sit autem area rectanguli PVRQ major area infinitè protensâ OVLo, hoc est, quantitas ee major quam $\frac{f^4}{rr}$, & proinde $rree-f^4$, quantitas positiva; fiat igitur $rree-f^4=bbrr$, & quantitas ABFD−ZZ, (prop. 41.) evadet $=\frac{bbrrxx-bbr^4}{rrxx}$, & $\sqrt{ABFD-ZZ}=\frac{b\sqrt{xx-rr}}{x}$; Hinc factis debitis substitutionibus formula (prop. 41.) $\frac{Q\times CX^2\times IN}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$ in hanc mutabitur

$$\frac{r^2edx}{2xx}\times\frac{x}{b\sqrt{xx-rr}}=\frac{\frac{1}{2}r^3edx}{bx\sqrt{xx-rr}}=\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}}$$

ponendo $\frac{re}{b}=c$. Quare sector circuli

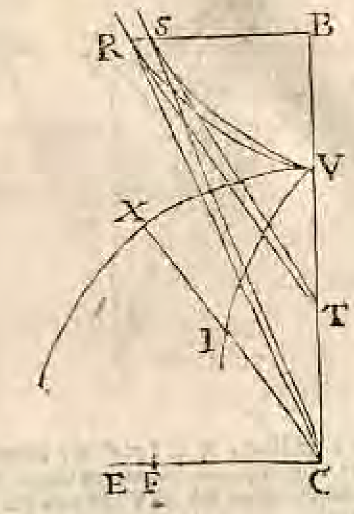
$$CXY=\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}}.$$

Fiat $x=\frac{rr}{z}$ & erit $\frac{dx}{x}=\frac{-dz}{z}$, ac $\sqrt{xx-rr}=\frac{r\sqrt{rr-zz}}{z}$ atque $\frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}}=-\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr-zz}}=CXY$. Centro C, semiaxe $CV=r$, & altero semiaxe $CE=c$, describatur ellipseos quadrans VE, ex cujus puncto quovis R agatur ad axem CV perpendiculum RB, & tangens RT axi producto occurrens in T, & CB dicatur $=z$, erit (ex conicis) CB (z) : CV (r) = CV (r) : CT $=\frac{rr}{z}=x=$ CI, & (424) $\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr-zz}}$, fluxio sectoris elliptici CRE; quare cum sit $CXY=-\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr-zz}}$, sumantur utrinque fluentes addita constanti Q, erit sector circuli CXV=Q−CRE. Ut inveniatur valor quantitatis constantis Q, ponatur CXV=0, & erit Q=CRE; sed ubi CXV=0 puncta X & I cum puncto V coeunt, & fit CT seu CI



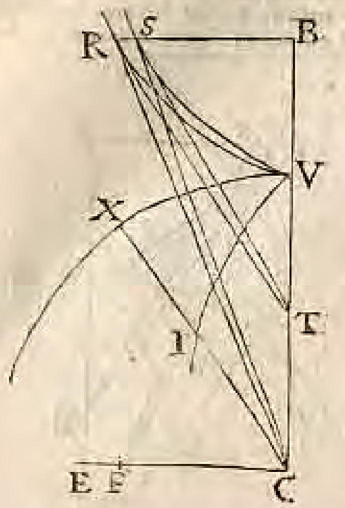
=CV, adeóque punctum R coincidit cum puncto V, & sector CER, æqualis fit quadranti CEV; ergò Q=CEV. Et igitur semper CXV=CEV−CRE =CRV. Itaque ut inveniatur trajectoriæ VIK punctum I, capiatur sector circuli CXV, æqualis sectori elliptico CRV, & in lineâ CX, productâ capiatur CI=CT, et I punctum in trajectoriâ quæsitâ.

438. Datâ velocitate projectionis & magnitudine vis centripetæ variabilis, hoc est, ejus ratione ad aliquam vim centripetam uniformem notam in loco dato V, (per not. 430.) describi potest trajectoria VIK. Iis enim datis, dabitur locus P de quo corpus urgente vi centripetâ constanti cadere debet ut in loco V datam projectionis velocitatem habeat; & sumptâ VR ad VL in datâ ratione vis centripetæ constantis ad vim centripetam variabilem in loco V, dabitur rectangulum PQRV. Jam si rectangulum illud æquale fuerit areæ infinitè protensæ OVLo, corpus circulum describet (per cas. 1. not. 433.); si rectangulum minus est areâ OVLo, inveniri poterit punctum A, ex quo ducta perpendicularis AB, abscindat aream ABLV æqualem rectangulo PQRV; & trajectoria VIK, describetur (per constr. cas. 2i.) (436). Si rectangulum PQRV areâ OVLo majus est, adhibenda erit constructio casus 3i. (437). Observandum autem est sectores circulares esse angulis suis ad centrum proportionales; undè in superioribus constructionibus loco sectorum circuli, uti possumus angulis qui ad sectores hyperbolicos vel ellipticos datam habeant rationem.



439. Casus 2us. & 3us. construi possunt per hyperbolam vel ellipsim, cujus sit semiaxis $CV=r$, & alter semiaxis quilibet. Nam iisdem positis quæ in constructione casûs 2i., semiaxe transverso $CV=r$, & semiaxe quovis conjugato CF, describatur hyperbola altera SV, quam in S secat perpendiculum RB; tangentes RT, ST per puncta R, S ductæ axi occurrunt in eodem puncto T, (257) & sector CRV est ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF (374). Quare cum (per constr. cas. 2i.) sector circuli CXV æqualis sit sectori CRV, erit etiam ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF, atque ità punctum trajectoriæ I invenietur capiendo sectorem CXV ad sectorem CSV, in datâ ratione CE ad CF, & in radio CX, capiendo CI=CT. Idem eodem modo demonstratur in casu 3o.

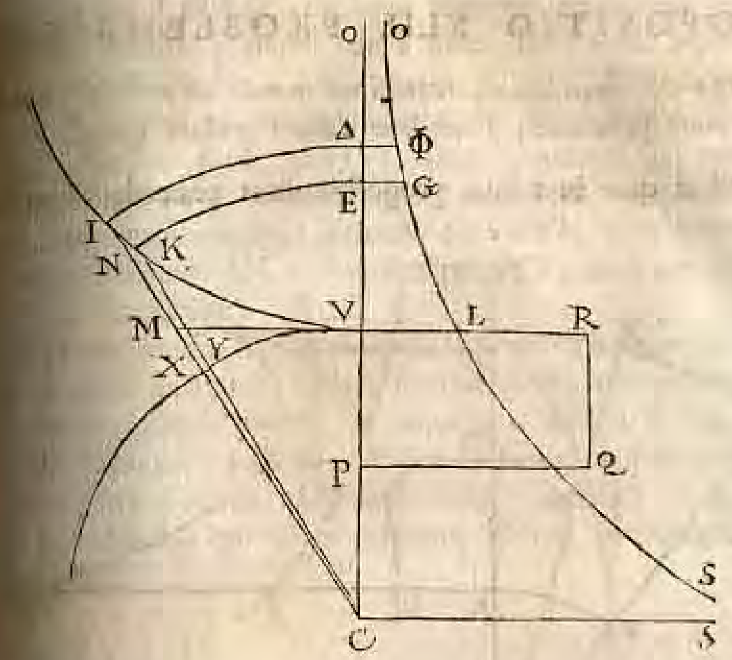
440. Hinc si (juxtà constructionem Coroll. 3. prop. 41.) describatur curva VI capiendo angulum VCI sectori conico VCR proportionalem, vel quod in idem recidit, capiendo sectorem circuli CXV ad sectorem conicum VCR in



in datâ ratione, & $CI = CT$, inveniri poterit velocitas quâ corpus de loco V, secundùm lineam ipsi CV perpendicularem projici debet ut in trajectoriâ descriptâ VI progrediatur. Nam sit VS hyperbola quævis, centro C, semiaxe transverso $CV = r$, semiaxe conjugato CF descripta, data erit ratio sectoris circuli CXV, ad sectorem hyperbolicum CSV, (ex hyp.) seu (439) ratio CE ad datam CF; ergò dabitur CE, seu c; Est autem in cas. 2°. (430, 436) $cc = aa - rr$ adeóque $aa = rr + cc$; & hinc datis r & c, dabitur a, seu AC, (fig. not. 428). Dato autem puncto A, & vi centripetâ, datur rectangulum PQRV, æquale areæ ABLV, & indè velocitas projectionis habetur, (438). Si trajectoria VI, per sectores ellipseos descripta fuerit, similiter invenietur c; est autem in casu 3°. (437) $c = \frac{re}{b}$, & $rree - f^4 = bbrr$, adeóque $b = \frac{re}{c}$, $bb = \frac{rree}{cc}$, & $bb = \frac{rree - f^4}{rr} = \frac{rree}{cc}$; quarè $ccrree - r^4ee = f^4cc$, & $ee = \frac{f^4cc}{ccrr - r^4} = \frac{f^4}{rr} \times \frac{cc}{cc - rr}$, cum igitur datæ sint c, & r, ac $\frac{f^4}{rr}$ = areæ datæ OVLo (429), dabitur ee, seu rectangulum PQRV (437) & hinc velocitas projectionis in V, habetur (438). Patet autem in hoc casu c majorem esse debere radio r, seu CV, alioquin problema esset impossibile, cum sit $e = \frac{ff}{r} \times \frac{c}{\sqrt{cc - rr}}$.

441. Vis centripeta in centrifugam mutatur, seu directionem in contrariam mutet, & corpus per rectam VM ad CV perpendicularem cum quâvis velocitate projiciatur, ut trajectoriam VKI describat. Sit ut in casu 3°. (437) PV spatium per quod vi centrifugâ constanti urgeri debet corpus ut velocitatem acquirat in V velocitati projectionis æqualem, & RV ad LV ut vis centrifuga constans ad variabilem in V, & rectangulum PRQV, dicatur ee; velocitas projectionis in V, erit ut e, (per cor. 1 prop. 39.) & quoniam velocitas in recessu à centro semper crescit, erit velocitas in I vel Δ, ut $\sqrt{ee + \Delta\Phi LV}$, quæ (in formulâ prop. 41.) substitui debet loco $\sqrt{ABFD}$. Invenietur etiam (430) $Q = re$, $ZZ = \frac{rree}{xx}$, $ee + \Delta\Phi LV = ee + \frac{f^4 \times \overline{xx - rr}^2}{rrxx}$ (431) $= \frac{rreexx + f^4xx - f^4rr}{rrxx}$. Hinc quantitas $ABFD - ZZ$ (propos. 41.) fit hic $= \frac{rreexx + f^4xx - f^4rr - r^4ee}{rrxx} = \frac{bbrrxx - bbr^4}{xx}$, ponendo $rree - f^4 = bbrr$. Quarè $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b\sqrt{xx - rr}}{x}$. Factis igitur debitis substitutionibus, formula prop. 41. $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, in hanc mutatur $\frac{\frac{1}{2}r^3edx}{bx\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx - rr}}$, ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quarè sector circuli $CXY = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{bx\sqrt{xx - rr}}$, ut in cas. 3°. (437). Igitur trajectoria VI construetur per sectores ellipticos prorsus ut in hoc 3°. casu.

442. Schol. Keillius ad calcem [illegible]

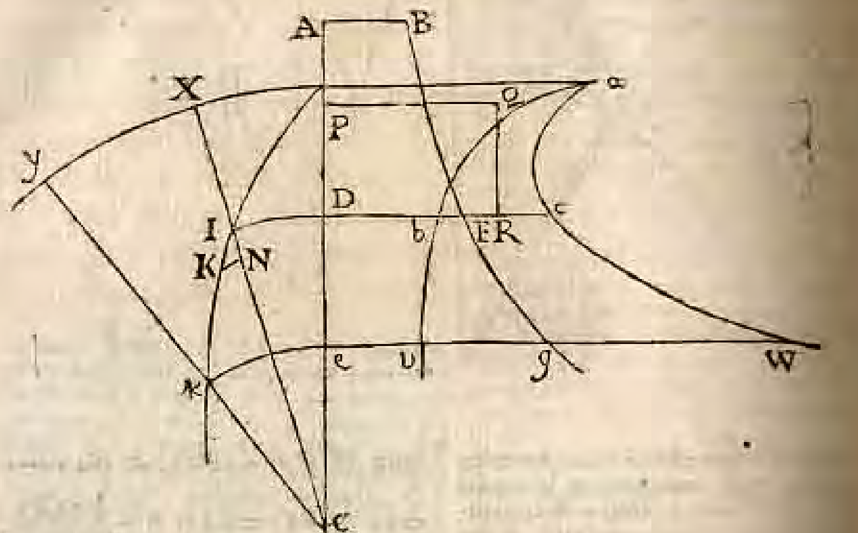


[illegible] ad veram astronomiam, inversum [illegible] virium centripetarum in ratione [illegible] distantiæ à centro decrescen[illegible] generatim ac perspicuè solvit, & tra[illegible] quæ in hâc hypothesi describ[illegible] plures proprietates demonstravit, [illegible] illam, earum omnium, si [illegible] exceperis, areas esse perfec[illegible] quadrabiles, quæ quidem de omni[illegible] trajectoriis per constr. coroll. 3. prop. [illegible] descriptis facilè demonstratur. Nam (per prop. 41.) arearum illarum fluxio $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{-\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{rr - xx}}$ in cas. 1°. & $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{xx - rr}}$ in casu 3°. (437. 441.). Ponatur 1°. $\sqrt{rr - xx} = z$; & erit $rr - xx = zz$, $-xdx = zdz$, & $-\frac{\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{rr - xx}} = CIK = \frac{1}{2}cdz$, & sumptis fluentibus, sector $CIV = \frac{1}{2}cz = \frac{1}{2}c\sqrt{rr - xx}$, nulla enim est addenda quantitas constans. Ponatur 2°. $\sqrt{xx - rr} = y$, & proinde $xx - rr = yy$, $xdx = ydy$, erit $CIK = \frac{\frac{1}{2}cxdx}{\sqrt{xx - rr}} = \frac{1}{2}cdy$, & sector fluens $CIV = \frac{1}{2}cy = \frac{1}{2}c\sqrt{xx - rr}$.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, ſecundum datam rectam egreſſi.

Stantibus quæ in tribus propoſitionibus præcedentibus: exeat



corpus de loco *I* ſecundum lineolam *IK*, eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco *P* cadendo acquirere poſſet in *D*: ſitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in *I*, ut *DR* ad *DF*. Pergat autem corpus verſus *k*; centroque *C* & intervallo *Ck* deſcribatur circulus *ke* occurrens rectæ *PD* in *e*, & erigantur curvarum *BFg*, *abv*, *acw* ordinatim applicatæ *eg*, *ev*, *ew*. (y) Ex dato

(y) * *Ex dato rectangulo PDRQ &c.* Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva linea BFG, (per conſtr. 1æ. partis prop. 39). Dato rectangulo PDRQ, datur locus A, de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco D, æqualem velocitati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco P cadens acquiſivit eodem loco D, (per cor. 1. prop. 39.) dato autem loco A, & deſcriptâ curvâ BFg, deſcribi poterit altera curva VLM, (per conſtr. & fig. 2æ. ptis. Prop. 39).

ato rectangulo *PDRQ*, datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitatur, datur curva linea *BFg*, per conſtructionem problematis XXVII, & ejus corol. 1. (z) Deinde ex dato angulo *CIK* datur proportio naſcentium *IK*, *KN*, & inde, per conſtructionem prob. XXVIII. datur quantitas Q, unà cum curvis lineis *abv*, *acw*: ideoque, completo tempore quovis *Dbve*, datur tum corporis altitudo *Ce* vel *Ck*, tum area *Dcwe*, eique æqualis ſector *XCy*, angulusque *ICk*, & locus *k* in quo corpus tunc verſabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his propoſitionibus vim centripetam in receſſu quidem à centro variari ſecundum legem quamcunque, quam quis imaginari poteſt, in æqualibus autem à centro diſtantiis eſſe undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus conſideravimus. Supereſt ut de motu corporum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

(z) * *Deinde.* Cum ſit IK ad KN, ut radius totus ad ſinum anguli dati NIK, (per cor. 2. prop. 41.) dabitur quantitas conſtans Q, unà cum curvis lineis abv, acw, eſt enim IK : KN = $\sqrt{ABFD}$ (ſive $\sqrt{PDRQ}$) : Z; eſt ergo Z (per conſtr. probl. 28. & not. 418). & $Z=\frac{Q}{A}$ ſive $A \times Z = Q$ unde habetur Q, ex quibus habentur quantitates $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX^2}{2A^2 \times \sqrt{ABFD-ZZ}}$ quæ ſunt ordinatæ curvarum abv, acw.

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

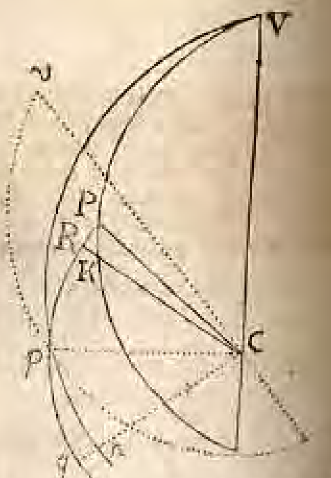
([a]) *Efficiendum est ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quiescente.*

In orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo à *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; & ([b]) area, quam linea *Cp* describit, erit ad aream *VCP*, quam linea *CP* simul describit; ut velocitas lineæ describentis *Cp* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ideoque in datâ ratione, & prop-

(a) * *Efficiendum est.* Sit VPK quælibet immota trajectoria quam corpus P ad centrum virium C tendens describat pergendo ab V versus K, invenienda est lex vis centripetæ ad C tendentis, quâ urgente corpus aliud p feratur in perimetro figuræ up, priori similis & æqualis, intereadum hæc ipsa figura up, circà C revolvitur in uno eodemque plano, ità ut dum corpus P, arcum quemlibet ut VP, percurrit in orbe quiescente VP, aliud corpus p, similem & æqualem arcum up, percurrat in orbe revolvente up.

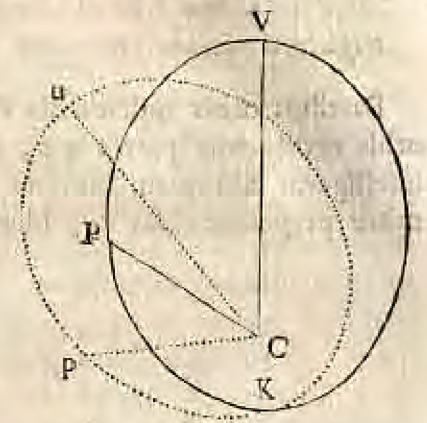
443. Si fuerit CV ad trajectoriam VPK in puncto V perpendicularis, hoc est, si sit CV linea apsidum in orbe quiescente, & correspondens Cu linea apsidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ Cu dicitur apsidum motus, qui in consequentia fit, ubi linea Cu, in eandem partem fertur cum corpore P, vel p. In antecedentia verò ubi linea Cu, & corpus P, vel p, in plagas contrarias tendunt.

(b) * *Et area quam linea Cp, describit.* Sit Vpn curva quam corpus p in orbe mobili up revolvens describit, centro C, intervallo CP, vel Cp, describatur circuli arcus Ppq, agatur radius CR orbem



quiescentem VPK secans in K, & radius Cq, trajectoriam Vpn, secans in n, suntque K, n, loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora P, p, id est, arcus PK, pn, sint eodem tempore descripti. Nascentibus arcubus PR, pq, sectores PCK, pCn, æquales sunt sectoribus $\frac{1}{2}$PC

propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea *Cp* in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit unà cum puncto *p* in curvâ illâ lineâ quam punctum idem ratione jam expositâ describit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque figura *uCp* figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis *uCp*, eodemque tempore describet arcum ejus *up* quo corpus aliud *P* arcum ipsi

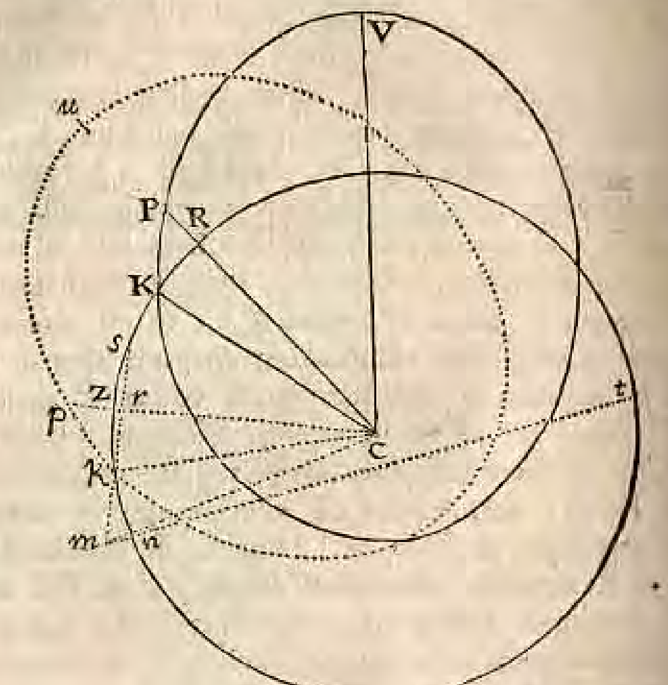


similem & æqualem *VP* in figurâ quiescente *VPK* describere potest. Quæratur igitur, per corollarium quintum propositionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ quam punctum *p* describit in plano immobili, & solvetur problema. *Q. E. F.*

$\frac{1}{2}$PC×PR, $\frac{1}{2}$pC×pq; adeoque ob pC=PC sectores illi sunt inter se ut arcus PR, pq, seu ut anguli PCK, pCn; sed quoniam angulus VCK, est ad angulum VCn, in datâ ratione anguli VCP, ad angulum VCp (per hyp.) erit dividendo angulus VCK—VCP, ad angulum VCn—VCp, hoc est, angulus PCK, ad angulum pCn, in datâ ratione anguli VCP, ad VCp, atque adeò sector PCK, ad sectorem pCn, in eâdem ratione datâ. Unde (per cor. Lem. 4.) totus sector VpC, est ad totum sectorem VPC, eodem tempore descriptum in datâ ratione, sive sector VpC, est ut sector VPC, proindéque (per prop. 1.) ut tempus quo sector uterque describitur. Quare manifestum est (per prop. 2.) quod corpus p, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit in curvâ lineâ Vpn, quam punctum p perpetuò tangit. Porrò dato orbe VPK, & virium centro C, datur longitudo & positio lineæ CP, per (superiorem Newt. constr.) ideoque & lineæ Cp, & hinc datur punctum quodlibet p, in trajectoriâ Vpn, adeóque & ipsa trajectoria datur. Inveniri igitur potest (per cor. 5. prop. 6). Lex vis centripetæ quâ corpus p, in trajectoriâ illâ Vpn revolvi potest.

Quoniam autem angulus VCP æqualis est angulo uCp (per constr.) erit quoque angulus VCu æqualis angulo PCp, adeóque datâ Cp, magnitudine & positione, facile invenitur positio lineæ apsidum Cu in orbe mobili Vp: Fiat enim angulus VCu angulo PCp, & linea Cu lineæ CV, atque figura uCp, figuræ VCP similis & æqualis, & corpus unà cum puncto p, semper latum & figuram immotam Vpn describens, describit etiam perimetrum up, figuræ revolventis uCp, eodemque tempore describit arcum ejus up, quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem VP, in figurâ quiescente VPK, describere potest. Vide Varignonium Legem vis centripetæ in trajectoriâ Vpn determinantem, in Comm. Paris. 1705.

pleto illo tempore (d) reverâ reperietur in n; (e) ideoque vi majore urgetur quam corpus P, si modo angulus nCp angulo kCp major est, id est si orbis vpk vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus quâ linea CP in consequentia fertur; & vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia. Estque virium diffe-

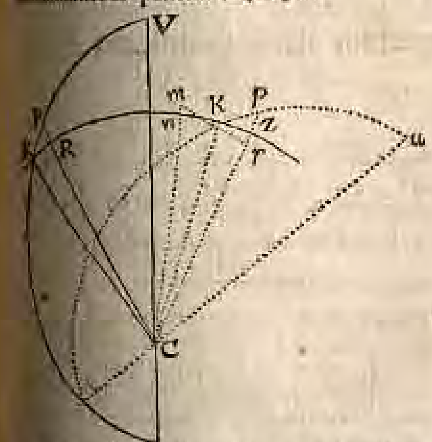


(d) * *Reverâ reperitur in puncto n.* Est enim angulus pCk=PCK (per hyp.) & si fuerit n locus corporis p, erit (per prop. 43.) angulus pCn, ad angulum PCk, ut angulus VCp, ad angulum VCP, & puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ. Nascentibus enim angulis pCn, PCK, perpendicula rm, RK, sunt ut arcus circulares nascentes radiis æqualibus CR, Cr descripti, seu ut anguli mCr, KCR, (per Lem. 7.) Est ergò angulus mCp, ad angulum KCP, seu kCp, ut mr, ad KR, seu kr, hoc est, ut angulus VCp, ad angulum VCP, sive, ut angulus pCn ad angulum kCp, (per constr.) quare angulus mCp=pCn, & hinc puncta C, n, m jacent in unâ rectâ.

(e) 444. *Ideoque vi majore urgetur, quam corpus P, si modò angulus nCp angulo kCp major; vi minore, si angulus* mCp, angulo kCp minor; & vi æquali, si angulus mCp, angulo kCp æqualis. Nam in 1°. casu linea Cm, major est quam Cn; & punctum m extrà periphe-

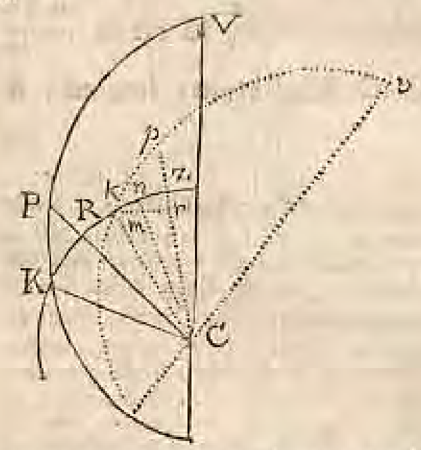
fferentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck describi intelligatur circulus secans as mr, mn productas in s & t, & (f) erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, ideoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. (g) Cum autem triangula pCk, pCn dato tempore den-

circuli radio Ck, vel Cn, describ- casu, adeóque præter vim quâ corpus utrumque ad centrum urgetur, requiritur altera quâ corpus P, adhuc describat In 2°. casu Cm, minor est quam Cn, puncto m, cadente inter puncta k, r, in lineâ kr. In 3°. casu Cm=Cn, coincidentibus punctis m, n, k.



Porrò angulus mCp, angulo kCp, CP major est, si orbis vpk, vel movetur in consequentia (ut patet) vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus quâ linea CP in consequentia fertur. Nam in hoc casu angulus vCV, est plusquam duplo major angulo VCp, seu nCp, adeóque angulus VCp, major angulo VCP, seu vCp, & hinc angulus pCm, major angulo pCk, cum sit angulus pCm, ad angulum pCk, ut VCp, ad VCP.

Si orbis upk, movetur in antecedentia cum celeritate duplâ ejus quâ linea CP, in consequentia fertur, erit angulus VCp=VCP; cumque sit etiam Cp=CP, corpus p describet orbem immotum Vp, similem & æqualem orbi VPK. In hoc casu corpus p, non fertur ab V, versùs p, sed in partem oppositam ut patet.



447. Si orbis vpk movetur in antecedentia minori celeritate quam sit dupla ejus quâ linea CP in consequentia fertur, erit angulus mCp, angulo kCp minor. In hoc enim casu angulus VCv minor est duplo angulo VCP, vel vCp; adeóque angulus VCp, minor angulo VCP, vel vCp, & hinc angulus mCp, minor angulo kCp (per constr.)

(f) * *Erit rectangulum mn × mt = rectangulo mk × ms.* Per prop. 35. vel 36. lib. 3. Elem.

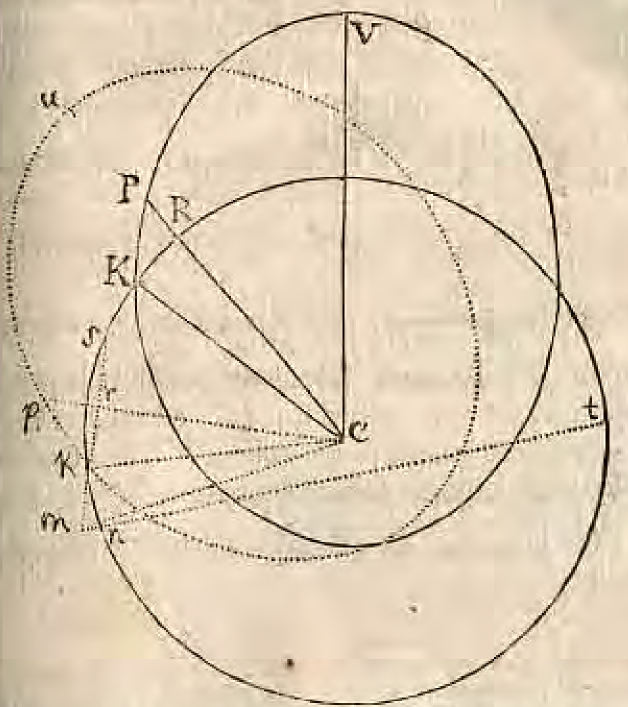
(g) *Cum autem triangula pCk, sive PCK, & pCn, dato tempore describantur* (per hyp.) *dantur magnitudine* (per prop. 1.) Porrò triangulum $PCK = \frac{1}{2} PC \times KR$, &

 trian-

DE MOTU CORPORUM. dentur magnitudine, sunt kr & mr, earumque differentia mk & summa ms reciprocè ut altitudo pC, ideoque rectangulum $mk \times ms$ est reciprocè ut quadratum altitudinis pC. Est & mt directè ut $\frac{1}{2}\, mt$, id est, ut altitudo pC. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascens mn, eique proportionalis virium differentia reciprocè ut cubus altitudinis pC. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p, vel K & k, est ad vim quâ corpus motu circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili describit arcum PK, ut lineola nascens mn ad (h) sinum versum arcus nascentis RK, id est ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates F, G in

ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut GG−FF ad FF. Et (i) propterea, si centro C intervallo quovis CP vel Cp describatur sector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in LIBER PRIMUS. PROP. XLIV. THEOR. XIV.



orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area VPC uniformiter describere po-

triangulum $pCn = \frac{1}{2} pC \times mr$. Junctis enim pn, pm, erit triangulum nascens pnC æquale nascenti pmC, ob mn evanescentem respectu lineæ finitæ Cn, & triangulum $pmC = \frac{1}{2} pC \times mr$. Sunt ergò facta $pC \times kr$, & $pC \times mr$, constantia seu data & hinc kr, & mr, sunt reciprocè ut altitudo pC, & propterea dividendo & componendo, earum differentia; mk, & summa ms, sunt reciprocè ut eadem altitudo pC. Quod ut clariùs intelligatur, supponamus esse $kr = \frac{F}{pC}$, $mr = \frac{G}{pC}$, & F & G esse quantitates datas, erit $mr - kr = mk = \frac{G-F}{pC}$, $mr + kr = ms = \frac{G+F}{pC}$, hoc est, ob quantitates F, G, G−F, G+F, datas, erunt kr, mr, mk, ms, ut $\frac{1}{pC}$. Hinc rectangulum $mk \times ms$, $= \frac{GG-FF}{pC^2}$, est reciprocè ut quadratum altitudinis pC; Est & mt, directè ut $\frac{1}{2}\, mt = Cn = Ck = pC$, quare $mn = \frac{mk \times ms}{mt} = \frac{GG-FF}{2pC^3}$, & ideò mn est reciprocè ut cubus altitudinis pC ob datam quantitatem $\frac{GG-FF}{2}$.

(h) * *Ad sinum versum arcûs nascentis Rk*, seu Zk, hoc est, ad Zr, nam Zr & mn, sunt spatia nascentia eodem tempusculo viribus illis descripta, & iisdem proindè viribus proportionalia. Est autem $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$ (ex Dem.) & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$. Nam, ex naturâ circuli $Zr : kr = kr : kC + rC$, hoc est, quia rC usurpari potest pro ZC, & quia $ZC = kC$, $Zr : kr = kr : 2kC$, & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$; undè $mn : Zr = mk \times ms : kr^2$, ob $mt = 2kC$. Si verò capiantur duæ quantitates G, F, in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCp, ad angulum VCP, seu quam habet mr, ad kr, erit $mk \times ms : kr^2 = GG-FF : FF$; ut ex suprà demonstratis liquet, ergò $mn : Zr = GG-FF : FF$.

(i) * *Et propterea si centro C.* Corpus P, in orbitâ V P K revolvens dato tempore datum sectorem P C K, radio ad centrum C ducto describit (per prop. 1.) & corpus in circulo radio C K descripto uniformiter revolvens, & arcum R K, seu sectorem C R K = C P K, describens eodem tempore quo corpus P describit arcum P K, seu sectorem C P K, dato tempore datum quoque sectorem describit. Quare corpus P, in orbitâ V P K, & corpus in circulo prædicto revolventia, radiis ad centrum C ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. *Et propterea si centro C, intervallo CP, vel Cp, describatur &c.*

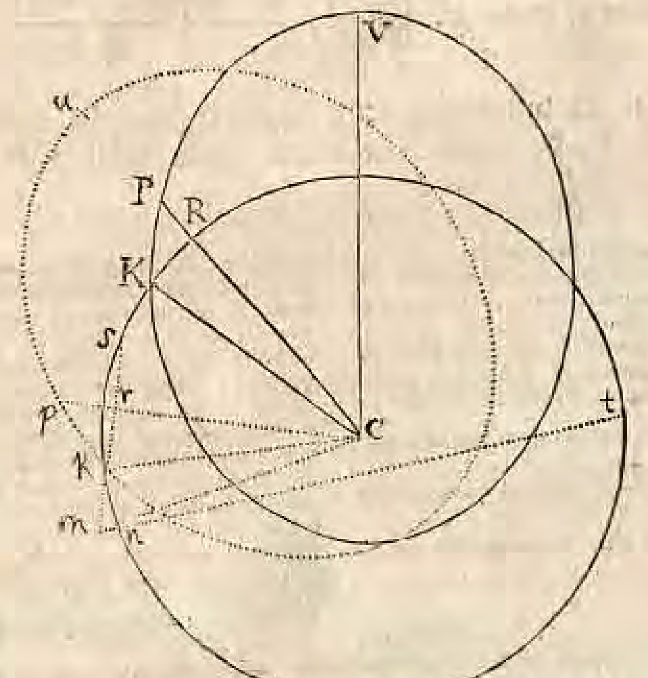
potuiſſet, ut GG−FF ad FF. Namque ſector ille & area *pCk* ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si orbis *VPK* ellipſis ſit umbilicum habens *C* & apſidem ſummam *V*; eique ſimilis & æqualis ponatur ellipſis *upk*, ita ut ſit ſemper *pC* æqualis *PC* & angulus *VCp* ſit ad angulum *VCP* in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem *PC* vel *pC* ſcribatur A, & pro ellipſeos latere recto ponatur 2R: erit vis, quâ corpus in ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ & contra. Exponatur enim vis quâ corpus revolvatur in immotâ ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in *V* erit $\frac{FF}{CV\ quad.}$ (k) Vis autem quâ corpus in circulo ad diſtantiam *CV* eâ cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in ellipſi revolvens habet in *V*, eſt ad vim quâ corpus in ellipſi revolvens urgetur in apſide *V*, ut dimidium lateris recti ellipſeos ad circuli ſemidiametrum *CV*, ideoque valet $\frac{RFF}{CV\ cub.}$: & vis, quæ ſit ad hanc ut GG−FF ad FF, valet

RGG

(k) * *Vis autem quâ corpus in circulo &c.* Demonſtratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in Ellipſi circa ejus focum revolvitur, eſt ſemper æqualis cuidam quantitati conſtanti diviſæ per quadratum diſtantiæ à foco (per Prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate conſtanti, quadratum *FF* cujus latus F eſt primâ ex illis indeterminatis (ſed conſtantibus) quæ exprimunt rationem anguli V C P ad angulum V C p, erit vis in V $= \frac{FF}{VC^2}$. Sit Corpus circâ centrum quodvis in circulo revolvens, ad diſtantiam C V, eâdem velocitate quâ Corpus in ellipſi revolvens urgetur in apſide V, ſumantur in Circulo & in Ellipſi arcus quamminimi eodem tempore deſcripti, illi arcus erunt inter ſe æquales, ob æquales velocitates (ex Hypoth.) & eorum ſagittæ erunt inter ſe ut vires Centrales (per Corol. 4. Prop. I.): in ellipſibus autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (& iis annumeratur Circulus) latera recta ſunt inverſe ut arcuum quamminimo tempore deſcriptorum ſagittæ & directè ut quadrata perpendiculi ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad Centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) ſed in apſide Ellipſeos & Circulo, illa perpendicula ſunt ipſi arcûs, ideoque ſunt æqualia; Ergo latera recta hujus Ellipſis & hujus Circuli erunt inverſè ut ſagittæ arcuum ſive inverſè ut vires Centrales; Latus rectum circuli eſt ipſa diameter, ergo ſumendo dimidium utriuſque Lateris recti eſt *vis quâ Corpus in Ellipſi revolvens urgetur* &c. Reliqua demonſtratio eſt plana.

$\frac{RGG - RFF}{CV\ cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus corol. 1.) differentia virium in *V* quibus corpus *P* in ellipſi immotâ *VPK*, & corpus *p* in ellipſi mobili *upk* revolvuntur. Unde cum (per hanc prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit



$\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$, quâ corpus revolvi poteſt in ellipſi immobili *VPK*, addatur exceſſus $\frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$; & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ quâ corpus in ellipſi mobili *upk* iiſdem temporibus revolvi poſſit.

Co-

Corol. 3. (l) Ad eundem modum colligetur quod, ſi orbis immobilis VPK ellipſis ſit centrum habens in virium centro C; eique ſimilis, æqualis & concentrica ponatur ellipſis mobilis upk; ſitque 2 R ellipſeos hujus latus rectum principale, & 2 T latus tranſverſum ſive axis major, atque angulus VCp ſemper ſit ad angulum VCP ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipſi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi poſſunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ reſpectivè.

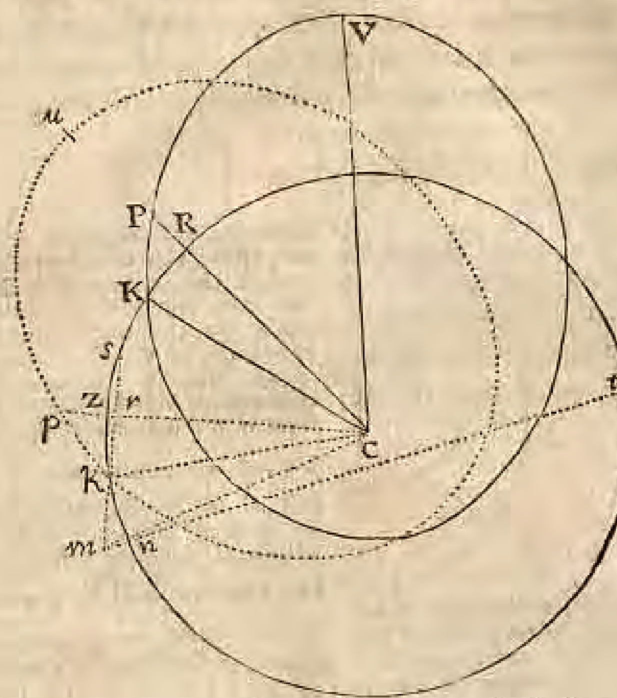
Corol. 4. Et univerſaliter, ſi corporis altitudo maxima CV nominetur T, & radius curvaturæ quam orbis VPK habet in

(l) *Ad eundem modum* &c. Si Corpus revolvatur in Ellipſi vi centripetâ tendente ad focum Ellipſeos, vis centralis eſt directè ut diſtantia à Centro; ideoque erit æqualis quantitati conſtanti multiplicatæ per diſtantiam (per Prop. X.), poſito $2T$ pro axe tranſverſo & $2R$ pro latere recto, ſit ea quantitas conſtans $\frac{FF}{T^3}$, vis in V erit $\frac{FF \times CV}{T^3}$ vel quoniam CV $=T$, erit $\frac{FF}{TT}$ in aliis verò omnibus punctis erit $\frac{FF \times A}{T^3}$.

Sit Corpus in circulo revolvens circa centrum C ad diſtantiam CV, quâlibet vi centripetâ, ſed tali ut eâdem velocitate feratur quâ corpus in Ellipſi latum urgetur in extremitate axis tranſverſi, ſumantur in eo Circulo & in extremitate axis tranſverſi Ellipſeos arcus quamminimi eodem tempore deſcripti illi arcus erunt æquales, ob æquales velocitates, & eorum ſagittæ erunt ut vires Centrales quibus corpora in circulo & Ellipſi retinentur (per Cor. 4. Prop. I.); in Ellipſibus autem diverſis (& iis annumeratur Circulus) in quibus vis centripeta ad centrum tendit, in diſtantiis æqualibus à Centro, dupla quadrata facti axium ſunt inverse ut ſagittæ quam minimo tempore deſcriptæ, & directè ut quadrata arearum dato tempore deſcriptarum (per conſtr. Prop. X.), cum ergo hic ſumantur arcus æquales & perpendiculares in lineam ad centrum ductam, & diſtantiæ à centro ſint æquales, illæ areæ utrinque ſunt æquales, ergo ſagittæ arcuum in Ellipſi & in circulo ſunt inverse ut ipſa quadrata facti axium, ſeu quia axis tranſverſus Ellipſeos & circuli diameter idem ſunt, ſagittæ arcuum in Ellipſi & circulo ſunt inverse ut quadratum axis conjugati ad quadratum tranſverſi, ſivè inverse ut Latus rectum ad Axem tranſverſum ergo $2T : 2R$ (ſive $T:R) = \frac{FF}{TT}$: ad vim in Circulo quæ itaque erit $\frac{R \times FF}{T^3}$ ſed hæc vis eſt ad differentiam virium in orbe mobili & immobili, ut FF ad $GG-FF$, ergo illa differentia eſt $\frac{RGG-RFF}{T^3}$, hæc autem differentia in V, eſt ad differentiam in alio quovis loco inversè ut cubi altitudinum ergo $A^3 : CV^3$ (ſive T^3) $= \frac{RGG-RFF}{T^3} : \frac{RGG-RFF}{A^3}$, cum ergo Vis in Orbe immobili ſit ut $\frac{FFA}{T^3}$ in orbe mobili erit $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG-RFF}{A^3}$. Q. E. D.

* Et

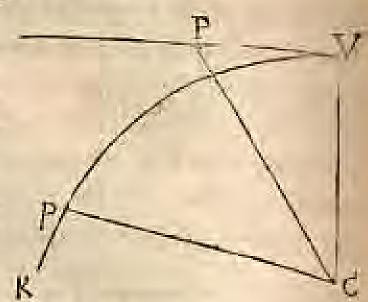
in V, id eſt radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili VPK revolvi poteſt in loco V dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis P



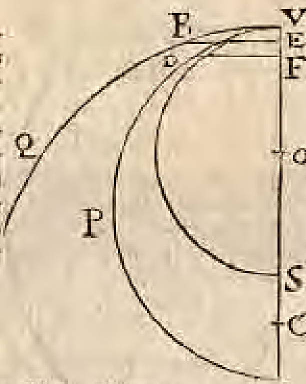
indefinitè dicatur X, altitudine CP nominatâ A, & capiatur G ad F in datâ ratione anguli VCp ad angulum VCP: erit (m) vis centripeta, quâ corpus idem eoſdem motus in eâdem trajectoriâ upk circulariter motâ temporibus iiſdem peragere poteſt, ut ſumma virium $X + \frac{VRGG-VRFF}{A\,cub.}$.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui poteſt ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ, & inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

(m) * *Erit vis centripeta*, ut hæc commodè demonſtrentur adhibendum Lemma ſequens.



Corol. 6. Igitur si ad rectam CV positione datam erigatur perpendiculum VP longitudinis indeterminatæ, jungaturque CP, & ipsi æqualis agatur Cp, constituens angulum VCp, qui sit ad angulum VCP in datâ ratione; vis quâ corpus gyrari potest in curva illa Vpk quam punctum p perpetuò tangit, erit reciprocè ut cu-



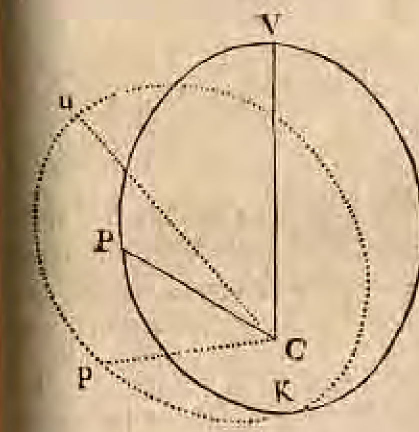
448. Lemma. Si corpus ad centrum virium C tendens describat trajectoriam immotam VP; vis centripeta quâ in apside V urgetur est ad vim centripetam corporis alterius in circulo VBQ, ad eandem distantiam CV, eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia CV ad VO radium circuli VDS, trajectoriam VP osculantis in V. Capiantur in circulo VBQ & in trajectoriâ VP arcus quam minimi & æquales VB, VD, & ex punctis B & D ad rectam CV demissa intelligantur perpendicula BE, DF; arcus evanescentes VB, VD eodem tempore à corporibus duobus percurrentur, ob utriusque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendicula BE, DF æqualia (per Lem. VII). Quoniam autem arcus evanescens VD usurpari potest pro arcu circuli curvam VP osculantis in V, erit ex naturâ circuli VF : DF = DF : VO + FO, seu 2VO, adeoque $DF^2 = 2VO \times VF$, & similiter $BE^2 = 2VC \times VE = 2VO \times VF$; unde VF : VE = VC : VO; sed vis centripeta corporis arcum VD describentis, est ad vim centripetam alterius corporis arcum VB describentis ut VF ad VE, quæ sunt spatia viribus illis urgentibus eodem tempusculo descripta, quare vis centripeta quâ corpus in apside V urgetur, est ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem distantiam eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia illa CV ad radium VO circuli osculatoris in V. Q. E. D.

449. Cor. 1. Si radius VO circuli trajectoriam VP osculantis in apside V dicatur R, distantia CV, T, distantia CP, A, vis centripeta in V, $\frac{VFF}{TT}$, hæc erit ad vim centripetam in circulo VQ, ad eandem distantiam CV eâdem cum velocitate descripto ut T ad R, (448) hæc ergo erit $\frac{VRFF}{T^3}$, quæ erit ad differentiam virium centripetarum in apsidibus V & u, orbis immobilis VP, & orbis mobilis up, ut FF ad GG−FF (per Cor. I. Newt.) ideoque differentia illa erit $\frac{VRGG-VRFF}{T^3}$ quæ erit ad differentiam in aliis locis P ut A^3 ad T^3, ideoque in quibusvis locis erit differentia virium in orbe mobili & immobili $\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$. Quod aliâ ratione demonstravit Hermannus prop. 25. Lib. 1. Phoronomiæ.

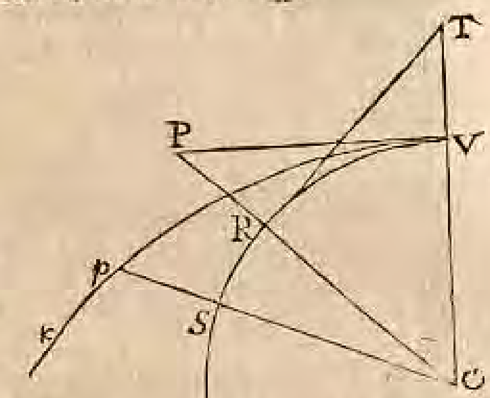
450. Coroll. 2. Hinc si vis centripeta in quovis puncto P, orbitæ immobilis VP, dicatur X, vis in puncto æque alto p, orbitæ mobilis up erit $= X + \frac{VRGG-VRFF}{A^3}$. Q. E. D.

451. Cor. 3. Si orbitæ VP & up sint ellipses quarum umbilicus communis C, erit (240) radius osculi R æqualis dimidio lateri recto ellipseos VP, vel up: & (per prop. XI) $X : \frac{VFF}{TT} = TT : AA$, adeoque $X = \frac{VFF}{AA}$, Ergo (450) vis in Orbitâ mobili erit $\frac{VFF}{AA} + \frac{VRGG-VRFF}{A^3}$, & divisis omnibus terminis per V ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A^3}$; & si vis centralis ad centrum Ellipseos dirigatur erit $X : \frac{VFF}{TT} = A : T$ & $X = \frac{VFF \times A}{T^3}$ & vis in Orbita mobili erit $\frac{VFF \times A}{T^3} + \frac{VRGG-VRFF}{A^3}$ & divisis terminis per V erit $\frac{FF \times A}{T^3} + \frac{RGG-RFF}{A^3}$; sicut in Cor. 3. & 4. Newt. inventum fuerat.

bus altitudinis Cp. Nam (n) corpus P per vim inertiæ, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi potest in rectâ VP. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis CP vel Cp, reciprocè proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam Vpk. Est (o) autem hæc curva Vpk eadem cum curvâ illâ VPQ in corol. 3. prop. XLI. inventâ, in quâ ubi diximus corpora hujusmodi viribus attracta obliquè ascendere.



(n) * *Nam corpus P.* Linea VP considerari potest tanquam trajectoria immota, in quâ vis centripeta X in loco quovis P nulla est; & radius osculi R infinitus; erit igitur in hoc casu (per cor. 4.) vis centripeta in loco p, trajectoriæ mobilis, æqualis $\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$, adeóque ob datam quantitatem $VRGG-VRFF$ erit X, seu vis in p, ut $\frac{1}{A^3}$.

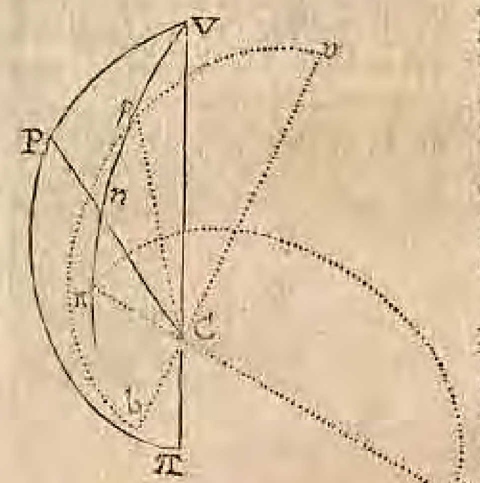


(o) * *Est autem hæc curva Vpk eadem &c.* Nam si centro C intervallo CV describatur circulus VRS quem recta CP secat in R, recta Cp, in S, sitque angulus SCV ad angulum RCV in datâ ratione, erit quoque sector SVC ad sectorem RVC in datâ illâ ratione, & ducta per punctum R tangente RT, quæ radio CV producto occurrat in T, ejusdem anguli RCV secantes CP, CT erunt æquales, atque adeò curva Vpk, eadem cum curvâ VPQ, in coroll. 3°. prop. 41. inventâ, in quâ *recta Cp est semper æqualis abscissæ CT, & angulus VCp est semper sectori VCR proportionalis.*

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(p) *Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.*

(q) Problema solvitur arithmeticè faciendo ut orbis, quem corpus in ellipsi mobili (ut in propositionis superioris corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsides requiruntur, & quærendo apsides orbis

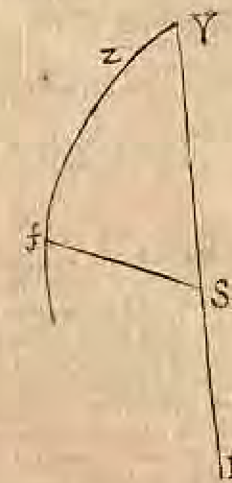


(p) * *Orbium qui sunt &c.* Iisdem positis quæ in propositione 44 & ejus corollariis 1. & 2. sit V p n π orbis quem corpus p in ellipsi mobili u p b revolvens describit in plano immobili, & V Π, v b, ellipseon immobilis & mobilis axes transversi, manifestum est punctum V esse apsidem summam tam in ellipsi immotâ V P Π, quam in orbe V p n π, & esse π apsidem imam in orbe V p n π si fuerit C π = C b = C Π, in quâ hypothesi corpus p pervenit ad locum π, ubi corpus P, in ellipsi immotâ pervenit ad apsidem imam Π & in ellipsi revolvente corpus p pervenit ad b, ac in orbe V p n π, puncta p, b, π, coincidunt. Jam verò datâ vi centripetâ in orbe V p n π, quæritur motus apsidum, hoc est, motus axis u c b, seu quod idem est, quæritur ratio F, ad G, vel anguli V C P ad angulum V C p, aut anguli V C Π, 180°. ad angulum V C π; quod si ellipsis V P Π, sit circulo maximè finitima, orbis V p n π ad circuli formam quam proximè accedet, nam si ellipsis V P Π, in circulum perfectum mutetur, orbis V p n π sit quoque circulus.

(q) * *Problema solvitur arithmeticè.* Revolvatur corpus Y in orbe immoto Y Z f vi centripetâ datâ tendente ad centrum S, sitque punctum Y apsis summa, f apsis ima in illo orbe. Umbilico S, & axe transverso Y S P = Y S + S f, descriptæ intelligantur ellipses immobilis & mobilis, efficiendum est ut corpus Y orbem Y Z f describens, simul revolvatur in hâc ellipsi mobili, dum corpus aliud ellipsim immotam describit eâ ratione quam exposuimus prop. 43. & inveniendus est apsidum motus. Id autem absolvitur faciendo ut orbis V p n π (fig. superiori) qui omnes orbes ut Y Z f quæcumque sit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis Y Z f, sive ei similis & æqualis fiat, ac quærendo apsides V π, vel rationem angulorum V C P, V C p, in orbe illo V p n π. Porrò si supponamus orbem V p n π, similem & æqualem factum esse orbi Y Z f, erit vis centripeta in ellipsi immotâ cujus umbilicus S vel C ut $\frac{FF}{AA}$, & vis centripeta in loco quovis Z, orbis Y Z f, vel

[...]s quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes [...]tem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus [...]scribuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus red[...]ntur proportionales. Sit punctum *V* apsis summa, & scri[...]ntur T pro altitudine maximâ *CV*, A pro altitudine quâvis [...]â *CP* vel *Cp*, & X pro altitudinum differentiâ *CV*−*CP*; & [...]s, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum *C* (ut in co[...]ol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id est ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, substi[...]uendo T−X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Re[...]ducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.* & numeratores, factâ homologo[...]rum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exem[...]plis patebit.

Exem-

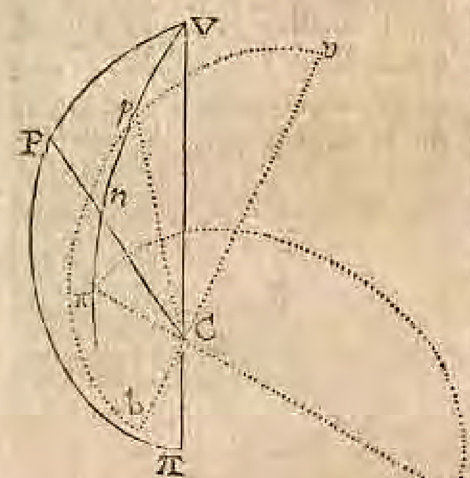


vel in loco P, orbis V p n π, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A^3} = \frac{FFA+RGG-RFF}{A^3} = \frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3}$, substituendo *T*−*X* pro *A* in numeratore, & P pro numeratore toto. Unde si quantitas $\frac{Q}{A^3}$ vim centripetam in loco quovis Z orbis Y Z f exponat, eaque sit data, erit $\frac{P}{A^3}$ ad $\frac{Q}{A^3}$ in datâ ratione. Sit illa ratio 1 ad *B*, & erit $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$; & P B − Q = o. Loco *A*, in quantitate *Q*, substituatur *T*−*X*, & æqualitatis *PB* − *Q* = o, termini omnes analogi se mutuo destruere debent, hoc est, termini omnes dati seu in quibus non reperitur quantitas variabilis *X* erunt simul nihilo æquales, & termini non dati, seu in quibus variabilis *X* invenitur, erunt etiam simul nihilo æquales, atque indè determinabitur ratio G ad F seu anguli VCP ad angulum VCp, faciendo ut sint termini dati in quantitate P ad terminos non datos ejusdem quantitatis, ita termini dati in quantitate *Q*, ad terminos non datos ejusdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(p) *Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.*

(q) Problema solvitur arithmeticè faciendo ut orbis, quem corpus in ellipsi mobili (ut in propositionis superioris corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsides requiruntur, & quærendo apsides orbis

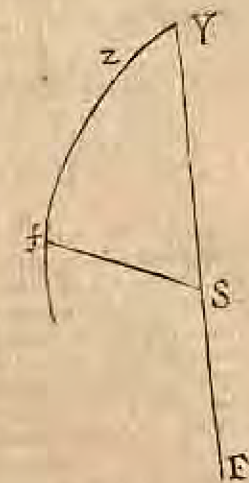


(p) * *Orbium qui sunt &c.* Iisdem positis quæ in propositione 44 & ejus corollariis 1. & 2. sit V p n π orbis quem corpus p in ellipsi mobili u p b revolvens describit in plano immobili, & V Π, v b, ellipseon immobilis & mobilis axes transversi, manifestum est punctum V esse apsidem summam tam in ellipsi immotâ V P Π, quam in orbe V p n π, & esse π apsidem imam in orbe V p n π si fuerit C π = C b = C Π, in quâ hypothesi corpus p pervenit ad locum π, ubi corpus P, in ellipsi immotâ pervenit ad apsidem imam Π & in ellipsi revolvente corpus p pervenit ad b, ac in orbe V p n π, puncta p, b, π; coincidunt. Jam verò datâ vi centripetâ in orbe V p n π, quæritur motus apsidum, hoc est, motus axis u c b, seu quod idem est, quæritur ratio F, ad G, vel anguli V C P ad angulum V C p, aut anguli V C Π, 180°. ad angulum V C π; quod si ellipsis V P Π, sit circulo maxime finitima, orbis V p n π ad circuli formam quam proximè accedet, nam si ellipsis V P Π, in circulum perfectum mutetur, orbis V p n π fit quoque circulus.

(q) * *Problema solvitur arithmeticè.* Revolvatur corpus Y in orbe immoto Y Z f vi centripetâ datâ tendente ad centrum S, sitque punctum Y apsis summa, f apsis ima in illo orbe. Umbilico S, & axe transverso Y S F = Y S + S f, descriptæ intelligantur ellipses immobilis & mobilis, efficiendum est ut corpus Y orbem Y Z f describens, simul revolvatur in hâc ellipsi mobili, dum corpus aliud ellipsim immotam describit eâ ratione quam exposuimus prop. 43. & inveniendus est apsidum motus. Id autem absolvitur faciendo ut orbis V p n π (fig. superiori) qui omnes orbes ut Y Z f quæcumque sit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis Y Z f, sive ei similis & æqualis fiat, ac quærendo apsides V π, vel rationem angulorum V C P, V C p, in orbe illo V p n π. Porrò si supponamus orbem V p n π, similem & æqualem factum esse orbi Y Z f, erit vis centripeta in ellipsi immotâ cujus umbilicus S vel C ut $\frac{FF}{AA}$, & vis centripeta in loco quovis Z, orbis Y Z f, vel

is quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes tem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus scribuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus redantur proportionales. Sit punctum V apsis summa, & scriantur T pro altitudine maximâ CV, A pro altitudine quâvis lià CP vel Cp, & X pro altitudinum differentiâ $CV-CP$; & is, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum C (ut in corol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$, id est ut $\frac{FFA+RGG-RFF}{A\ cub.}$, substituendo T − X pro A, erit ut $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A\ cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.* & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

Exem-



vel in loco P, orbis V p n π, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A^3} = \frac{FFA+RGG-RFF}{A^3} = \frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3}$, substituendo $T-X$ pro A in numeratore, & P pro numeratore toto. Unde si quantitas $\frac{Q}{A^3}$ vim centripetam in loco quovis Z orbis Y Z f exponat, eaque sit data, erit $\frac{P}{A^3}$ ad $\frac{Q}{A^3}$ in datâ ratione. Sit illa ratio 1 ad B, & erit $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$, & $PB - Q = 0$. Loco A, in quantitate Q, substituatur $T-X$, & æqualitatis $PB - Q = 0$, termini omnes analogi se mutuo destruere debent, hoc est, termini omnes dati seu in quibus non reperitur quantitas variabilis X erunt simul nihilo æquales, & termini non dati, seu in quibus variabilis X invenitur, erunt etiam simul nihilo æquales, atque inde determinabitur ratio G ad F seu anguli VCP ad angulum VCp, faciendo ut sint termini dati in quantitate F ad terminos non datos ejusdem quantitatis, ita termini dati in quantitate Q, ad terminos non datos ejusdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

(r) *Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, ideoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, sive (scribendo T−X pro A in numeratore) ut $\frac{T\ cub. - 3TTX + 3TXX - X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis numeratorum terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $T\ cub.$ ut $-FFX$ ad $-3TTX + 3TXX - X\ cub.$ sive ut $-FF$ ad $-3TT + 3TX - XX$. Jam cum orbis ponatur circulo quam maxime finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad $T\ cub.$ ut $-FF$ ad $3TT$, seu GG ad TT ut FF ad $3TT$, & vicissim GG ad FF ut TT ad $3TT$, id est, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, & orbis illius quem corpus in

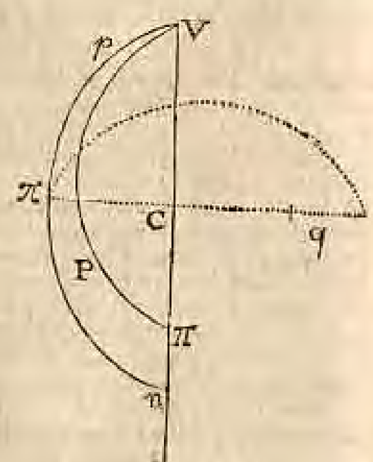
(r) * *Exemplum 1um. Ponamus vim centripetam* in orbe YZf *uniformem* seu constantem *esse, ideóque ut* 1, seu ut $\frac{A^3}{A^3}$, erit $Q = A^3 = T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3$, & $PB = BRGG - BRFF + BTFF - BFFX$ atque adeò $BRGG - BRFF + BTFF - BFFX - T^3 + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, & termini dati $BRGG - BRFF + BTFF - T^3 = 0$, seu $BRGG - BRFF + BTFF = T^3$, & termini non dati $-BFFX + 3TTX - 3TXX + X^3 = 0$, seu $BFF = 3TT - 3TX + X^2$, unde hæc proportio deducitur $BRGG - BRFF + BTFF : BFF = T^3 : 3TT - 3TX + X^2 = RGG - RFF + TFF : FF$. Jam cum orbis YZf, ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo & ob factas R & T æquales, atque $X = 0$, erit $X^2 = 0$, $3TX = 0$, $RFF = TFF$, & hinc $T^3 : 3TT = RGG : FF := TGG : FF$, & $T^2 : 3T^2 = 1 : 3 = GG : FF$, adeóque $G : F = 1 : \sqrt{3}$, hoc est, angulus VCp, est ad angulum VCP, ut 1, ad $\sqrt{3}$. Ergò cum corpus in ellipsi immobili VPΠ, ab apside summâ V ad apsidem imam Π descendendo, conficiat angulum VCΠ grad. 180. corpus aliud in ellipsi mobili upb, atque adeò in orbe immobili Vpnπ, seu YZf, ab apside summâ V vel Y, ad apsidem imam π vel f descendendo conficiet angulum VCπ, vel YSf grad. $\frac{180}{\sqrt{3}}$.

in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam & apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23 *sec.* ad centrum; perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}|^n$ in seriem indeterminatam per (s) methodum nostram serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c.

(s) * *Per methodum nostram.* Vide fragmentum Epistolæ Newtoni ad Oldenburgium & theorematis ibi propositi demonstrationem requiras ex elementis algebræ clarissimorum virorum Wolfii, Abbatis de Molieres, vel ex analysi demonstratâ Patris Reyneau, aut ex aliis passim authoribus. Interim cum hic satis sit duos priores terminos dignitatis $\overline{T-X}^n$ reperire ob evanescentes terminos in quibus reperitur ipsius X dignitas primâ altior, facile demonstratur ex dignitatum per continuam radicis multiplicationem formatione duos illos priores terminos esse $T^n - n \times XT^{n-1}$. Ut si fuerit $n=2$, duo priores termini dignitatis $\overline{T-X}^2$, erunt $T^2 - 2 \times TX$; si $n=3$, erunt $T^3 - 3 \times XT^2$, & ità porrò; atque hinc patet quam compendiosa sit Newtoniana methodus motum apsidum determinandi, nam præterquam quod sufficit duos dignitatum terminos invenire, possunt quoque termini æquales RFF, TFF, in formulâ $RGG - RFF + TFF - FFX$, deleri; unde tantummodò conferendus terminus datus RGG cum aliis terminis datis, & terminus non datus $-FFX$ cum aliis non datis.

Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n; ideoque G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam in ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus VCp, in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito angulus redibit ab apside imâ ad apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis à centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apsidem summam & apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* seu 90 *gr.* Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus perveniet ad apsidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id (t)



(t) * *Id quod etiam ex prop.* 10. *&c.* Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili V p π n, cujus centrum est in centro virium C, axis transversus V n, axis conjugatus π q, apsides summæ duæ V, n, imæ π, q; ellipseos autem mobilis V P Π, umbilicus erit C, axis transversus V Π = V C + C π.

* Ideo-

quod etiam ex propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciprocè ut distantia, id est directè ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 *gr.* 16 *m.* 45 *sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summâ ad imam & ab imâ ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciprocè ut latus quadratoquadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, (u) ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de apside summâ discedens & subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}|^m + c \text{ in } \overline{T-X}|^n}{A\ cub.}$ seu (x) (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut bT

(u) * *Ideoque directè ut* $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, *seu ut* $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, cum sit $A^3 = A^{\frac{12}{4}}$, & proinde est $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{12}{4}}} = A^{\frac{1}{4}}$, atque ita $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$.

(x) * *Seu per eandem methodum.* Est enim dignitas $\overline{T-X}^m$, evoluta, est $T^m - mXT^{m-1}$ &c. adeoque $b \times \overline{T-X}^m = bT^m - mbXT^{m-1}$ &c. & similiter $c \times \overline{T-X}^n = cT^n - ncXT^{n-1}$ &c. unde $b \times \overline{T-X}^m + c \times \overline{T-X}^n = bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1}$ &c.

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}\ \&c.}{A\ cub.}$$ & collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam *CV* seu T arithmeticè per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F, id est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus *VCP* inter apsidem summam & apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 *gr.* erit angulus *VCp* inter easdem apsides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et (y) eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus inter apsides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec secus resolvetur problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipsius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis *m* ad numerum alium *n*, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm} - 3$. Id (z) quod per exempla secunda manifestum est. (a) Unde liquet vim illam in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, in recessu à centro, decrescere

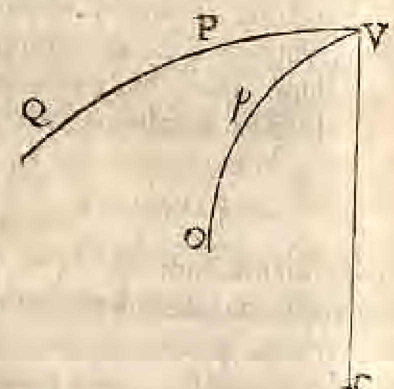
(y) * *Et eodem argumento.* Si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, id est ut $\frac{b \times \overline{T-X}^m - c \times \overline{T-X}^n}{A^3}$, seu ut $\frac{bT^m - cT^n - mbXT^{m-1} + ncXT^{n-1}\ \&c.}{A^3}$ collatis terminis fiet RGG, hoc est TGG ad $bT^m - cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, adeóque GG ad $bT^{m-1} - cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} - ncT^{n-1}$; & ponendo T = 1, erit $GG : FF = b - c : mb - nc = 1 : \frac{mb-nc}{b-c}$, & $G : F = 1 : \sqrt{\frac{mb-nc}{b-c}}$.

(z) 452. * *Id quod per exempla secunda manifestum est.* Si in exemplo secundo loco indicis n, ad confusionem tollendam scribatur p, erit vis centripeta, ut A^{p-3}, & angulus confectus in descensu ab apside summâ ad apsidem imam æqualis angulo $\frac{180}{\sqrt{p}}$, adeóque duplus ille angulus seu motus totus angularis quo corpus ab apside summâ redit ad eandem erit $\frac{360}{\sqrt{p}}$ in exemplo secundo. Est autem in casu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem æqualis angulo $\frac{360m}{n}$, ergò $\frac{360}{\sqrt{p}} = \frac{360m}{n}$, & $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{m}{n}$, & $\frac{1}{p} = \frac{mm}{nn}$, & $\frac{nn}{mm} = p$; quare $A^{p-3} = A^{\frac{nn}{mm}-3}$.

(a) 453. *Undè liquet vim illam.* Nam si vis esset ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, seu ut A^{-3-q}, sitque $+q$ quantitas positiva, esset $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 - q$, & $\frac{nn}{mm} = -q$, hoc est, quadratum quantitatis $\frac{n}{m}$ negativum quod absurdum est: non potest igitur vis in majore quam in triplicatâ altitudinis ratione seu in ratione $\frac{1}{A^{3+q}}$, in recessu à centro decrescere.

cere non poſſe: (b) Corpus tali vi revolvens deque apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens curvam illam lineam de quâ egimus in corol. 3. prop. xli. Sin cœperit illud, de apſide diſcedens, vel minimum aſcendere; aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apſidem ſummam. Deſcribet enim curvam illam lineam de quâ actum eſt in eodem corol. & in corol. vi. prop. xliv. Sic (c) & ubi vis, in receſſu à centro, decreſcit in majore quam triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum

(b) * *Corpus tali vi revolvens*, hoc eſt, vi quæ in receſſu à centro decreſcat in ratione altitudinis triplicatâ deque apſide diſcedens &c. Sint enim ut in coroll. 3°. prop. 41. duæ curvæ V p O, V P Q, quas corpora duo de loco V, ſecundum directionem ad C V perpendicularem egreſſa, vi centripetâ ad C tendente, & in triplicatâ altitudinis ratione decreſcente in receſſu à centro deſcribunt, & corpus in curva V p O, latum ad centrum ſemper accedat, corpus verò in curvâ VPQ, motum à centro ſemper recedat ut in eodem cor. 3°. prop. 41. manifeſtum eſt punctum V eſſe apſidem ſummam in curvâ V p O, & eſſe apſidem imam in curvâ V P Q; Quare cum in curva VpO, corpus ad centrum ſemper accedat, nunquam pervenire poteſt ad apſidem imam, ſeu altitudinem minimam quæ nulla eſt, ſed gyris infinitis deſcendit uſque ad centrum; in curvâ verò V P Q de apſide imâ deſcedens corpus aſcendit in infinitum, neque unquam pervenit ad apſidem ſummam quæ nulla eſt. Hæc demonſtrari etiam poſſunt hâc ratione; Si fuerit vis ut $\frac{1}{A^3}$, ſeu ut A^{-3}, erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3$, & $\frac{nn}{mm} = 0 = p$ (452) & motus totus angularis ab apſide ad eandem apſidem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360}{0}$; motus verò angularis ab apſide ſummâ ad imam, vel ab imâ ad ſummam erit $\frac{180^\circ}{0}$ quæ eſt quantitas infinita, unde liquet in noſtrâ Hypotheſi corpus ab apſide imâ ad ſummam aut à ſummâ ad imam nunquam pervenire poſſe.



(c) * *Sic & ubi vis in receſſu à centro.* Si vis fuerit ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, & q, quantitas poſitiva, erit (453) $\frac{nn}{mm} = -q = p$, & (452) motus totus angularis ab apſide ad apſidem eandem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{-q}}$, & ab apſide unâ ad alteram erit $\frac{180^\circ}{\sqrt{-q}}$: quare ob imaginariam quantitatem $\sqrt{-q}$, impoſſibile eſt ut corpus de apſide ſummâ diſcedens, ideóque ad centrum accedens, ad apſidem imam unquam perveniat, & ut de apſide imâ diſcedens ac proinde à centro recedens unquam perveniat ad apſidem ſummam.

trum uſque vel aſcendet in infinitum. At (d) ſi vis, in receſſu à centro, vel decreſcat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad apſidem imam aliquando perveniet: & (e) contra, ſi corpus de apſide ad apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu à centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de apſide ad apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apſide ſummâ ad apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit *m* ad *n* ut 8 vel 4 vel

(d) * *At ſi vis in receſſu à centro.* Sit vis ut $\frac{1}{A^{3-q}}$, & q, quantitas poſitiva erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 + q$, & $\frac{nn}{mm} = q = p$ (452). Unde motus totus angularis ab apſide ad eandem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360\,m}{n}$, motus angularis ab apſide unâ ad alteram $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180\,m}{n}$, quæ ſunt quantitates reales & poſitivæ, quare in hâc Hypotheſi corpus ab apſide ad apſidem eandem redire & ab apſide ſummâ ad imam atque ab imâ ad ſummam pervenire poterit. Eſt autem $\frac{1}{A^{3-q}}$, altitudinis A dignitas, ſi fuerit q major quam 3, è contrà $\frac{1}{A^{3-q}}$ eſt dignitas quantitatis $\frac{1}{A}$, ſi fuerit q minor quam 3. Liquet igitur, ſi vis in receſſu à centro vel decreſcat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi q minor quam 3) vel creſcat in altitudinis ratione quâcumque (quod fit ubi q, major quam 3) corpus nunquam deſcendere ad centrum uſque, ſed ad apſidem imam aliquandò pervenire.

(e) * *Et contra ſi corpus de apſide ad apſidem &c.* Nam ſi vis in receſſu à centro non augeatur, nec etiam minuatur in minore quam triplicatâ altitudinis ratione, neceſſariò decreſcet vel in triplicatâ vel in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, ſed ſupra demonſtratum eſt in his duobus caſibus corpus non poſſe ab apſide ad apſidem alternis vicibus deſcendere & aſcendere, ergò ſi corpus de apſide ad apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum, vis in receſſu à centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decreſcet, & quo citiùs corpus de apſide ad apſidem redierit, eò longiùs ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Quo enim citiùs corpus de apſide ad apſidem redierit, eò minor erit quantitas $\frac{360\,m}{n}$, aut quantitas $\frac{m}{n}$, adeoque eò major erit quantitas $\frac{n}{m}$, ejuſque quadratum $\frac{nn}{mm} = p = q$, & hinc eò longiùs quantitas $\frac{1}{A^{3-q}}$ à quantitate $\frac{1}{A^3}$ recedet.

4 vel 2. vel 1 $\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm}-3$ valeat $\frac{1}{64}-3$ vel $\frac{1}{16}-3$ vel $\frac{1}{4}-3$ vel $\frac{4}{9}-3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id est, reciprocè ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apsidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; & (g) propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directè ut A^{6} vel A^{13}. Denique si corpus pergendo ab apside summâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* sive ut 121 ad 120, (h) ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit

(f) * *Ut in præcedentibus demonstratum est.* In hoc enim casu corpus describit ellipsim immotam circulo finitimam (per cor. 1. prop. XIII) intereadum æqualiter movetur in ellipsi simili & æquali circa umbilicum revolvente cum celeritate duplâ ejus quâ corpus idem in eâdem ellipsi mobili fertur (446).

(g) * *Et propterea vis aut reciprocè. Ut $A^{\frac{11}{9}}$, vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directè ut A^6, vel A^{13}.* Est enim $A^{\frac{16}{9}-3}=A^{-\frac{11}{9}}=\frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$, & $A^{\frac{9}{4}-3}=\frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$ & $A^{9-3}=A^{6}$ & $A^{16-3}=A^{13}$.

(h) * *Ideóque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$.* Erit enim in hâc hypothesi $\frac{nn}{mm}=\frac{14400}{14641}$, & $\frac{nn}{mm}-3=\frac{14400}{14641}-3=-\frac{29523}{14641}$. Est autem $\frac{29523}{14641}=2+\frac{241}{14641}=2+\frac{4}{243}$, proximè; nam $241\times243=58563$, & $4\times14641=58564$; decrescit igitur vis centripeta in ratione pauló majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus 59 $\frac{3}{4}$, propiùs ad duplicatam quam ad triplicatam accedit,

erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus 59$\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: & contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, ideoque vis reliqua ut $\frac{A-cA^4}{A\ cub.}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. (i) Ponamus vim illam extraneam esse 357.45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur

dit, differentia enim inter 2, & $2+\frac{4}{243}$, est $\frac{4}{243}$, differentia verò inter 3 & $2+\frac{4}{243}$ est $1-\frac{4}{243}=\frac{239}{243}$. Porrò $\frac{239}{243}$ est ad $\frac{4}{243}$ seu 239 ad 4 ut 59 $\frac{3}{4}$ ad 1.

(i) * *Ponamus esse* $c\times A$ ad $\frac{1}{AA}$, hoc est, ponendo A vel T = 1, c ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45, & erit $c=\frac{100}{35745}$, $1-c=\frac{35645}{35745}$, $1-4c=\frac{35345}{35745}$; undè $\frac{1-c}{1-4c}=\frac{35645}{35345}$, & hinc $180\times\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}=180\times\sqrt{\frac{35645}{35345}}$ &c.

454. Scholium. Hermannus in scholiô ad prop. 25. lib. 1. Phoronomiæ formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, & contrà; hanc ipsam ex priùs ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449, sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quovis p, seu (451) vis $\frac{VFFA+VRGG-VRFF}{A^3}=\frac{y}{A^3}=\frac{y}{z^3}$, ponendo altitudinem $A=z$, & erit (450) $y=VFFz+VRGG-VRFF$; capiantur utrinque fluxiones & invenietur $dy=VFFdz$, & faciendo $Qdz=dy$, erit $Q=VFF$. Loco VFF, ipsius valor Q substituatur in superiori æquatione, & erit $y=Qz+\frac{QRGG-QRFF}{FF}=Qz-QR+\frac{QRGG}{FF}$

DE MOTU CORPORUM.

vitur in ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1, & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, seu 180. 7623, id est, 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 *gr.* 45 *m.* 44 *s.* perveniet ad apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *sec.* Apsis lunæ est duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolutè lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo describunt. Et eâdem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

SEC-

Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit $z = R = T$, & proindè $y = \frac{QTGG}{FF}$ & hinc $GG : FF = y : QT$, ac $G : F = \sqrt{y} : \sqrt{QT}$ quæ est formula generalis quæsita. Nam sit exempli causâ, vis centripeta ut $\frac{bz^m + cz^n}{z^3}$ hoc est $y = bz^m + cz^n$, erit $dy = Qdz = mbz^{m-1}dz + ncz^{n-1}dz$, unde $Q = mbz^{m-1} + ncz^{n-1}$, atque ità per formulam inventam $GG : FF = bz^m + cz^n : Tmbz^{m-1} + Tncz^{n-1}$, & ponendo $z = T = 1$, $GG : FF = b + c : mb + nc$, ut in exemplis tertiis Newtonus invenit.

Sit nunc data ratio G ad F, nempe m ad n, & vis centripeta sit ut dignitas aliqua non data altitudinis z, illius dignitatis index dicatur p, sitque adeò vis centripeta ut z^p, & erit $\frac{y}{z^3} = z^p$, ac $y = z^{p+3}$, $dy = Qdz = p+3 \times z^{p+2}dz$, $Q = p+3 \times z^{p+2}$. Hinc $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^{p+3} : p+3 \times Tz^{p+2}$, hoc est, ponendo $z = T = 1$, $mm : nn = 1 : p+3$, atque ità $\frac{nn}{mm} = p+3$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = p$, ut in cor. 1. repertum est.

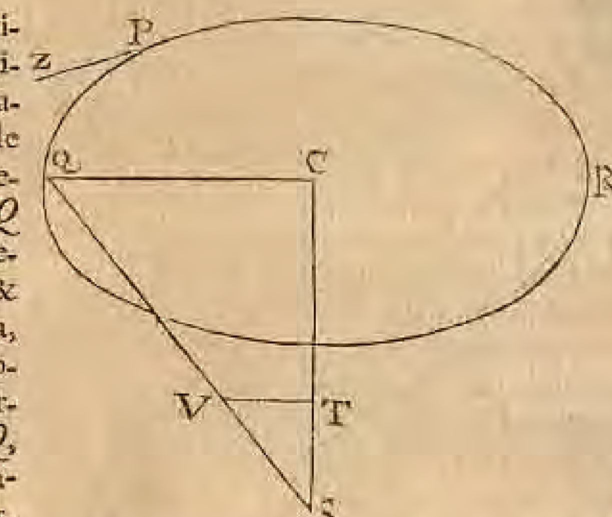
LIBER PRIMUS. PROP. XLVI. PROBL. XXXII.

SECTIO X.

De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.



Sit S centrum virium, SC distantia minima centri hujus à plano dato, P corpus de loco P secundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in trajectoriâ suâ revolvens, & PQR trajectoria illa, in plano dato describenda, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & si in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur versus centrum S, & agatur VT quæ sit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV resolvetur (per legum corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè versus punctum C in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis ST tolleretur, & corpus vi solâ TV revolveretur circa (k) centrum C in spatio libero. Datâ autem vi centripetâ TV quâ corpus Q in spatio

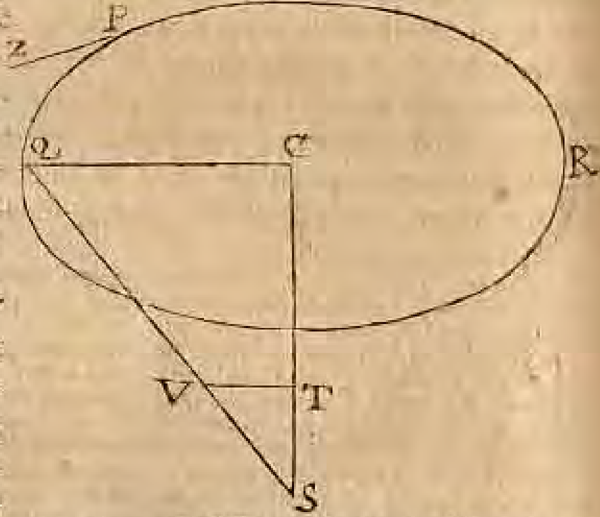
(k) * 455. *Circà centrum C in spatio libero.* Vis centripeta SV, ad S tendens in loco quovis Q, dicatur Q, & erit ob triangula SVT, SQC similia. SQ: QC

DE MOTU CORPORUM.

libero circa centrum datum C revolvitur, datur (per prop. XLII.) tum trajectoria PQR, quam corpus deſcribit, tum locus Q, in quo corpus ad datum quodvis tempus verſabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; & contra. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit diſtantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuſcunque revolventia deſcribent ellipſes, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque diſcurrendo, ſingulas eundi & redeundi periodos iiſdem temporibus abſolvent.



Nam, ſtantibus quæ in ſuperiore propoſitione, vis SV, quâ corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur verſus centrum S, eſt ut diſtantia SQ; atque ideo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV, quâ corpus trahitur verſus punctum C in orbis plano datum, eſt ut diſtantia CQ. Vires igitur, quibus corpora in plano PQR verſantia trahuntur verſus punctum C, ſunt (l) pro ratione diſtantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur verſus centrum S; & propterea corpora movebuntur iiſdem temporibus, in iiſdem figuris, in plano quovis PQR circa punctum C, atque in ſpatiis liberis circa centrum S; ideoque (per corol. 2. prop. X. & corol. 2. prop. XXXVIII.) temporibus ſemper æqualibus, vel deſcribent ellipſes in plano illo circa centrum C, vel periodos movendi ultrò citròque in lineis rectis per centrum C in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

$QC = SV$ ſeu $Q : VT = \frac{Q \times QC}{SQ}$. Sed ob angulum QCS rectum $SQ^2 = QC^2 + SC^2$, ergò VT, ſeu vis ad C tendens in loco Q, ſive $\frac{Q \times QC}{SQ}$ erit æqualis $\frac{Q \times QC}{\sqrt{QC^2 + SC^2}}$. Cum igitur data ſit SC diſtantia minima centri S à plano QPC poſitione dato, ſi loco SQ in quantitate Q, ſcribatur $\sqrt{QC^2 + SC^2}$, obtinebitur valor vis ad C tendentis in loco Q ex ſolâ diſtantiâ QC & quantitatibus datis compoſitus. Exempli causâ, ſi vis SV, ad S tendens in loco Q ſit ut diſtantia SQ, erit VT, ſeu vis ad C tendens in eodem loco Q, ut $\frac{SQ \times QC}{SQ}$ hoc eſt, ut QC. Si vis SV fuerit ut $\frac{1}{SQ^2}$, erit VT, ut $\frac{QC}{SQ^3}$, hoc eſt, ut $\frac{QC}{\overline{QC^2 + SC^2} \times \sqrt{QC^2 + SC^2}}$, & ità de cæteris ſuppoſitionibus.

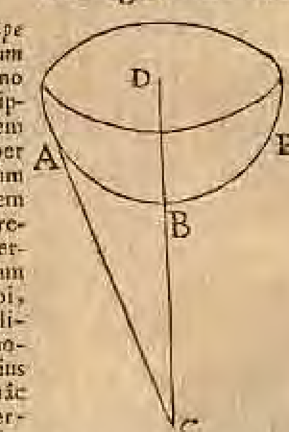
LIBER PRIMUS. PROP. XLVII. THEOR. XV.

Scholium.

His affines ſunt aſcenſus ac deſcenſus corporum in ſuperficiebus curvis. (m) Concipe lineas curvas in plano deſcribi, dein circum axes quoſvis datos per centrum virium tranſeuntes revolvi, & eâ revolutione ſuperficies curvas deſcribere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his ſuperficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa obliquè aſcendendo & deſcendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem tranſeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ ſuperficies genitæ ſunt. Iſtis igitur in caſi-

(l) * *Sunt pro ratione diſtantiarum &c.* Hoc eſt *vires abſolutæ ad S & C tendentes ſunt æquales, ita ut ſi alicubi* fuerit $PC = QS$, vis in loco P ad C tendens æqualis erit vi in loco Q ad S tendenti. Nam vis quâ corpus in loco Q ad C trahitur, eſt ad vim quâ versùs S urgetur, ut QC ad QS, & vis in loco Q ad C tendens eſt etiam ad vim in loco P ad idem centrum C urgentem ut QC ad PC ſeu QS; quarè vis in loco Q ad S tendens æqualis eſt vi ad C tendenti in loco P; Corpora verò quæ moventur viribus centripetis quæ ſunt ut diſtantiæ, temporibus ſemper æqualibus ellipſes quaſvis, utut inæquales, deſcribent circâ ſua centrâ (per Prop. X). Si autem ellipſeos PQR quam corpus in plano deſcribit, latitudo in infinitum minuatur, deſcribet corpus rectam aliquam QCR, motu accelerato ad centrum C accedens, & motu retardato ab ipſo recedens uſque ad R, deindè rursùs ex loco R, ad centrum C recidens, & ità circâ centrum C, ultrò citròque oſcillabitur.

(m) * *Concipe lineam curvam* AB in plano $ACED$ deſcriptam circâ axem datum DBC per centrum virium C tranſeuntem revolvi & eâ revolutione ſuperficiem curvam AEB deſcribi, tum corpus aliquod A ità moveri, ut illius centrum in hâc ſuperficie perpetuò reperiatur. Si corpus illud obliquè deſcendendo & aſcendendo per ABE, EBA currat ultrò citroque peragetur illius motus in plano $ACED$ per axem CD tranſeunte; atque adeò in lineâ curvâ ABE, cum (ex hyp.) nulla adſit vis quæ corpus à plano illo cogat deflectere; ſuperficies AEB perfectè terſa ac polita ſupponitur.



bus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

Si rota globo extrinsecus ad angulos (n) *rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.*

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

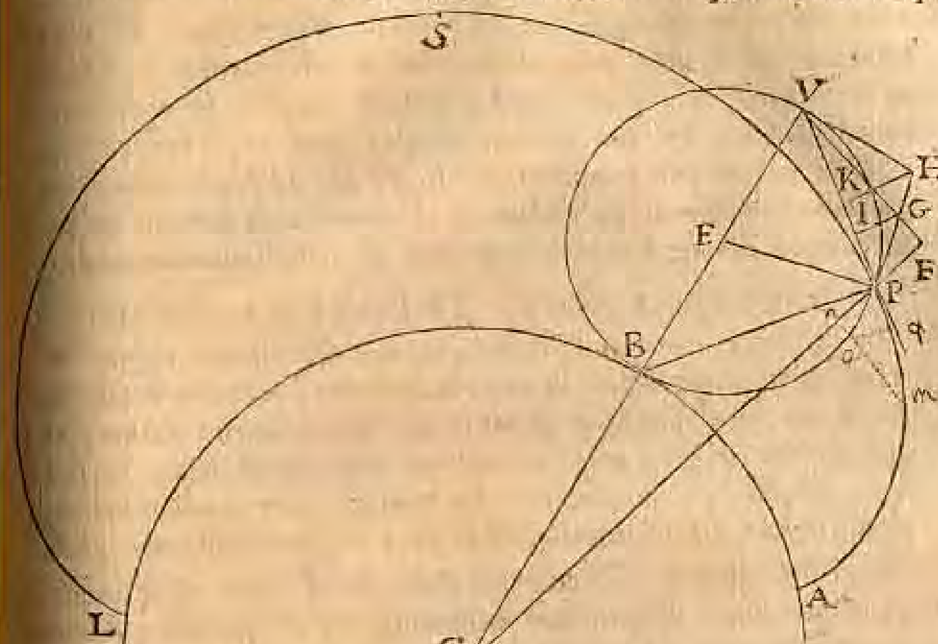
Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

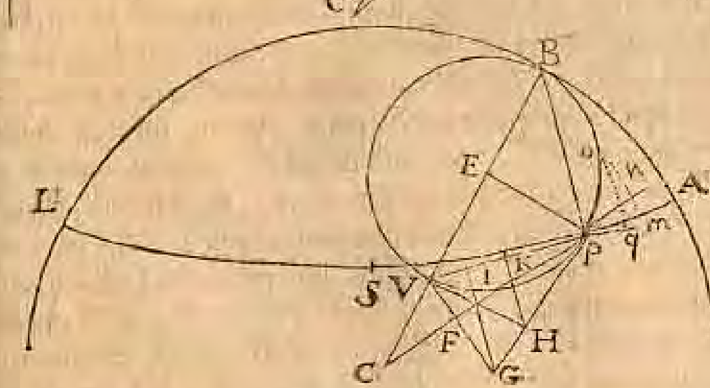
Sit ABL globus, C centrum ejus, BPV rota ei insistens, E centrum rotæ, B punctum contactus, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B versus L, & inter eundum ita revolvi ut arcus AB, PB sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud P in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam AP. Sit autem AP via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in A, & erit viæ hujus longitudo AP ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2} PB$, ut $2\,CE$ (o) ad CB. Nam recta CE (si opus est producta) occurrat rotæ in V, junganturque CP, BP, EP, VP, & in CP productam demittatur normalis VF. Tangant PH, VH circulum in P & V concurrentes in H, secetque PH, ipsam VF in G, & ad VP demittantur normales GI, HK. Centro item C & intervallo quovis describatur circulus nom secans rectam CP in n, rotæ peri-

(n) * *Ad angulos rectos*, id est, ità ut planum rotæ productum per centrum globi transeat, illudque proindè in duo hæmisphæria dividat ac circulum maximum in ejus superficie signet.

(o) * *Ut* $2\,CE$ *ad* CB. Hoc est, ob $2\,CE = 2\,CB + 2\,BE$, vel $2\,CE = 2\,CB - 2\,BE$, ut summa vel differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

metrum BP in o, & viam curvilineam AP in m; centroque V & intervallo Vo describatur circulus secans VP productam in q.



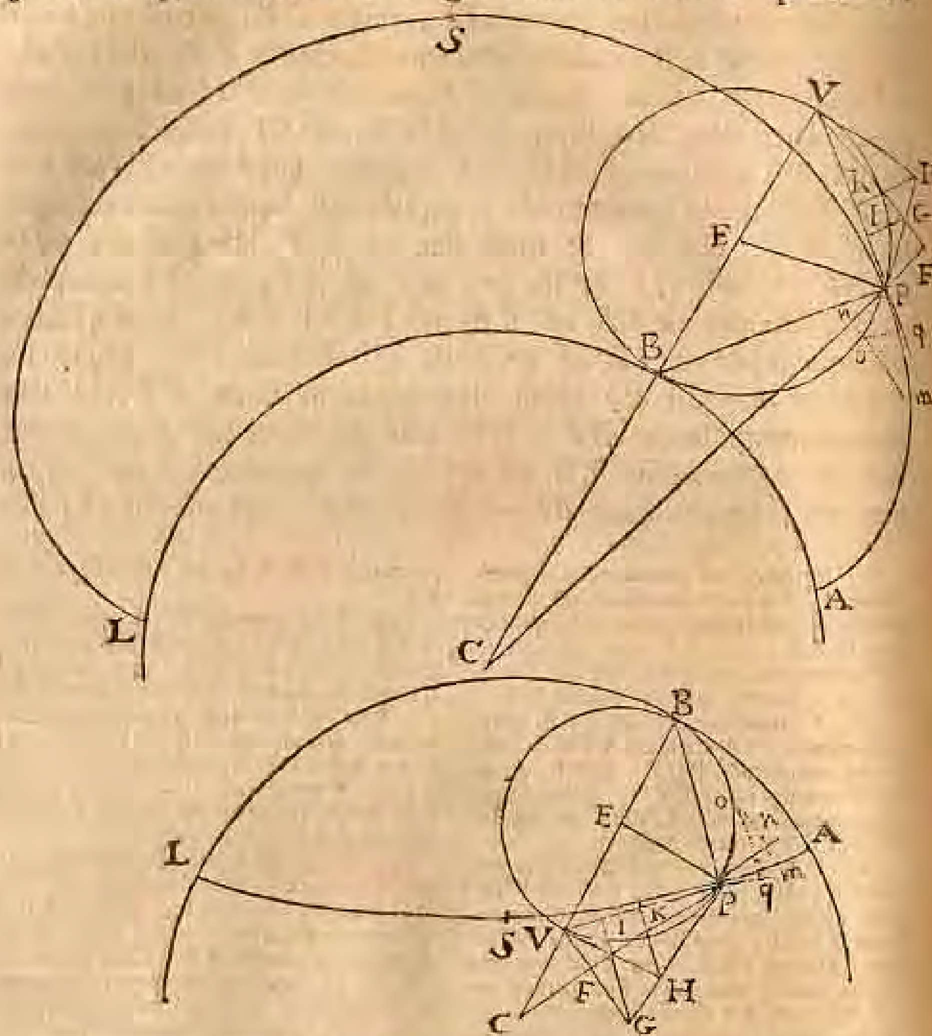


Quoniam rota eundo semper revolvitur circa punctum contactus B, (p) manifestum est quod recta BP perpendicularis est ad

(p) * *Manifestum est quod recta BP &c.* Nam evidens est in circuli BPV revolutione, centro B radio BP singulis tempusculis describi arcum circuli seu incrementum nascens curvæ AP, ad quod proinde radius BP perpendicularis est, sed ob angulum VPB in semicirculo rectum, linea VP in eum radium BP est perpendicularis, ergo linea VP est Tangens ejus arcus nascentis seu incrementi curvæ AP, ideoque ipsius curvæ AP.

DE MOTU CORPORUM.

lineam illam curvam AP quam rotæ punctum P describit, atque ideo quod recta VP tanget hanc curvam in puncto P.



Circuli nom radius sensim auctus vel diminutus æquetur tandem distantiæ CP; &, ob (q) similitudinem figuræ evanescen-

(q) * *Et ob similitudinem figuræ evanescentis.* Hâc figurâ evanescente arcus P o, P q, considerari possunt tanquam lineæ rectæ, seu partes tangentium H P, V P productarum, & arcus m n, o q, tanquam rectæ lineis P n, P q, perpendiculares; Hinc verò anguli ad verticem oppositi n P o & G P F, O P m & G P I, erunt æquales, atque adeò ob angulos o n P & G F P, o q P & G I P, rectos, proindeque æquales, figura evanescens P n o m q, similis erit figuræ P F G V I.

LIBER PRIMUS. PROP. XIIX. THEOR. XVII.

tis $Pnomq$ & figuræ $PFGVI$, ratio ultima lineolarum evanescentium Pm, Pn, Po, Pq, id (r) est, ratio mutationum momentanearum curvæ AP, rectæ CP, arcus circularis BP, ac rectæ VP, eadem erit quæ linearum PV, PF, PG, PI respectivè. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares sint, angulique (f) HVG, VCF propterea æquales; & (t) angulus VHG (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad V & P rectos) angulo CEP æqualis est, similia erunt triangula VHG, CEP; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV (u) seu HP & ita (x) KI ad KP, & (y) compositè vel divisim ut CB ad CE ita PI ad PK, & duplicatis consequentibus ut CB ad $2CE$ ita (z) PI ad PV, atque ita Pq ad Pm. Est (a) igitur decrementum lineæ VP, id est, incrementum lineæ $BV-VP$ ad incrementum lineæ curvæ AP in datâ ratione CB ad $2CE$, & propterea (per corol. lem. IV.) longitudines $BV-VP$ & AP, incrementis (b) illis

(r) * *Id est ratio mutationum momentanearum*, seu incrementorum vel decrementorum nascentium *curvæ AP*, quæ ex A m fit A P, *rectæ C P*, quæ ex C m fit C P *arcus circularis B P*, qui ex B o fit B P, *ac rectæ V P*, quæ ex V q, fit V P.

(f) * *Angulique HVG, VCF, propterea æquales.* Ob angulum V F C rectum, summa angulorum F C V, C V F æqualis est angulo recto C V H, quare detracto communi angulo C V F, fit angulus F C V = F V H sive H V G.

(t) * *Et angulus VHG &c.* Tangentes H V, H P cum radiis E V, E P angulos rectos constituunt, adeóque quadrilateri H V E P, anguli duo reliqui V H P sive V H G & V E P, sunt simul æquales duobus rectis, quare cum sint quoque anguli V E P, C E P simul duobus rectis æquales, liquet angulum C E P; æqualem esse angulo V H G, & in secunda figura cum anguli quadrilateri V H P E in V & P sint recti, reliqui anguli V H P, V E P æquales sunt duobus rectis, sed etiam VHP & VHG sunt æquales duobus rectis, ergo detracto communi V H P, V E P sive CEP est æqualis V H G.

(u) * *Ad HV, seu HP.* Nam circuli tangentes H V, H P sunt æquales.

(x) * *Et ita KI ad KP.* Etenim ob parallelas H K, G I, est H G : H P = K I : K P.

(y) * *Et compositè vel divisim.* Cum sit E P, seu B E : C E = K I : K P, si rota globo intrinsecus insistat, erit compositè B E + C E, seu C P : C E = K I + K P; seu P I : P K. Si verò rota globo extrinsecus insistat, erit divisim C E − B E, seu C B : C E = K P − K I, seu P I : P K.

(z) * *Ita P I ad PV.* Nam in triangulo P H V isoscele; est P K = K V, adeóque 2 P K = P V.

(a) * *Est igitur decrementum lineæ VP &c.* Dum arcus A m crescit fitque A P, recta V q decrescit & fit V P; quare est P m incrementum curvæ A m seu A P, & P q decrementum rectæ V P. Cum autem sit B V circuli diameter constans, quantùm decrescit V P, tantùm crescit differentia B V − V P, unde decrementum lineæ VP, æquale est incremento lineæ B V − V P. *Est igitur incrementum lineæ BV − VP, ad incrementum lineæ curvæ AP &c.*

(b) * *Incrementis illis genitæ &c.* Cum punctum P est in A, punctum B est etiam in A, fitque V P = V B; adeóque B V − V P = o. Simul ergò crescere incipiunt lineæ B V − V P & A P; & quoniam in datâ ratione crescunt, erit semper BV−VP ad A P in datâ illâ ratione C B ad 2 C E.

genitæ, sunt in eâdem ratione. Sed, (c) existente BV radio, est VP cosinus anguli BVP seu $\frac{1}{2}BEP$, ideoque $BV-VP$ sinus versus est ejusdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus radius est $\frac{1}{2}BV$, erit $BV-VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}BP$. Ergo AP est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}BP$ ut $2CE$ ad CB. *Q. E. D.*

Lineam autem AP in propositione priore cycloidem extra globum, alteram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratiâ nominabimus.

Corol. 1. Hinc si (d) describatur cyclois integra ASL & bisecetur ea in S, erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP, existente EB radio) ut $2CE$ ad CB, atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et (e) longitudo semiperimetri cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum BV ut $2CE$ ad CB.

(c) *Sed existente BV radio &c.* Ob angulum B P V rectum, est B V ad V P ut sinus totus ad sinum anguli V B P qui complementum est anguli B V P ad rectum. Quare existente BV radio, est V P cosinus anguli BVP æqualis dimidio angulo ad centrum B E P. Est autem cujusvis anguli sinus versus æqualis differentiæ inter radium & cosinum ejusdem anguli, ergò existente B V radio, erit B V − V P sinus versus anguli $\frac{1}{2}$ B E P; & quoniam in diversis circulis æqualium angulorum sinus omnes sunt ut circulorum radii, in hâc rotâ cujus radius est $\frac{1}{2}$ B V, erit B V − V P, duplus sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P.

(d) 457. *Hinc si describatur &c.* Ubi punctum P pervenit ad S, arcus B P semicirculo, arcus $\frac{1}{2}$ B P quadranti, & sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P radio, æquales fiunt. Quarè in hoc casu curva A S, est ad diametrum B V, ut 2 C E, ad C B; cumque in loco quovis P, sit etiam curva A P, ad duplum sinum versum $\frac{1}{2}$ B P, seu ad B V − V P (456) ut 2 C E ad C B, erit A S: B V: = A P: B V − V P, & hinc AS − AP, seu P S: B V − B V + V P, seu V P = A S: B V = 2 C E: C B.

(e) * *Et longitudo semiperimetri.* Patet per notam superiorem.

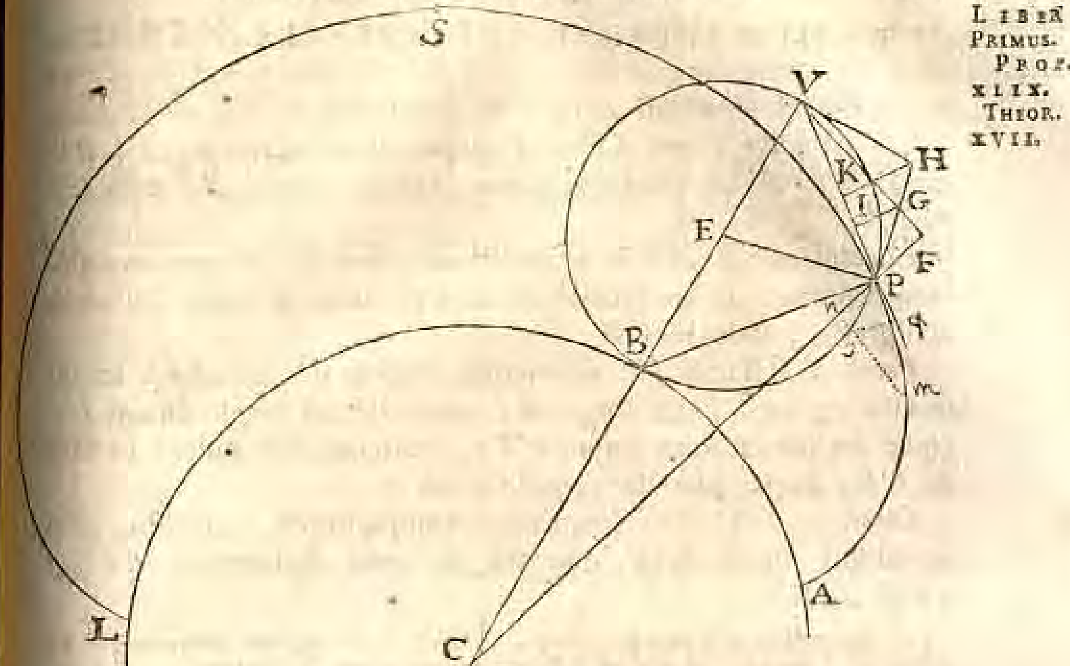
458. Coroll. 3. Recta C S cycloidi perpendicularis est, & recta C A eam tangit in A. Est enim B P ad cycloidem perpendicularis, & V P tangens ejus in P, at ubi punctum P pervenit in S, B P fit B S, seu B V, & ubi punctum B est in A, V P coïncidit cum V B.

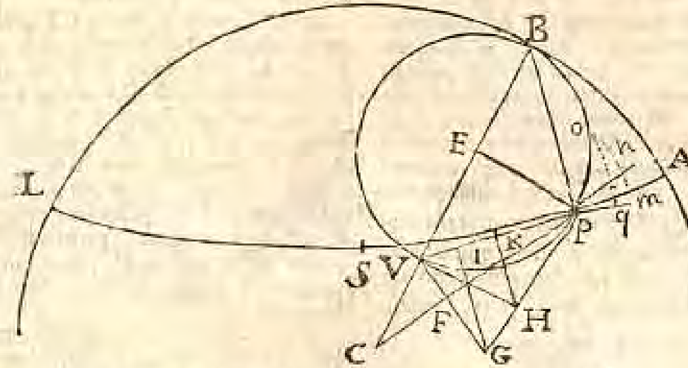
459. Coroll. 4. Si per punctum quodvis P agatur P V cycloidem tangens in P, & ad eam erigatur perpendiculum P B globo occurrens in B, jungaturque C B tangentem secans in V, erit B V rotæ diameter.

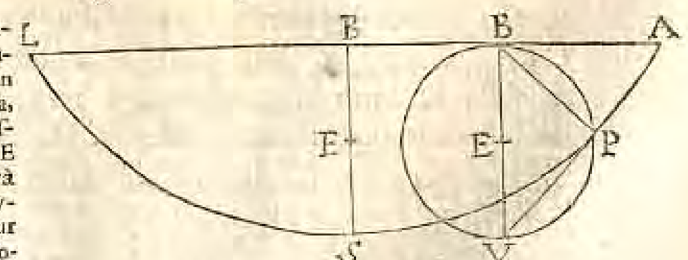
460. Coroll. 5. Ex generi cycloidis liquet arcum globi A B, æqualem esse arcui rotæ B P.

461. Coroll. 6. Si rotæ diameter V B æqualis constituatur semidiametro globi CB, cyclois intrà globum evadet linea recta per centrum globi C transiens. Nam in hoc casu C S = 0, & 2 C E = C B; unde punctum cycloidis medium S, cum centro coïncidit, & quia (457) A S: B V = 2 C E: C B, erit A S = B V = C B atque adeò est AS linea recta per centrum C transiens, nam si curva esset, major foret semidiametro C B.

462.







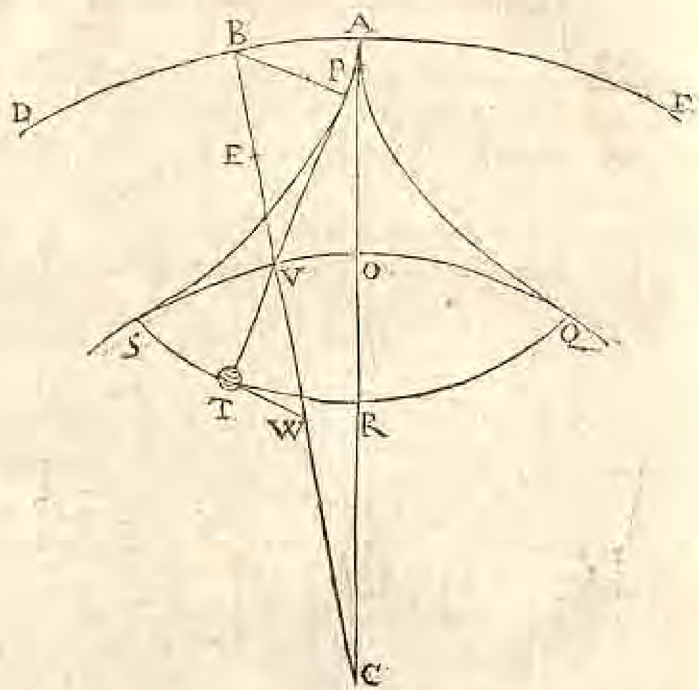
462. Coroll. 7. Si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies sphærica in planum, fietque A B L linea recta, & B E finitâ manente seu nullâ respectu infinitæ lineæ C B, erit C E = C B, adeóque cyclois tam intrà quam extrà globum abibit in cycloidem vulgarem, quæ describitur revolutione rotæ in lineâ rectâ progredientis, cumque sit semper (457) A P : B V − V P = 2 C E : C B = 2 : 1, erit A P = 2 × (B V − V P), sed BV − VP, est duplus sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P, existente B E radio (456). Ergò in cycloide vulgari A P æquatur quadruplicato sinui verso dimidii arcûs BP, inter planum A B L & punctum describens P intercepti; Hinc etiam erit A S = 4 B E = 2 B S = 2 B V; Est enim B E sinus versus quadrantis.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oſcilletur in cycloide datâ.

Intra globum QVS, centro C deſcriptum, detur cyclois QRS biſecta in R & punctis ſuis extremis Q & S ſuperficiei globi hinc inde occurrens. Agatur CR biſecans arcum QS



in O, & producatur ea ad A, ut ſit CA ad CO ut CO ad CR. Centro C intervallo CA deſcribatur globus exterior DAF, & intra hunc globum à rotâ, cujus diameter ſit AO, deſcribantur duæ ſemicycloides AQ, AS, quæ (f) globum in-

(f) * *Quæ globum interiorem tangant in Q & S, & globo exteriori occurrant in A.* Probandum ſemicycloides deſcriptas per motum rotæ (cujus diameter eſt AO) ex A proficiſcentis terminari ad ſuperficiem globi interioris in punctis extremis Q & S cycloidis QRS datæ. Producantur itaque lineæ CQ, CS ad F & D, eritque FQ = DS = AO, & ſuper Diametros FQ, DS intelligantur deſcriptæ rotæ quarum motu fiunt ſemicycloides, dicaturque P punctum rotæ ſemicycloides deſcribens; Liquet arcûs OQ & AF, OS & AD eſſe proportionales radiis CO, CA ſive (per conſt.) radiis CR, CO & diviſim rotarum Diametris OR, AO, ideoque (per nat. circuli) ſemicircumferentiis rotarum ſuper has Diametros deſcriptarum; Sed cum Q & S ſint puncta extrema cycloidis datæ QRS & CO arcum QS biſecet, erunt arcus OQ & OS æquales ſemicircumferentiæ rotæ ſuper Diametrum OR deſcriptæ (460) ergo etiam arcus AF & AD æquales erunt ſemicircumferentiæ rotæ ſuper Diametrum AO deſcriptæ, ſed arcus FP aut DP eſt ſemper æqualis arcui AF aut AD (460); erunt ergo arcus FP & DP ſemicirculi, & P cadet in extremitatibus Q & S Diametrorum FQ, DS, ſed ubi P ſemicircumferentiam rotæ percurrit ſemicyclois eſt deſcripta, ergo ſemicycloides deſcriptæ per motum rotæ ex A proficiſcentis terminantur in Q & S. Q.E.D.

(g) 463. *Patet ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum AS, SR;* Figuræ illæ dicuntur ſimiles quia AO diameter rotæ quâ deſcribuntur ſemicycloides AS, AQ eſt ad globi DAF radium AC ut diameter OR rotæ quâ deſcribitur cyclois QRS ad globi QOS radium OC, (per conſtr.) unde manifeſtum quod cycloides AS, AQ, QR, quæ eodem modo deſcribuntur ac determinantur ſunt inter ſe ſimiles.

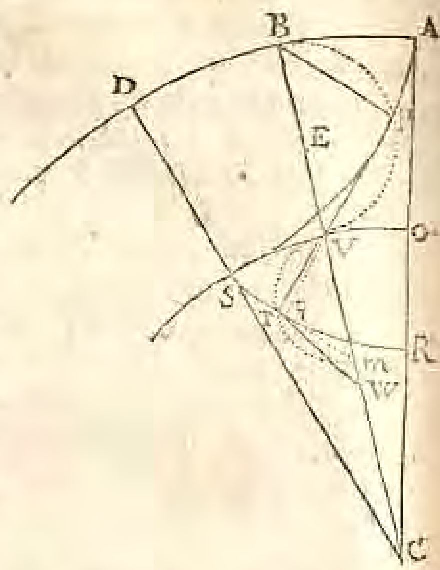
(h) * *Perpendicula illa &c.* 1°. Probandum quod *perpendiculum PB abſcindat de CV longitudinem VB rotæ Diametro OA æqualem.* Fingatur rotam ita poſitam ut ejus punctum Cycloidem deſcribens ſit in P, liquet, ex conſtructione, eam hujus rotæ Diametrum quæ in hoc caſu globo eſt perpendicularis & quæ, ſi producatur, tranſire debet per centrum C, utrinque terminari debere in ſuperficie globorum; Jam verò (per Demonſt. Prop. XLVIII. XLIX.) Tangens Cycloidis tranſit ſemper per unam extremitatem ejus Diametri rotæ quæ globo eſt perpendicularis & perpendiculum in Tangentem è puncto contactus erectum tranſit per alteram ejuſdem Diametri extremitatem, ergo, cum ſit (ex conſt.) filum PT Tangens Cycloidis in puncto P, & PB perpendiculum in illud, interſectiones V & B linearum PT & PB cum globis QOS & DAF erunt extremitates ejus Diametri rotæ quæ ſi producatur tranſit per centrum C, ergo ducta CV, per-

LIBER PRIMUS. PROP. L. PROBL. XXXIII.

teriorem tangant in Q & S & globo exteriori occurrant in A. A puncto illo A, filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra ſemicycloides AQ, AS oſcilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendiculo AR, filum parte ſui ſuperiore AP applicetur ad ſemicycloidem illam APS verſus quam peragitur motus, & circum eam ceu obſtaculum flectatur, parteque reliquâ PT cui ſemicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oſcillabitur in cycloide datâ QRS. Q. E. F.

Occurrat enim filum PT tum cycloidi QRS in T, tum circulo QOS in V, agaturque CV; & ad fili partem rectam PT, è punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula BP, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, (g) ex conſtructione & geneſi ſimilium figurarum AS, SR, (h) perpendicula illa PB, TW abſcindere de CV longitudines VB, VW rotarum

tarum diametris OA, OR æquales. Eſt ([i]) igitur TP ad VP (duplum ſinum anguli VBP exiſtente $\frac{1}{2}BV$ radio) ut



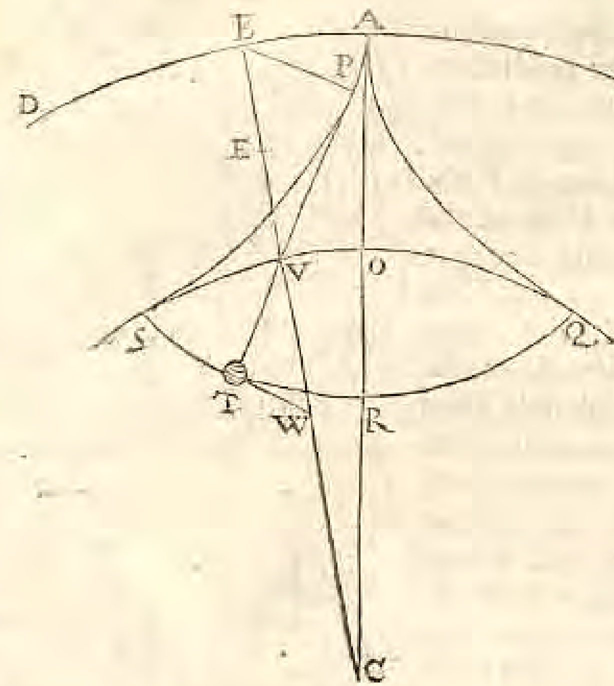
perpendiculum PB abſcindet de CV longitudinem VB rotæ Diametro O A æqualem. Q. E. 1°. D.

2°. *Perpendiculum TW abſcindit de CV longitudinem VW rotæ diametro OR æqualem.* Fingatur rota Cycloidem S R Q deſcribens ita poſita, ut ejus Diameter globo S O Q inſiſtens ſit in lineâ C V globumque tangat in V, dicatur m altera extremitas ejus Diametri, & dicatur q punctum illius rotæ Cycloidem deſcribens: Arcus V S erit æqualis arcui V q (460) utque totus arcus S O eſt æqualis arcui V m, erit V O = q m, & q m eſt menſura dupli anguli C V q; Sit verò rota deſcribens cycloidem A P S poſita ſicut in priore caſu, hoc eſt, ejus Diameter globo D A F inſiſtens ſit in productione lineæ C V, erit arcus BA æqualis arcui B P (460) & eſt B P menſura dupli anguli B V P; Eſt autem arcus V O ſive q m ad B A ſive B P, ut C O ad C A ideoque ut Diametri rotarum O R ad A O (ex conſt.), arcûs verò diverſorum circulorum qui ſunt inter ſe ut ſuorum circulorum Diametri, ſunt ſimiles ideoque ejuſdem numeri graduum, ergo angulus C V q eſt æqualis angulo B V P quoniam arcus qui ſunt menſura eorum dupli, ſunt ejuſdem numeri graduum, ideoque illi anguli C V q, B V P ſunt per verticem oppoſiti & P V q eſt linea recta; itaque, filum PV productum ad T tranſit tàm per extremitatem V Diametri rotæ globo inſiſtentis quàm per ejus rotæ punctum q Cycloidem deſcribens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum P T eſt perpendiculare in Tangentem Cycloidis in puncto illo q ſive T, ideoque ex conſtructione linea T W erit ea ipſa Tangens, & (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) tranſibit per extremitatem m Diametri rotæ quæ globo inſiſtit, hoc eſt Diametri jacentis in linea C V, *ergo TW abſcindet de CV longitudinem rotæ Diametro OR æqualem.* Q. E. 2°. D.

* *Idem aliter.* Ex puncto V ducatur ad ſemicycloidem S R perpendicularis V q, & q m tangens in q radio C V occurrens in m, erit (459) V m = O R. Deſcriptis rotis B P V, V q m, erit angulus B V P, æqualis arcui B P, ad diametrum BV, applicato ſeu $= \frac{BP}{BV}$, hoc eſt, ob arcum B A = B P (460) & B V = AO, angulus B V P $= \frac{BA}{AO}$. Simili ratione, cum ſit arcus V q æqualis arcui S V, & ſemirota V q m æqualis arcui S O, erit arcus q m = V O, adeóque angulus q V m $= \frac{VO}{OR}$. Quarè angulus BVP : q V m $= \frac{BA}{AO} : \frac{VO}{OR} = OR \times BA : AO \times VO$; ſed B A : V O = C A : C O = A O : O R (per conſtr.) adeóque O R × B A = A O × V O, Ergò angulus B V P = q V m. Cum igitur anguli B V P, T V W ad verticem oppoſiti ſint etiam æquales, perpendicularis V q coincidit cum V T, tangens q m cum T W, & V m cum V W, undè tandem eſt V m = O R = V W.

(i) * *Eſt igitur &c.* Ob triangula VPB, VTW ſimilia T V : V P = V W : V B, & componendo T P : V P = B W : B V.

BW ad BV, ſeu $AO+OR$ ad AO, id eſt (cum ſint CA ad CO, CO ad CR & diviſim AO ad OR proportionales) ut $CA+CO$ ad CA, vel, ſi biſecetur BV in E, ut $2CE$ ad CB. Proinde (per corol. 1. prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili PT æquatur ſemper cycloidis arcui PS, & filum totum APT æquatur ſemper cycloidis arcui dimidio APS, hoc eſt

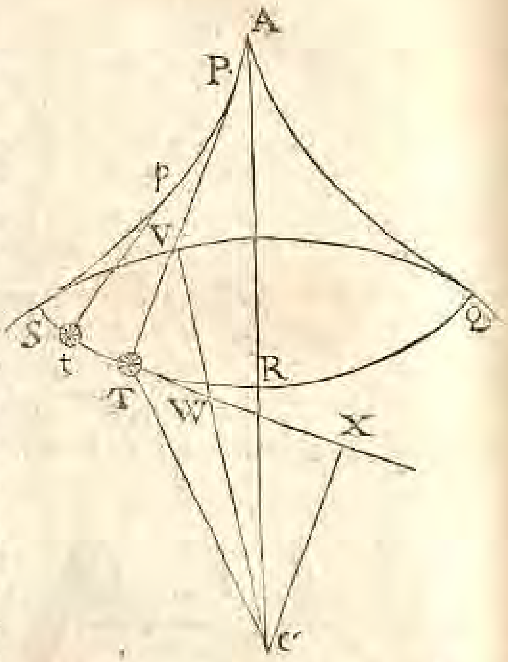


(per corol. 2. prop. XLIX.) longitudini AR. Et propterea viciſſim ſi filum manet ſemper æquale longitudini AR movebitur punctum T in cycloide datâ QRS. Q. E. D.

Corol. Filum AR æquatur ſemicycloidi AS, ideoque ad globi exterioris ſemidiametrum AC eandem habet rationem quam ſimilis illi ſemicyclois SR habet ad globi interioris ſemidiametrum CO.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque à centro, & hâc solâ vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro cycloidis* QRS: *dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*



Nam in cycloidis tangentem TW infinitè productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT. Quoniam vis centripeta quâ corpus T impellitur versus C est ut distantia CT, atque hæc (per legum corol. 2.) resolvitur in partes CX, TX, quarum CX impellendo corpus directè à P distendit filum PT & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum, pars autem altera TX, urgendo corpus transversim seu versus X directè accelerat motum ejus in cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo TX, id (l) est, ob datas CV, WV iisque proportionales TX, TW, ut longitudo TW, hoc est (per corol. 1. prop. XLIX.) ut longitudo arcus cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, Apt de perpendiculo AR inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi TR, tR. Sunt (m) autem partes sub

(l) * *Id est ob datas.* Ob triangula WXC, WTV similia, est CW : WV = WX : TW, & componendo CV : WV = TX : TW; quarè ob datas CV, WV, data est ratio TX ad TW, id est TX est ut TW.

(m) 464. *Sunt autem* arcuum tR, TR partes sub initio eodem tempusculo descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut toti arcus tR, TR sub initio describendi & propterea divisim, partes ar-

initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum AR. Cumque vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo R, per eosdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis à viribus iisdem à quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum cycloidis partes duæ RS & RQ ad utrumque perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. *Q. E. D.*

Corol. Vis (n) quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco

cuum tR, TR quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut toti arcus tR, TR, & sic deinceps. Quoniam autem velocitates dato tempore genitæ sunt ut accelerationum summæ, quæ ob datam accelerationum rationem sunt in eâdem ratione datâ arcuum tR, TR, liquet accelerationes atque ideò velocitates genitas & partes his velocitatibus descriptas, partesque describendas semper esse ut sunt toti arcus tR, TR, & propterea si pars arcûs TR describenda evanescat, quod fit dum corpus pendulum T pervenit ad R, pars arcûs tR, simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Unde corpora duo oscillantia t & T ex punctis t & T simul demissa, simul pervenient in R.

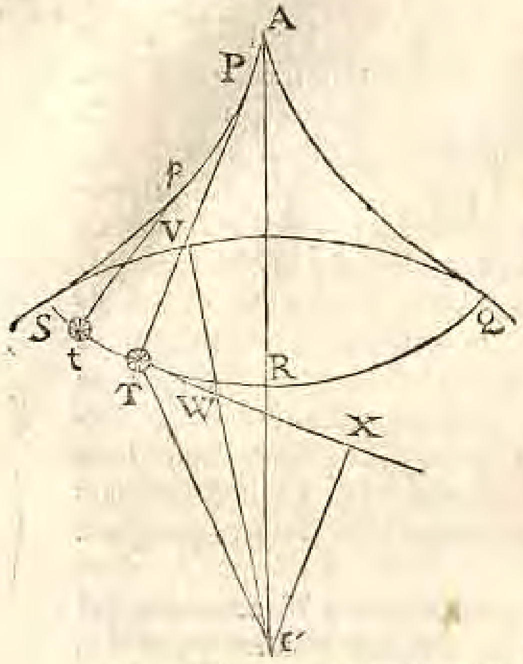
(n) * *Vis quâ corpus* T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quâ in loco altissimo S, vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus TR, ad arcum SR, (ex demonstr. prop. 51.) sed vis quâ corpus in loco S vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quâ ad centrum C, perpendiculariter urgetur; radius enim CS cycloidem SR tangit in S, (458) adeóque directio vis in loco S in cycloide coincidit cum directione vis rectâ trahentis ad centrum C.

465. Coroll. 1. Si centro A radio AR circulus describatur, cycloidis SRQ arcus nascens in loco infimo R cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quarè si longitudo penduli AR magna sit, eodem propè modo in exiguis circuli arcubus

De Motu Corporum.

loco altissimo S vel Q, ut cycloidis arcus TR ad ejusdem arcum SR vel QR.

PRO-

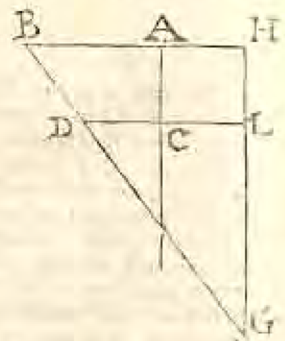


cubus oscillabitur corpus quo in cycloide, & quò major est longitudo penduli minorque circuli arcus in quem excurrit, eò major erit motuum in circulo & in cycloide consonantia, atque hinc, non abludente experientiâ, oscillationes in exiguis circuli arcubus sunt ad sensum isochronæ.

466. Coroll. 2. Ex his deducitur quænam sit æquatio ad hanc Cycloidem intrà globum descriptam pertinens, sive, invenietur æquatio exprimens rationem distantiæ cujusvis puncti T à centro ad perpendiculum in Tangentem ex eo puncto ductam demissum: Dicatur enim globi radius CV, a, Diameter rotæ VW, $a-c$, erit distantia CR sive CW, c; Ducatur ex puncto quovis T linea TC ad centrum quæ dicatur x, ducatur Tangens TX ex eo puncto T & ex centro demittatur in eam Tangentem perpendiculum CX, sit $TX=z$ & $CX=p$. Erit ubique $pp=\frac{aacc-ccxx}{aa-cc}$; Nam ob similia Triangula VTW, WCX est

CW (c) : VW ($a-c$) = CX (p) : TV $=\frac{p}{c}\times\overline{a-c}$ & CV (a) : WV ($a-c$) = TX (z) : TW $=\frac{z}{a}\times\overline{a-c}$; est itaque $TV^2+TW^2=\frac{p^2}{c^2}\times\overline{a-c}^2+\frac{z^2}{a^2}\times\overline{a-c}^2$. Sed $TV^2+TW^2=VW^2=\overline{a-c}^2$, ergo $\frac{p^2}{c^2}\times\overline{a-c}^2+\frac{z^2}{a^2}\times\overline{a-c}^2=\overline{a-c}^2$ & dividendo utrumque membrum æquationis per $\overline{a-c}^2$ erit $\frac{p^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}\left(\text{sive }\frac{a^2p^2+c^2z^2}{a^2c^2}\right)=1$, & multiplicato utroque membro æq. per a^2c^2 est $a^2p^2+c^2z^2=a^2c^2$, sed est $z^2=x^2-p^2$ (per const.) Ergo $a^2p^2+c^2x^2-c^2p^2=a^2c^2$ & factâ transpositione $a^2p^2-c^2p^2=a^2c^2-c^2x^2$, ideoque $p^2=\frac{a^2c^2-c^2x^2}{a^2-c^2}$. Q. E. D.

Simili ratiocinio invenietur æquatio ad epicycloidem sive cycloidem extra globum descriptam inversis solummodo terminis & signis ut sit $pp=\frac{c^2x^2-a^2c^2}{c^2-a^2}$.



467. Lemma. Ad punctum G tendat vis centripeta distantiæ ab illo puncto proportionalis quam in locis H, L exhibeant lineæ HB, LD rectæ GH perpendiculares, sitque recta GDB locus punctorum B, D, capiatur HA ad HB ut vis centripeta constans ad vim variabilem in lo-

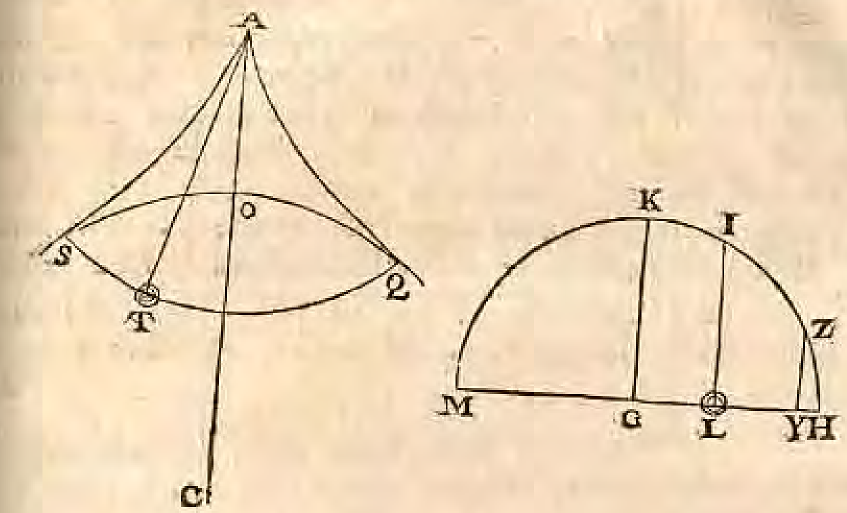
co

Liber Primus. Prop. LII. Probl. XXXIV.

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & velocitates pendulorum in locis singulis, & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis G, intervallo GH cycloidis arcum RS æquan-



te, describe semicirculum HKM semidiametro GK bisectum. Et si vis centripeta, distantiis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum G, sitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro globi QOS ad ipsius centrum tendenti; & (o) eodem tempore quo pendulum T dimittitur è

loco

co dato H, & agatur AC rectæ HG parallela lineam LD secans in C, de loco H cadant corpora duo, quorum alterum vi constante HA, alterum vi variabili HB vel LD urgeatur, sintque illorum velocitates in eodem loco L, V, v, & erit V^2 ad v^2, ut area HACL ad aream HBDL, (per prop. 39. & not. 408.) id est $V^2:v^2=HL\times HA:HL\times\frac{BH+DL}{2}=2HA:BH+DL$. Et quoniam in centro G evanescit DL erit in illo centro $V^2:v^2=2HA:BH$, & $V:v=\sqrt{2HA}:\sqrt{BH}$. Quare datis in loco H viribus HA, HB, & velocitate in loco quovis L vel G vi constante acquisitâ, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquisita.

(o) * *Et eodem tempore.* Id est, simul demittantur ex locis S & H corpora T & L.

loco ſupremo S, cadat corpus aliquod L ab H ad G: quoniam vires quibus corpora urgentur ſunt æquales ſub initio & ſpatiis deſcribendis TR, LG ſemper proportionales, atque ideo, ſi æquantur TR & LG, æquales in locis T & L; patet corpora illa deſcribere ſpatia ST, HL æqualia ſub initio, (p) ideoque ſubinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia ſpatia deſcribere. Quare (per prop. XXXVIII.) tempus quo corpus deſcribit arcum ST eſt ad tempus oſcillationis unius, ut arcus HI, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad ſemiperipheriam HKM, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T eſt ad velocitatem ipſius in loco infimo R, (hoc eſt, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, ſeu (q) incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu creſcentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, ſive ut (r) $\sqrt{SRq.-TRq.}$ ad SR. Unde (ſ) cum, in oſcillationibus inæqualibus, deſcribantur æqualibus temporibus arcus totis oſcillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus deſcripti in oſcillationibus univerſis. Quæ erant primò invenienda.

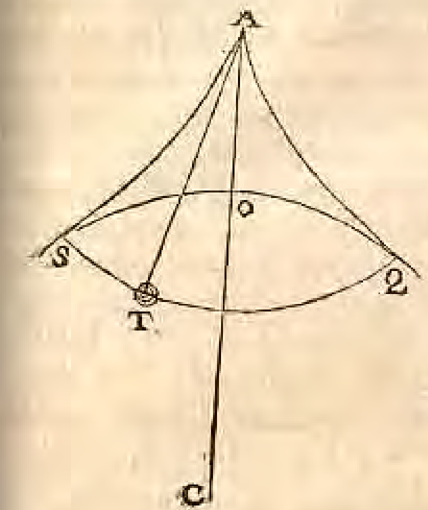
(p) * *Ideóque ſubindè pergere æqualiter urgeri & æqualia ſpatia* iiſdem nempe temporibus *deſcribere.*

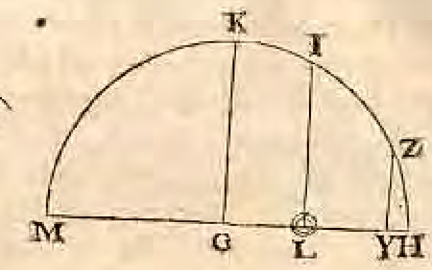
(q) * *Seu incrementum momentaneum &c.* Nam incrementa illa ſunt ſpatia eodem tempuſculo uniformiter deſcripta, quæ proindè ſunt ut velocitates in locis L & G, quibus deſcribuntur, arcus autem HI, HK, quæ tempora exhibent, creſcunt ut tempora, hoc eſt, æquabili fluxu.

(r) *Sivè ut* $\sqrt{SR^2-TR^2}$ *ad* SR. Eſt enim, ex naturâ circuli $LI^2 = ML \times LH = GH^2 - GL^2 = SR^2 - TR^2$, adeóque $LI = \sqrt{SR^2-TR^2}$, & $LI : GK = \sqrt{SR^2-TR^2} : GK$, ſeu SR.

(ſ) 468. *Undè cum &c.* Datâ vi centripetâ in perimetro globi QOS vel in H datur tum velocitas quâ corpus hâc vi ſollicitatum deſcribit circulum HKM, tum tempus quo ſemiperipheriam HKM percurrit (201) hoc eſt, tempus unius oſcillationis integræ; & contrà; Dato tempore unius oſcillationis integræ, datur vis centripeta in H vel S (202). Porrò dato arcu ST, vel rectâ æquali HL, datur LI ſinus arcus HI, & hinc datur hic arcus, adeóque & ratio HI, ad HKM, id eſt, ratio temporis quo percurritur HL vel ST ad tempus datum oſcillationis integræ. Et contrà dato tempore quo deſcribitur HL vel ST, datur arcus HI, & hinc datur illius ſinus rectus LI ſinuſque verſus HL vel arcus ST. Datâ vi centripetâ in S vel H, datur velocitas corporis de loco S vel H in R vel G pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato T vel L; cum (ex demonſtr.) velocitas in R vel G, ſit ad velocitatem in T vel L, ut GK ad LI, ſeu ut SR ad $\sqrt{SR^2-TR^2}$. Dato tempore quo deſcribitur ST vel HL, datur arcus HI, & illius ſinus rectus LI, adeóque & velocitas in L & contrà.

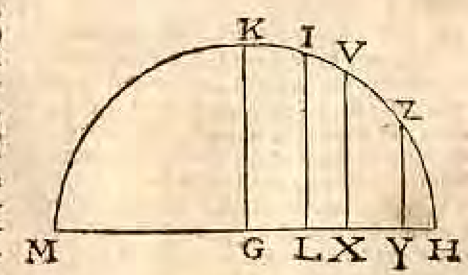
Si





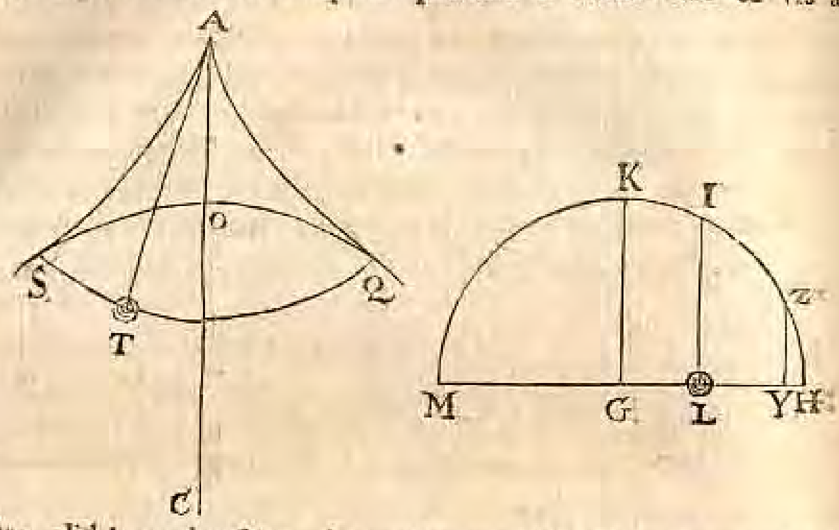
Oſcillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diverſis intra

Si corpus non ex ſummo loco S, vel H, ſed ex alio quovis t, (vid. fig. prop. 51.) vel Y, demittatur, erit tempus quo ex loco t pervenit ad R, vel ex Y ad G, æquale tempori dato dimidiæ oſcillationis. Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali YL, dabitur & tempus quo deſcribitur & velocitas in T vel L, ac contrà. Nam cum ſint arcus ſeu ſpatia quævis æqualibus temporibus deſcripta in oſcillationibus inæqualibus, ut arcus vel ſpatia integris oſcillationibus percurſa (464), dato arcu T t, vel ſpatio YL, dabitur ſpatium HX, quod corpus de loco H demiſſum deſcribit eodem tempore quo aliud corpus percurrit T t vel YL; dato ſpatio HX, datur arcus HV & illius ſinus rectus XV, & hinc datur tempus quo deſcribitur HX & YL, & velocitas in X; cumque ſit velocitas in



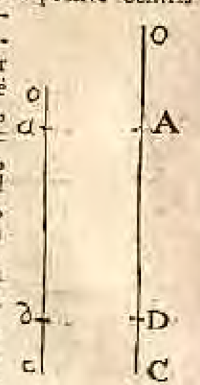
X, in corpore de loco H, cadente ad velocitatem in L, in corpore de loco Y cadente ut HG, ad YG (464) dabitur velocitas in L, vel T; Et contrà.

intra globos diversos, quorum (t) diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: &, si vis absoluta globi cujusvis QOS dicatur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli à centro illo & vis ab-



soluta globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times V$. Itaque (u) lineola HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore; &, si (x) erigatur normalis YZ circumferen-

(t) 469. *Quorum diversæ sunt &c.* Ex centris C, c, per omne circumquaque spatium diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione distantiarum à suis respectivè centris crescentes, vires acceleratrices in locis datis æquè altis A, a, dicantur A, a; in aliis locis æquè altis D, d, dicantur V, u, & erit (ex hyp.) V : A = CD : CA = cd : ca = v : a, adeóque V : v = A : a, sed evanescentibus distantiis, CD, cd, sunt V, v, vires absolutæ (per definitionem VI. Newt.) quarè vires absolutæ sunt in ratione virium acceleratricium in locis æquè altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuslibet O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)



V : v = A : a
Et per hyp. C O : C A = B : A
C A vel c a : C o = a : b

Ergò ex æquo V × C O : v × C o = B : b, id est, vis acceleratrix in loco quovis O, est ut distantia à centro & vis absoluta conjunctim.

(u) * *Itaque lineola nascens HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix C O × V, describetur dato tempore.* Nam quadratum temporis quo describitur nascens H Y, est ut $\frac{HY}{CO \times V}$ (per cor. V. lem. X.). Undè cum data sit ratio H Y ad C O × V (ex hyp.), quadratum temporis adeoque & tempus ipsum quo describitur H Y datum erit.

(x) * *Et si erigatur normalis &c.* Arcus HZ erit ad semiperipheriam H K M, ut tempus datum quo describitur HY, ad tempus unius oscillationis (prop. 38.) quod proindè erit ut semiperipheria H K M, seu ut radius G H directè, & arcus H Z inversè. Est autem arcus nascens H Z æqualis chordæ H Z (per Lem. 7.) adeóque (ex naturâ circuli) H Z² = H Y × M H = 2 G H × H Y; Quarè cum sit H Y ut

tiæ occurrens in Z, arcus nascens HZ denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens HZ in subduplicatâ ratione rectanguli GHY, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oscillationis integræ in cycloide QRS (cùm sit ut semiperipheria HKM, quæ oscillationem illam integram denotat, directè; utque arcus HZ, qui datum tempus similiter denotat, inversè) fiet ut GH directè & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversè, hoc est, ob æquales GH & SR, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, sive (per corol. prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oscillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & subduplicatâ ratione distantiæ inter punctum suspensionis & centrum globi inversè, & subduplicatâ ratione vis absolutæ globi etiam inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, quâ cyclois integra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi cyclois (y) evadet linea recta per centrum globi transiens, & oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus descensûs de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est (z) enim hoc tempus (per casum secundum) ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Co-

C O × V, erit H Z² ut 2 G H × C O × V, seu, ut G H × C O × V, & hinc tempus unius oscillationis ut $\frac{GH}{\sqrt{GH \times CO \times V}} = \sqrt{\frac{GH}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{SR}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ ob GH = SR, & $\frac{AR}{AC} = \frac{SR}{CO}$, (per cor. prop. 50.)

(y) * *Cyclois evadet linea recta* (461).

(z) * *Est enim hoc tempus &c.* Quoniam cycloide Q R S in rectam mutatâ fit A R = A C, erit (per cas. 2.) tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale (prop. 38.) per circuli quadrantem ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$. Unde erit hoc

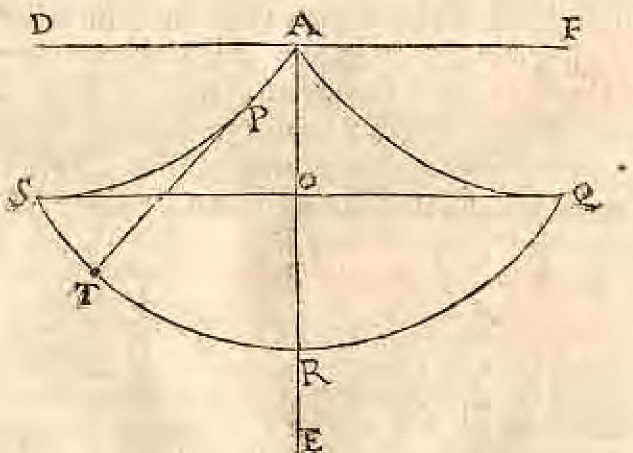
Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenerunt. Nam (a) si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphærica in planum, visque (b) centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto (c) autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus rotæ inter idem inter planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*: Et (d) pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili & æquali cycloide temporibus

hoc tempus ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis Q R S in rectam non mutatâ ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$ ad $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$, hoc est, ob datam V, ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$. Quare dato tempore unius oscillationis in cycloide quâvis Q R S circa centrum C, dabitur tempus descensus de loco quovis ad idem centrum, & tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis distantiam descripti.

(a) * *Nam si globi diameter augeatur* (462).

(b) * *Visque centripeta* distantiæ infinitæ (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, & quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui ante erant ad superficiem sphæricam perpendiculares fiunt paralleli; vis centripeta aget uniformiter secundum lineas huic superficiei in planum mutatæ perpendiculares.

(c) * *Isto autem in casu* (462).



(d) * *Et pendulum inter duas &c.* Erit enim in hoc casu diameter rotæ O R quâ describitur cyclois Q R S, æqualis diametro AO rotæ quâ describitur cyclois A P S (462.), quare semicycloides SR, AS similes erunt & æquales.

ribus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed (e) & descensus gravium, tempore oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

Aptantur autem propositiones à nobis demonstratæ ad veram constitutionem terræ, quâtenus rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ suspensa, in cycloidibus intra globos oscillari debent, ut oscillationes omnes evadant isochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrescit in progressu à superficie terræ, sursum quidem in duplicatâ ratione distantiarum à centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

PRO-

470. (e) * *Sed & descensus &c.* Erit in hoc casu tempus unius oscillationis ad tempus descensûs perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, seu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iisdem positis quæ (in prop. 52. & ejus cor. 2°.) erit tempus unius oscillationis æquale tempori semirevolutionis in circulo H K M (prop. 38.). Est autem (200.) tempus semirevolutionis in circulo HKM, ad tempus descensûs uniformiter accelerati per dimidium radium H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quare cum sit $\frac{1}{2}$ H G $= \frac{1}{2}$ S R $= \frac{1}{2}$ A R $=$ O R (462.) erit tempus unius oscillationis ad tempus descensûs perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. Corol. Dimidia penduli longitudo A O, est ad spatium A E descensu perpendiculari descriptum unius oscillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sit enim tempus unius oscillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, & erit (469) tempus descensûs perpendicularis per spatium A O $= \frac{dt}{p}$; sed (27) $\frac{ddtt}{pp} : tt =$ A O : A E, ergò A O : A E $=$ d d : p p. Hugenius cui pendulorum theoria debetur prop. 25. part. 4. horologii oscillatorii, longitudinem penduli singulas oscillationes uno minuto secundo absolventis invenit pedum Paris. 3. & linearum 8 $\frac{1}{2}$, hoc est, linearum $\frac{881}{2}$, & hinc dimidia penduli longitudo erat linearum $\frac{881}{4} = 220.25$. Est autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proximè, & proindè quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769. ad 126025; quarè spatium uno minuto secundo descriptum à corpore gravi perpendiculariter cadente, est pedum Paris. 15 $\frac{1}{12}$, quam proximè.

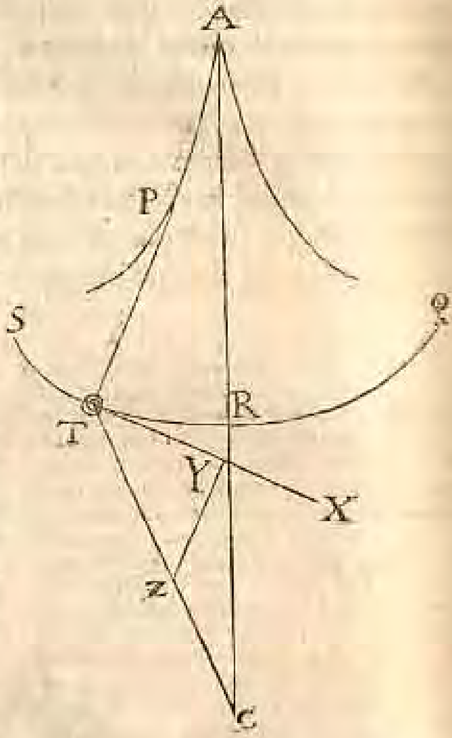
472. Coroll. Quoniam propè telluris superficiem gravium directio horizonti ad sensum perpendicularis est gravitasque constans, atque adeò V gravitas absoluta, & A C distantia à centro telluris datæ sunt; in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oscillationis (per cas. 2. prop. 52.) erit ut $\sqrt{AR}$, id est, in ratione subduplicatâ longitudinis penduli & proindè longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oscillationis.

473.

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent.



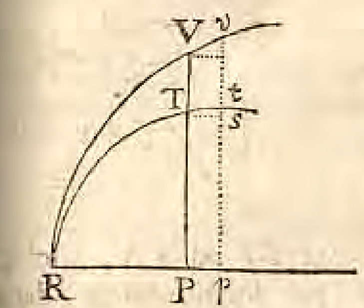
Oscilletur corpus T in curvâ quâvis lineâ $STRQ$, cujus axis sit AR transiens per virium centrum C. Agatur TX quæ curvam illam in corporis loco T quovis contingat, inque hâc tangente TX capiatur TY æqualis arcui TR. Nam (f) longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto Y educatur recta YZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit vis centripeta proportionalis rectæ TZ. *Q. E. I.*

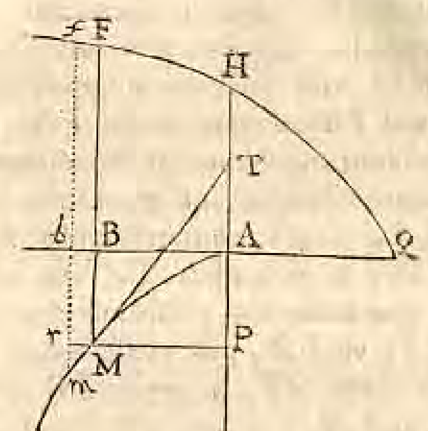
Nam si vis, quâ corpus trahitur de T versus C, exponatur per rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus secundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curvâ $STRQ$ directè accelerat vel directè retardat. (g) Proinde cum hæc sit ut via describenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in oscillationum duarum (ma-

473. Corol. Numeri oscillationum isochronarum à duobus pendulis A B, a b, eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt. Nam si pendulum a b, bis oscilletur eo tempore quo A B semel; a b, quatuor oscillationes absolvet, dum A B duas conficit, & ità porrò in aliis suppositionibus, ut patet. Quarè numeri oscillationum isochronarum eodem tempore à duobus pendulis confectarum sunt in ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversè (472).

474. Coroll. Hinc si tempus unius oscillationis penduli A B, sit T, tempus unius oscillationis penduli a b, sit t, numeri oscillationum eodem tempore confectarum N, n, erit T : t = n : N (473), & T T : t t = A B : a b (472) ac propterea n n : N N = A B : a b. Datis igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus est.

(f) 476. *Nam longitudo arcus &c.* Curvæ R T t sit axis R P, vertex R, ad axem ordinatim applicatæ T P, t p, infinitè propinquæ T s axi parallela & ordinatæ t P occurrens in s. Sit R P $= x$, P T $= y$, & erit P p = T s $= dx$, t s $= dy$, T t^2 $= dx^2 + dy^2$, T t $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$; quare R T, fluens ipsius T t, æqualis erit fluenti quantitatis $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ex æquatione ad curvam R T, quæratur valor ipsius dy per dx & alias quantitates, sitque $dy = Q dx$, Q vero quantitas quælibet constans aut variabilis, erit $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + QQ}$. In perpendiculo P T, capiatur P V $= A \times \sqrt{1 + QQ}$, sitque A quantitas data, & curva R V locus punctorum V, erit areæ R V P elementum P p $\times$ P V $= A dx \sqrt{1 + QQ}$, unde T t $= dx\sqrt{1 + QQ} = \frac{\text{P p} \times \text{P V}}{A}$, & capiendo utrinque fluentes R T = areæ $\frac{\text{R V P}}{A}$; curvæ igitur R T rectificatio ad quadraturam figuræ R V P reducta est.





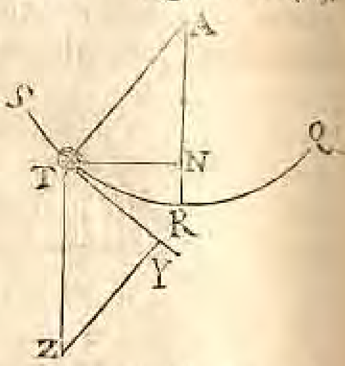
476. Idem alia methodo fieri potest. Sit curvæ hujus rectificandæ A M m, axis A P, & vertex A. Per punctum quodvis M agatur tangens M T axi occurrens in T, & M F axi parallela rectam A B axi normalem secans in B; capiatur semper A B ad M T sicut constans quævis A ad B F, & punctum F curvam F H Q perpetuò tangat, erit spatium curvilineum B F H A æquale rectangulo sub arcu A M & constanti A comprehenso, adeóque arcus A M $= \frac{\text{B F H A}}{A}$. Nam ductâ m f priori M F parallelâ & infinitè propinquâ, demissoque ad axem A P perpendiculo M P, quod rectam m f, secat in r; erit ob triangula M P T, M r m similia M r : M m = M P, vel B A : M T $= A$: B F (per constr.) Ergò B F $\times$ M r, id est, elementum B b f F = M m $\times$ A, ac proindè spatium fluens A H F B æquale fluenti A M $\times$ A.

(g) * *Proindè &c.* Quæ sequuntur manifesta sunt (ex dem. prop. 51.)

Liber Primus. Prop. LIII. Probl. XXXV.

(majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. *Q. E. D.* (h).

Corol. 1. Hinc si corpus *T*, filo rectilineo *AT* à centro *A* pendens, describat arcum circularem *STRQ*, & interea (i) urgeatur secundum lineas parallelas deorsum à vi aliquâ, quæ sit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus *TR* ad ejus sinum *TN*: æqualia erunt oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas *TZ*, *AR*, similia erunt triangula *ATN*, *ZTY*; & propterea *TZ* erit ad *AT* ut *TY* ad *TN*; hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam *AT*; vis *TZ*, quâ oscillationes evadent isochronæ, erit ad vim gravitatis *AT*, ut arcus *TR* ipsi *TY* æqualis ad arcûs illius sinum *TN*.



Corol. 2. Et propterea in horologiis, si vires à machinâ in pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu *TR* & radio *AR*

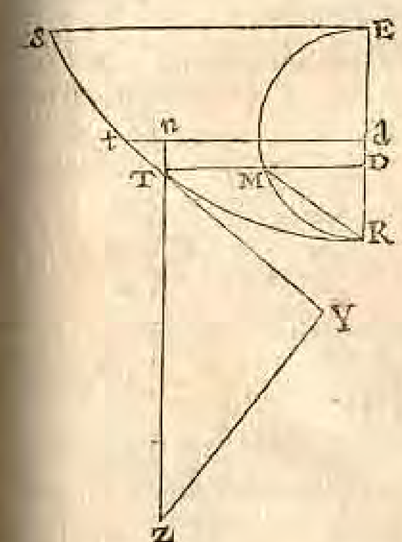
(h) 477. *Q. E. D.* Datâ vi centripetâ TZ quâ corpus in datâ curvâ SRQ oscillationes semper isochronas peragit, velocitates illius corporis in locis singulis & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur eodem modo definiuntur ac in cas. 1°. prop. 52. Ductâ enim ex centro virium C rectâ quæ curvam tangat in puncto aliquo S, erit in hoc puncto TZ=TY, hoc est, vis centripeta in curvâ STR æqualis vi centripetæ ad C perpendiculariter tendenti in S; quare manente constructione cas. 1. prop. 52. & supponendo vim centripetam in H, (vid. fig. ibid.) quâ describitur circulus HKM, æqualem vi centripetæ in S, tempus unius oscillationis & singulæ oscillationum partes, & velocitates in locis singulis invenientur prorsus (ut in not. 468.) iisdemque ratiociniis res omnis demonstrabitur.

(i) * *Intereà urgeatur secundum lineas parallelas &c.* Centro C figuræ superioris in infinitum abeunte.

AR ad sinum *TN*, oscillationes (k) omnes erunt isochronæ.

(k) * *Oscillationes omnes erunt isochronæ.* Cum enim vis tota TZ quâ oscillationes redduntur isochronæ sit (per cor. 1.) ad vim gravitatis AT seu AR, ut TR ad TN, erit $TZ = \frac{AR \times TR}{TN}$, adeóque vis tota TZ, ut $\frac{AR \times TR}{TN}$.

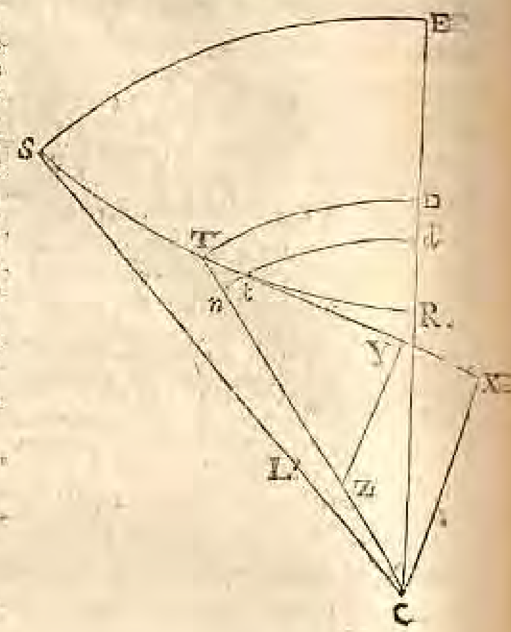
478. Ex demonstratis solvi potest hoc problema: Datâ lege vis centripetæ, invenire curvam tautochronam STR, in quâ nimirum, corpus oscillationes semper isochronas peragat.



Casus 1us. Vis gravitatis directio TZ semper sit parallela axi ER curvæ STR, sint SE, td, TD ad axem RE ordinatim applicatæ, punctum E datum, puncta D, d infinitè propinqua, tangens TY æqualis arcui TR, YZ ad TY perpendicularis secet TZ in Z, & ZT producta secet td in n. Dicantur $RE = a$, vis gravitatis in E vel $S = g$, in D vel $T = v$, pars lineæ verticalis per S ductæ determinata ad modum verticalis TZ, $sit = b$, $RD = x$, $DT = y$, $TR = TY = s$. Ob triangula Tnt, TYZ similia, Tn (dx) : Tt (ds) $= TY\ (s) : TZ = \frac{sds}{dx}$, ob angulum Tnt rectum $ds^2 = dx^2 + dy^2$; & (per prop. 53.) $g : v = b : TZ \left(\frac{sds}{dx}\right)$, ideoque $sds = \frac{b}{g} v dx$, & sumptis fluentibus $\frac{1}{2} ss = \frac{b}{g}$ S. $v dx$; fluens autem S. $v dx$ ita sumi debet, ut evanescente x, ea fluens evanescat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g}$ S. $v dx$, $s = \sqrt{\frac{2b}{g}\text{S. } v dx}$, & sumptis fluxionibus $ds = \frac{b v dx}{\sqrt{2bg\text{S. } v dx}}$, proindeque $ds^2 = \frac{bbvvdx^2}{2bg\text{S. } v dx} = dx^2 + dy^2$, & hinc $dx \sqrt{\frac{bvv - 2g\text{S. } v dx}{2g\text{S. } v dx}} = dy$ æquatio ad curvam tautochronam STR, in quâ datâ lege vis gravitatis exterminabitur v.

Exemplum. Sit gravitas constans, seu $v = g$, & erit $v dx = g dx$, S. $v dx = gx$, quæ evanescit, ubi $x = 0$. Quare æquatio ad curvam SR fiet $dx \sqrt{\frac{b - 2x}{2x}} = dy$. Quoniam vero $ss = \frac{2b}{g}$ S. $v dx = 2bx$, si ponatur $b = SR$, ut verticalis per S ducta curvam tangat in S, & loco s scribatur b, ac loco x scribatur a, erit $bb = 2ba$, & proinde $b = 2a$, atque $ss = 4ax$, hoc est, SR = 2RE, & $TR^2 = 4RE \times RD$; porrò si diametro RE describatur circulus EMR secans DT in M, erit $MR^2 = RE \times RD$, $4MR^2 = 4RE \times RD$, ideoque $TR^2 = 4MR^2$, & TR = 2MR, quæ est proprietas cycloidis vulgaris circulo genitore EMR descriptæ.

Casus 2. Tendat vis centripeta ad punctum datum C. Centro C, radiis CE, CD, Cd descripti sint arcus circulares ES, DT, dtn, curvæ SR occurrentes in S, T, t, & rectæ CT in n, sintque E punctum in axe CE datum, D, d puncta infinite propinqua, tangentis TX per T ductæ pars TY æqualis arcui TR, & ZY, CX ad tangentem perpendiculares. Dicantur CE $=a$, CR $=c$, SL pars radii CS eodem modo determinata ac TZ pars radii CT sit $=b$, vis centripeta in E vel S $=g$, in D vel T $=v$, CD vel CT $=x$, TR vel TY $=s$, CX $=p$. Ob similitudinem triangulorum Tnt, TYZ, TXC, est Tn (dx) : Tt (ds) = TY (s) : TZ $= \frac{sds}{dx}$ & TC(x) : CX(p) = Tt (ds) : tn $= \frac{pds}{x}$, ideoque ob angulum Tnt rectum $ds^2 = dx^2 + \frac{ppds^2}{xx}$, & proinde $ds^2 = \frac{xxdx^2}{xx-pp}$.



Verum per prop. 53. $g:v=b:$TZ $\left(\frac{sds}{dx}\right)$, unde $sds = \frac{b}{g}vdx$, & sumptis fluentibus $\frac{1}{2}ss = \frac{b}{g}$ S. vdx. Quoniam autem evanescente s, fit $x=c$, fluens S. vdx ita accipi debet, ut, posita $x=c$, evanescat. Erit igitur $ss = \frac{2b}{g}$ S. vdx, $s = \sqrt{\frac{2b}{g}\text{S.}\,vdx}$, & sumptis fluxionibus $ds = \frac{bvdx}{\sqrt{2bg\text{S.}\,vdx}}$, unde $ds^2 = \frac{bvvdx^2}{2g\text{S.}\,vdx} = \frac{xxdx^2}{xx-pp}$, atque adeo $\frac{bvv}{2g\text{S.}\,vdx} = \frac{x^2}{xx-pp}$ æquatio ad tautochronam STR, in qua data lege vis centripetæ delebitur v.

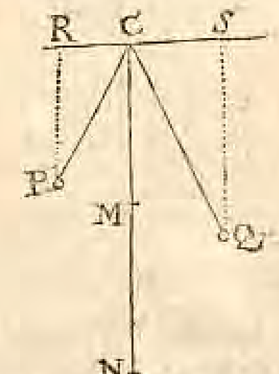
Exemplum. Vis centripeta sit ut distantia a centro C, hoc est, $g:v=a:x$, adeoque $v=\frac{gx}{a}$, $vdx = \frac{gxdx}{a}$, S. $vdx = \frac{gxx}{2a} + Q$ (constantem) & quoniam posita $x=c$, evanescit S. vdx, erit $Q = \frac{-gcc}{2a}$, atque ita S. $vdx = \frac{gxx-gcc}{2a}$. Quare erit $ss = \frac{2b}{g}$ S. $vdx = \frac{bxx-bcc}{a}$, & æquatio ad tautochronam evadet $\frac{bxx}{axx-acc} = \frac{xx}{xx-pp}$, seu $pp = \frac{bxx-axx+acc}{b}$.

Jam si in hac æquatione ponatur $b=a$, erit $p=c$, & $ss=xx-cc$, ideoque tautochrona SR linea recta ad CR perpendicularis in R.

Si ponatur b major quam a, & $c=0$, erit $p = x\sqrt{\frac{b-a}{b}}$, adeoque p ad x in ratione data, cumque sit p seu CX sinus anguli CTX, existente radio x seu CT, erit angulus CTX constans, & proinde tautochrona SR spiralis logarithmica.

Si fuerit b minor quam a, & recta CS curvam SR tangat in S, erit $b=$SR, cumque sit $ss = \frac{bxx-bcc}{a}$, si ponatur $s=$SR$=b$, & proinde $x=a$ fiet $bb = \frac{baa-bcc}{a}$, & $b = \frac{aa-cc}{a}$. Jam si in æquatione ad curvam SR loco b scribatur $\frac{aa-cc}{a}$, erit $pp = \frac{aacc-ccxx}{aa-cc}$ æquatio ad cycloidem, quæ describitur rotatione circuli cujus diameter est RE seu $a-c$ super concavam peripheriam circuli centro C radio CE seu a descripti, ut liquet per n. 466.

Schol. In superioribus de pendulorum motu propositionibus corporis penduli gravitatem in centro seu puncto coactam & filum gravitatis expers supposuimus, quæ pendulum simplex constituunt. Quamobrem ne demonstratæ oscillationum leges in experimentis valde perturbentur, filum usurpandum est tenue cum globo exiguo & ex materia gravissima conflato. Si vero filum aut virga e qua globus pendet gravis fuerit & globus major, pendulum non amplius simplex est, sed compositum, quod pluribus ponderibus inter se connexis instructum est.



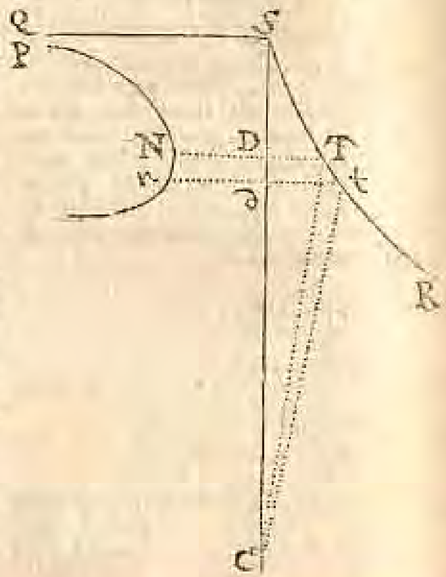
Pendulum compositum CPQ, onustum quotcumque pondusculis P, Q, &c. quorum commune gravitatis centrum M circa punctum suspensionis C oscilletur. Recta CM per punctum suspensionis C & commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compositi PCQ, recta vero RCS in puncto suspensionis C ad axem penduli CM perpendicularis dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli compositi CM, capiatur CN æqualis longitudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compositum CPQ semper absolventis, pendulum illud simplex composito CPQ synchronum vel etiam isochronum dicitur, & punctum N centrum oscillationis penduli compositi CPQ appellatur. Porro si singulorum pondusculorum P, Q &c. gravitas in punctis P, Q &c. collecta intelligatur, & lineæ PC, QC &c. gravitatis expertes supponantur, sitque M summa pondusculorum omnium P, Q, &c. atque ex punctis P, Q &c. ad axem oscillationis RCS demittantur perpendicula PR, QS &c. erit CN $= \frac{\text{P}\times\text{PR}^2 + \text{Q}\times\text{QS}^2}{\text{M}\times\text{MC}}$ + &c. id est, si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi. Hoc pulcherrimum theorema quo linearum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit Hugenius. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi Jacobus & Joannes Bernoulli, ille in actis Lipsiensibus an. 1691. & commentariis Parif. an. 1703. Hinc vero in actis Lipsiensibus & commentariis Paris. an. 1714, quorum demonstrationes exposuit clariss. Wolfius in elementis Mechanices. Hermannus quoque lib. 1°. Phoron. cap. 5°. & initio tomi 3i. Acad. Petropol. duas ejusdem theorematis demonstrationes edidit.

Hugenius horologii oscillatorii parte 4ª. prop. 22. distantiam centri oscillationis a puncto suspensionis in sphæra filo tenui suspensa æqualem esse invenit longitudini fili cum radio sphæræ atque duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compositam ex radio sphæræ ac longitudine fili & radium ipsum, hoc est, si filum dicatur L, radius sphæræ R, distantia centri oscillationis a puncto suspensionis D, erit D $=$ L $+$ R $+ \frac{2\text{RR}}{5(\text{L}+\text{R})}$. Sed hæc omnia indicare, non vero demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur autor noster.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

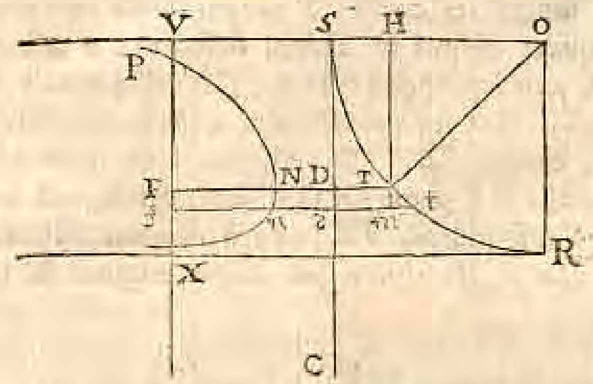
Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

Descendat corpus de loco quovis S, per lineam quamvis curvam $STtR$ in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque Dd partium illarum aliqua. Centro C intervallis CD, Cd describantur circuli DT, dt, lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in T & t. Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine CT (per prop. XXXIX.) (1) Tempus autem, quo corpus describit lineolam Tt, est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli tTC directè; & velocitas inversè. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata DN ad rectam CS per punctum D perpendicularis, & ob datam Dd erit rectangulum $Dd \times DN$, hoc est area $DNnd$, eidem tempori proportionale. Ergo si PNn sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, ejusque asymptotos sit recta SQ rectæ CS perpendiculariter insistens: erit area $SQPND$ proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam ST; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. *Q. E. I.*



(1) * *Tempus autem quo corpus &c.* Nam, Tt, est spatium nascens velocitate uniformi descriptum, est autem tempus quo spatium aliquod æquabiliter describitur ut spatium illud directè & velocitas inversè (5). Porrò si centro T radio dato Dd, æquali differentiæ rectarum TC, tC circulus describi intelligatur, erit Tt secans anguli tTC, quarè ob datum radium Dd erit semper Tt ut secans anguli tTC, atque adeò tempus quo describitur Tt erit ut illa secans directè & velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ STR in puncto T datur anguli CTt secans; unde dabitur DN proportionalis tempori quo describitur Tt.

PRO-



479. Exemplum. Centrum virium C, in infinitum abeat, ut sit vis centripeta constans, illiusque directio rectæ SDC semper parallela, & arcus DT, dt, in rectas lineas ad SD normales mutentur. Sit curva STR circuli quadrans cujus centrum O & radius OS ad SD perpendicularis; producantur perpendicula TD, OS ad F & V, & DF constans gravitatem exhibeat in loco D, punctum F perpetuò tanget rectam VF lineæ SD parallelam, eritque (408) velocitas in D vel $T = \sqrt{2SD \times FD}$. Ex puncto T ad SO demittatur perpendiculum TH rectam dt secans in m, sitque $SO = a$, $SV = FD = b$, $SD = TH = x$ & ob triangula TOH, tTm, similia, erit $HO (\sqrt{aa - xx})$: $TO (a) = Tm (dx) : Tt = \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$, velocitas in $T = \sqrt{2SD \times DF} = \sqrt{2bx}$. Quare tempus per arcum nascentem $Tt = \frac{Tt}{\sqrt{2bx}} (5) = \frac{adx}{\sqrt{2aabx - 2bx^3}}$ undè, $DN = \frac{a}{\sqrt{2baax - 2bx^3}}$. Si ND dicatur y, erit $yy = \frac{aa}{2baax - 2bx^3}$ æquatio ad curvam PNn, in quâ si ponatur $x = o$ vel $x = a$ erit y infinita, & proindè rectæ OV, RX ad SD perpendiculares sunt hujus curvæ asymptoti.

Similiter si corpus de loco R ascendat in semicirculo RTS, sitque ejus velocitas in R illa quâ possit ad altitudinem verticalem e ascendere, dicanturque XV seu $RO = a$, $FX = x$, ideoque velocitas in $T = \sqrt{2be - 2bx}$, & $Tt = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$; erit tempus per $Tt = \frac{adx}{\sqrt{2be - 2bx \times aa - xx}}$ & $DN = y = \frac{a}{\sqrt{2be - 2bx \times (aa - xx)}}$, ubi DN per unitatis quadratum, ut servetur homogeneitas, divisa intelligitur.

Scho-

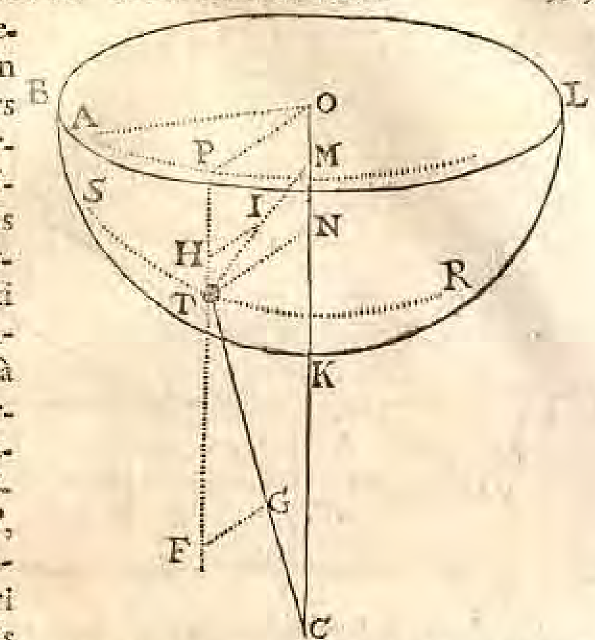
PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit BKL superficies curva, T corpus in eâ revolvens, STR trajectoria, quam corpus in eâdem describit, S initium trajectoriæ, OMK axis superficiei curvæ, TN recta à corpore in axem perpendicularis, OP huic parallela & æqualis à puncto O, quod in axe datur, educta; AP (m) vestigium trajectoriæ à puncto P in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum; A vestigii initium puncto S respondens; TC recta à corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centripetæ quâ corpus urgetur in centrum C, pro-

Scholium. Si ex his tribus, vi centripetâ in singulis locis, curvâ in quâ corpus ascendit vel descendit, & tempore quo singuli curvæ arcus percurruntur, duo data fuerint, tertium dabitur. Sit enim (in superioribus figuris) $Dd = dx$, $Tt = ds$, $tm = dy$, velocitas in $T = c$, & erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, & (5) $cdt = ds$, ideoque $ccdt^2 = dx^2 + dy^2$. Quare si, datâ vi centripetâ, seu (per prop. 39.) æquatione inter c & x, detur etiam æquatio inter t & x vel y, dabitur æquatio inter x & y, hoc est, æquatio ad curvam STt, & vice versâ. Exempli causâ, positâ vi centripetâ constante & ad distantiam infinitam tendente, corpus ita descendat in curva STt, ut tempus per arcum quemvis ST proportionale sit altitudini correspondenti Sd, dicanturque $Sd = x$, $DT = y$, tempus per $ST = t$, velocitas in $T = c$; & erit dt ut dx, & c ut $\sqrt{x}$, ideoque cdt ut $dx\sqrt{x}$, & hinc si fuerit a quantitas constans, $cdt = dx\frac{\sqrt{x}}{a}$. & proinde $\frac{xdx^2}{a} = dx^2 + dy^2$, & hinc $(x-a)dx^2 = ady^2$. Ponatur $x - a = v$, & erit $dx = dv$, & $v^{\frac{1}{2}}dv = a^{\frac{1}{2}}dy$, sumptisque fluentibus $\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}y$, $\frac{4}{9}v^3 = ayy$, $v^3 = \frac{9}{4}ayy$, æquatio ad parabolam secundi generis, cujus est latus rectum $\frac{9a}{4}$, abscissa v, & ordinatim applicata y. Sed quoniam in illâ parabolâ positâ $y = 0$, fit $v = 0$, adeoque $x - a = v = 0$, & $x = a$, patet corpus de altitudine a cadere debere antequam in parabola descendat, capiendamque esse $SD = v$, ut tempus per arcum ST sit proportionale altitudini $v + a$, seu x.

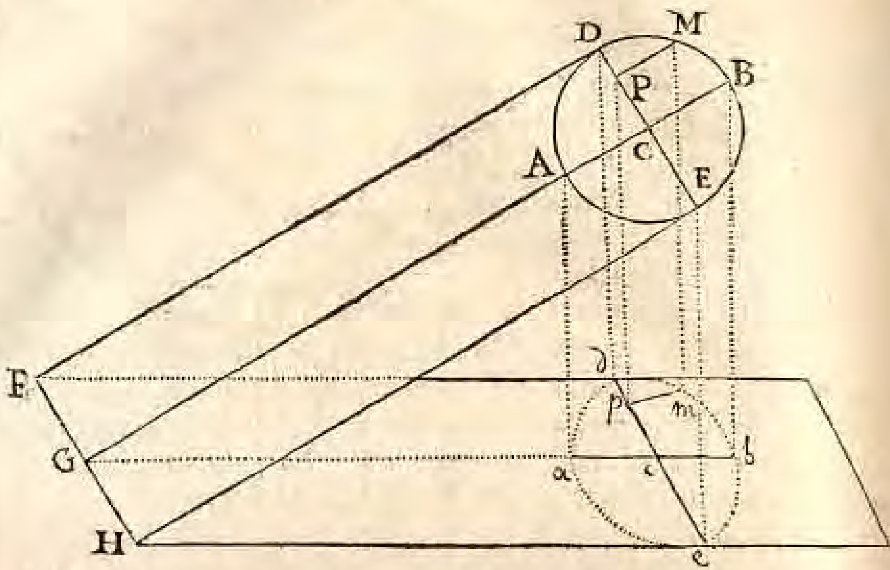
(m) * *AP vestigium &c.* Si corpus in superficie quâcunque curvâ moveatur, suoque motu curvam describat quæ in plano posita non sit, ad planum est referenda, idque fit si in superficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex singulis curvæ descriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam describent, hæc linea primæ vestigium seu linea projectionis dicitur.



proportionalis; TM recta ad superficiem curvam perpendicularis; TI pars ejus vi pressionis, quâ corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus M à superficie, proportionalis; PTF recta axi parallela per corpus transiens, & GF, IH rectæ à punctis G & I in parallelam illam $PHTF$ perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area AOP, radio OP ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis TG (per legum corol. 2.) resolvitur in vires TF, FG; & vis TI in vires TH, HI. Vires autem TF, TH agendo secundum lineam PF plano AOP perpendicularem mutant solummodo motum corporis quâtenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quâtenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti P, quo trajectoriæ vestigium AP in hoc plano describitur, idem est ac si vires TF, TH tollerentur, & corpus solis viribus FG, HI agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano AOP, vi (n) centripetâ ad centrum O tendente & summam virium FG & HI æquante, describeret curvam AP. Sed vi tali describitur area AOP (per prop. 1.) tempori proportionalis. *Q. E. D.*

Corol. Eodem argumento si corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ CO datâ tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam ST; foret area AOP tempori semper proportionalis.

(n) * *Vi centripetâ ad centrum O &c.* Nam curva superficies BSKL genita supponitur revolutione curvæ lineæ BSK circa axem suum OC, unde sequitur lineas omnes PO, HI, TM, FG, PF, CO esse in eodem plano, atque ideò vim centripetam agentem in plano illo ad centrum O juxta lineam PO dirigi.

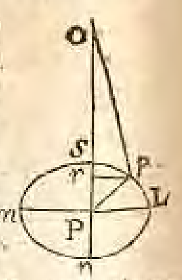


480. Lem. Si linea recta A B projiciatur in planum FHebd, projectio est linea recta a b, quæ est ad lineam A B, ut cosinus anguli inclinationis BGb, ad sinum totum. Nam si ex punctis A, B, demittantur ad planum F H e b d, perpendicula duo A a, B b, patet planum a A B b, esse ad planum F H e b d normale, adeoque perpendicula omnia ex singulis lineæ A B punctis demissa, cadere in lineam rectam a b, quæ est communis intersectio planorum F H e b d, a A B b. Q. E. 1um. Porrò productis B A, b a ut sibi occurrant in G, ob parallelas A a, B b, erit a b ad A B, ut G b ad G B, id est, ut sinus anguli G B b sive Cosinus anguli inclinationis B G b, ad sinum totum. Q. E. 2um.

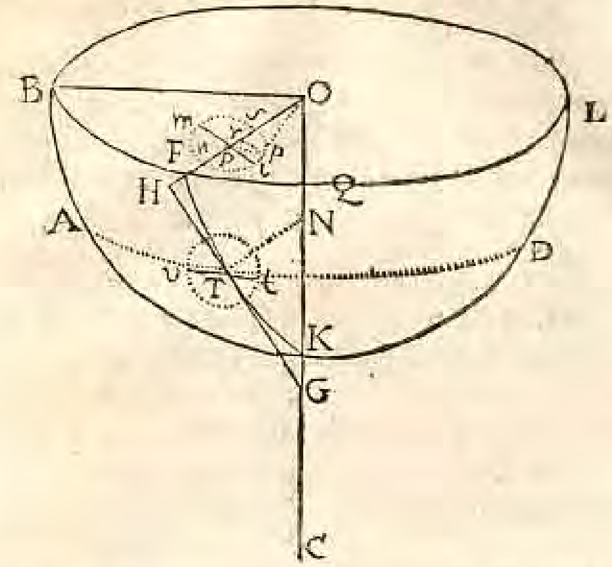
481. Coroll. Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis & parallela; Nam in hoc casu angulus inclinationis nullus est, & ejus cosinus fit radius. Hinc si linea E D, ad rectam A B perpendicularis, fuerit plano F H e b d, parallela, projectio illius e d, erit ipsi E D æqualis.

482. Lem. Iisdem positis, si in plano D F H E B A, centro C, radio C D, describatur circulus D A E B, illius in planum F H e b d projectio d a e b, erit ellipsis cujus major axis d e æqualis erit diametro circuli D E, & ad minorem axem a b, rationem habebit sinûs totius ad cosinum anguli B G b, inclinationis planorum. Agatur enim P M ordinatim ad diametrum circuli D E, & projiciatur in rectam P m, erit $dp = DP$, & $pe = PE$ (481.) atque p m ad P M, ut sinus anguli P M m, seu anguli A B b, ad sinum totum (480) hoc est, ut a b, ad A B seu d e, adeoque $pm^2 : PM^2 = ab^2 : de^2$; sed ex naturâ circuli $PM^2 = DP \times PE = dp \times pe$, Ergo $pm^2 : dp \times pe = ab^2 : de^2$. Est igitur a e b d, ellipsis. Cætera patent per Lemma superius & ejus coroll.

483. Lem. Sint ellipseos datæ L S m n axes L m, S n, centrum P, O punctum in axe n S producto datum, p punctum perimetri non datum. Datâ areâ trianguli OpP, dabitur perpendiculum p r, ex puncto p, ad trianguli basim datam P O demissum & hinc ex naturâ ellipseos dabitur r P, atque ob angulum rectum ad r, dabitur P p, & indè punctum p in perimetro cum angulo OPp, & positione rectæ O p.



484.



484. Lem. Superficies curva B A T K L, describatur revolutione curvæ B A K circà axem suum immobilem O C, & singula curvæ illius puncta B, A circulos B Q L, A T D describent; cum curva B A K pervenit ad situm F T K, & punctum A ad T, agantur recta G T H curvam F T K tangens in T & axem secans in G, ac recta v T t circulum A T D tangens in eodem puncto T, sitque G T H, in plano curvæ O F K, & v T t, in plano circuli A T D. Manifestum est planum quod superficiem curvam B A T K L tangit in T, convenire cum plano in quo sunt rectæ G T H, v T t; & si fuerit O centrum circuli B F Q L, & ducatur radius O F tangenti G T occurrens in H, angulum G H O fore æqualem angulo inclinationis plani circuli B Q L O, ad planum quod superficiem curvam tangit in T; Ducto autem circuli A T D radio T N, fore angulum G T N, æqualem angulo inclinationis G H O.

485. Coroll. 1. Iisdem positis, si centro T, radio quam minimo T t, circelles in superficie curvâ B A T L describatur, circellus ille evanescens erit in plano superficiem curvam tangente in T, adeóque angulus inclinationis plani BOLQ, ad planum circelli evanescentis productum, æqualis erit angulo G T N, (484).

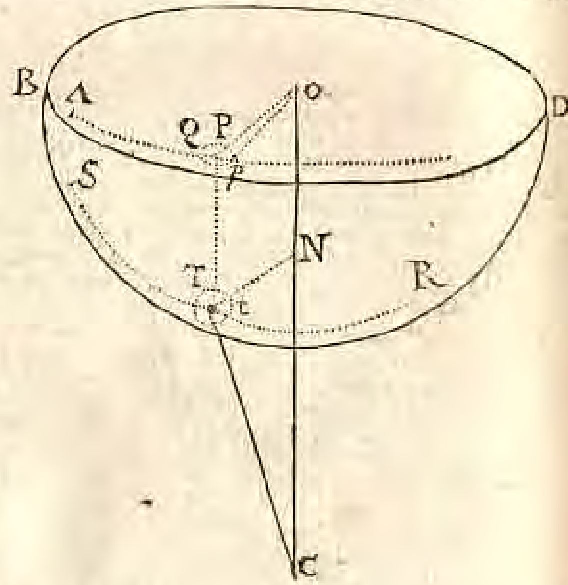
486. Coroll. 2. Si circellus radio T t descriptus projiciatur in planum B O L Q, illius projectio l s m n, erit ellipsis (482) cujus axis major l m æqualis est & parallelus circelli diametro v T t, quæ pars est evanescens circuli A T D, axis minor s n pars radii O F, & l m erit ad s n ut T G ad T N. Est enim circuli peripheria A T D adeóque & pars illius v T t, plano B F L O parallela; Quare (481) diametri v T t projectio m l, erit linea parallela & æqualis ipsi v t; erit quoque l m, ad radium O P F normalis, ob v t ad T N perpendicularem, proindeque axis minor ellipseos s n erit pars radii O F; Est autem (482) l m ad s n, ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis planorum GHO, seu GTN, (484) hoc est, ut T G ad T N, ob angulum T N G rectum.

 PRO-

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectoria quam corpus in eâdem superficie describet, de loco dato, datâ cum velocitate, versus plagam in superficie illâ datam egressum.

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus T de loco dato S secundum rectam positione datam in trajectoriam inveniendam STR, cujus vestigium in plano BDO sit AP. Et ex datâ corporis velocitate in altitudine SC, (o) dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine TC. Eâ cum velocitate dato tempore quam minimo describat corpus trajectoriæ suæ particulam Tt, sitque Pp vestigium ejus in plano AOP descriptum. Jungatur Op, & circelli centro T intervallo Tt in superficie curva descripti vestigium in plano AOP sit ellipsis pQ. Et



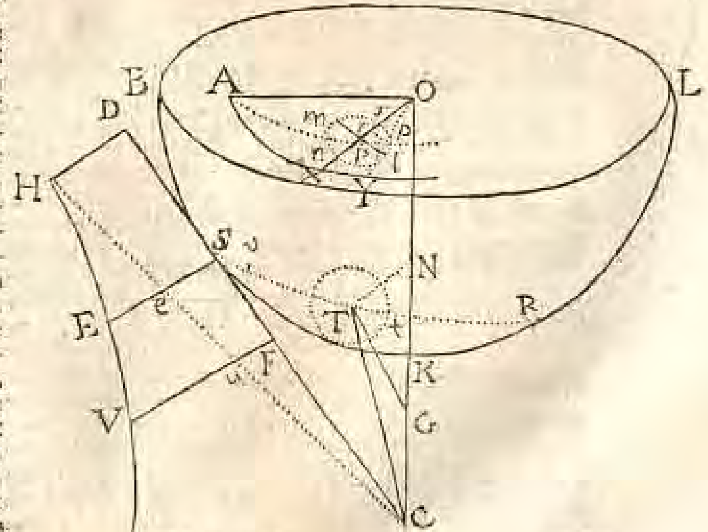
(o) * *Dabitur ejus velocitas in aliâ &c.* Nam (per prop. 40.) velocitas corporis in altitudine TC, æqualis est velocitati quam corpus haberet ad eandem altitudinem in lineâ rectâ SC, si de loco S, rectâ fuisset versus C projectum cum eâdem velocitate quâ trajectoriam STR incipit describere in S; sed datâ in loco S velocitate corporis per lineam SC versus centrum C projecti, datur illius velocitas in alio quovis loco lineæ SC, (per cor. 2. prop. 39.). Ergo ex datâ corporis velocitate in altitudine SC, dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine TC.

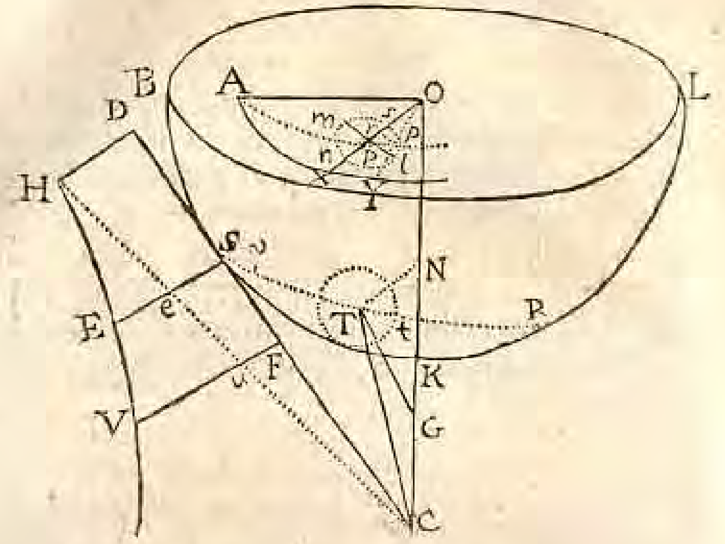
(p) ob datum magnitudine circellum Tt, datamque ejus ab axe CO distantiam TN vel PO, dabitur ellipsis illa pQ specie & magnitudine, ut & positione ad rectam PO. Cumque (q) area POp sit tempori proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus POp. Et inde dabitur ellipseos & rectæ Op intersectio communis p, unà cum angulo OPp in quo trajectoriæ vestigium APp secat lineam OP. (r) Inde verò (conferendo prop. XLI. cum corol. suo 2.) ratio determinandi curvam APp facile apparet. Tum ex singulis vestigiis punctis P, erigendo ad planum AOP perpendicula PT superficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur singula trajectoriæ puncta T. *Q. E. I.*

(p) * *Et ob datum magnitudine circellum &c.* Nam datis velocitate & tempore quibus uniformiter describitur spatium nascens Tt, datur spatium illud Tt, seu radius circelli (5). Præterea datâ altitudine TC, datur tum planum ad axem CO perpendiculare in quo circelli centrum positum est, tum angulus inclinationis plani quod in puncto T curvam superficiem $BSTD$ tangit (484) ad planum $BODP$, adeòque datur angulus inclinationis plani in quo est circellus nascens ad planum $BODP$ (485), undè (482. 486.) ellipsis Ppq, in quam circellus projicitur dabitur specie & magnitudine ut & positione ad rectam PO.

(q) * *Cumque area POp, sit tempori quo describitur proportionalis* (prop. 55.) eodemque tempore quo circelli radius Tt describatur, ex hoc tempore dato datur, atque adeò dabitur angulus POp, & indè dabitur ellipseos & rectæ Op intersectio communis p, unà cum angulo OPp (483).

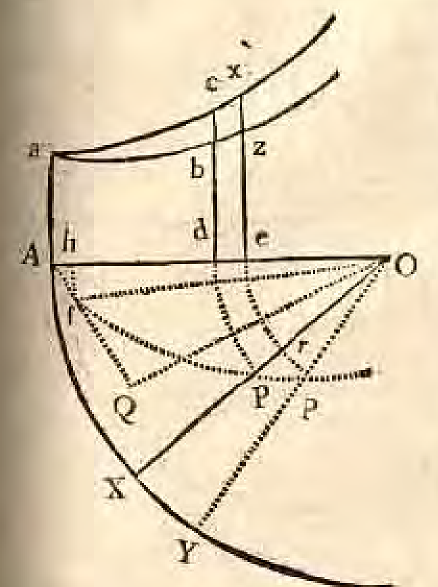
(r) 487. *Indè verò &c.* Sit D locus in rectâ CS productâ, de quo corpus vi centripetâ ad C tendente cadendo acquirit in loco S velocitatem cum quâ trajectoriam STR incipit describere. In linea CS, capiatur $CF = CT$, & per puncta F, S, D, erigantur ad CD perpendicula FV, SE, DH vi centripetæ in illis locis proportionalia, sitque HEV linea quam punctum V perpetuò tangit. Per punctum T, agatur TG, quæ curvam cujus revolutione describitur superficies $BSTKL$, tangat in T; sitque eadem TG in curvæ illius plano, & producta, axi OC occurrat in G, velocitates in locis S, & T, seu F, erunt ut $\sqrt{DHES}$, & $\sqrt{DHVF}$. (Per 1am, partem





prop. 39.) Et quoniam area P O p, seu $\frac{\mathrm{PO}\times\mathrm{pr}}{2}$ est ut tempus quo describitur T t sive P l, erit P l, ut $\mathrm{PO}\times\mathrm{pr}\sqrt{\mathrm{DHVF}}$ hoc est, spatium uniformiter descriptum ut velocitas & tempus conjunctim (5). Quare si detur quantitas B erit $\mathrm{Pl} = \mathrm{B}\times\mathrm{PO}\times\mathrm{pr}\times\sqrt{\mathrm{DHVF}}$. Est autem P l semiaxis transversus ellipseos ad P s semiaxem conjugatum ut T G ad T N seu P O (486) quare erit $\mathrm{Ps} = \frac{\mathrm{B}\times\mathrm{PO}^2\times\mathrm{pr}\times\sqrt{\mathrm{DHVF}}}{\mathrm{TG}}$; sed ex naturâ ellipseos $\mathrm{Pl}^2 : \mathrm{Ps}^2 (= \mathrm{TG}^2 : \mathrm{PO}^2) = \mathrm{pr}^2 : \mathrm{nr}\times\mathrm{rs}$ seu $\mathrm{Ps}^2 - \mathrm{Pr}^2$, atque adeò $\mathrm{PO}^2\times\mathrm{pr}^2 = \mathrm{TG}^2\times\mathrm{Ps}^2 - \mathrm{TG}^2\times\mathrm{Pr}^2$; & hinc $\mathrm{Pr}^2 = \mathrm{Ps}^2 - \frac{\mathrm{PO}^2\times\mathrm{pr}^2}{\mathrm{TG}^2} = \frac{\mathrm{B}^2\times\mathrm{PO}^4\times\mathrm{pr}^2\times\mathrm{DHVF} - \mathrm{PO}^2\times\mathrm{pr}^2}{\mathrm{TG}^2}$, proindeque $\mathrm{Pr} = \frac{\mathrm{PO}\times\mathrm{pr}\times\sqrt{\mathrm{B}^2\times\mathrm{PO}^2\times\mathrm{DHVF}-1}}{\mathrm{TG}}$, & $\mathrm{pr} = \frac{\mathrm{TG}\times\mathrm{Pr}}{\mathrm{PO}\sqrt{\mathrm{B}^2\times\mathrm{PO}^2\times\mathrm{DHVF}-1}}$. Quare $\frac{\mathrm{PO}\times\mathrm{pr}}{2} = \mathrm{POp} = \frac{\mathrm{TG}\times\mathrm{Pr}}{2\sqrt{\mathrm{B}^2\times\mathrm{PO}^2\times\mathrm{DHVF}-1}}$. Centro O & radio O A, describatur circuli arcus A X Y; & producantur O P, O p, ut arcui huic occurrant in X & Y, erit $\mathrm{PO} : \mathrm{OX}$ seu $\mathrm{AO} = \mathrm{pr} : \mathrm{XY} = \frac{\mathrm{AO}\times\mathrm{pr}}{\mathrm{PO}}$, & hinc area O X Y $\left(\text{sive } \frac{\mathrm{AO}\times\mathrm{XY}}{2}\right) = \frac{\mathrm{AO}^2\times\mathrm{pr}}{2\,\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{AO}^2\times\mathrm{TG}\times\mathrm{Pr}}{2\,\mathrm{PO}^2\sqrt{\mathrm{B}^2\times\mathrm{PO}^2\times\mathrm{DHVF}-1}}$. Itaque si in rectâ d c, ad AO perpendiculari capiantur $\mathrm{db} = \frac{\mathrm{TG}}{2\sqrt{\mathrm{B}^2\times\mathrm{PO}^2\times\mathrm{DHVF}-1}}$ & $\mathrm{dc} = \frac{\mathrm{AO}^2\times\mathrm{TG}}{2\,\mathrm{PO}^2\sqrt{\mathrm{B}^2\times\mathrm{PO}^2\times\mathrm{DHVF}-1}}$, & describantur lineæ curvæ a b z, a c x, quas puncta b, c, perpetuò tangunt, deque puncto A, ad lineam A O, erigatur perpendiculum A a, ponendo d O = P O, patet fore areas A a b d, A a c d, areis A P O, A X O, æquales &c., (ut in prop. 41.)

488. Quantitas constans B, quam in superioribus æquationibus usurpavimus, facilè determinatur. Nam datâ directione corporis trajectoriam S T R, (vid. fig. not. 487.) describere incipientis, datur illius projectio A Q, quæ ut patet, est tangens vestigii A P p in A, quâ vestigium A P p incipit describi; projecto in tangentem A Q spatio quod corpus in S dato tempore describeret secundum directionem suam in S, sit O Q perpendiculum ex centro O, in tangentem A Q, demissum, velocitas in S ad velocitatem in A ut O Q, ad C quantitatem datam, & ductâ O f, sit area A O f descripta eodem tempusculo quo area nascens O P p & arcus nascentes T t, S v trajectoriæ S T R describuntur, & quoniam velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore percursa, erit $\mathrm{Sv} : \mathrm{Af} = \mathrm{QO} : \mathrm{C}$, & demisso ex puncto f, ad A O perpendiculo f h, erit etiam $\mathrm{Af} : \mathrm{fh} = \mathrm{AO} : \mathrm{QO}$. Unde ex æquo, $\mathrm{Sv} : \mathrm{fh} = \mathrm{AO} : \mathrm{C}$, sed (ex dem. 487.) $\mathrm{Tt} = \mathrm{Pl} = B\times\mathrm{PO}\times\mathrm{pr}\times\sqrt{\mathrm{DHVF}}$, adeoque in loco S, $\mathrm{Sv} = B\times\mathrm{AO}\times\mathrm{fh}\times\sqrt{\mathrm{DHES}}$, ergo $\mathrm{Sv} : \mathrm{fh} = B\times\mathrm{AO}\times\sqrt{\mathrm{DHES}} : 1 = \mathrm{AO} : \mathrm{C}$, proindeque $B = \frac{1}{\mathrm{C}\sqrt{\mathrm{DHES}}}$, & $B^2 = \frac{1}{\mathrm{CC}\times\mathrm{DHES}}$. Quo valore in superioribus æquationibus (487) substituto, invenitur $\mathrm{POp} = \frac{\mathrm{C}\times\mathrm{TG}\times\mathrm{Pr}\times\sqrt{\mathrm{DHES}}}{2\sqrt{\mathrm{PO}^2\times\mathrm{DHVF}-\mathrm{CC}\times\mathrm{DHES}}}$ & $\mathrm{OXY} = \frac{\mathrm{C}\times\mathrm{AO}^2\times\mathrm{TG}\times\mathrm{Pr}\times\sqrt{\mathrm{DHES}}}{2\,\mathrm{PO}^2\times\sqrt{\mathrm{PO}^2\times\mathrm{DHVF}-\mathrm{CC}\times\mathrm{DHES}}}$.



Harum formularum ope, nullâ ampliùs habitâ ratione circelli ejusque projectionis ellipseos, describi potest vestigium A P p, & ex dato tempore inveniri locus P, (ut in prop. 41). Cum autem trajectoria S T R, sit linea duplicis curvaturæ ad promovendam difficilem theoriam motuum in superficiebus curvis quam hic aperuit Newtonus non parum adjumenti conferre poterit tractatus quem de lineis duplicis curvaturæ an. 1731. Parisiis edidit Clarissimus Geometra D. Clairaut. Horum motuum in conoide parabolico, cono, & cylindro exempla dabimus.

489. Exemplum 1. Sit (vid fig. not. 487). curva B S K parabola cujus latus rectum $= l$, dicatur $\mathrm{AO} = r$, $\mathrm{KC} = a$, $\mathrm{DC} = b$, T N, seu $\mathrm{PO} = x$, & proindè $\mathrm{Pr} = dx$, erit ex naturâ parabolæ, $\mathrm{NK} = \frac{x^2}{l}$, $\mathrm{NG} = \frac{2x^2}{l}$, adeóque $\mathrm{TG}^2 = \frac{4x^4 + llxx}{ll}$, & $\mathrm{TG} = \frac{x\sqrt{4xx+ll}}{l}$; quare si in superioribus formulis (488) ponatur $\mathrm{C}\times\sqrt{\mathrm{DHES}} = pp$, erit $\mathrm{POp} = \frac{p^2\,x\,dx\sqrt{4xx+ll}}{2l\sqrt{x^2\times\mathrm{DHVF}-p^4}}$, & $\mathrm{OXY} = \frac{p^2 r^2 dx\sqrt{4xx+ll}}{2lxx\sqrt{x^2\times\mathrm{DHVF}-p^4}}$. Sit vis centripeta ut distantia à centro C directè, hoc est, in loco quovis T, vel F sit ut T C seu F C, & curva H E V in rectam H e v C mutabitur, & positâ $\mathrm{DH} = q$, erit $\mathrm{DC}\,(b) : \mathrm{FC}$ seu $\mathrm{TC} = \mathrm{DH}\,(q) : \mathrm{Fu} = \frac{q\times\mathrm{TC}}{b}$. Quarè cum sit area $\mathrm{DHuF} = \mathrm{DHC} - \mathrm{FuC} = \frac{1}{2}qb - \frac{1}{2}\mathrm{FC}\times\mathrm{Fu}$, erit $\mathrm{DHuF} = \frac{qbb - q\times\mathrm{TC}^2}{2b}$. Est autem $\mathrm{TC}^2 = \mathrm{TN}^2 + \mathrm{NC}^2 = xx + \overline{\frac{xx}{l} + a}^{\,2} = \frac{x^4 + llxx + 2alxx + llaa}{ll}$. Ergò area $\mathrm{DHuF} = \frac{qllbb - qx^4 - qllx^2 - 2qalx^2 - qlla^2}{2bll}$; Si itaque hic valor loco D H V F, in superioribus æquationibus substituatur, erit

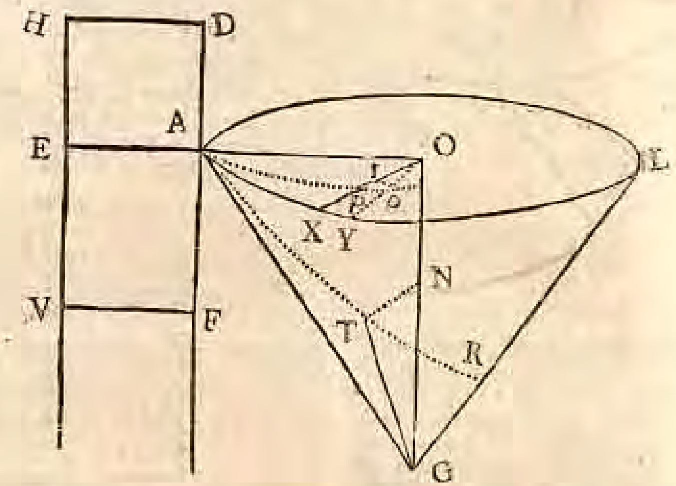
erit $OPp = \frac{p^2 x dx \sqrt{4bxx + bll}}{\sqrt{2qllbbx^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2qla^2x^2 - 4bl^2p^4}}$

& $OXY = \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4bxx + bll}}{x\sqrt{2ql^2bx^2 - 2qx^6 - 2ql^2x^4 - 4qalx^4 - 2ql^2a^2x^2 - 4bl^2p^4}}$.

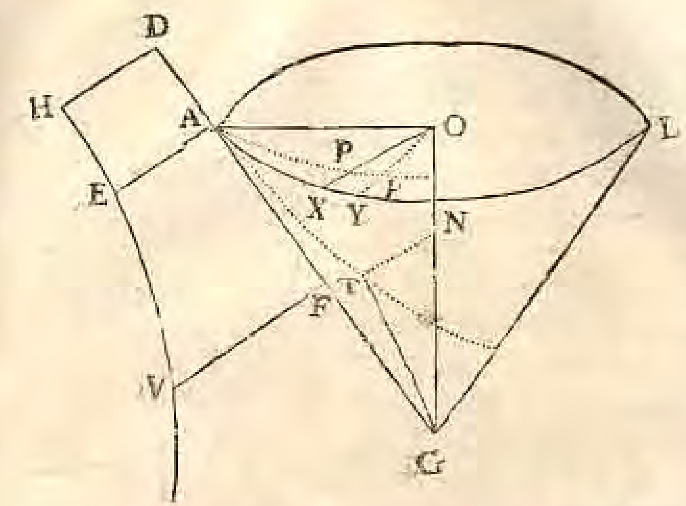
Si igitur ordinatæ db, dc, dicantur y, z, æquationes ad curvas ab, ac, (vid. fig. 2. not. 487.) erunt

$$yy = \frac{4bp^4x^4 + bp^4llxx}{2ql^2b^2x^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2qlla^2x^2 - 4bl^2p^4}$$

$$\& \; zz = \frac{4bp^4r^4xx + bp^4r^4ll}{2qllbbx^4 - 2qx^8 - 2qllx^6 - 4qalx^6 - 2ql^2a^2x^4 - 4bl^2p^4x^2}.$$

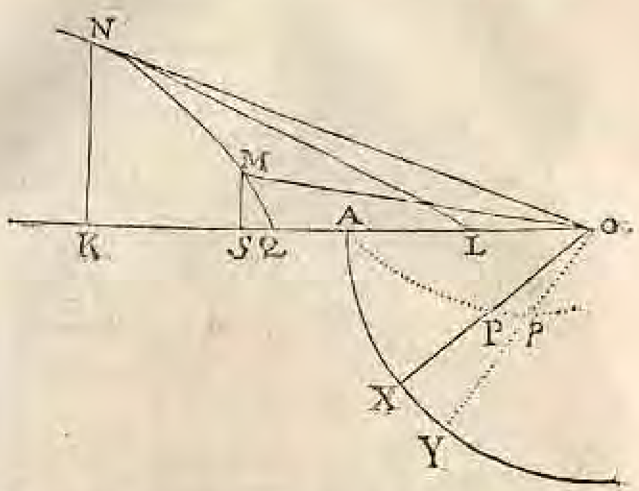


490. Exemplum 2. Sit ATGL, superficies coni recti cujus vertex G, axis GO, basis AXLO, & corpus de loco A egressum moveatur in trajectoria ATR, vis centripeta constans sit & juxta directionem axi OG parallelam semper agat, illamque in locis D, A, F, seu T, exponant rectæ DQ, AE, FV æquales & ad rectam DF axi parallelam perpendiculares, erit punctum V in lineâ rectâ HEV, ipsi DF parallelâ. Sit D locus de quo corpus cadere debet ut habeat in loco A velocitatem cum quâ trajectoriam ATR incipit describere, & ex puncto T, ducatur TG, superficiem conicam tangens in T, & TN $=$ OP ad axem GO perpendicularis. Sit HD $= a$, DA $= b$, OG $= e$, AG $= f$, AO $= r$, PO $=$ TN $= x$, $pr = dx$, erit (ex naturâ coni) AO (r) : AG (f) $=$ TN (x) : TG $\left(\frac{fx}{r}\right)$. Et AO (r) : OG (e) $=$ TN (x) : NG $\left(\frac{ex}{r}\right)$. Undè ON $=$ OG $-$ GN $= \frac{er - ex}{r}$, & DF $=$ DA $+$ ON $= \frac{rb + er - ex}{r} = \frac{hr - ex}{r}$ ponendo $b + e = h$. Quarè area DHEA $= ab$, & DHVF $= \frac{rha - aex}{r}$. Et hinc per formulas (488) $OPp = \frac{Cfxdx\sqrt{ab}}{2r\sqrt{haxx - qx^3 - CCab}}$, ponendo $\frac{ae}{r} = q$, & $OXY = \frac{Crfdx\sqrt{ab}}{2x\sqrt{haxx - qx^3 - CCab}}$, undè facilè inveniuntur æquationes ad curvas AB, AC, ut in exemplo 1°.



491. Exemplum 3um. Tendat vis centripeta ad coni verticem G, & in triplicatâ ratione distantiarum ab illo puncto G decrescat, sitque HEV curva ad quam terminantur perpendicula DH, AE, FV vim centripetam in locis singulis D, A, F, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo superiori. Quoniam $TG = \frac{fx}{r}$ erit vis centripeta in loco T vel F ut $\frac{r^3}{f^3x^3}$, adeóque si fuerit n quantitas data, vis centripetâ supponi poterit $= \frac{n^4}{x^3}$. Sit DG $= m$, & erit (431) area DHVF $= \frac{n^4(mm - xx)}{mmxx} = \frac{kkmm - kkxx}{xx}$, ponendo $\frac{n^4}{mm} = kk$. Quarè si dicatur area DHEA $= pp$, erit $POp = \frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm - kkxx - llpp}} = \frac{qxdx}{\sqrt{hh - xx}}$ ponendo $kkmm - CCpp = kkhh$, & $\frac{Cpf}{2rk} = q$. Similiter invenietur $OXY = \frac{rrqdx}{x\sqrt{hh - xx}}$. Quoniam autem crescentibus areis APO, AXO, decrescit PO, seu x, scribendum est $OPp = \frac{-qxdx}{\sqrt{hh - xx}}$ & $OXY = \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh - xx}}$. Fiat $\sqrt{hh - xx} = z$, & erit $hh - xx = zz$ & $-xdx = zdz$, & $POp = qdz$, sumptisque fluentibus & additâ constanti Q, erit $APO = qz + Q = q\sqrt{hh - xx} + Q$. Portò area APO evanescit ubi PO, seu $x = AO = r$, quarè $o = q\sqrt{hh - rr} + Q$, & hinc $Q = -q\sqrt{hh - rr}$, proindeque $APO = q\sqrt{hh - xx} - q\sqrt{hh - rr}$. Ex dato igitur tempore quo corpus describit AT, geometricè invenitur longitudo lineæ PO. Ponatur nunc $x = \frac{hh}{y}$ & erit $-dx = \frac{hhdy}{yy}$, $hh - xx = \frac{hhyy - h^4}{y^2}$, $\sqrt{hh - xx} = \frac{h\sqrt{y^2 - h^2}}{y}$ atque adeò $OXY = \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh - xx}} = \frac{rrqdy}{h\sqrt{y^2 - h^2}}$. Sit $\frac{rrq}{hh} = \frac{1}{2}r$, & erit $OXY = \frac{\frac{1}{2}rhdy}{\sqrt{yy - hh}}$. Unde habetur constructio sequens.

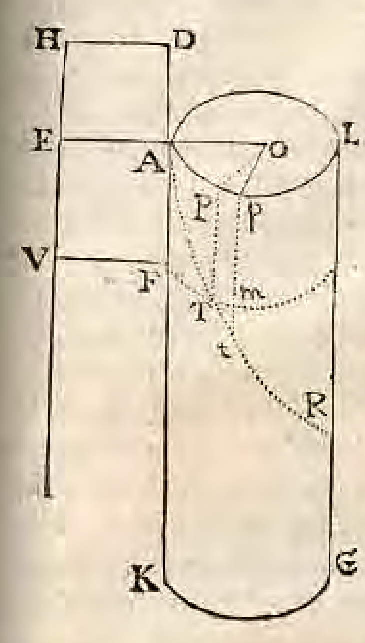
DE MOTU CORPORUM.



Centro O, ſemiaxe tranſverſo OAQ $=h$, ſemiaxe conjugato $=r$, deſcribatur hyperbola QMN, ex illius perimetri puncto quovis N, demittatur ad axem OQ, perpendiculum NK, & abſciſſa OK dicatur y, ductâque rectâ NL, quæ hyperbolam tangat in N, & axi occurrat in L, erit (ex conic.) OK (y) : OQ (h) $=$ OQ (h) : OL $= \frac{hh}{y} = x$, & ſector hyperbolicus ONQ $= S. \frac{1}{2} \frac{rhdy}{\sqrt{hy - hh}}$ (427) atque adeò AXO $=$ ONQ $+ Q$ conſtante. Si ponatur x, ſeu $\frac{hh}{y} =$ OA $= r$, hoc eſt $y = \frac{hh}{r}$ evaneſcet area AXO, quare ſi capiatur OS $= \frac{hh}{r}$ & ad axem erigatur perpendiculum SM, hyperbolæ occurrens in M; jungaturque OM, erit $o =$ OMQ $+ Q$, & $Q = -$ OMQ, undè AXO $=$ ONQ $-$ OMQ $=$ ONM. Sumatur itaque ſector circuli OAX $=$ ſectori hyperbolico ONM, & in radio OX capiatur OP $=$ OL, erit P punctum in veſtigio ſeu curvâ A P p. Hinc ſi ex dato tempore quæratur locus T (vid. fig. ſuper.) in trajectoriâ TR, inveniatur primum longitudo OP, ſeu OL, tum agatur LN tangens hyperbolam in puncto aliquo N; Deindè capiatur ſector circularis AXO $=$ ſectori hyperbolico ONM, & in radio OX, capiatur OP $=$ OL, ac tandem ex puncto P, erigatur ad planum AOP (vid. fig. ſuper.) perpendiculum PT, quod ſuperficiei conicæ occurret in loco quæſito T.

Exempl. 4. Moveatur corpus de loco A per trajectoriam ATR, in ſuperficie concavâ cylindri recti AKGL, in quo ſit baſeos centrum O, manifeſtum eſt veſtigium trajectoriæ ATR, coincidere cum baſeos peripheriâ circulari APL, quam proindè punctum P, æquabili velocitate deſcribet (per prop. 56.) Sit vis centripeta conſtans & per lineas lateri cylindri AK parallelas ſemper agat, dicanturque HD $= a$, DA $= b$, AF $=$ PT $= y$, mt $= dy$, arcus AP $= x$, Pp $=$ Tm $= dx$, Tt $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, erit area DHEA $= ab$, area DHVF $= ab + ay$, velocitas in F vel T $= \sqrt{ab + ay}$, undè tempuſculum quo deſcribitur naſcens Tt vel Pp erit $= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$. Et ſit data velocitas quâ punctum P deſcribit circulum APL dicaturque c erit tempuſculum quo deſcribitur Pp $= \frac{Pp}{c} = \frac{dx}{c}$; quare $\frac{dx}{c} =$

LIBER PRIMUS. PROP. LVI. PROBL. XXXVII.



$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$, & $\frac{dx^2}{cc} = \frac{dx^2 + dy^2}{ab + ay}$, & $abdx^2 + aydx^2 - ccdx^2 = ccdy^2$, & $dx = \frac{cdy}{\sqrt{ab - cc + ay}} = \frac{cdy}{\sqrt{aq + ay}}$, ponendo $ab - cc = aq$. fiat jam $\sqrt{q + y} = z$, $q + y = zz$, $dy = 2zdz$, $\sqrt{aq + ay} = z\sqrt{a}$ erit $dx = \frac{2czdz}{z\sqrt{a}} = \frac{2c}{\sqrt{a}} \times dz$, & ſumptis fluentibus additâ conſtanti Q, erit $x = \frac{2cz}{\sqrt{a}} + Q = \frac{2c\sqrt{q + y}}{\sqrt{a}} + Q$. Ponatur $y = o$, erit etiam $x = o$, adeòque $o = \frac{2c\sqrt{q}}{a} + Q$, & $Q = -\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$, undè $x = \sqrt{\frac{4ccq + 4ccy}{a}} - \sqrt{\frac{4ccq}{a}}$. Sit $\frac{4cc}{a} = p$, & $\frac{4ccq}{a} = nn$, erit $x = \sqrt{nn + py} - n$, $xx + 2nx = py$, $y = \frac{xx + 2nx}{p}$. Conceſſâ igitur quadraturâ circuli facilè invenitur trajectoriæ ATR punctum quodvis T capiendo perpendiculum PT ad arcum AP, ut eſt AP $+ 2n$ ad p. Ex tempore autem dato datur arcus AP. Si corporis de loco A egredientis velocitas eadem ſit ac velocitas puncti P in plano baſeos APLO revolventis erit $cc = ab$, & quoniam ſuppoſuimus $ab - cc = aq$, eſſet $q = o$, & proindè $nn = \frac{4ccq}{a} = o$, atque hinc $y = \frac{xx}{q}$, ſeu $p : x = x : y$. Sive ſcribendo loco p ejus valorem $\frac{4cc}{a}$, in quo loco cc ponatur ab, erit $4b : x = x : y$, hoc eſt, 4DA ad arcum AP ut is AP ad PT.

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed (f) ambo (per legum corollarium quartum) quasi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus à lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora (t) duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuò, figuras similes.

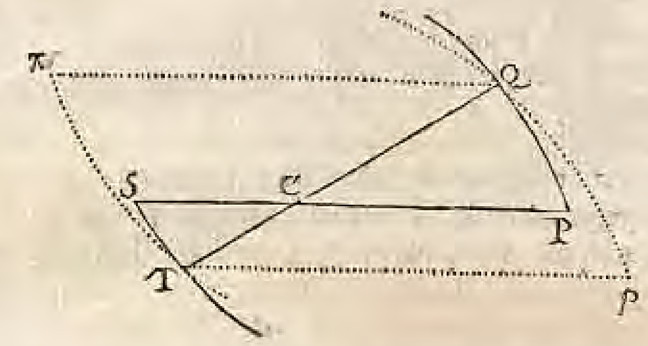
Sunt (u) enim distantiæ corporum à communi gravitatis centro

(f) * *Sed ambo (per leg. corol. 4.) quasi attractione mutuâ* vel ad se invicem rectâ lineâ ferantur, vel, si ambo vi impressâ obliquè projiciuntur, *circum gravitatis centrum commune quiescens aut uniformiter progrediens revolvantur.*

(t) * *Corpora duo.* Si corpora duo S, P se invicem trahentia revolvantur circâ commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T & de P ad Q; similes sunt hæ figuræ quatuor, nimirum PQC, STC, quas corpora S & T circa commune gravitatis centrum C describunt, tum figura PQT quam corpus P describit circa corpus S spectatum tanquam immotum, & figura πTQ, quam S circâ P similiter spectatum describit.

(u) * *Sunt enim distantiæ corporum à communi gravitatis centro* QC, CT *reciprocè proportionales corporibus datis* P, S (60)

tro reciprocè proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, & componendo in datâ ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in datâ ratione ad invicem, & æquali



(60) *atque ideò in datâ ratione ad invicem, & componendo*, QC est ad QT in datâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. *Feruntur autem distantiæ* QC, TC, *circa centrum C terminum suum communem æquali motu angulari*, id est, angulus QCP est semper æqualis angulo TCS propterea quod distantiæ QC, TC in directum semper jacent (60). Quare (112) duæ figuræ PQC, STC similes sunt. Quod erat primum.

Agatur per T recta Tp lineæ SP æqualis & parallela; & si corpus S tanquam immotum spectetur, motus corporis P quod in Q pervenit idem erit respectu corporis S seu T, ac si corpus P de loco p translatum esset in locum Q, eritque QT ad Tp seu SP, ut QC ad CP, & angulus QTp = QCP unde figura PQ circâ punctum S ut immotum spectatum à corpore P descripta erit similis figuræ PQC ideoque & figuræ STC, simili ratiocinio ostendetur figuram πTQ circa punctum P immotum à corpore S descriptam, esse similem figuræ STC ideoque & figuræ PQC. Quod erat alterum.

Quod forte facilius adhuc intelligetur, si ponamus in corpore S spectatorem qui se & lineam SP tanquam immota habeat, in hâc enim hypothesi, ubi corpus S pervenerit in locum T, linea SP, quæ tanquam immota spectatur erit Tp ipsi SP æqualis & parallela & spectator in T locatus motum corporis P videbit sub angulo QTp = QCP, & ad distantiam TQ. Cum igitur sit semper QC ad CP, ut QT ad SP, seu Tp, & angulus QCP, æqualis angulo QTp, figura pQT, similis erit figuræ PQC, adeóque & figuræ STC. Pariter si per Q agatur Qπ æqualis & parallela PS liquet figuram πTQ quam S circa P spectatum tanquam immotum describit esse similem & æqualem figuræ pQT quam corpus P, circa S spectatum tanquam immotum describit. Patet etiam harum omnium figurarum partes similes eodem tempore describi, ideoque etiam totas figuras æqualibus temporibus percurri.

æquali motu angulari circum terminos ſuos feruntur, figuras circum eoſdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel quieſcunt, vel (a) motu quovis non angulari moventur, deſcribunt omninò ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ, quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuò, poteſt figura ſimilis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iiſdem deſcribi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T*, deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipſis *SP*, *TQ* æquales & parallelæ ducantur

ſemper *sp*, *sq*; & curva *pqv*, quam punctum *p* revolvendo circum punctum immotum *s* deſcribit, (b) erit ſimilis & æqualis curvis, quas corpora *S*, *P* deſcribunt circùm ſe mutuò: proindeque (per theor. xx.) ſimilis curvis *ST* & *PQV*, quas eadem corpora deſcribunt circum commune gravitatis centrum *C*: idque quia proportiones linearum *SC*, *CP*, & *SP* vel *sp* ad invicem dantur.

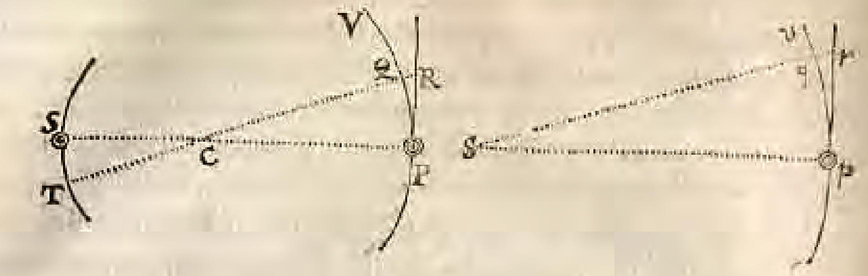
Caſ.

(a) * *Motu quovis non angulari.* Vide Legum coroll. 5. & 6.

(b) * *Erit ſimilis & æqualis curvis*, ut patet ex demonſtratione propoſitionis ſuperioris.

Caſ. 1. Commune illud gravitatis centrum *C*, per legum corollarium quartum, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quieſcit, inque *s* & *p* locentur corpora duo, immobile in *s*, mobile in *p*, corporibus *S* & *P* ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ *PR* & *pr* curvas *PQ* & *pq* in *P* & *p*, & producantur *CQ* & *sq* ad *R* & *r*. Et ob ſimilitudinem figurarum *CPRQ*, *sprq* erit *RQ* ad *rq* ut *CP* ad *sp*, ideoque in datâ ratione. Proinde ſi vis, quâ corpus *P* verſus corpus *S*, atque ideo verſus centrum intermedium *C* attrahitur, eſſet ad vim, quâ corpus *p* verſus centrum *s* attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus *PR*, *pr* ad arcus *PQ*, *pq* per intervalla ipſis proportionalia *RQ*, *rq*, ideoque vis poſterior efficeret, ut corpus *p* gyraretur in curvâ *pqv*, quæ ſimilis eſſet curvæ *PQV*, in quâ vis prior efficit, ut corpus *P* gyretur; & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione *CP* ad *sp*, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum *S* & *s*, *P* & *p*, & æqualitatem diſtantiarum *SP*, *sp*) ſibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus poſterius *p* trahatur per intervallum majus *rq*, requiritur tempus majus, (c) idque in ſubduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur veloci-

(c) *Idque in ſubduplicatâ ratione intervallorum.* Naſcentibus arcubus Pq, PQ tempora quibus deſcribuntur intervalla rq, RQ ſunt in ſubduplicatâ ratione eorumdem intervallorum, per Lem. X. Quare ſi velocitates uniformes quibus ſimiles arcus naſcentes pq, PQ æqualibus viribus centripetis deſcribuntur, dicantur V, v, tempora T, t, erit $T^2 : t^2 = rq : RQ = sp : CP = pq : PQ$, eſt verò (5) $V : v = \frac{pq}{T} : \frac{PQ}{t}$ ſive ut $\frac{T^2}{T} : \frac{t^2}{t}$, adeóque $V : v = T : t = \sqrt{sp} : \sqrt{CP}$. Itaque corpora P, p, viribus æqualibus ſemper attracta, circum centra quieſcentia C, s, naſcentes figuras ſimiles PQ, pq, adeóque & figuras quaſvis ſimiles PQV, pqu, deſcribent temporibus & velocitatibus quæ erunt in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum ſimilium CP, sp. Eſt autem (ex Dem.) figura pqu, ſimilis & æqualis figuræ quam corpus P, circum corpus mobile S, (ſpectatum tanquam immotum; ut in propoſitione ſuperiori expoſuimus) deſcribit eodem tempore, quo circà centrum C, deſcribit figuram ſimilem PQV.



locitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicatâ ratione distantiæ sp ad distantiam CP, eo ut temporibus, quæ sint in eâdem subduplicatâ ratione, describantur arcus pq, PQ, qui sunt in ratione integrâ: Et corpora P, p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & s figuras similes PQV, pqv, quarum posterior pqv similis est & æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unà cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ pqv similes & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, ellipses concentricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires (d) distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, describunt (per prop. XI. XII. XIII.) &

(d) * *Distantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus p, circà s, & corpora duo P, S, circà commune gravitatis centrum C, & circum se mutuò figuras similes vi centripetâ æquali describant, sitque (per prop. X.) figura pqu ellipsis cujus centrum S, liquet veritas corollarii.

& circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciprocè proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuò ductis, (e) describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *&* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem & æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S+P.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes PQ & pq describuntur, sunt in subduplicatâ ratione distantiarum CP & SP vel sp, hoc est, in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes PQ & pq describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eâdem subduplicatâ ratione. *Q. E. D.*

PRO-

(e) * *Describunt areas temporibus proportionales.* Nam tempora quibus describuntur areæ quævis similes spq, CPQ, & spu, CPV, sunt semper in datâ ratione, nimirum, subduplicatâ distantiarum similium sp, CP (ex Dem.) & proinde tempus quo describitur area spq, est ad tempus quo describitur area spu, ut tempus quo describitur area CPQ, ad tempus quo describitur area CPV; sed (per prop. 1.) tempora quibus describuntur areæ spq, spu, sunt areis illis adeóque & areis similibus CPQ, CPV proportionalia, ergò areæ CPQ, CPV sunt ut tempora quibus describuntur; & quoniam areæ quas corpora S, P circum centrum gravitatis describunt similes sunt areis quas iisdem temporibus describunt circum se mutuò, erunt quoque areæ istæ proportionales temporibus quibus describuntur.

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S & P, viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciprocè proportionalibus, ſe mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipſeos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S deſcribit, axis principalis erit ad axem principalem ellipſeos, quam corpus idem P circa alterum quieſcens S eodem tempore periodico deſcribere poſſet, ut ſumma corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc ſummam & corpus illud alterum S.

(f) Nam ſi deſcriptæ ellipſes eſſent ſibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema ſuperius) forent in ſubduplicatâ ratione corporis S ad ſummam corporum $S+P$. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipſi poſteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipſeos autem axis principalis (per prop. XV.) minuetur in ratione, cujus hæc eſt ſeſquiplicatâ, id eſt in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ eſt triplicatâ; ideoque erit ad axem principalem ellipſeos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inversè, axis principalis ellipſeos circa corpus mobile deſcriptæ erit ad axem principalem deſcriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primum duorum mediè proportionalium inter $S+P$ & S. *Q. E. D.*

PRO-

(f) *Nam ſi deſcriptæ ellipſes &c.* Axis principalis ellipſium æqualium, quas corpora S, P circum ſe mutuò deſcribunt (ut ad prop. 57. expoſuimus) æqualis eſt axi principali ellipſeos, p q u, quam corpus p vel P, circà corpus s vel S, reverâ immotum deſcribit (ut in prop. 58). Hic axis dicatur A tempus periodicum quod in ellipſibus quatuor quas corpora S, P circum C & circum ſe mutuò deſcribunt (ut in prop. 57.) idem eſt, dicatur t, tempus periodicum in ellipſi p q u, quam corpus p, vel P, circà corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in prop. 58.) deſcribit dicatur T, ſitque X axis principalis ellipſeos quam corpus idem P, vel p, circà alterum S vel s reverâ immotum (ut in prop. 58.) deſcribere poſſet tempore periodico t, erit (per prop. 59.) $T^2:t^2=S+P:S$. & (per prop. 15.) $T^2:t^2=A^3:X^3$, quare $A^3:X^3=S+P:S$. Jam ſi capiantur duæ quantitates B, C mediæ proportionales inter $S+P$ & S, erit $S+P$ ad S in ratione triplicatâ $S+P$, ad B, hoc eſt $S+P:S=\overline{S+P}^3:B^3$, ac proinde $A^3:X^3=\overline{S+P}^3:B^3$, ideoque $A:X=S+P:B$. Q. E. D.

PROP. LXI. THEOR. XXIV.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuò, ſed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, (g) tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem ſunt, ac ſi à corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam datur ratio diſtantiæ corporis utriuſvis à centro illo communi ad diſtantiam inter corpora, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex unâ diſtantiâ & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ diſtantiâ, & quantitatibus totidem datis, datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, ſit directè vel inversè ut diſtantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc diſtantiâ & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti diſtantia à centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hâc diſtantiâ & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. (h) Hoc eſt, vis trahentis eadem erit lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Tendunt ad commune gravitatis centrum*, eſt enim communis interſectio omnium rectarum quæ corpora revolventia jungunt, & ſecundum quas, vires quibus corpora ſe mutuò trahunt, diriguntur.

(h) * *Hoc eſt vis trahentis eadem erit lex &c.* Sit (in fig. prop. 58.) $TQ=x$, $CQ=y$, & x ad y in ratione datâ a ad b, ſeu $x=\frac{ay}{b}$, vis quâ corpora S, P in

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora (per theorema novissimum) perinde movebuntur, ac si à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesin; & propterea (per legum corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per prop. xxv.) perinde ac si à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuò trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

(i) Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum corollarium quintum, & theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum unà cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed à corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato secundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, (k) determinandus est motus per problema nonum & vicesimum sextum: & (l) habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. (m) Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. *Q. E. I.*

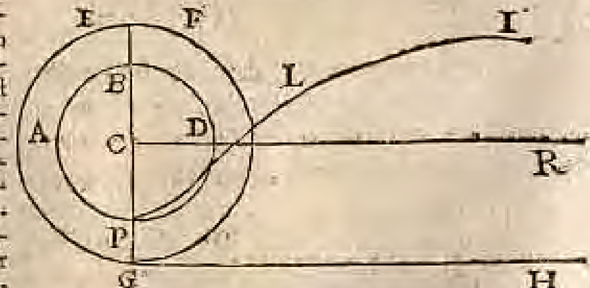
in locis T, Q se mutuo trahunt sit ut x^m, erit $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$, adeóque eadem vis etiam ut y^m, ob datam rationem a^m, ad b^m, cumque vis quâ corpora se mutuò trahunt æqualis sit vi quâ ad commune gravitatis centrum C urgentur, erit quoque vis ad C tendens ut y^m. Sit nunc vis quâ corpora se mutuò trahunt ut $cx^n + ex^m$, & c, e quantitates datæ, erit $cx^n + ex^m = \frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$, ideóque vis ad C tendens ut $\frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$.

(i) * *Ex datis corporum motibus absolutis sub initio, datur uniformis motus absolutus centri communis gravitatis* (67, 68, 69) *& hinc datur motus spatii quod unà cum hoc centro* & eâdem cum illo celeritate *moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii.*

(k) * *Determinandus est motus per probl. 9.* si corpora projiciantur secundùm directionem quæ cum eorum distantia non coincidat, & *per probl. 26.* si coincidat directio projectionis cum distantiâ corporum.

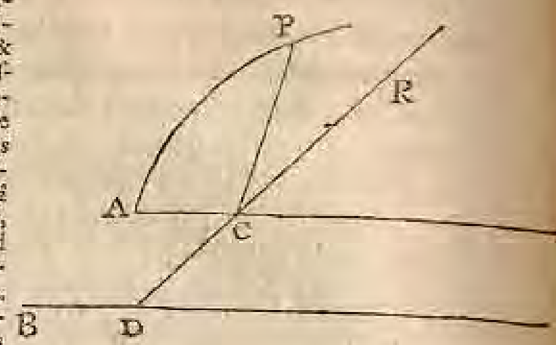
(l) * *Et habebitur simul motus corporis alterius* è regione, si ex corpore cujus locus inventus est, per centrum gravitatis commune duorum, agatur recta quæ ità determinetur ut sit corpus cujus locus quæritur ad corpus aliud ut distantia data hujus à centro gravitatis communi ad eam rectam; in extremo hujus rectæ erit locus corporis quæsitus (60).

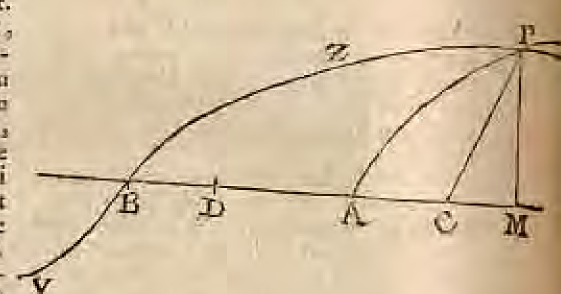
(m) 493. *Cum hoc motu componendus est &c.* In hypothesi hujus problematis, corpora duo circà commune gravitatis centrum ceu umbilicum sectiones conicas describunt (per cor. 2. prop. 58.) & satis est (ex notâ superiori) unius corporis motum determinare. Itaque, exempli gratia, corpus P circulum P A B D uniformiter describat intereadum circuli centrum C, cum ipsius circuli plano æquabiliter movetur per rectam C R diametro P B perpendicularem, sitque semper circuli planum mobile in plano hujus schematis immoto. In linea CP capiatur C G ad C P in ratione velocitatis centri C per lineam C R progredientis, ad velocitatem corporis P in circuli peripheriâ revolventis, rota G E F centro C & radio C G descripta super regulam G H ad G C normalem progrediatur revolvendo circà axem suum, & punctum P in plano circuli G E F immotum describet interea trochoidem P L I quæ erit trajectoria quam corpus P motu absoluto describit; (ut patet ex prop 31. & not. 367). Hâc enim ratione centrum C percurret spatium C R = G H = semiperipheria rotæ G E F, eodem tempore quo punctum P revolvetur per totam semiperipheriam P A B; erit que proinde velocitas centri C per lineam C R ad velocitatem puncti vel corporis P in peripheriâ circuli P A B ut semirota ad semicirculum, hoc est, ut radius C G ad radium C P. Hinc si velocitas centri C æqualis sit ve-



locitati corporis P in circulo suo revolventis, trochois P L I erit cyclois vulgaris; si velocitas centri C major extiterit, erit P L I trochois oblongata, si velocitas centri C minor, erit P L I trochois decurtata.

Sit nunc AP fectio quævis conica cujus vertex A, umbilicus feu virium & gravitatis commune centrum C, axis tranfverfus AC, centrum C uniformiter moveatur in rectâ DR pofitione datâ, & cum illo planum curvæ APC, ità transferatur in plano hujus fchematis immoto, ut axis AC, rectæ BD, pofitione datæ fit femper parallelus. Dum corpus P in curvâ AP revolvens eft in vertice A, fit C in D & A in B, ex datâ velocitate uniformi centri C in lineâ DR, dabitur fpatium DC quod centrum illud C dato tempore defcribit, nec non pofitio curvæ AP. capiatur (per prop. 30. vel 31. ejufve fcholium) area APC rectæ datæ DC feu tempori proportionalis & obtinebitur locus abfolutus corporis P, hoc eft, punctum trajectoriæ quam corpus P in plano hujus fchematis immoto defcribit.



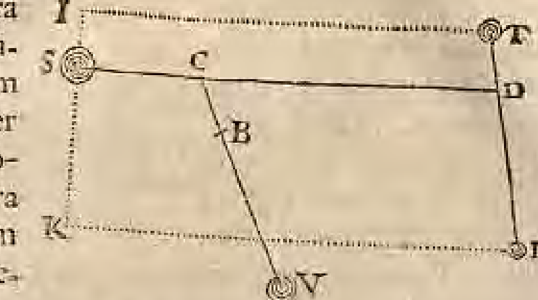


Sit AP parabola, & umbilicus C, cum plano APC uniformi motu progrediatur in axe BC, dum corpus P eft in vertice parabolæ A, fit umbilicus C in D & vertex A in B, & trajectoria BZP, quam corpus P, in plano hujus chartæ immoto defcribit erit parabola fecundi generis quæ cubica dici folet. Nam fit AC, feu BD $= p$, & proindè parabolæ AP, latus rectum $= 4p$ (per theor. 2um. de parabola). PM ad axem AB ordinatim applicata $= y$, BM $= x$, erit (ex naturâ Parabolæ, per theor. 1um. de Parabolâ) $AM = \frac{yy}{4p}$, adeóque $BA = DC = x - \frac{yy}{4p} = \frac{4px - yy}{4p}$, CM (five AM − AC) $= \frac{yy - 4pp}{4p}$. Porrò (ex Archimede prop. 17. de quadr. Parab. quæ eft theor. 4um. de parabolâ) area APM $= \frac{2}{3}$ AM × PM $= \frac{2y^3}{12p}$; area trianguli CPM $= \frac{1}{2}$ CM × PM $= \frac{y^3 - 4ppy}{8p}$; undè area APC = APM − CPM $= \frac{y^3 + 12ppy}{24p}$. Eft autem area APC, tempori quo defcribitur proportionalis, feu ut linea DC vel BA $= \frac{4px - yy}{4p}$, quarè fi fuerit $\frac{a}{b}$ quantitas conftans, erit $\frac{y^3 + 12ppy}{24p} = \frac{4apx - ayy}{24p}$, hoc eft $y^3 + ayy + 12pyy = 4apx$, æquatio ad parabolam cubicam BZP, quæ crura habet contraria BZ, BV in infinitum progredientia.

PRO-

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

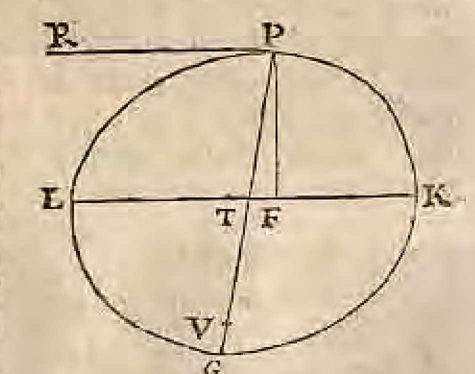
Viribus quibus corpora fe mutuo trahunt crefcentibus in fimplici ratione diftantiarum à centris: requiruntur motus plurium corporum inter fe.



Ponantur primo corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Defcribent hæc (per corollarium primum theorematis 21.) ellipfes centra habentes in D, quarum magnitudo (n) ex problemate v. innotefcit.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L viribus acceleratricibus ST, SL, & ab ipfis viciffim trahatur. Vis ST, (per legum corol. 2.) refolvitur in vires SD, DT; & vis SL in vires SD, DL. Vires (o) autem DT, DL, quæ funt

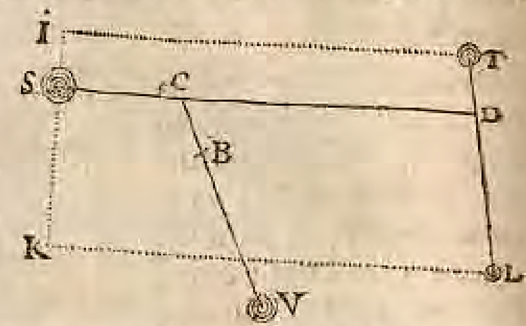
(n) 494. *Ex problemate 5. innotefcit.* Si enim corpus aliquod de loco dato P exeat cum datâ velocitate & fecundum datam directionem PR ut ellipfim PLGK, circà centrum T datum defcribat, recta PR pofitione datâ ellipfim tanget in P, ideòque diameter LK, ipfi PR parallela (prop. 32. Lib 1. conic. Appoll. five Lem. IV. de Conic. & Theor. I. de Ell.) dabitur pofitione. Prætereà, fi ex puncto P ad diametrum LK demittatur perpendiculum PF, erit vis centripeta data quâ corpus verfus T urgetur fecundum directionem PT ad partem vis illius quæ juxtà directionem PF, agit, ut PT ad PF, proindeque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxtà directionem PF urgente, datâque corporis de loco P exeuntis velocitate in lineâ PR, ad PF perpendiculari, dabitur radius circuli ellipfim ofculantis in P, quam corpus P cum hâc velocitate atque vi centripetâ poteft defcribere (199.) & hinc dabitur altera dia-



meter conjugata LK, & ellipfis defcribi poterit (vide Probl. de Ellipfi p. 130).

(o) * *Vires autem DT, DL, quæ funt ut ipfarum fumma TL &c.* Eft enim DT ad TL in ratione datâ corporis L ad fummam corporum T + L, & DL ad TL, in ratione datâ corporis T ad fummam corporum T + L (60); quarè vires DT, DL, in quâcunque pofitione corporum T & L, funt ut TL.

sunt ut ipsarum summa TL, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & posterior posteriori, componunt vires distantiis DT ac DL proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. 1. prop. x. & corol. 1. & 8. prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, (p) actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas TI, LK, ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam IK accessus (q) faciendo ut systema corporum T & L ex unâ parte, & corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. (r) Tali motu corpus S, eo quod summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantiæ CS proportionalium, tendit versus centrum C, describit ellipsin circa idem



C;

(p) * *Actionibus motricibus* $SD \times T$, & $SD \times L$ (per def. 8. & not. 12.) *quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter* ob æqualem vim acceleratricem SD, ut fit in corporibus gravibus, quæ licet massis inæqualia, vi tamen gravitatis acceleratrice, cadendo æqualiter accelerantur.

(q) * *Faciendo ut systema corporum T, & L*, (seu D centrum gravitatis commune ipsorum) *ex unâ parte*, & *corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus* in dato plano secundum directiones parallelas & contrarias impressis *gyrentur circa C commune gravitatis centrum trium corporum.*

(r) * *Tali motu corpus S &c.* Corpus S à corporibus T & L trahitur viribus quæ sunt inter se ut $ST \times T$ & $SL \times L$ (ex hyp.) & per resolutionem virium corpus S a corporibus T & L versus D & C juxtà directionem SD seu SC trahitur viribus quæ sunt inter se ut $SD \times T$ & $SD \times L$, hoc est, vi quæ est ut $SD \times \overline{T+L}$, adeóque ut SD, ob datam corporum summam $T+L$, & ut CS, ob datam rationem SD ad CS, (61). Corpus idem S juxtà directiones oppositas ipsis DT, DL parallelas, trahitur viribus quæ sunt inter se ut $DT \times T$ & $DL \times L$, hoc est, viribus æqualibus (60) quæ proindè nullam

C; & punctum D, ob proportionales CS, CD, describet ellipsin consimilem è regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, prius priore, posterius posteriore, æqualiter & secundum lineas parallelas TI & LK, ut dictum est, attracta, pergent (per legum corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile D ellipses suas describere, ut prius. *Q. E. I.*

Addatur jam corpus quartum V, & (s) simili argumento concludetur hoc & punctum C ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, sed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere licebit. *Q. E. I.*

(t) Hæc ita se habent, etsi corpora T & L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiæ ductæ in corpora trahentia, & (u) ex præcedentibus facilè deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili describunt. *Q. E. I.*

PRO-

lam mutationem producunt. Quarè cum systema corporum T & L, seu ipsorum commune centrum gravitatis D, versus S seu C trahatur quoque vi quæ est ut SD, ac proinde ut CD (61), patet quod corpus S, ex unâ parte, & punctum D ex alterâ describant circum C ellipses consimiles, si justis cum velocitatibus, ut suprà dictum est, projiciantur.

(s) * *Simili argumento*, considerando corpora T & L tanquam corpus unicum in centro D positum, *concludetur* &c.

(t) * *Hæc ita se habent.* Nam propositionis demonstratio non supponit vires acceleratrices quibus corpora T & L ad distantiam datam trahunt corpus S, esse æquales viribus acceleratricibus quibus se mutuò ad eandem distantiam trahunt. Undè manet demonstratio, etsi corpus S a corpore v. gr. T ad distantiam datam trahatur majori vel minori vi acceleratrice quam corpus L ad eandem distantiam.

(u) * *Et ex præcedentibus facilè deducetur.* Vis enim seu actio acceleratrix, quâ corpus T versus D trahitur, est (ex Dem. & Hyp.) ut $TL \times L + TD \times S$, hoc est, ut $TD \times \overline{S+T+L}$, ob $TL \times L = TD \times \overline{T+L}$ (60); & vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, est (ex Dem. & Hyp.) ut $SD \times S$, hoc est ut $CS \times S + CD \times S$; sed (61) $CS \times S = CD \times \overline{T+L}$, adeóque vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, est ut $CD \times \overline{T+L+S}$. Quarè vis acceleratrix quâ corpus T versùs D trahitur, est ad

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decreſcunt in duplicatâ ratione diſtantiarum ab eorundem centris, moveri poſſe inter ſe in ellipſibus; & radiis ad umbilicos ductis areas deſcribere temporibus proportionales quam proximè.

In propoſitione ſuperiore demonſtratus eſt caſus ubi motus plures peraguntur in ellipſibus accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi poſitâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri poteſt, ut corpora, ſecundum legem hic poſitam ſe mutuo trahentia, moveantur in ellipſibus accuratè, niſi ſervando certam proportionem diſtantiarum ab invicem. In ſequentibus autem caſibus non multùm ab ellipſibus errabitur.

Caſ. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo diſtantias revolvi, tendantque ad ſingula vires abſolutæ proportionales iiſdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quieſcit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva eſſe, ut corpus maximum nunquam diſtet ſenſibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quieſcet, vel movebitur uniformiter in directum, ſine errore ſenſibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipſibus, atque radiis ad idem ductis deſcribent areas temporibus proportionales; (y) niſi quâtenus errores inducuntur, vel per errorem maximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in ſe mutuo. Diminui autem poſſunt corpora minora, uſque donec error iſte, & (z) actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipſibus quadrent, & areæ reſpondeant temporibus, ſine errore, qui non ſit minor quovis dato. *Q. E. O.*

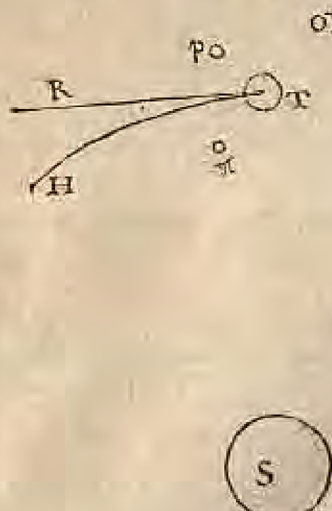
ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versùs C, ut TD ad CD, hoc eſt ut diſtantiæ à punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, & punctum D ad C trahuntur viribus abſolutis æqualibus, hoc eſt, eodem modo ad ſua reſpectivè centra D & C trahuntur quo traherentur, ſi circà idem virium centrum ad diſtantias TD, DC revolverentur, ſed in hoc caſu æqualibus temporibus periodicis ellipſes ſuas deſcriberent (per cor. 2. prop. X.) ergò & in illo caſu corpus T circà D & punctum D circà C, æqualibus temporibus periodicis ſuas ellipſes deſcribunt. Idem eodem modo demonſtratur, cùm plura ſint corpora revolventia.

(y) * *Niſi quatenus errores inducuntur &c.* Nam ſi corpus maximum à communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque eſſet actio minorum corporum in ſe mutuò, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipſi circà maximum, atque radiis ad idem ductis deſcriberet areas temporibus proportionales (per cor. 2. & 3. prop. 58.)

LIBER PRIMUS. PROP. LXV. THEOR. XXV.

Caſ. 2. (a) Fingamus jam ſyſtema corporum minorum modo jam deſcripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum ſe mutuò revolventium corporum ſyſtema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam diſtantiam ſiti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora ſecundum lineas parallelas urgentur, non mutant ſitus corporum ad invicem, ſed ut ſyſtema totum, ſervatis partium motibus inter ſe, ſimul transferatur, efficiunt: manifeſtum eſt quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorſus orietur mutatio motus attractorum inter ſe, niſi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem: ſecundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones

(z) * *Et actiones mutuæ ſint datis quibuſvis minores* reſpectu actionis corporis maximi in corpora minora; nam cùm corporis vis attractiva abſoluta hic ſupponatur materiæ proportionalis, diminutâ corporis maſſâ, vis attractiva in eâdem ratione minuitur.



(a) * *Fingamus jam corporum minorum, P, p, π, modo jam deſcripto circà maximum T revolventium ſyſtema progredi uniformiter in directum,* ſeu totius ſyſtematis commune gravitatis centrum T, progredi uniformiter per rectam TR, *& intereà vi corporis alterius longè maximi S, & ad magnam diſtantiam ſiti, urgeri ad latus* ſecundum rectas PS, ps, πS, TS, atque à rectâ TR retrahi & in curvam TH cogi &c.

nes omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum; & augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores sint, quam datæ quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius; hoc est, (b) centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (*viz.* (c) Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) & radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ, perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. (d) In casu secundo, quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum à corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, (e) non sint ad invicem reciprocè ut quadra-

(b) * *Hoc est, centro suo gravitatis,* in quo totum systema gravium P, p, π, T, unitum ac contractum intelligitur (71).

(c) * *Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsim vel* circulum *fortiore*; manente enim velocitate corporis circà centrum virium S projecti, & circulum vel ellipsim describentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad eandem distantiam possit Parabolam describere, & magis adhuc decrescere illam attractionem oportet, ut describat Hyperbolam (per cor. 7. prop. 16, & Dem. prop. 17).

(d) * *In casu 2°. quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium corporum, eo magis* recedit à casu ubi perturbatio est nulla, nempe quandò corpus S infinitè distat, ergò eò *magis turbabuntur motus partium systematis inter se.*

(e) * *Non sint ad invicem reciprocè &c.* Exempli causâ, Si corpora P, p, diversis legibus traherentur, P, v. gr. in ratione reciprocâ quadrati distantiæ suæ à corpore maximo S; p verò in ratione cubi distantiæ.

ta distantiarum à corpore illo maximo; (f) præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quàm inæqualitas proportionis distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsibus, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eædem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissimè, aut urgentur æqualiter, & secundum lineas parallelas quamproximè.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

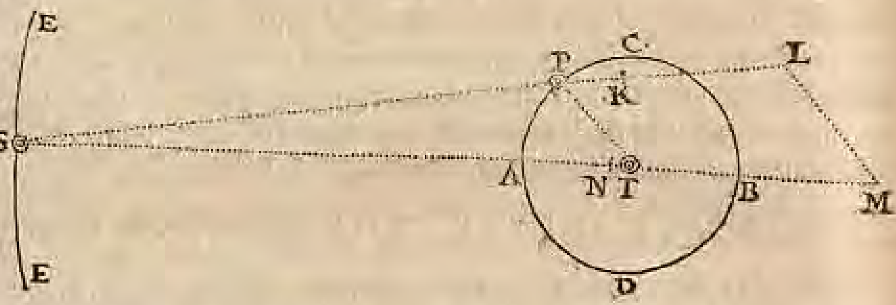
Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat, vel multò minus vel multò magis attractum, aut multò minus aut multò magis agitetur.

Liquet ferè ex demonstratione corollarii secundi propositionis præ-

(f) * *Præsertim si proportionis hujus inæqualitas &c.* Exempli causâ, si inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major sit inæqualitate distantiarum SP, Sp; Nam si illæ inæqualitates attractionum & distantiarum essent in datâ ratione, evanescente distantiarum SP, Sp differentiâ, quando corpus maximum S longissimè distat, evanesceret quoque attractionum acceleratricum inæqualitas.

præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.

Cas. I. Revolvantur corpora minora P & S in eodem plano circa maximum T, quorum P describat orbem interiorem PAB, & S exteriorem ESE. Sit SK mediocris distantia corporum P & S; & corporis P versus S attractio acceleratrix, in mediocri illâ distantiâ, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione SK ad SP capiatur SL ad SK, & (g) erit SL attractio acceleratrix corporis P versus S in distantiâ quâvis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M;



& attractio SL resolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones SM, LM. Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad T, & oritur à mutuâ attractione corporum T & P. Hâc vi solâ corpus P circum corpus T, sive immotum, sive hâc attractione agitatum, describere deberet & areas, radio PT, temporibus proportionales, & ellipsin cui umbilicus est in centro corporis T. Patet hoc per prop. XI. & corollaria 2. & 3. theor. XXI. Vis altera est attractionis LM, quæ quoniam tendit à P ad T, superaddita vi priori coincidet cum ipsâ, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per corol. 3. theor. XXI. At (h) quoniam non est quadrato distantiæ PT reciprocè proportionalis, componet eâ cum vi priore vim ab hâc proportione aberrantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.) vis, quâ ellipsis circa umbilicum T describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ PT reciprocè proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut orbis PAB aberret à formâ ellipseos umbilicum habentis in T; idque eo magis, quo major est aberratio ab hâc proportione; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim viribus primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia SM, trahendo corpus P secundum lineam ipsi ST parallelam, componet cum prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à P in T; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus P, radio TP, areas non amplius temporibus proportionales describat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero PAB aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertia duplici de causâ adaugebit, tum quod non dirigatur à P ad T, (i) tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ PT. Quibus intellectis, manifestum est, quod areæ temporibus tum maximè fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod orbis PAB tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipuè vis tertia sit minima, vi primâ manente.

Exponatur corporis T attractio acceleratrix versus S per lineam

(g) * *Et erit SL attractio acceleratrix &c.* Est enim (ex Hyp.) ut SP^2 ad SK^2 ità attractio acceleratrix in K (quam exhibet linea SK) ad attractionem acceleratricem in P, quam proindè exhibebit linea SL.

(h) 495. *At quoniam non est quadrato distantiæ PT reciprocè proportionalis*, Est enim (ex constr.) $SK^2 : SP^2 = SL : SK$, adeóque $SK^3 : SP^3 = SL \times SK : SK \times SP = SL : SP$. Sed ob triangula MLS, TPS similia $SL : SP = LM : PT$; ergò $LM : PT = SK^3 : SP^3$, & proindè vis LM est ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, seu datâ SK, ut $\frac{PT}{SP^3}$; unde crescente distantiâ PT crescit vis LM.

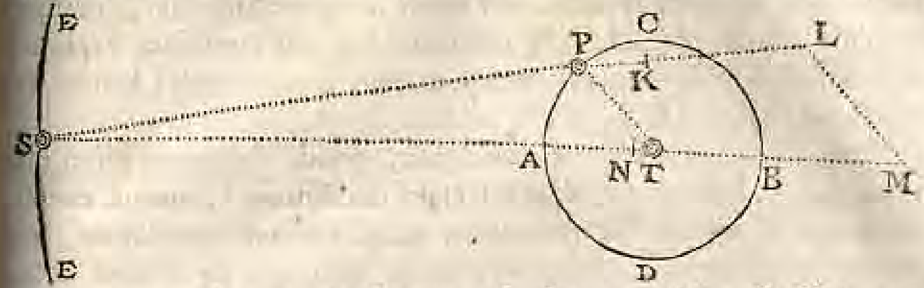
(i) 496. *Tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis &c.* Nam PT est ad ST ut vis LM est ad vim SM, sed (495) vis LM est ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, & proindè vis SM est ut $\frac{SK^3 \times ST}{SP^3}$. Quare vis SM, datis SK & ST, est ut $\frac{1}{SP^3}$.

neam SN; & si attractiones acceleratrices SM, SN æquales essent; hæ, trahendo corpora T & P æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per legum corol. VI.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio SN minor esset attractione SM, tolleret ipsa attractionis SM partem SN, & maneret pars sola MN, quâ temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio SN major esset attractione SM, oriretur ex differentiâ solâ MN perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur semper attractio tertia superior SM ad attractionem MN, attractione primâ & secundâ manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita PAB ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ versùs corpus S, accedunt quantùm fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio SN non est nulla, neque minor minimâ attractionum omnium SM, sed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quasi mediocris; hoc est, non multo major neque multo minor attractione SK. *Q. E. D.*

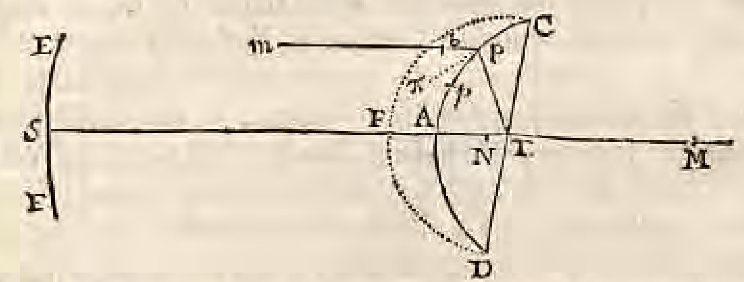
Cas. 2. (k) Revolvantur jam corpora minora P, S circa maximum T in planis diversis; & vis LM, agendo secundum lineam PT in plano orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano orbitæ suæ deturbabit.

(k) 497. *Cas.* 2. Planum TESE cum hujus schematis plano congruere supponatur, orbitæ verò PAB planum alterâ sui parte, v. gr. CAD suprà planum TESE eminere, & alterâ parte DBC infrà planum TESE deprimi intelligatur; linea recta DC communis planorum TESE & PAB intersectio, linea nodorum dicitur; & illius extrema puncta D & C nodi appellantur. Nodi vel puncta quævis D, C dicuntur esse in quadraturis seu aspectum quadratum obtinere respectu corporis S, dum sunt in lineâ rectâ ad ST in puncto T perpendiculari, quod in hoc casu corpus S & punctum C vel D sub angulo recto de loco T videantur. Si super lineâ ST erectum intelligatur planum plano TESE verticale, sintque puncta A & B in illo plano verticali, A quidem inter corpora S & T; B verò ultrà T, punctum A dicitur esse in conjunctione, & punctum B in oppositione respectu corporum S & T; & loca A & B, communi nomine syzigiæ vocantur. Motus in longitudinem est quo corpus revolvens P à puncto suæ orbitæ dato, v. gr. à puncto C recedit per CPADB: motus in latitudinem est is quo corpus revolvens P ad planum immotum TESE accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolventium P & S motus inter se conferantur, & utrumque in eandem plagam feratur, v. gr. ab Occidente in Orientem, motus in consequentia fieri dicitur; si verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in consequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab Oriente in Occidentem in antecedentia fieri dicetur.

(l) At vis altera NM, agendo secundum lineam quæ ipsi ST parallela est (atque ideo, quando corpus S versatur ex-



tra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ PAB) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, indu-



(l) * *At vis altera NM &c.* Si orbitæ PAB (vid. fig. Newt.) pars ACB suprà planum TESE elevata, pars verò altera ADB infrà ipsum depressa intelligatur, ita ut linea nodorum AB coincidat cum lineâ TS sitque proinde corpus S in lineâ nodorum productâ, vis NM ut potè quæ in corpus P agit secundum lineam ipsi TS parallelam, jacebit in plano orbitæ PAB, & motum corporis P in latitudinem non perturbabit, hoc est, non efficiet ut corpus P ad planum TESE magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus S versatur extrà lineam nodorum, vis NM inducet perturbationem motûs in latitudinem. Sit enim CADT pars orbitæ quam corpus P exclusâ vi NM describeret suprà planum TESE seu CFD eminens, sit CD linea nodorum, Pm recta æqualis & parallela NM, p locus ad quem corpus P exclusâ vi NM tempusculo minimo perveniret, b locus in lineâ Pm ad quem corpus idem P, solâ vi NM, eodem tempusculo traheretur; corpus illud P duabus viribus impulsum, quarum altera agit secundum directionem Pp in plano CAD altera secundùm directionem Pm ad planum CAD inclinatam, motu composito describet lineam Pπ quæ non est in plano CAD.

inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus *P* de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum *P* & *T* ad invicem situ, erit ut vis illa generans *MN*, ideoque minima evadet ubi *MN* est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio *SN* non est multo major, neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

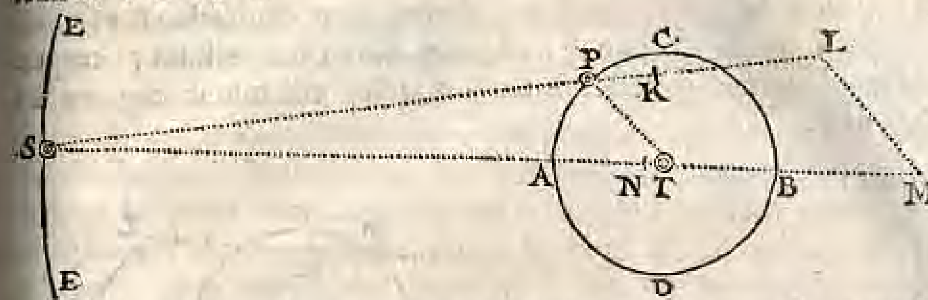
Corol. 1. (n) Ex his facilè colligitur, quod, si corpora plura minora *P*, *S*, *R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur, atque à cætera se mutuo.

Corol. 2. In systemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciprocè ut quadrata distantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius describet prope conjunctionem *A* & oppositionem *B*, quam prope quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit secundum lineam *PT* accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigitur. (o) Talis est vis *NM*. Hæc in transitu corporis *P* à *C* ad *A* tendit in consequentia, motumque accelerat; dein usque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in consequentia usque ad *B*, & ultimo in antecedentia transeundo à *B* ad *C*.

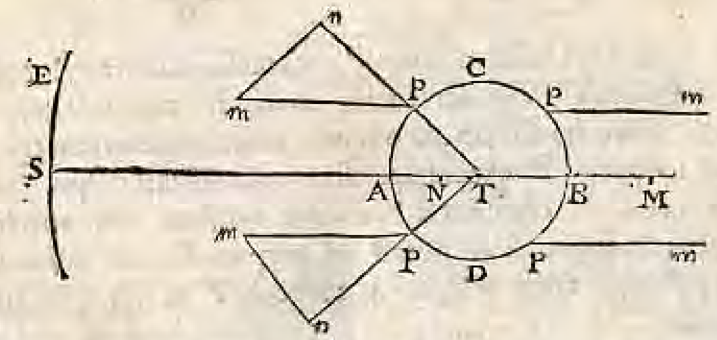
(n) * *Corollarium primum* patet ex demonstratis cum duo tantum sunt corpora minora P, S; addatur enim tertium corpus R, eodem modo demonstrabitur motum corporis intimi P minimè perturbari attractione ipsius R, ubi corpus maximum T pariter attrahitur à corpore illo R, ac corpus P, & ità de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quare ex demonstratis *facilè colligitur quod si &c.*

(o) 498. *Talis est vis NM.* Si supponamus orbem CADB (vid. fig. Newt.) esse circulo finitimum, & distantiam SD maximam respectu radii PT, erit ferè SC=SK=ST=SN, & proinde NM=TM. Porrò corpore P in quadraturis C, D versante, est SC=SP=SK; quare cum sit (per constr. prop. 66.) SL:SK =SK²:SP², erit in quadraturis SL=SK=SC, & LM coincidet cum CT seu PT, adeóque evanescet TM seu NM. Nulla igitur erit virium SM, SN, in quadraturis differentia, & ideò corpus P reliquis viribus ad centrum T tendentibus agitatum, radio vectore areas ibi describet temporibus proportionales. At ubi corpus P extrà quadraturas est in hemiperipheriâ CAD, vis SM major est vi SN & corpus P virium differentiâ NM trahitur secundùm directionem ipsi TS parallelam.

Sit Pm æqualis & parallela ipsi NM, & demisso ex m in radium TP productum perpendiculo mn, vis Pm, seu NM, in duas vires Pn, nm resolvitur, quarum altera Pn trahendo secundùm directionem radii TP, corporis P motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum descriptionem turbat; altera verò NM, trahendo secundum directionem nm, radio TP perpendicularem, hoc est, secundum directionem tangentis in P, motum in longitudinem accelerat in primo quadrante CA retardat in secundo quadrante AD.

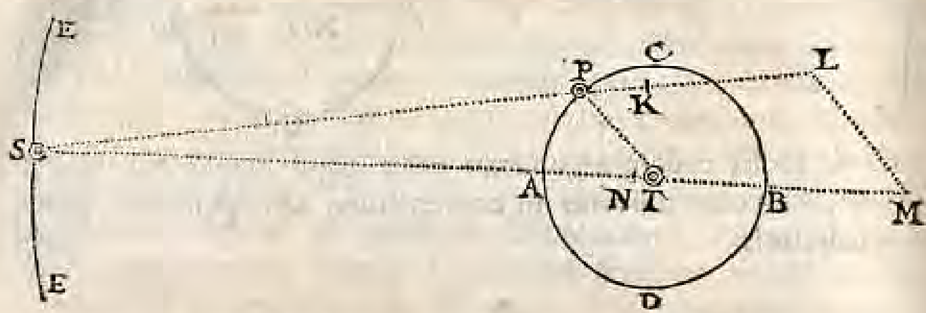


Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppositione quam in quadraturis.



In alterâ hemiperipheriâ DBC, vis SM minor est vi SN, quoniam corpus P à corpore S longius distat quam corpus T, unde si vires perturbantes ad solum corpus P referantur, virium SM, SN differentia NM negativa seu ablatitia erit, aut quod idem est, contrariâ directione aget; Fingatur enim corpora T & P urgeri ambo vi SN ubique æquali & sibi parallela, pergent moveri inter se quasi omnino abesset illa vis per Cor. 6. Legum motûs, tum trahatur corpus P vi NM secundum directionem oppositam vi SN, ex eâ actione mutabuntur motus corporum T & P inter se, sed etiam ex eâ actione vis SN quæ trahere corpus P fingebatur, reducetur ad vim SM quæ est vis reverâ agens dum vis SN agit in T, ergo si æstimentur motus corporum T & P inter se, quasi corpus P in hemiperipheriâ DBC urgeretur virium differentia NM in contrariam partem agente, obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum T & P inter se, ex actionibus SN & SM ortæ, ideoque in posterum considerabitur corpus P in hemiperipheriâ DBC quasi urgeretur vi NM secundum directionem Pm ipsi NM parallelam à P versùs m agente; atque ideo, si vis Pm in duas vires, ut in alterâ hemiperipheriâ factum est, resolvatur, manifestum erit motum in longitudinem in quadrante DB accelerari & in quadrante BC retardari.

Corol. 4. Orbita corporis P, cæteris paribus, curvior eſt in quadraturis quam in conjunctione & oppoſitione. Nam corpora velociora minus deflectunt à recto tramite. Et (p) præterea vis KL, vel NM, in conjunctione & opoſitione contraria eſt vi, quâ corpus T trahit corpus P; ideoque vim illam minuit; corpus autem P minus deflectet à recto tramite ubi minus urgetur in corpus T.

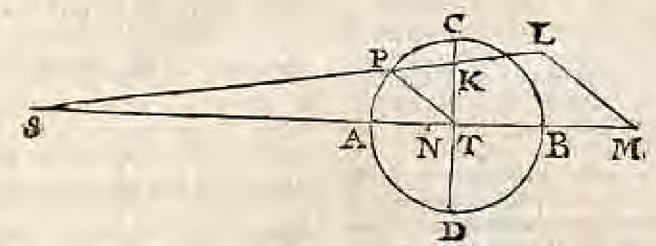


Corol. 5. (q) Unde corpus P, cæteris paribus, longius recedet à corpore T in quadraturis, quam in conjunctione & oppoſitione. Hæc ita ſe habent excluſo motu excentricitatis. Nam ſi orbita corporis P excentrica ſit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol 9. oſtendetur) evadet maxima ubi apſides ſunt in ſyzygiis; indeque fieri poteſt ut corpus P, ad apſidem ſummam appellens, abſit longius à corpore T in ſyzygiis quam in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T, quâ corpus P retinetur in orbe ſuo, augetur in quadraturis per additionem vis LM, ac diminuitur in ſyzygiis per ablationem vis KL, & (r) ob magnitudinem vis KL, magis diminuitur quam augetur; eſt autem vis illa vi centripeta (per corol. 2. prop. IV.) in ratione compoſitâ ex ratione ſimplici radii TP directè & ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compoſitam diminui per actionem vis KL; ideoque tempus periodicum, ſi maneat orbis radius TP, augeri, idque in ſubduplicatâ ratione, quâ vis illâ centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione ſeſquiplicatâ, (per corol. VI. prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim langueſceret, corpus P minus ſemper & minus attra-

(p) 499. *Et præterea vis KL &c.* Iiſdem poſitis quæ in notâ ſuperiori, rectæ SL, SM ſunt fere parallelæ, ac proinde TM = PL & LM = PT quam proximè; quare coincidente P cum A & K cum T, fit LM = AT = PK, & NM ſeu TM = PL = AT + KL, & NM − LM = KL, hoc eſt, vis tota perturbans quâ corpus P in conjunctione A à corpore T verſus S retrahitur, eſt ut KL quam proxime; vi enim LM trahitur P verſus T & vi NM à corpore T verſus S retrahitur. Idem eodem modo demonſtratur, corpore P in oppoſitione B poſito.

(q) * *Undè corpus P &c.* Nam cum orbita corporis P curvior ſit in quadraturis C vel D quam in ſyzigiis A & B (per cor. 4.) neceſſe eſt, cæteris paribus, ut in ſyzigiis A & B depreſſior ſit quam in quadraturis C & D ad inſtar ellipſeos cujus ſit centrum T axis major C D axis minor A B. Hæc ità ſe habent, ſi, excluſis viribus perturbantibus, orbita corporis P fuerit circulus cujus centrum T.



(r) 500. *Et ob magnitudinem vis KL &c.* Si diſtantia mediocris SK vel ST ingens fuerit reſpectu radii TP orbitæ PAB, in loco quovis corporis P, erit vis LM quam proxime ad vim NM ut ſinus totus ad ſinum triplum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem diſtantiam corporis S (ex hyp.) lineæ SL, SM ſunt fere parallelæ ac proinde LM = PT, NM ſeu TM = PL, & SP = SK; cumque ſit ST ad lineam quadraturarum CD perpendicularis, erit etiam SK ad eandem normalis, & exiſtente PT radio, erit PK ſinus anguli PTC, hoc eſt, ſinus diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ C. Porrò (per prop. 66.) SL : SK = SK² : SP², adeoque SL − SK : SK = SK² − SP² : SP², hoc eſt, KL : SK = PK × SK + SP : SP² = PK × 2SP : SP² = 2PK : SP = 2PK : SK, ob SK = SP, & SK + SP = 2SP. Quare erit KL = 2PK, & PL ſeu NM = 3PK, hoc eſt, vis LM ſeu PT ad vim NM ſeu PL ut ſinus totus PT ad 3PK triplum ſinum diſtantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ.

501. Coroll. Vis KL in conjunctione A, eſt ad vim ſimilem in oppoſitione B, ut AT ad TB, & ſi orbita PAB circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis KL in ſyzigiis duplo major vi LM in quadraturis quam proxime. Nam corpore P in ſyzigiis verſante, fit PK = AT = PT = LM, & proinde NM ſeu PL fit = 3LM, & KL = 2LM. Tandem iiſdem poſitis, vis NM maxima eſt in ſyzigiis, quoniam ibi PK fit maxima ſeu evadit = AT, & NM = 3AT.

Unde ob magnitudinem vis KL (500. 501.) vis centripeta corporis centralis T magis diminuitur quam augetur, ideoque cenſenda eſt pro abſolutè diminutâ ab actione corporis S.

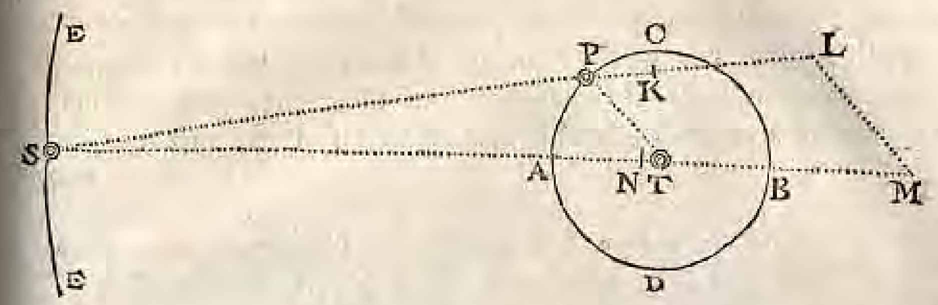
attractum perpetuò recederet longius à centro T; & contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, (s) augeatur ac diminuatur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius TP per vices; & (t) tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione sesquiplicatâ radii, & ratione subduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

Co-

(s) * *Augeatur ac diminuatur per vices.* Quoniam vis quâ corpus P trahitur à corpore T, est ejusdem corporis P vis centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si remissior fuerit vis illa, corpus P minus attractum à centro T longius recederet; & contrà, si augeatur vis illa, corpus P ad T propiùs accedet. Auctâ igitur actione corporis S in T per accessum corporis T ad S, augetur vis N M, minuiturque vis centripeta corporis P, ac proinde crescit distantia P T. Econtrà autem decrescente corporis S actione per recessum corporis T ab S decrescit quoque N M & augetur corporis P vis centripeta, minorque fit distantia P T. Hæc omnia per vices contingent, ubi nempe corpus T corpori S proximius fuerit, augebitur radius P T, ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(t) * *Et tempus periodicum augebitur ac diminuetur &c.* Corpus P circà T, exclusâ corporis longinqui S vi ablatitiâ, in circulo P A D revolvatur, & accedente vi illâ ablatitiâ corporis S quæ, ob ingentem distantiam S T, parva admodum sit respectu vis quâ corpus P à corpore T trahitur, idem corpus P in orbe ferè circulari adhuc revolvetur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum describentis vis acceleratrix versus T directa est semper (per cor. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii T P qui dicatur R directè & ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur t inversè, hoc est, vis acceleratrix corporis P versus T, est ut $\frac{R}{t^2}$, & manente radio ut $\frac{1}{t^2}$; sed vis acceleratrix in distantiâ datâ est ut vis absoluta corporis trahentis, ergò si corporis T trahentis vis absoluta dicatur V, erit V ut $\frac{1}{t^2}$ & t^2 ut $\frac{1}{V}$, ac t ut $\frac{1}{\sqrt{V}}$ manente radio T P seu R. Porrò vis acceleratrix quâ corpus P versus T trahitur, exclusâ vi ablatitiâ corporis S, est reciprocè ut quadratum distantiæ TP, hoc est directè ut $\frac{1}{R^2}$ (ex hyp.) Et quoniam vis ablatitia corporis S, exigua admodum est respectu vis acceleratricis quâ corpus P à corpore T trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore P erit adhuc ut $\frac{1}{R^2}$ quam proximè; quare eâdem manente reliquâ vi centripetâ absolutâ corporis T & mutato utcumque radio R, quadratum temporis periodici t^2 erit ut distantiæ cubus R^3, ac proinde t ut $\sqrt{R^3}$, (per coroll. 6. prop. 4.) hoc est tempus periodicum est in sesquiplicatâ ratione radii T P. Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta absoluta in corpore T, sed per actionem corporis longinqui S radius augeatur, & vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, & vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici t^2 erit in ratione compositâ ex binis rationibus suprà inventis, nimirum ex ratione $\frac{1}{V}$, & ratione R^3, hoc est t^2 erit

Corol. 7. Ex (u) præmissis consequitur etiam, quod ellipseos à corpore P descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi cen-



erit ut $\frac{R^3}{V}$, & proindè t ut $\sqrt{\frac{R^3}{V}}$, aut quod idem est, tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione $\sqrt{R^3}$, sesquiplicatâ radii, & ratione $\frac{1}{\sqrt{V}}$ subduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augetur; nam decrescente V crescit pariter $\frac{1}{V}$, & contrà crescente V in eâdem ratione decrescit $\frac{1}{V}$.

501. Scholium. Hinc ut David Gregorius in scholio ad prop. 17. Lib. 4. Astronomiæ physicæ & geometricæ observavit, si vis centripeta corporis centralis T aliunde quam per vim extraneam corporis S augeatur & minuatur per vices, ut si corporis T vis centripeta absoluta supponatur ipsius massæ proportionalis & nova ei addatur & detrahatur per vices materia, atque indè ejus vis absoluta in eâdem ratione augeatur & minuatur, corpus P in minori & majori orbitâ per vices revolvetur, diminuto & aucto per vices radio T P ejusque tempus periodicum minuetur & augebitur per vices in ratione compositâ ex ratione sesquiplicatâ radii directè & ratione subduplicatâ vis centripetæ absolutæ corporis T inversè ut supra. Vis enim acceleratrix composita & residua quâ corpus T auctum & diminutum per vices trahit corpus P est hic præcisè in duplicatâ ratione distantiæ inversè, quod in casu coroll. 6. quam proximè tantùm obtinet.

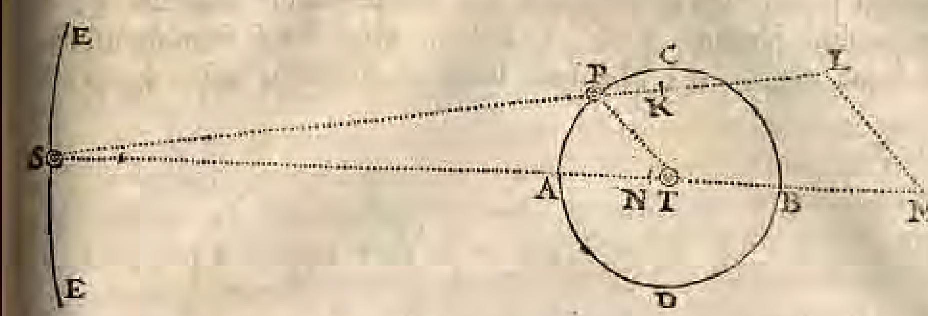
(u) * *Ex præmissis.* Si corpus P circum T ellipsim circulo finitimam describat cujus umbilicus sit T hujus ellipseos *axis major seu apsidum linea* motu angulari circà umbilicum T *per vices progreditur* seu fertur in consequentia *& regreditur*, seu in antecedentia movetur; progreditur nempè, dum corpus P est in syzygiis A & B, regreditur verò dum corpus P est in quadraturis C & D, *sed magis tamen progreditur quam regreditur, & per excessum progressionis fertur in consequentia.*

centripeta, quâ corpus T trahit corpus P. Vis (y) prior LM, si augeatur distantia PT, augetur in eâdem fere ratione cum hâc distantiâ, & vis posterior, decrescit in duplicatâ illâ ratione, ideoque summa harum virium (z) decrescit in minore quam duplicatâ ratione distantiæ PT, & (a) propterea (per corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux, seu apsis summa, regrediatur. In conjunctione verò & oppositione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T, differentia est inter vim, quâ corpus T trahit

(y) * *Vis prior LM &c.* Nam ob ingentem corporis S à corporibus P & T distantiam (ex Hyp.) SL est fere parallela SM, & proinde LM ipsi PT parallela crescit ubique ut PT, quamproxime; in quadraturis verò LM coincidit cum PT.

(z) * *Decrescit in minore quam duplicatâ illâ ratione*, hoc est, non tantùm minuitur in distantiâ majore, nec tantùm augetur in distantiâ minore, quantùm minueretur vel augeretur, si vis tota acceleratrix, seu virium summa esset semper ut quadratum distantiæ reciproce.

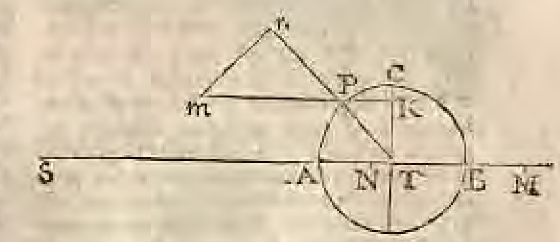
(a) * *Et propterea per cor. 1. prop. 45.* Sit TP $= A$, & LM $= c\times A$; c verò quantitas data, & vis quâ corpus P versus T exclusâ corporis S actione urgetur, erit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2}$, & accedente vi exiguâ LM in quadraturis, harum virium summa erit ut $\frac{1}{A^2}+c\times A$, adeóque hæc virium summa decrescet in ratione paulò minore quam in duplicatâ distantiæ PT seu A. Nam si distantia variabilis A evadat $b\times A$, sitque b numerus unitate major, erit vis in simplici distantiâ A ad vim in distantiâ majore $b\times A$, ut $\frac{1}{A^2}+c\times A$, ad $\frac{1}{b^2A^2}+cbA$, hoc est, ut $bb+cbbA^3$ ad $1+cb^3A^3$ sive ut $bb\times\overline{1+cA^3}$ ad $1\times\overline{1+cb^3A^3}$, hæc autem ratio minor est quam ratio $\frac{1}{A^2}$ ad $\frac{1}{b^2A^2}$, seu b^2 ad 1, cum $(1+cA^3)$ minus sit quàm $1+cb^3A^3$. Ponamus itaque virium summam esse ut $\frac{1}{A^{2-q}}$, seu ut A^{-2+q}, & q, numerum positivum unitate longe minorem, & quoniam si motus totus angularis quo corpus P ab apside unâ ad eandem apsidem redit, sit ad motum angularem revolutionis unius seu 360°. ut numerus aliquis m ad n vis centripeta tota est ut $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ (per cor. prop. 45.) erit hic $\frac{nn}{mm}-3=q-2$, $\frac{nn}{mm}=1+q$, $\frac{n}{m}=\sqrt{1+q}$, & m ad n, seu motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem ad 360°. ut 1, ad $\sqrt{1+q}$, adeóque motus ille angularis ab apside ad eandem $=\frac{360°}{\sqrt{1+q}}$, quare cum sit $\sqrt{1+q}$, paulo major unitate, motus totus angularis ab apside ad eamdem apsidem minor erit 360°. & ideò apsides obviam ibunt corpori P revolventi, seu movebuntur in antecedentia, aut quod idem est, regredientur. Idem facile demonstratur (per cor. 2. prop. 45.) vel per exempla tertia. Cum enim vis tota sit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2}+c\times A$, erit (loco citato), angulus revolutionis corporis inter apsides summam & imam $=180°.\times\sqrt{\frac{1+c}{1+4c}}$; sed quoniam c est numerus positivus, $\frac{1+c}{1+4c}$, est numerus unitate minor, ergò angulus revolutionis corporis P inter apsides minor est 180°.



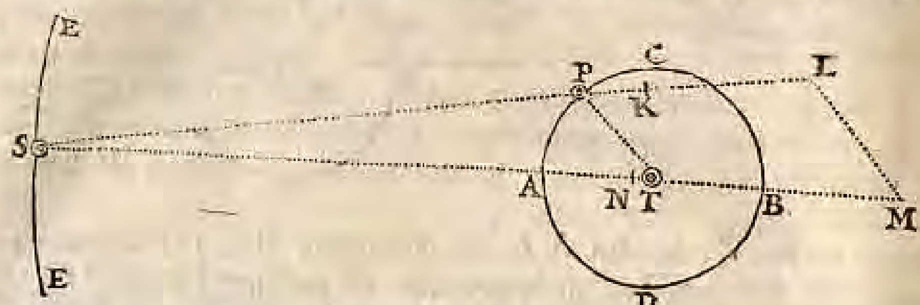
trahit corpus P, & vim KL; & differentia illa, (b) propterea quod vis KL augetur quamproximè in ratione distantiæ PT, decrescit in majore quam duplicatâ ratione distantiæ PT, (c) ideoque (per corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In (d) locis inter syzygias & quadraturas pendet motus augis ex causâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis KL in syzygiis sit quasi duplo major quam vis LM in quadraturis, excessus erit penes vim KL, transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii faci-

(b) * *Propterea quod vis KL &c.* Est enim in syzygiis KL $=$ 2AT, seu 2PT quam proxime (501).

(c) * *Ideóque per cor. 1. prop. 45.* Nam si in superiori calculo loco $+q$ scribatur $-q$, vel loco $+c\times A$, scribatur $-c\times A$, quod vis KL sit ablatitia, invenietur angulus totius revolutionis corporis P ab apside unâ ad eandem apsidem $=\frac{360°}{\sqrt{1-q}}$, vel angulus inter apsides summam & imam $=180°.\times\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Est autem $\sqrt{1-q}$, numerus unitate minor, & $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ numerus unitate major, adeóque $\frac{360°}{\sqrt{1-q}}$, arcus major 360°. & $180°\times\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$, arcus major 180°. quare apsides in hoc casu progrediuntur.



(d) 503. *In locis inter syzygias & quadraturas &c.* Iisdem positis quæ in Lemmate 500. quæritur distantia angularis corporis P à quadraturâ C, v. gr. ubi apsides quiescunt. Per locum corporis P agatur Pm parallela & æqualis NM seu TM, & erit Pm $=$ 3PK (500). Vis Pm, si in radium TP productum demittatur perpendiculum mn, resolvitur in vires Pn, nm, quarum nm agendo secundum lineam radio perpendicularem, vim ac-facilius intelligetur concipiendo systema corporum duorum T, P corporibus pluribus S, S, S, &c. in orbe ESE consistentibus, undique cingi. (e) Namque horum actionibus actio ipsius T

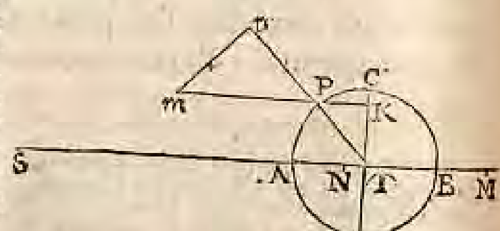


minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicatâ distantiæ.

Co-

acceleratricem corporis P versus T nec auget, nec minuit, & Pn agendo secundum radium TP à P versus n, vim illam acceleratricem corporis P minuit; vis verò LM seu TP vim acceleratricem corporis P versus T auget. Quare ubi erit Pn=PT vis acceleratrix corporis P nec augebitur nec minuetur, & apsides quiescent. Porrò ob triangula TPK, mPn similia PT : PK = Pm, seu 3PK : Pn seu PT. Est igitur in loco quæsito P, $3PK^2 = PT^2$, & proindè $PT : PK = \sqrt{3} : 1$. hoc est sinus totus ad sinum distantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ ut $\sqrt{3}$ ad 1, seu ut 1732. ad 1000. proximè; undè angulus PTC invenitur esse 35°. 26'. circiter. Quiescent igitur apsides in quatuor locis corporis P quæ à quadraturis distant angulo 35°. 16'; & hinc in singulis corporis P revolutionibus, cæteris paribus, apsides regredientur per gradus revolutionis corporis P, 141°, & progredientur per grad. 219.

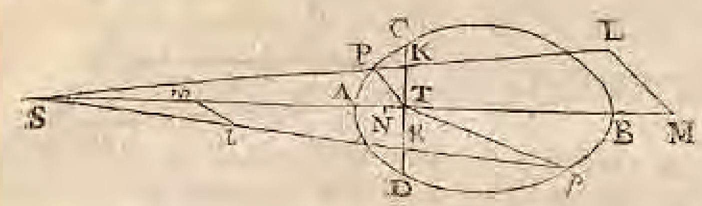
504. Iisdem positis, si orbita CPD, circulo finitima sit, erit vis addititia PT − Pn, maxima in quadraturis. Nam cum sit semper PT : PK = 3PK : Pn, erit $Pn = \frac{3PK^2}{PT}$, ac proindè $PT - Pn = PT$



$- \frac{3PK^2}{PT}$, quæ quantitas maxima evadet ubi erit PK = 0, quod in quadraturis contingit.

(e) * *Namque horum actionibus &c.* Hâc enim ratione corpus P erit semper in quadraturis simul & in syzygiis corporis, seu corporum S, adeóque cum vis ablatitia KL, in syzygiis & propè syzygias sit fere duplo major quam vis addititia LM, in quadraturis & propè quadraturas, actio corporis T minuetur undique, decrescetque proinde in ratione plusquam duplicatâ distantiæ TP.

Corol. 8. (f) Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiæ TP, in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut & à simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est quod apsides in syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu $NM-LM$, progredientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam LM. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.

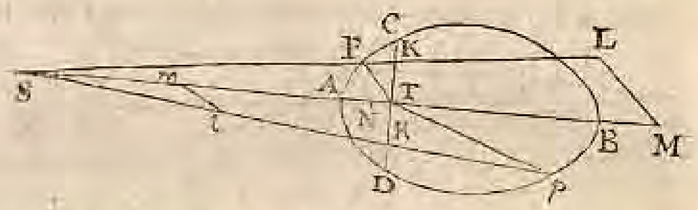


(f) * *Cum autem* (per corol 7.) *pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiæ* TP quæ augetur in recessu à centro T, sive *in transitu corporis P ab apside imâ ad apsidem summam, ut & à simili incremento* in accessu ad centrum, sive *in reditu* ab apside summâ *ad apsidem imam, manifestum est* progressum vel regressum apsidum maximum esse *ubi ratio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ*, porrò dum linea apsidum seu major axis ellipseos BCAD, cujus umbilicus est T, in syzygiis A, B versatur, ratio vis totius corporis P in apside summâ positi ad vim ejus in apside imâ versantis, magis recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apsidum situ. Sit enim B apsis summa, A apsis ima, & erit TB distantia maxima, AT minima (ex naturâ ellipseos). Undè corpore P in conjunctione A versante erit vis ablatitia KL (seu differentia virium acceleratricium corporum T & P versus S) omnium minima, & corpore P in oppositione B versante, erit differentia illa KL omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis S distantiam (ex Hyp.) sit fere KL ad kl ut AT ad TB (501) ratio vis corporis P in A versantis ad vim illius in B positi, exprimi hic poterit per rationem $\frac{b}{AT^2} - c \times AT$, ad $\frac{b}{TB^2} - c \times TB$, (si ratio b ad c exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T, ad vim absolutam ablatitiam KL) seu reductione ad eundem denominatorem factâ, per rationem $TB^2 \times \overline{b - c \times AT^3}$, ad $AT^2 \times \overline{b - cTB^3}$, quæ ratio eò magis recedit à ratione TB^2 ad AT^2, seu duplicatâ distantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis $b - c \times AT^3$, ad quantitatem $b - c \times TB^3$, recedit à ratione æqualitatis, seu quo minor est AT respectu TB, quare dum linea apsidum est in syzygiis A, B, ratio vis totius in apside summâ ad vim in apside imâ maxi-

 mè

De Motu Corporum.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ à centro revolveretur circa hoc centrum in ellipsi; & mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicatâ distantiæ diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam si urgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiæ diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interiorem, & in apside imâ propius accederet ad centrum quam prius. (g) Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in recessu cor-

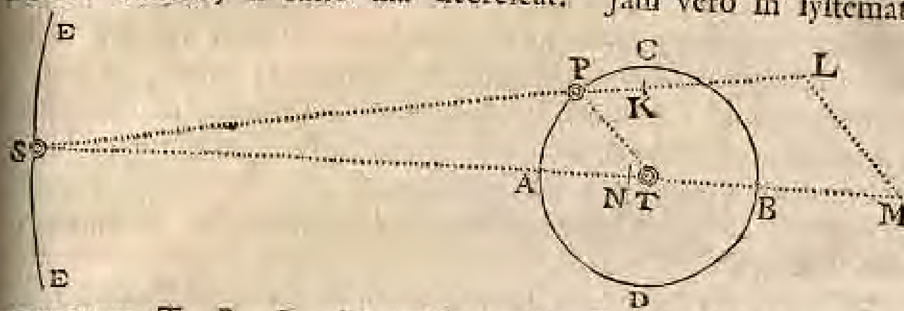


mè recedit à ratione duplicatâ distantiarum inversâ. In hoc igitur lineæ apsidum situ apsides celerrimè progrediuntur, corpore P in syzygiis vel propè syzygias versante. Dum vero corpus P est in quadraturis C, D, fit vis LM = CT, vel DT; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum CT, DT, omnium minima; quare in integrâ corporis P revolutione, apsides viribus CT, DT tardissime regrediuntur in quadraturis corporis P, & celerrime progrediuntur [in ipsius syzygiis, atque adeò excessus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, & apsides in integrâ corporis P revolutione celerrime movebuntur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si linea apsidum in quadraturis posita sit, apsides velocissimè regredientur, corpore P in quadraturis versante, & tardissimè progredientur corpore P in syzygiis existente, & ex hâc utráque causâ fieri poterit ut in integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindeque ut apsides in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis ablatitia KL quæ progressum apsidem in syzygiis corporis P inducit est (500) fere duplo major vi adjectitiâ LM quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit, excessu progressûs suprà regressum, apsides progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc est, eo tempore quo apsides ex T visæ omnes cum corpore S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P & S in suis orbitis ferantur in eandem plagam; In hâc enim hypothesi, apsides diutius hærent in syzigiis quam in quadraturis, quia in syzigiis progrediuntur cum corpore S, atque adeò diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia & corporis S in consequentia revolventis aspectum quadratum veluti fugiunt; undè fit ut apsides diutius progrediantur in syzigiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.

(g) * *Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis excentricus*; manente enim distantiâ apsidis summæ ab orbitæ umbilico, decrescet distantia apsidis imæ ab eodem umbilico, majorque proinde erit ratio prioris distantiæ ad posteriorem, quam

Liber Primus. Prop. LXVI. Theor. XXVI.

corporis ab apside imâ ad apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, ideoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper excentricitas; (h) & contra, diminuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam verò in systemate



corporum *T*, *P*, *S*, ubi apsides orbis *PAB* sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi apsides sunt in syzygiis. Si apsides constituantur in quadraturis, ratio prope apsides minor est & prope syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, (i) uti jam dictum est. (k) At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter

si vis illa nova non accessisset, hoc est, orbis fiet magis excentricus.

(h) * *Et contra &c.* Si in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, vis centripeta augeatur minus quam in duplicatâ ratione distantiæ diminutæ, corpus describet orbem orbi elliptico exteriorem, & in apside imâ, minus accedet ad centrum quam prius; hoc est, orbis fiet minus excentricus, & excentricitas adhuc minuetur, si in corporis ascensu ab apside imâ ad summam, vis centripeta minus decrescat quam antea creverat. Quare si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus minuatur, minuetur semper excentricitas.

(i) * *Uti jam dictum est* (Cor. 7.).

(k) * *At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu corporis P inter apsides in quadraturis C, D constituti, hæc minor est quam duplicata distantiarum.* Sit enim apsis ima C, summa D, umbilicus T, erit (ex Dem.) vis in apside imâ ad vim in apside summâ ut $\frac{b}{CT^2} + n \times CT$, ad $\frac{b}{TD^2} + n \times TD$, (si ratio b ad n exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T ad vim absolutam addititiam LM) & reductione ad eandem denominationem factâ ut $TD^2 \times \overline{b + nCT^3}$ ad $CT^2 \times \overline{b + nTD^3}$, quæ ratio minor est quam ratio TD^2, ad CT^2, ob TD, majorem quam CT; & quoniam in hoc lineæ apsidum situ ratio TD ad CT seu ratio distantiarum umbilici T à qua-

DE MOTU CORPORUM.

inter apſides, hæc minor eſt quam duplicata diſtantiarum. Vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in minore quam duplicatâ ratione diſtantiæ apſidis ſummæ ab umbilico ellipſeos ad diſtantiam apſidis imæ ab eodem umbilico, & contra, ubi apſides conſtituuntur in ſyzygiis, vis in apſide imâ eſt ad vim in apſide ſummâ in majore quam duplicatâ ratione diſtantiarum. Nam vires *L M* in quadraturis additæ viribus corporis *T* componunt vires in ratione minore, & vires *K L* in ſyzygiis ſubductæ à viribus corporis *T* relinquunt vires in ratione majore. Eſt igitur ratio decrementi & incrementi totius, in tranſitu inter apſides, minima in quadraturis, maxima in ſyzygiis: & propterea in tranſitu apſidum, à quadraturis ad ſyzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipſeos; inque tranſitu a ſyzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit.

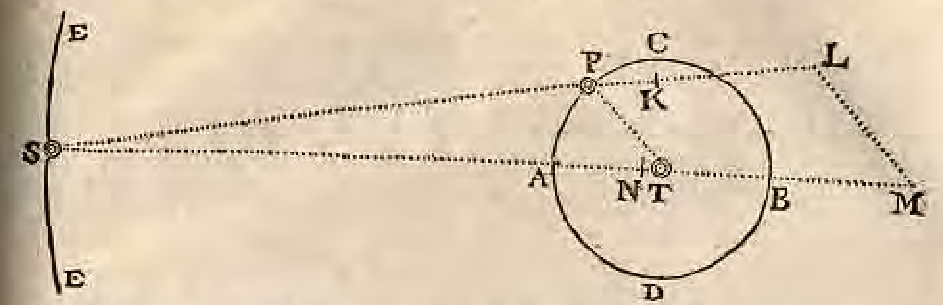
Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis *E S T* immobile manere; & ex errorum expo-

quadraturis maxima eſt, (ex naturâ ellipſeos) patet rationem totius decrementi & incrementi vis centripetæ in tranſitu corporis P inter apſides minimam eſſe in quadraturis apſidum. Et contrà ſi fuerit A apſis ima, B apſis ſumma, erit vis in apſide imâ ad vim in apſide ſummâ ut $TB^2 \times \overline{b - cAT^3}$, ad $AT^2 \times \overline{b - cTB^3}$, adeóque in majori ratione quam TB^2, ad AT^2, & quoniam ratio TB, ad AT, in his apſidum locis maxima eſt, ex naturâ ellipſeos, ratio decrementi & incrementi totius in tranſitu inter apſides, maxima eſt in ſyzygiis apſidum, & propterea ſingulis corporis P revolutionibus in tranſitu apſidum à quadraturis ad ſyzygias, hæc ratio perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipſeos, & in tranſitu apſidum à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit. Maxima ergò eſt orbis excentricitas, ubi apſides ſunt in ſyzygiis, minima ubi ſunt in quadraturis.

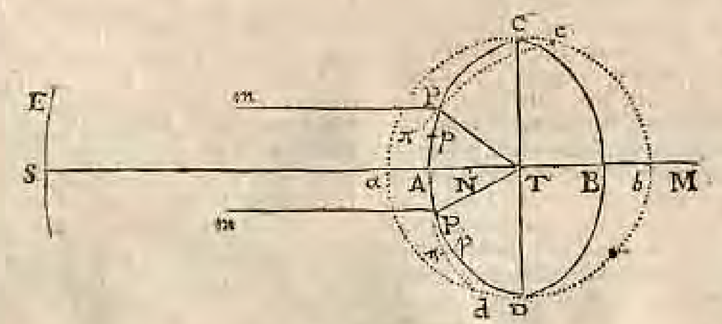
505. Ex his etiam ſequitur in unâquâque corporis P circum T revolutione excentricitatem orbis circà ſyzygias corporis P augeri, & circà ejus quadraturas minui, minimamque eſſe in illius quadraturis, maximam in ſyzygiis, cæteris paribus. Nam (per cor. 7.) corporis P vis centripeta tota in ſyzygiis decreſcit in majori quam duplicatâ ratione diſtantiæ auctæ, & creſcit in majori ratione quam duplicatâ diſtantiæ diminutæ, & in quadraturis contrà. Quare corpus P, in ſyzygiis & prope ſyzygias deſcribit partem orbis magis excentrici, in quadraturis verò & prope quadraturas partem orbis minus excentrici (ex demonſtratis initio cor. 9.) Et quoniam vis addititia LM in quadraturis corporis P maxima eſt, & vis ablatitia KL in ſyzygiis ejus etiam maxima, vis autem addititia excentricitatem diminuit & ablatitia auget, manifeſtum eſt quod (cæteris paribus) in unâ corporis P revolutione, excentricitas orbis minima fit in quadraturis corporis P, & maxima in illius ſyzygiis, atque adeò quod à quadraturis ad ſyzygias perpetuò augeatur, & à ſyzygiis ad quadraturas perpetuò minuatur.

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

poſitâ causâ manifeſtum eſt, quod ex viribus *N M*, *M L*, quæ ſunt cauſa illa tota, vis *ML* agendo ſemper ſecundum planum orbis *PAB*, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis *N M*, ubi nodi ſunt in ſyzygiis, agendo etiam ſecun-



dum idem orbis planum, (l) non perturbat hos motus; (m) ubi verò ſunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpuſque *P* de plano orbis ſui perpetuò trahendo, (n) minuit inclinationem plani in tranſitu corporis à quadraturis ad ſyzygias, augetque viciſſim



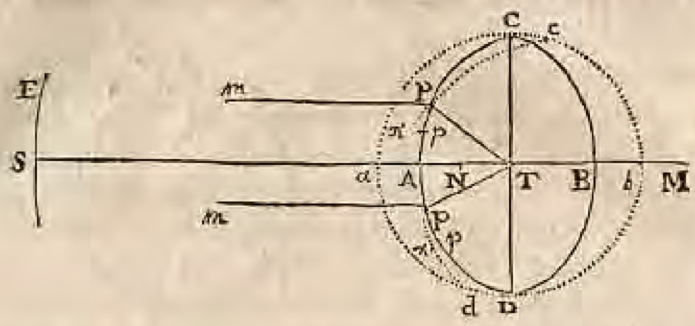
(l) * *Non perturbat hos motus.* Patet per caſ. 2. prop. 66.

(m) 506. *Ubi verò ſunt in quadraturis eos maximè perturbat*; Ubi nodi ſunt in quadraturis C & D inclinatio directionis vis N M (quæ lineâ P m exhibetur) ad planum orbitæ corporis P maxima eſt, utpote æqualis planorum CAD, EST inclinationi & proindè, cæteris paribus, maximè potenter agit; in alio enim lineæ nodorum ſitu, minor eſt inclinatio directionis vis N M ad planum orbitæ corporis P, & evaneſcit cum nodi ſunt in ſyzygiis; creſcitque adeò in tranſitu nodorum à ſyzygiis ad quadraturas, & contrà decreſcit in eorum tranſitu à quadraturis ad ſyzygias.

(n) 507. *Minuit inclinationem plani &c.* Si orbitæ corporis P nodi in quadraturis C, D conſtituantur, angulus inclinationis orbitæ ad planum immotum EST perpetuò minuitur in tranſitu corporis P à quadraturis

De Motu Corporum.

cissim eandem in transitu à syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut (o) corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium mi-



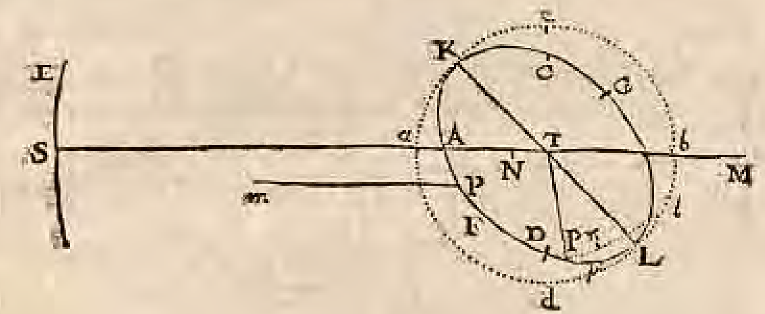
turis ad syzygias, augetur verò in transitu corporis à syzygiis ad quadraturas, & in utroque transitu nodi regrediuntur. Sit enim orbitæ P A B pars C A D suprà planum immotum E S T elevata altera, verò pars C B D infrà illud depressa intelligatur; per locum corporis P agatur recta P m parallela lineæ T S, exhibens directionem vis N M, & corpus P feratur primum à nodo seu quadraturâ C ad conjunctionem A, & quoniam corpus P vi revolutionis per arcum P p urgetur, & vi N M per rectam P m trahitur, tempore quam minimo, vi compositâ, describet lineolam P π quæ non est in plano C P T, sed ab eo deflectit versus P m, adeóque corpus movetur in plano T P π quod productum plano E S T non occurret in C sed ultra C versus oppositionem B. Centro T & intervallo T P describatur in plano E S T circulus C a D b, in plano C P D circuli arcus P C, & in plano π P T arcus P c circulo C a D b, occurrens in c. Et quoniam vis N M minima est respectu vis revolutionis corporis P, angulus C P c, inclinationis planorum C P T & c P T minimus est seu infinitesimus, & arcus P c ab arcu P C nonnisi minimâ seu infinitesimâ quantitate differt; quare cum (ex hyp.) arcus P C à quadrante C A differat finitâ quantitate P A, summa arcuum P C, P c semicirculo minor est, & hinc in triangulo sphærico C P c, angulus externus P C a (per prop. 13. sphæricorum Menelai, vel per theor. 33. Sphæricorum Clariss. Wolfii), major est angulo interno opposito P c C, hoc est, inclinatio plani c P T ad planum immotum E S T minor est inclinatione plani C P T ad idem planum E S T. In transitu igitur corporis P à quadraturâ C ad conjunctionem A orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, & quoniam nodus C transfertur in c, fitque proinde obviam corpori revolventi, nodi regrediuntur. Eodem modo demonstratur inclinationem minui & nodos regredi in transitu corporis a quadraturâ D ad oppositionem B. Jam feratur corpus à conjunctione A ad quadraturam proximam D, & in loco quovis P, duplici vi, nempe vi revolutionis per arcum P p & vi N M per rectam P m urgetur, atque adeò describit lineolam P π, quæ ab arcu P p versus P m declinat. Quare si centro T & intervallo T P describantur ut suprà tres arcus P D, a D, P d, eodem modo demonstrabitur nodum D transferri in antecedentia in d, & angulum P d a majorem esse angulo interno opposito P D d, hoc est, inclinationem orbitæ augeri in transitu corporis P, à conjunctione ad quadraturam proximam, & eadem eodem modo ostenduntur fieri in transitu ab oppositione B ad quadraturam C. Q. E. D.

(o) * *Corpore in syzygiis existente.* Vis enim N M, cæteris paribus maxima est in syzigyis (501).

Liber Primus. Prop. LXVI. Theor. XXVI.

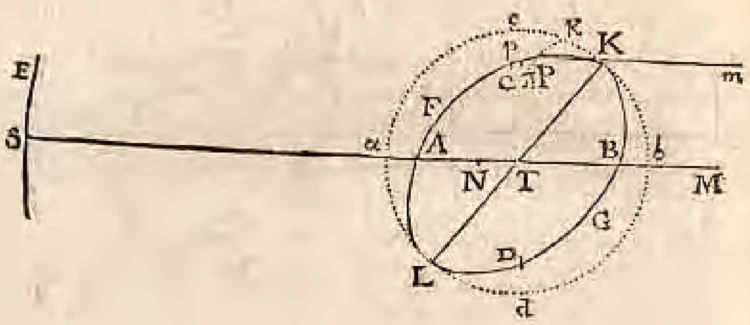
minimâ, (p) redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. (q) At si nodi constituan-

(p) * *Redeatque ad priorem magnitudinem circiter.* Si enim orbita C A D B perfectè circularis maneret, æqualis esset vis N M in paribus corporis P distantiis à nodis C & D, in utroque quadrante C A & A D, vel D B & B C; quare cum orbita C A D, circulo finitima supponatur, & per vim exiguam N M minuatur inclinatio plani in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias, & contrà augeatur per æqualem vim N M in transitu corporis P à quadraturis ad syzygias; liquet quod inclinatio redeat ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus P à syzygiâ ad nodum proximum in quadraturâ positum accedit.



(q) 508. *At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, id est in locis K & L ità ut anguli K T c, K T a sint æquales, seu 45°. 1°. Inclinatio plani perpetuò minuitur in transitu corporis P à nodo ad gradum indè nonagesimum F vel G. 2°. Augetur in transitu à gradu illo 90°. ad quadraturam proximam.* 3°. In utroque transitu regrediuntur nodi. 4°. *In transitu à quadraturâ ad nodum proximum inclinatio minuitur* & nodi progrediuntur. 1um, 2um, & 3um. Eodem modo demonstrantur ac superius (505). Quartum ità ostenditur. Dum corpus P à quadraturâ D ad nodum proximum L fertur, directio vis N M, quæ antè dirigebatur à P versus m in contrariam mutatur; Quarè corpus P inter D & L positum vi revolutionis urgetur per arcum P p & vi N M ab illo arcu retrahitur versus M atque vi utrâque fertur tempore minimo per lineolam P π quæ ab arcu P p in plagam M a deflectit. Si itaque centro T & intervallo T P describantur tres arcus circulares P L, P π, L l b a, in planis T P L, T P π, E S T eodem modo ac in notâ 507. patet angulum P l L minorem esse angulo P L a. Unde in transitu corporis à quadraturâ D ad nodum proximum L inclinatio orbitæ minuitur & nodus progreditur; eadem fieri in transitu corporis à quadraturâ C ad nodum proximum K, eodem modo demonstratur. Q. E. D.

tuantur in octantibus post quadraturas, id est, inter C & A, D & B, intelligitur ex modo expositis, quod, in transitu corporis P à nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuò in transitu per alios 45 gradus, usque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, (r) & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. (s) Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi sunt

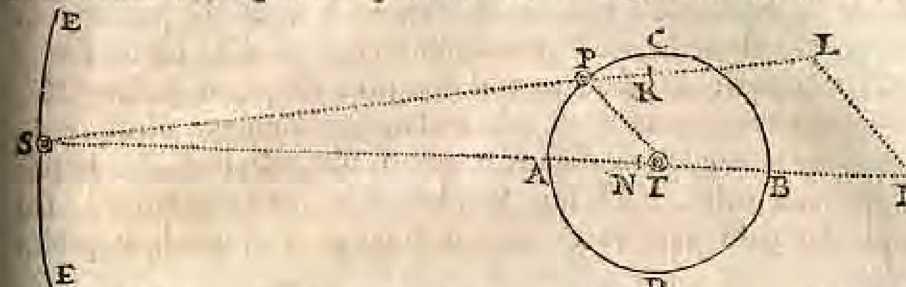


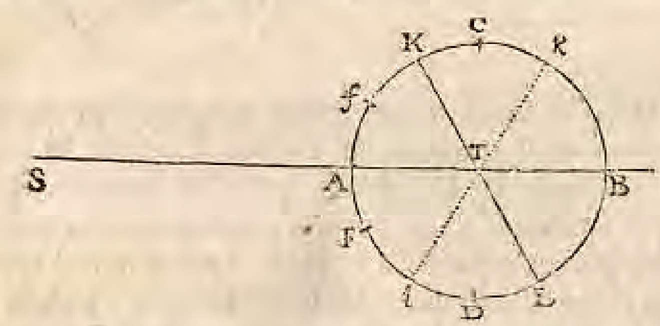
(r) * *Et propterea minor est semper inclinatio in nodo subsequente quam in præcedente*, quod verum quoque est, ubicumque constituatur nodus K inter c & a, ut patet ex ipsis demonstrationibus in notis 507. & 508. traditis.

(s) 509. *Et simili ratiocinio &c.* Si nodus K constituatur inter quadraturam C vel c & oppositionem B vel b, & nodus oppositus L inter quadraturam D vel d, & conjunctionem A seu a, feraturque corpus à nodo K per C ad alterum nodum L. 1°. In transitu corporis à nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuò augetur & nodi progrediuntur. 2°. In transitu a quadraturâ C vel D ad gradum à nodo nonagesimum F vel G inclinatio minuitur & nodi regrediuntur. 3°. In transitu à gradu illo 90°. ad nodum proximum inclinatio augetur & nodi regrediuntur. 2um. & 3um. demonstrantur prorsus ut in notâ 507. 1um. verò ità ostenditur. Dum corpus P versatur inter nodum K & quadraturam C, vi revolutionis urgetur per arcum P p, & vi N M trahitur secundum directionem P m in plagam M, adeóque vi utrâque describet tempusculo minimo lineolam P π, quæ ab arcu P p deflectet versus P m; quare si centro T, radio T P, describantur ut suprà arcus P K, π P K, K k c a in planis T P π, T P k, E S T patet propositum, ut in notâ 507.

510. Coroll. Ex tribus superioribus demonstrationibus (507. 508. 509.) inter se collatis manifestum est nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum versatur; eos verò regredi, dum corpus P in aliis quibuslibet locis versatur. Undè sequitur in singulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quam progredi, adeóque absolutè regredi nisi fuerint in syzygiis.

sunt in octantibus alteris inter A & D, B & C. (t) Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum à syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad nodos appulsibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi sunt in quadraturis, & corpus in syzygiis: dein crescit iisdem gradibus, quibus antea decreverat, nodisque ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur. Co-

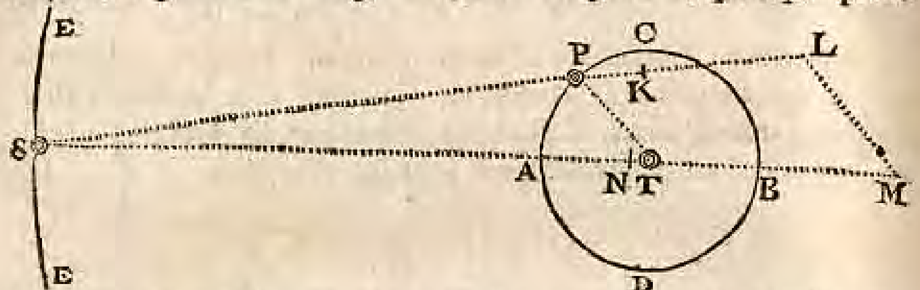




(t) * *Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis &c.* Quoniam in singulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus, linea nodorum regreditur (510) & in transitu nodorum à syzygiis A & B ad quadraturas C & D, inclinatio orbitæ perpetuò minuitur (508.) deinde verò in transitu nodorum à quadraturis C & D, ad syzygias B, & A, perpetuò augetur (509), manifestum est inclinationem minimam esse ubi nodi sunt in quadraturis & corpus P in syzygiis (in quibus vis N M, cæteris paribus, maxima est) & maximam inclinationem esse ubi nodi sunt in syzygiis. Porrò sint nodi K & L inter C & A, D & B primum, deinde regrediendo transeant in loca k & l, inter C & B, D & A, sintque arcus C K & C k, æquales. In primo casu inclinatio minuitur in transitu corporis P, per quadrantem K F, (509.) & in secundo casu æqualibus viribus augetur per quadrantem f l, (509). In primo casu inclinatio augetur per arcum F D (508.), & in secundo casu æqualibus viribus minuitur per arcum c f = F D (509.) Tandem in primo casu, inclinatio minuitur per arcum D L, (508.) & in secundo casu augetur æqualibus viribus per arcum æqualem k C, (509). Quare, cæteris paribus, in transitu nodorum à quadraturis ad syzygias inclinatio planorum iisdem gradibus crescit quibus anteà decreverat in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas, ideoque nodis ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.

DE MOTU CORPORUM.

Corol. 11. Quoniam corpus P, ubi nodi ſunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis ſui, idque in partem verſus S in tranſitu ſuo à nodo C per conjunctionem A ad nodum D; & in contrariam partem in tranſitu à nodo D per oppoſitionem B ad nodum C: manifeſtum eſt, quod in motu ſuo à nodo C corpus perpetuò recedit ab orbis ſui plano primo CD, uſque dum perventum eſt ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longiſſimè diſtans à plano illo primo CD, tranſit per planum orbis EST non in plani illius nodo altero D, ſed in puncto quod inde vergit ad partes corporis S, quodque proin-



de novus eſt nodi locus in anteriora vergens. Et ſimili argumento pergent nodi recedere in tranſitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. (u) Nodi igitur in quadraturis conſtituti perpetuò recedunt; in ſyzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quieſcunt; in locis intermediis, conditionis utriuſque participes, recedunt tardius: ideoque, ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii ſingulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Co-

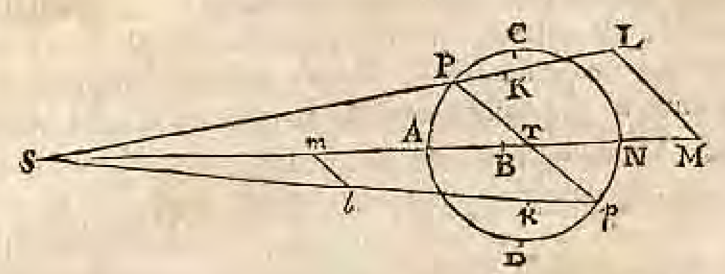
(u) * *Nodi igitur in quadraturis conſtituti &c.* In integrâ corporis P revolutione, nodi partim regrediuntur, partim progrediuntur, niſi fuerint in quadraturis vel in ſyzygiis conſtituti (510); dum autem in quadraturis verſantur, vis NM, quæ eorum regreſſum producit, maxime potenter agit (506), quare nodi in quadraturis conſtituti celerrimè regrediuntur; in ſyzygiis ubi motus in latitudinem nihil perturbatur quieſcunt, in locis intermediis recedunt quidem ſingulis revolutionibus corporis P, (509), ſed tardius quam in quadraturis, *ideoque ſemper. &c.*

511. Lemma. Si fuerint tres quantitates a, $a+b$, $a+2b$ in continuâ proportione arithmeticâ, ratio 2ª. ad 1ᵃᵐ. (quæ e tribus eſt minima) major erit quam ratio 3ª. (quæ eſt maxima) ad 2ᵃᵐ. Eſt enim $a+b:a=\overline{a+b}\times\overline{a+b}:aa+ab=aa+2ab+bb:aa+ab$; ſed eſt $a+2b:a+b=aa+2ab:aa+ab$. Ergo cum ratio $aa+2ab+bb$ ad $aa+ab$ major ſit quam ratio $aa+2ab$ ad $aa+ab$, erit ratio $a+b$ ad a major ratione $a+2b$ ad $a+b$.

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis deſcripti errores ſunt paulò majores in conjunctione corporum P, S, quam in eorum oppoſitione; (x) idque ob majores vires generantes NM & ML.

Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant à magnitudine corporis S, obtinent præcedentia, omnia ubi corporis S tanta ſtatuitur magnitudo, (y) ut circa ipſum revolvatur corporum duorum T & P ſyſtema. Et ex aucto corpore S auctâque



(x) * *Idque ob majores vires generantes NM & ML.* Vis LM in conjunctione eſt ut $\frac{AT}{SA^3}$, & vis lm in oppoſitione eſt ut $\frac{TB}{SB^3}$ (495). Quare (cæteris paribus) hoc eſt, ſi fuerit $AT=TB$ vis ML in conjunctione major erit vi ml in oppoſitione propter SA^3 minorem quam SB^3. Quod erat unum. Porrò ſi AT & BT ſint æquales, tres lineæ SA, ST, SB erunt in continuâ proportione arithmeticâ & proindè SK mediocris diſtantia corporis P ab S erit æqualis ST; & quoniam SK exhibet vim acceleratricem corporis P verſus S in mediocri diſtantiâ SK, & SN exponit vim acceleratricem corporis T verſus S, (prop. 66.) erit $SN=ST$, atque adeò $NM=TM$, & $mN=Tm$. Sed quoniam PT, ſeu $AT:ST=LM:SM$, erit $SM=\frac{ST\times LM}{AT}$, & ſimiliter invenietur $Sm=\frac{ST\times lm}{AT}$, adeóque $TM=SM-ST=\frac{ST\times LM-ST\times AT}{AT}$, & $Tm=ST-Sm=\frac{ST\times AT-ST\times lm}{AT}$; unde differentia $TM-Tm$, erit ut $ST\times LM+ST\times lm-ST\times 2AT$, hoc eſt, ut $LM+lm-2AT$; Eſt autem ſumma $LM+lm$, major quam $2AT$. Nam cum ſit (495) $LM=\frac{ST^3\times AT}{SA^3}$, & $lm=\frac{ST^3\times AT}{SB^3}$, recta LM major eſt rectâ AT, in ratione ST^3 ad SA^3, & lm minor eſt AT in ratione SB^3 ad ST^3. Eſt verò ratio ST^3 ad SA^3, major ratione SB^3 ad ST^3 (511.) & proindè differentia rectarum LM & AT major erit quam differentia rectarum AT & lm, & ideò ſumma $LM+lm$ major eſt quam $2AT$; Quare tandem erit TM major quam Tm, ſeu vis NM major in conjunctione quam in oppoſitione; Quod erat alterum.

(y) * *Ut circà ipſum revolvatur &c.* Demonſtrationes enim ſunt eædem, ſive corpus S moveatur circum T, ſeu corpus T revolvatur circum S.

DE MOTU CORPORUM.

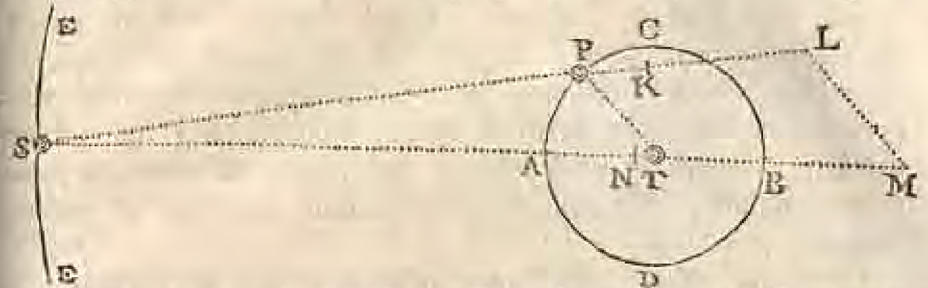
itaque ideo ipsius vi centripetâ à quâ errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus distantiis, majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus S circum systema corporum P & T revolvitur.

Corol. 14. (z) Cum autem vires NM, ML, ubi corpus S longinquum est, sint quamproximè ut vis SK & ratio PT ad ST conjunctim, hoc est, si detur tum distantia PT, tum corporis S vis absoluta, ut ST *cub.* reciprocè; sint autem vires illæ NM, ML causæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est, quod effectus illi omnes, stante corporum T & P systemate, & mutatis tantum distantiâ ST & vi absolutâ corporis S, sint quamproximè in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ

(z) 512. * *Cum autem vires NM, ML &c.* Ob magnam distantiam corporis S, erit ferè L S parallela M S, & SN=ST=SK, ac M L=P T; & quoniam NM in *syzygiis* est ut M L in quadraturis (501). Si aucta vel diminutâ actione corporis S, orbita C A D B unà cum lineis hinc pendentibus P T, N M, M L augeatur vel diminuatur (cor. 6. hujus prop. 66.) tres illæ lineæ in eadem ferè ratione inter se (cæteris paribus) augebuntur vel diminuentur. Est autem vis M L ad vim S K ut recta M L ad rectam SK, seu quam proximè ut P T ad S T; Quare vis M L (adeòque & vis N M) est quam proximè ut vis SK & ratio P T, ad S T, conjunctim, hoc est, si vis acceleratrix S K dicatur A ut $\frac{A \times PT}{ST}$. Porrò datâ vi absolutâ corporis S, vis acceleratrix A in distantiâ SK seu ST est ut $\frac{1}{ST^2}$, (ex hyp.) Quare vires N M, M L, datâ vi absolutâ corporis S, sunt ut $\frac{PT}{ST^3}$; hoc est (si detur distantia P T) ut ST^3 reciprocè. Verùm si variabilis sit vis absoluta V corporis S, erit vis acceleratrix A in distantiâ ST, ut vis absoluta V directè & quadratum distantiæ S T inversè, (nam manente vi absolutâ corporis S, vis acceleratrix est ut ST^2 inversè, & manente distantiâ S T vis acceleratrix est ut vis absoluta directè, proindéque variantibus vi absolutâ & distantiâ simul, vis acceleratrix est ut vis absoluta directè & quadratum distantiæ inversè); Quare si loco vis acceleratricis A ratio illa composita in facto $\frac{A \times PT}{ST}$ ponatur, vires NM, ML erunt quam proximè ut $\frac{V \times PT}{ST^3}$, seu datâ P T, ut $\frac{V}{ST^3}$, hoc est in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis S, & ratione triplicatâ inversâ distantiæ S T. Vis autem absoluta corporis S, est (ex Dem.) in ratione compositâ vis acceleratricis A & quadrati distantiæ S T, & vis acceleratrix A in distantiâ S T est (per coroll. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione directâ distantiæ S T & ratione duplicatâ inversâ temporis periodici corporis T circum S ad distantiam S T circulum describentis, adeóque vis absoluta corporis S est ut cubus distantiæ S T directè, & quadratum temporis periodici corporis T inversè. Quare vires N M, ML (earumque effectus) quæ sunt directè ut vis absoluta, & inversè ut cubus distantiæ, sunt reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici corporis T.

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

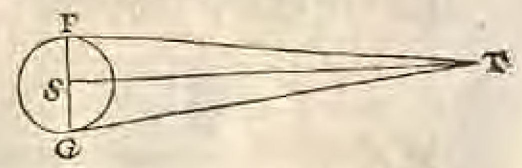
lutæ corporis S, & ratione triplicatâ inversâ distantiæ ST. Unde si systema corporum T & P revolvatur circa corpus longinquum S; vires illæ NM, ML, & earum effectus erunt (per corol. 2. & 6. prop. IV.) reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici.



Et inde etiam, (a) si magnitudo corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ NM, ML, & earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S è corpore T spectati, & vice versâ. Namque hæ rationes eædem sunt, atque ratio superior composita.

Corol. 15. (b) Et quoniam si, manentibus orbium ESE & PAB formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur

(a) * *Si magnitudo seu massa corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ*, dato corpore S dabitur vis illius absoluta; unde si præterea data sit distantia P T, *vires N M, ML & earum effectus erunt*, ex suprà demonstratis, ut cubus distantiæ S T inversè; sed diameter apparens F G corporis longinqui S ex T visi, hoc est, angulus F T G sub quo diameter F G de loco T videtur, est ut distantia S T inversè; nam cum globi S diameter parva admodum supponatur respectu distantiæ S T, angulus F T G, erit admodum exiguus, & globi radius S F ad S T normalis usurpari poterit pro arcu circuli centro T & intervallo T S descripti, adeóque (154) angulus $FTS = \frac{FS}{ST}$, hoc est, ob datum radium SF, angulus F T S & ipsius duplus F T G erit ut S T inversè. *Vires igitur N M, M L earumque effectus, erunt ut cubus diametri apparentis corporis longinqui S è corpore T spectati.*



(b) * *Et quoniam si manentibus &c.* Hoc est, si corporum S & T vel maneant vel mutentur vires absolutæ in datâ quâvis ratione, & orbium E S E & P A B, magnitudo ità mutetur, ut orbis E S E sibi similis semper maneat, sicut & orbis P A B sibi, & horum orbium inclinatio non mutetur, nec proportio seu ratio axium unius orbis ad axes alterius aut linearum quarumvis in uno orbe ad lineas homologas in altero orbe.

De Motu Corporum.

tetur eorum magnitudo, & ſi corporum S & T vel maneant, vel mutentur vires in datâ quâvis ratione; (c) hæ vires (hoc eſt, vis corporis T, quâ corpus P de recto tramite in orbitam PAB deflectere, & vis corporis S, quâ corpus idem P de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt ſemper eodem modo, & eâdem proportione: neceſſe eſt ut ſimiles & proportionales ſint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc eſt, ut errores omnes lineares ſint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, & errorum linearium ſimilium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

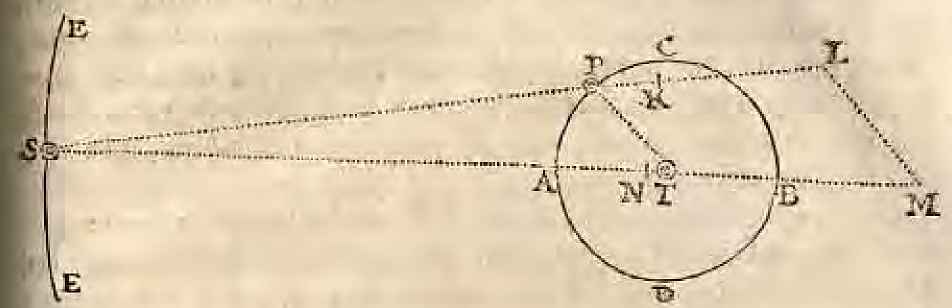
Corol. 16. Unde, ſi dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & diſtantiæ; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno caſu, colligi poſſunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proximè: ſed brevius hâc methodo. (d) Vires NM, ML, cæteris ſtantibus, ſunt ut radius TP, & harum effe-

(c) * *Hæ vires &c.* Vis acceleratrix quâ corpus P in loco P verſùs T trahitur, eſt (512) ad vim acceleratricem quâ verſus S urgetur, in ratione compoſitâ ex ratione directâ vis abſolutæ corporis T ad vim abſolutam corporis S, & ratione inversâ duplicatâ diſtantiæ P T ad diſtantiam P S. Quarè ſi vires abſolutæ & diſtantiæ in datis rationibus mutentur, manebit eadem virium acceleratricium ratio, & ob figurarum ſimilitudinem, in ſimilibus corporum P, T, S poſitionibus, antè & poſt diſtantias vireſque mutatas omnium linearum SP, SK, ML, SM, NM, &c. eadem manet ratio, atque adeo vires agunt ſemper eodem modo & eâdem proportione. Neceſſe igitur eſt ut ante & poſt diſtantias, & vires mutatas in datis rationibus, ſimiles ac proportionales ſint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora (196) hoc eſt, errores omnes lineares ſimiles à viribus ML, NM producti, ſeu deviationes corporis P in longitudinem & latitudinem à locis illis in quibus verſaretur, ſi viribus perturbantibus ML, NM non agitaretur, ſunt ut orbium diametri, & anguli ſub quibus è centro T deviationes illæ ſimiles videntur, ſemper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarum ſimilium (Lem. V. & not. 112), & errorum linearium ſimilium vel angularium æqualium tempora, ſunt ut orbium tempora periodica (196). Hæc omnia etiam obtinent, ubi corporum duorum T, & P ſyſtema circâ corpus S revolvitur, ut patet, ſi loco orbis ESE in demonſtratione ponatur orbis quem corpus T circum S deſcribit.

(d) * *Vires NM, ML &c.* Quoniam vires N M, M L ſunt (cor. 14.) ut vis SK & ratio P T ad S T conjunctim, manentibus vi S K & S T erunt vires illæ ut radius T P & proindè aucto vel diminuto radio illo T P, manent in datâ inter ſe ratione, & quoniam ob longinquitatem corporis S ad ſimiles orbis variabilis PAB (ſed ſibi ſemper ſimilis & æque inclinati) partes ſimiliter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici (per coroll. 2. Lem. X.) ſunt ut vires ipſæ & quadratum temporis periodici corporis P circum T con-

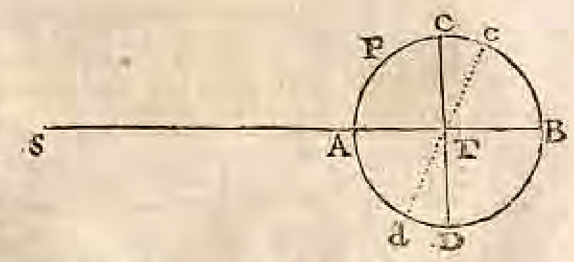
Liber Primus. Prop. LXVI. Theor. XXVI.

effectus periodici (per corol. 2. lem. X.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi ſunt errores lineares corporis P; & hinc errores angulares è centro T ſpectati (id eſt, tam motus augis & nodorum, quàm omnes



in longitudinem & latitudinem errores apparentes) ſunt, in quâlibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Conjungantur hæ rationes cum rationibus corollarii XIV. & in quolibet corporum T, P, S ſyſtemate, ubi P circum T ſibi propinquum, & T circum S longinquum revol-

conjunctim, hoc eſt, ut radius TP, & quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Porrò ſi in orbitâ circulari vel circulo finitima P A B, ſit arcus D d error linearis periodicus v. gr. nodi D in antecedentia ad d regreſſi tempore unius revolutionis corporis P circum T, angulus D T d, ſub quo error ille D d è centro T videtur, hoc eſt, error angularis periodicus erit $= \frac{Dd}{TD}$ (154). Errores igitur angulares periodici ſunt ut errores lineares directè & radius T D vel TP inversè, adeóque ut quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Et hæc quidem vera ſunt, ſtantibus vi abſolutâ corporis S & diſtantiâ S T & variantibus radio T P ac tempore periodico corporis P; verum ſtantibus radio T P & tempore periodico corporis P & variantibus vi abſolutâ corporis S atque diſtantiâ S T, errores periodici tum lineares, tum angulares ſunt (coroll. 14.) recipro-



cè ut quadratum temporis periodici corporis T circum S, quare variantibus tum radio T P, & tempore periodico corporis P, tum radio S T, atque vi abſolutâ corporis S, errores angulares corporis P de centro T apparentes, erunt in ſingulis revolutionibus corporis illius P circum T, in ratione ex binis ſuperioribus rationibus compoſitâ, ſeu erunt ut quadratum temporis periodici corporis P, directè & quadratum temporis periodici corporis T, inversè.

De Motu Corporum.

volvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *T* apparentes, erunt, in ſingulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directè, & quadratum temporis periodici corporis *T* inversè. (e) Et inde motus medius augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis *P* directè & quadratum temporis periodici corporis *T* inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis *PAB* (f) non mutantur motus augis & nodorum ſenſibiliter, niſi ubi eædem ſunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major ſit nunc minor quam radius *PT*, exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PT*; & erit hæc ad vim mediocrem *SK* vel *SN* (quam exponere licet per *ST*) ut longitudo *PT* ad longitudinem *ST*. Eſt autem vis mediocris *SN* vel *ST*, quâ corpus *T* retinetur in orbe ſuo circum *S*, ad vim, quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T*, (g) in ratione compoſitâ ex ratione radii *ST*, ad radium *PT*, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S*. Et ex æquo, vis mediocris *LM* ad vim, quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum *T* (quâve corpus idem *P*, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad diſtantiam *PT* revolvi poſſet) eſt in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unà cum diſtantia *PT*, datur vis mediocris *LM*; (h) & eâ datâ, datur etiam vis *MN* quam proximè per analogiam linearum *PT*, *MN*.

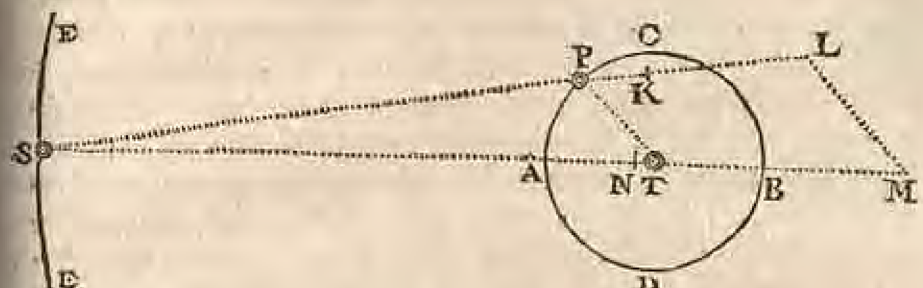
(e) * *Et inde motus medius augis &c.* Si corpus quodvis celeriùs & tardiùs vel in plagas oppoſitas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, ſeu motus medius obtinetur, ſi ſpatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo ſatis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apſidum & nodorum motus tardior & celerior eſt per vices, nuncque in antecedentia, nunc in conſequentia fit, invenitur illorum motus medius angularis, ſi ſpatium angulare totum, quod plurium revolutionum corporis *P* tempore deſcribunt, per illud tempus dividatur. Quare cum motus angularis periodicus augis & nodorum ſit (ex Dem.) ut quadratum temporis periodici corporis *P* directè, & quadratum temporis periodici corporis *T* inverſe, ſi ratio hæc compoſita per tempus periodicum corporis *P* pluries ſumptum dividatur, erit quotiens ſeu motus medius angularis augis & nodorum ut tempus periodicum corporis *P* directè & quadratum temporis periodici corporis *T* inversè; & indè motus medius augis & nodorum, qui ſunt ambo ut eadem quantitas, ſeu ut tempus periodicum corporis *P* directè & quadratum temporis periodici corporis *T* inversè, datam habent ad ſe mutuò rationem.

(f) * *Non mutantur &c.* Nam vires ML, NM motuum augis & nodorum productrices, cæteris ſtantibus, non multum mutantur, ſi augeatur vel minuatur excentricitas & inclinatio orbis PAB, niſi magna ſatis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ ML, NM prop. 66. determinantur.

(g) * *In ratione compoſitâ ex ratione radii ST &c.* Nam (per cor. 2. prop. 4.) vis acceleratrix mediocris ST quâ corpus T circum S ad diſtantiam ST circulum vel orbem circulo finitimum deſcribere ſupponitur, eſt ad vim ſimilem quâ corpus *P* in orbita ſuâ circulari vel circulo finitimâ retinetur in ratione compoſitâ ex ratione radii ST ad radium PT directe, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis T circum S, ad tempus periodicum corporis *P* circum T, inverſe. Quare vis prior eſt ad poſteriorem in ratione compoſitâ ex ratione radii ST ad radium PT, & ratione duplicatâ temporis periodici corporis *P* ad tempus periodicum corporis *T*; cumque ſit etiam, ex Dem., vis mediocris LM ad vim mediocrem ST, ut PT ad ST, erit per compoſitionem rationum & ex æquo, vis mediocris LM, ad vim acceleratricem quâ corpus *P* retinetur in orbe ſuo circum T, ut quadratum temporis periodici corporis *P* circum T ad quadratum temporis periodici corporis *T* circum S.

(h) * *Et eâ datâ*, datur etiam vis NM (500).

Liber Primus. Prop. LXVI. Theor. XXVI.



Corol. 18. Iiſdem legibus, quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipſo diſtantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; & ſingulæ annuli partes, motus ſuos omnes ad legem corporis *P* peragendo, propius accedent ad corpus *T*, & celerius movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & corporis *S*, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum plano orbitæ corporis *S* vel *T*, qui-

quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antecedentia, & velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, (i) & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completâque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quâtenus per præcessionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materiâ non fluidâ constantem, ampliari & extendi usque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore corollario) (k) in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam superficies globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis *S*, nullum acquiret motum fluxus & refluxus. (l) Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum suum (per legum corol. V.) ut & globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. (m) Vis autem *LM* trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam

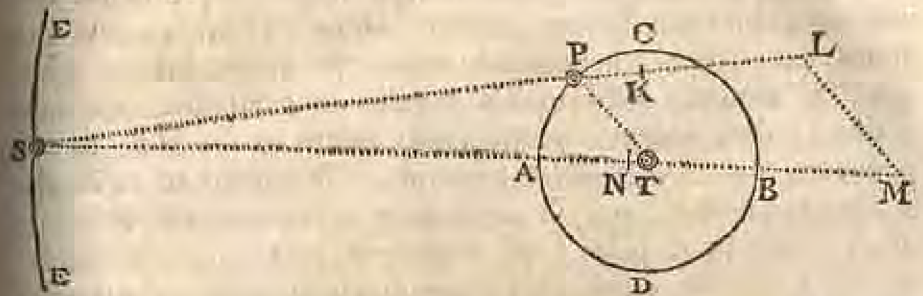
(i) * *Et axis ejus* seu recta per centrum annuli ducta ad planum ejus perpendiculariter, cum plano illo *singulis revolutionibus oscillabitur*, hoc est, ad planum E S T magis & minus per vices inclinabitur (cor. 10.) *completâque* &c. totum verò corollarium patet ex coroll. 3. 5. 10. 11. 13.

(k) * *In syzygiis velocior erit &c.* Per cor. 18. & 3. Nam velocitas uniformis quâ globus circà axem suum revolvitur eodem tempore periodico quo pars quælibet fluidi suam revolutionem absolvit, media erit inter maximam velocitatem fluidi in syzygiis & minimam in quadraturis.

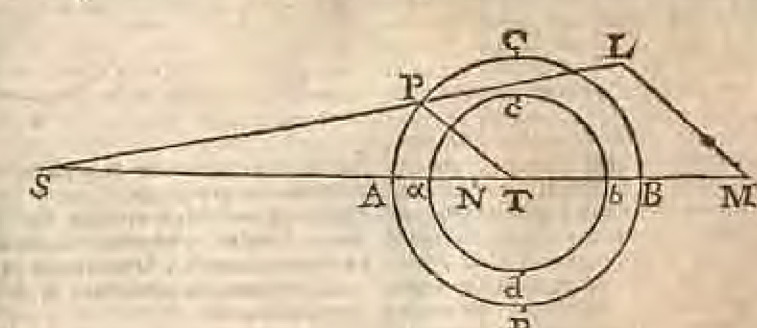
(l) * *Par est ratio &c.* Id est, exclusâ actione corporis S aqua uniformiter revolvendo circum centrum globi vel uniformiter moti in directum vel de cursu rectilineo per lineas parallelas uniformiter tracti, nullum acquiret motum fluxûs & refluxûs. *accedat autem* &c.

(m) * 514. *Vis autem LM &c.* Patet per coroll. 5. Verum ut totum hoc corollarium 19um. clarius intelligatur, sit c a d b globi solidi æquator hoc est, circulus globi maximus ad axem rotationis globi perpendicularis CADB zona fluidi satis profunda, seu annulus fluidus globo circumpositus, & supponendo quod centrum gravitatis globi solidi accurate vel quamproximè concidat cum figuræ centro T, globus eodem quamproximè modo trahetur à corpore longinquo S, & trahet ipse particulam P fluidi (71) ac si tota illius massa esset in centro T coacta (quod quidem accurate verum esse quibusdam in casibus postea demonstrabitur), sed hic approximatio sufficit; quare fluidi particula quævis P à corpore S inæqualiter attracta totusque proinde annulus movebuntur, ut in coroll. 19°. ex corollariis præcedentibus determinatum est.

ipsam descendere usque ad syzygias; & vis *KL* trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas: nisi quâtenus motus fluendi & refluendi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquâtenus retardetur.



Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, cessabit motus fluendi & refluendi; (n) sed oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie suâ contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur, & nodi regredientur. (o) Nam globus, ut mox dicetur, ad



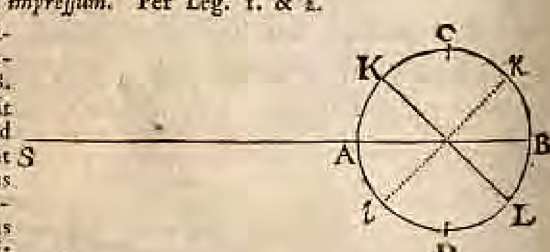
(n) * *Sed oscillatorius ille &c.* Patet per cor. 18. & not. superiorem.

(o) * *Nam globus indifferens est &c.* Liquet etiam ex legibus 1a & 2a, & not. 9.

DE MOTU CORPORUM.

ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus eſt, ubi nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit globo toti. (p) Retinet globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque (q) hâc ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas; dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eſt ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulò quam juxta polos, vel conſtat ex materiâ paulo denſiore. (r) Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere ſupponantur omnes ejus partes deorſum,

(p) * *Retinet globus motum impreſſum.* Per Leg. 1. & 2.

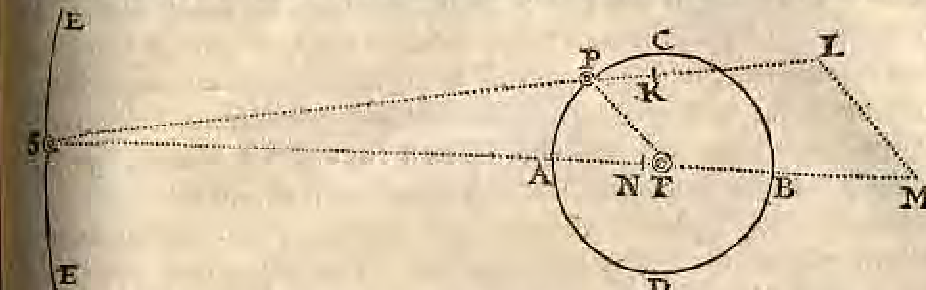


(q) * *Atque hâc ratione maximus inclinationis motus fit in quadraturis nodorum* (per coroll. 18. & 10.) non ideò tamen ibidem fit minimus inclinationis angulus, ſed in octantibus poſt quadraturas. Sint S enim nodi K & L in octantibus poſt ſyzygias A & B, & retrogrediendo accedant ad quadraturas C, D; dum nodus K percurrit arcum KC, & nodus L, arcum LD, inclinatio per actionem vis NM, continuò decreſcit, cumque nodus K, pervenit in C, & tranſit ad octantem k perſeverat, ex inertiâ materiæ, motus inclinationis decreſcentis per totum arcum KC impreſſus; Licet vis NM in contrarium agat per totum arcum Ck = CK; vis enim NM per arcum Ck motum inclinationis decreſcentis iiſdem gradibus diminuit, quibus per arcum KC productus & acceleratus eſt. Quare ille decreſcentis inclinationis motus penitùs non deſtruitur, niſi nodus K pervenerit in k tumque vis NM planum reclinat, hoc eſt, nodo exiſtente in k incipit motus reclinationis ſive motus inclinationis creſcentis & perſeverat uſque ad octantem proximum L atque ibi ceſſat. Liquet igitur minimum angulum inclinationis fieri in octantibus nodorum k, l poſt quadraturas C, D maximum verò dum nodi verſantur in octantibus K & L poſt ſyzygias A, B.

(r) * *Supplet enim vicem annuli &c.* Patet per not. 514. Si materiæ in æquatoris regionibus exceſſus per annulum CcADb, (vid. fig. not. 514) exhibeatur & reliqua globi materia in centro T coacta intelligatur.

LIBER PRIMUS. PROP. LXVI. THEOR. XXVI.

ſum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii (ſ) vix inde mutabuntur; niſi quod loca maximarum & minimarum altitudinum



aquæ diverſa erunt. Aqua enim jam in orbe ſuo ſuſtinetur & permanet, non per vim ſuam centrifugam, ſed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorſum maxime in quadraturis, & vis KL ſeu $NM-LM$ trahit

(ſ) * *Vix indè mutabuntur.* Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel ſolidus, impreſſiones virium LM, NM ſuſcipiat, loca tamen maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Hucuſque enim ſuppoſuimus particulas aquæ ex virium centripetæ & centrifugæ æquilibrio, in orbe ſuo ſuſtineri & permanere inſtar corporis ſolitarii P circum T in ſpatio libero revolventis; atque inde ex cor. 5. oſtenſum eſt in cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quadraturas incidere; minimam in ſyzygias. Verùm ſi manente eâdem vi centrifugâ augeatur vis centripeta, ſeu gravitas particularum aquæ, particulæ illæ non vi ſuâ centrifugâ, ſed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, ſuſtinentur & in orbe ſuo permanent ac proinde non amplius ad legem corporis ſolitarii circum centrum T, in ſpatio libero revolventis à centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum & minimarum altitudinum aquæ diverſa erunt. Velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in ſyzygiis, minima in quadraturis (per cor. 3). Præterea vis LM addititia trahit aquam deorſum, ſeu ad centrum T, maximè in quadraturis (513.) & vis ablatitia KL trahit eandem ſurſum, maximè in ſyzygiis (501) & ideò ſi globus cum aquâ circumpoſitâ non revolveretur circà centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C & D, maximæ in ſyzygiis A & B eſſent; verum revolvente cum globo aquâ à C ad A, vis addititia poſt quadraturas agens, aquam deorſum ſemper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; & ſimiliter hæc vis ablatitia poſt ſyzygias ſurſum trahit aquas, quarum proinde minimæ altitudines non incident in quadraturas, ſed poſt quadraturas, maximæ verò poſt ſyzygias. Inſuper rotatio globi circà proprium axem maximas aquarum altitudines à ſyzygiis A & B verſus quadraturas D & C transfert, intereadum vires LM, NM ſimul junctæ maximas eas aquarum altitudines in ſyzygiis inſtaurare perpetuò nituntur, aqua autem à C & D continuò fluit verſus A & B, cum elevatio ab A verſus D & à B verſus C transfertur, & ideò inter A & D ut & inter B & C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ità ut altitudines maximæ inter hæc puncta incidant fere circa octantes.

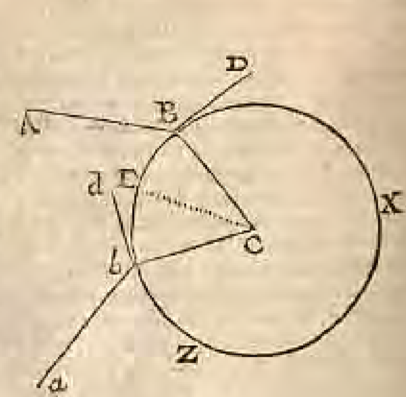
hit eandem ſurſum maximè in ſyzygiis. Et hæ vires conjunctæ deſinunt trahere aquam deorſum & incipiunt trahere aquam ſurſum in octantibus ante ſyzygias, ac deſinunt trahere aquam ſurſum incipiuntque trahere aquam deorſum in octantibus poſt ſyzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire poteſt in octantibus poſt ſyzygias, & minima in octantibus poſt quadraturas circiter; niſi quâtenus motus aſcendendi vel deſcendendi ab his viribus impreſſus vel per vim inſitam aquæ paulò diutius perſeveret, vel per impedimenta alvei paulò citius ſiſtatur.

Corol. 21. Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iſte regreſſus, per diminutionem verò diminuitur, & per ablationem tollitur; (t) ſi materia pluſquam redundans tollatur, hoc eſt ſi globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in conſequentia.

Corol. 22. Et inde viciſſim, ex motu nodorum innoteſcit conſtitutio globi. Nimirum ſi globus polos eoſdem conſtanter ſervat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; ſi in conſequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunque obliquè in ſuperficiem ſuam facto propelli, & motum inde concipere (u) partim circularem, partim in directum

(t) * *Si materia pluſquam redundans tollatur*, ſeu ſi materia redundans negativa fiat, motus nodorum qui erat in antecedentia, negativus evadet, hoc eſt, orietur motus nodorum in conſequentia.

(u) * *Partim circularem, partim in directum.* Vis A B quâ globus BXZ obliquè impellitur, ſecundum directionem A B, in duas vires reſolvitur, quarum altera ad centrum C juxta radium B C dirigitur, ei motum globi in directum producit, altera ſecundum tangentem B D radio B C normalem agit, & motum rotationis circà axem plano ABDXC perpendicularem inducit.



rectum. Quoniam globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum, (x) quam in alium quemvis; perſpicuum eſt, quod is axem ſuum, axiſque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. (y) Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ ſuperficiei parte, quâ prius, impulſu quocunque novo; & cùm citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt, quod hi duo impulſus ſucceſſivè impreſſi eundem producent motum, ac ſi ſimul impreſſi fuiſſent, hoc eſt, eundem, ac ſi globus vi ſimplici ex utroque (per legum corol. 2.) compoſitâ impulſus fuiſſet, atque ideo ſimplicem, circa axem inclinatione datum. (z) Et par eſt ratio impulsûs ſecundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulſus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulſus ſecundus ſine primo generaret; atque ideo impulſuum amborum factorum in loca quæcunque: (a) genera-

(x) * *Quam in alium quemvis*; antequam motus imprimatur, perſpicuum eſt quod is axem ſuum rotationis axiſque inclinationem ad planum quodvis poſitione datum vi propriâ nunquam mutabit.

(y) * *Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ ſuperficiei parte B quâ prius &c.*

(z) * *Et par eſt ratio impulsûs ſecundi facti in locum alium quemvis b, in æquatore B XZ motûs primi.* Reſolvitur enim vis a b in duas vires, quarum una ad centrum C dirigitur per radium b C; alia ſecundùm tangentem b d agit; & vires duæ utriuſque impulſus ad centrum C per radios B C, b C directæ in unam componentur ſecundùm directionem radii alicujus E C agentem, quâ globus in directum movebitur uniformiter; vires autem B D, b d quæ rotationem globi producunt, eodem modo componuntur ad unicum rotationis motum efficiendum ac ſi fuiſſet vis B D in loco b impreſſa, aut vis b d, in loco B æquatoris B X Z motûs primi; vis enim B D eundem rotationis motum inducit, ſivè imprimatur in B, ſivè in b.

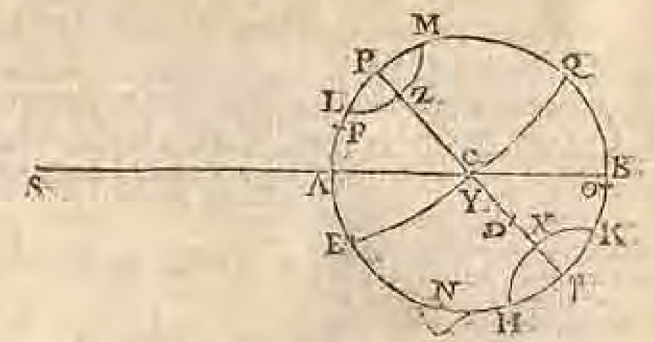
(a) * *Generabunt hi &c.* Globus BPXZb duabus viribus A B, a b obliquè impellatur, iiſque ſingulis in duas alias vires, ſecundùm directiones B C, B D; b c, b d ut ſuprà diviſis, ſit B P X Z æquator quem punctum B vi B D deſcribit, & b P x Z æquator alter quem punctum b vi b d deſcriberet, horum æquatorum communes interſectiones P, Z; vires quæ ſecundum radios B C, b c, agunt in unam componentur, ut ſuprà, quâ globus movebitur uniformiter in directum; vires autem B D, b d,

eoſdem rotationis motus ſeorſim producunt quos producerent, ſi in punctum P ſingulæ agerent ſeorſim, forentque PK, P i; ſed vires duæ P K, P i, in unam P L componuntur quâ globus circà æquatorem unicum rotatur. Quare vires ſeu impulſus AB, a b generabunt motum unicum ſimplicem ac

unifor-

De Motu Corporum.

bunt hi eundem motum circularem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea globum, quoad motum rotationis, (b) nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro sui motus, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuò describant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in casu (per corol. XXI.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per corol. XX.) nodi regredientur; vel denique ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.



uniformem, tum directum, tum circularem circà axem unicum inclinatione semper invariabili datum adeóque & sibi semper parallelum.

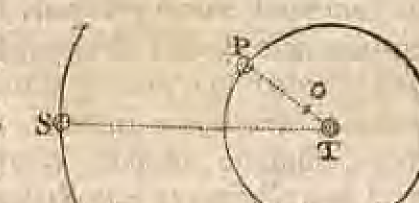
(b) * *Nullam in partem inclinabit.* Sit S virium centrum, APQE globus circà axem Pp revolvens, SCB planum per centrum globi C & per centrum virium S transiens, globumque dividens in duo hemisphæria APB, ApB, vis centripeta urgebit semper utrumque hemisphærium æqualiter versùs S, & propterea globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit, manebitque proinde eadem axis Pp inclinatio. Addatur verò alicubi, v. gr. in N, inter polum p & æquatorem EYQ materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi à centro sui motûs D, turbabit motum globi, quod partem globi N, cui adhæret validius trahat quam vis centrifuga partem oppositam O, magis depressam; & ideò faciet ut poli P, p, errent per superficiem globi & circulos LZM, HXK, circum se punctumque sibi oppositum describant. Nam cum materia illa est in loco N, suâ majori vi centrifugâ facit ut polus p accedat ad H & polus P ad M; sublato partium globi æquilibrio; unde materiâ illâ revolvente, poli H & M girculos HXKH, MZLM describunt in superficie globi circà puncta P, p, sive circa loca polorum antequam materia in N addita esset. *Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro* p vel P ubi polum non magis in unam partem trahit quam in alteram; *vel in æquatore* EYQ, ubi polum unum non magis trahit quam alterum, *vel ex alterâ axis parte* in O ad*dendo materiam novam quâ motus in* N *inter movendum libratur*, seu quâ axis in partes oppositas æque trahatur, vel etiam addendo materiam novam ex alterâ æquatoris parte in R, quâ polus P tantum trahatur quantum polus p à materiâ in N positâ.

Liber Primus. Prop. LXVII. Theor. XXVII.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.*

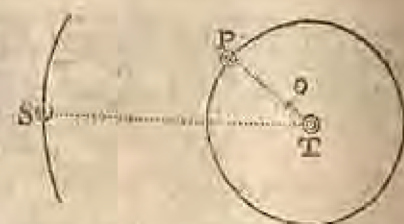
Nam corporis *S* attractiones versus *T* & *P* componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* & *P* commune gravitatis centrum *O*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato distantiæ *SO* magis est proportionalis reciprocè, quam quadrato distantiæ *ST*: (c) ut rem perpendenti facile constabit.



(c) * *Ut rem perpendenti facilè constabit.* Nam vis acceleratricis compositæ quâ corpus *S* à corporibus *T* & *P* trahi-

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, circa interiorum P & T commune gravitatis centrum O, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minus attractum aut multò magis aut multò minus agitetur.



(d) Demonstratur eodem fere modo cum prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex unâ parte, & commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. (e) Liquet hoc per corollarium secundum propositionis LVIII. col-

tur directio cadit inter lineas SP, ST, & cæteris paribus, magis accedit ad ST, quam ad SP (si modò corpus majus *T* cæteris paribus magis trahat quam corpus minus *P*) quemadmodum centrum gravitatis O, propius est corpori *T* quam corpori P; præterea manente distantiâ ST, vis acceleratrix corporis *S* versùs *P* augetur vel diminuitur, dum decrescit vel crescit distantia SP, & similiter distantia SO, augetur vel diminuitur, prout crescit vel decrescit SP. Quare attractio absoluta (seu tota) corporis *S* quadrato distantiæ SO magis proportionalis est reciproce, quam quadrato distantiæ ST; insuper commune gravitatis centrum O ferè spectari potest tanquam punctum, in quo corporum *T* & *P* vires physice uniuntur.

(d) * *Demonstratur eodem ferè modo &c.* Nimirum resolvendo singulas attractiones corporis *S* versùs P & T in alias quarum duæ ad centrum O dirigantur & aliæ duæ directiones habeant rectæ TP parallelas.

(e) * *Liquet hoc &c.* Nam si centrum in quod corpus S conjunctis viribus urgetur

collatum cum demonstratis in prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum à centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, (f) minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, & magis deinceps magisque agitatur.

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directè & quadrata distantiarum inversè, se mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum ([g] nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste ter-

tur coincideret cum centro O gravitatis communi duorum corporum *P* & *T* hæc duo corpora P & T ellipses accuratas seorsim describerent circum se mutuò & circum centrum illud O (per coroll. 2. prop. 58). Et præterea corpus S ex unâ parte & duorum aliorum systema tanquam unum corpus consideratum, hoc est, eorum commune gravitatis centrum O ex alterâ parte ellipses accuratas describerent circum commune trium *S*, T, P centrum gravitatis quiescens (per coroll. 2. prop. 58.). Quod adhuc clariùs intelligetur, si legantur propositiones 64. 65. Perturbatur ille motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri O, duorum *P* & T à centro in quod tertium *S* trahitur. *Detur præterea motus non uniformis in directum communi trium centro*, (quod continget, si corpus intimum & maximum *T*, lege cæterorum non attrahitur, ut ex dictis patet) *& augebitur perturbatio, proinde &c.*

(f) * *Minuendo motum corporis* T *&c.* Quâ ratione fit ut centrum commune trium corporum, intereà dum corpora *S* & *P* moventur, nunc accedat ad corpus *T* nunc ab illo recedat, pro mutatâ corporum illorum distantiâ, & hinc magis ac magis perturbabitur motus ellipticus & magis ac magis deinceps agitabitur centrum commune gravitatis trium corporum.

(g) * *Nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ*, quam v. gr. corpus parvum P hic describit *in centro gravitatis corporis maximi & intimi* T quod ferè coincidit cum communi centro O gravitatis duorum P & T (per cas. 1. prop. 65.); umbilicus *orbitæ secundæ* quam v. gr. corpus *S* describit *in communi centro gravitatis* O, *corporum duorum intimorum* P & T; umbilicus *tertiæ* orbitæ quam aliud corpus longius distans describeret *in communi centro gravitatis trium interiorum* P, T, *S* &c. Nam idem est ratiocinium seu tria seu quatuor aut plura sint corpora (ut in prop. 64. 65.)

tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In systemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente: erunt absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B, *quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, (h) ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; (i) & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam & octavam) sunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) (k) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. *Q. E. D.*

(h) * *Ut attractio acceleratrix corporum omnium*, seu ut attractio acceleratrix uniuscujusque corporis versus A &c. Patet enim quod si vis absoluta dupla vel tripla &c. sit, actio quoque acceleratrix in distantiâ datâ dupla vel tripla erit.

(i) * *Et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B*, ob distantiam inter B & A, & A & B eandem.

(k) * *Sibi invicem æquales.* Si enim attractio acceleratrix corporis B versus A dicatur V & attractio acceleratrix corporis A versus B dicatur v; vis motrix in B, erit $B \times V$; in A erit $A \times v$, & (per leg. 3^m.) $B \times V = A \times v$. Unde $V : v = A : B$. Ergò *absoluta* &c.

* Vi-

PROP. LXIX. THEOR. XXIX.

Corol. 1. Hinc si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum à trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires (l) absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, (m) quam fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & (n) contra. Patet per corol. prop. LXVIII. collatum cum hujus corol. 1.

Scho-

(l) * *Vires absolutæ sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus corollarii hypothesi ac in demonstratione & hypothesi propositionis.

(m) * *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur*, ut in duobus casibus prop. 65. expositum est.

(n) * *Et contrà.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, & minora corpora circà maximum in ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri potest, accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quam proximè; ut liquet ex coroll. 2°. prop. 58. collato cum prop. 64. 65.

Scholium.

His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem *impulsus*, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in physicam descenditur conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuò agere; & quales motus inde consequantur.

SEC-

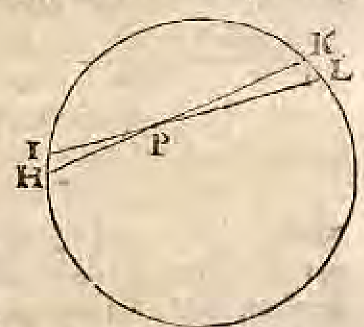
SECTIO XII.

De corporum sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit $HIKL$ superficies illa sphærica, & P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK, IL, arcus quam minimos HI, KL intercipientes; &, ob triangula HPI, LPK (per corol. 3. lem. VII.) (o) similia, arcus illi erunt distantiis HP, LP proportionales; & superficiei sphæricæ particulæ quævis ad HI & KL, rectis per punctum P transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directè, & quadrata distantiarum inversè. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruent. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphæricam superficiem à contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*



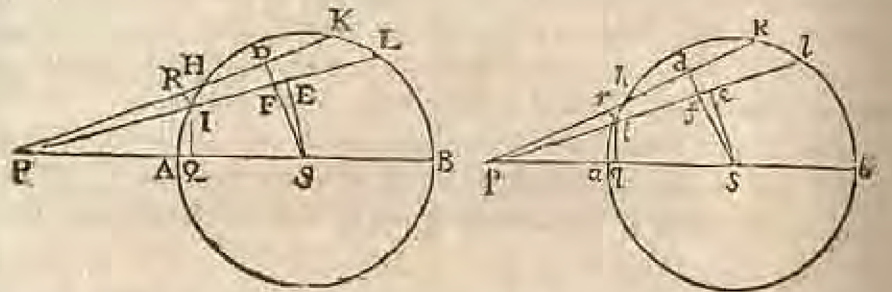
PRO-

(o) * *Similia &c.* Anguli enim HPI, LPK ad verticem oppositi, & anguli HIL, LKH eidem arcui insistentes æquantur (per prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam arcus evanescentes IH, KL, pro ipsorum chordis usurpari possunt (per cor. 3. Lem. 7.) Quarè arcus HI, KL distantiis HP, LP proportionales sunt, & hinc si ad superficiem sphæricam per punctum P ductæ intelligantur innumeræ rectæ ad arcus quamminimos ut HI, KL terminatæ, rectæ illæ figuras solidas (pyramides vel conos) similes formabunt quorum bases in superficie sphæricâ similes erunt, & proindè (per Lem. 5.) rationem habebunt duplicatam laterum HI, HL seu distantiarum HP, LP. *Ergo vires &c.*

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum ſphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ ſuperficies ſphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* deſcriptæ, & *P*, *p* corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur à corpuſculis lineæ *PHK*, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes à circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus *HK*, *hk* & *IL*, *il*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* ſecent *PL*, *pl* in *F* & *f*: Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. Evaneſcant anguli *DPE*, *dpe*: & (p) ob æquales *DS* & *ds*, *ES* & *es*, lineæ *PE*, *PF* & *pe*, *pf* & lineola *DF*, *df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* ſimul evaneſcentibus, (q) eſt æqualitatis. His itaque conſtitutis, (r) erit *PI* ad *PF* ut *RI* ad *DF*, & *pf* ad *pi* ut *df*, vel *DF* ad *ri*; & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut *RI* ad *ri*, hoc eſt (per



(p) * *Et ob æquales DS & ds, ES & es &c.* (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.).

(q) * *Eſt æqualitatis.* Nam evaneſcentibus DPE, dpe angulis, puncta F, f coincidunt cum punctis E, e, & iis punctis coincidentibus, æquales ſunt lineæ PE, PF & pe, pf, & lineolæ DF, df ſunt differentiæ linearum DS & ES, ds & es, ac proinde (ob æquales DS & ds, ES & es) æquantur.

(r) * *Erit PI ad PF &c.* Ob parallelas RI, DF & ri, df.

corol. 3. lem. VII.) (s) ut arcus *IH* ad arcum *ih*. (t) Rurſus *PI* ad *PS* ut *IQ* ad *SE*, & *ps* ad *pi* ut *se* vel *SE* ad *iq*; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut *IQ* ad *iq*. Et conjunctis rationibus $PI\ quad. \times pf \times ps$ ad $pi\ quad. \times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc (u) eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus *IH* convolutione ſemicirculi *AKB* circa diametrum *AB* deſcribet, ad ſuperficiem circularem, quam arcus *ih* convolutione ſemicirculi *akb* circa diametrum *ab* deſcribet. Et vires, quibus hæ ſuperficies ſecundum lineas ad ſe tendentes attrahunt corpuſcula *P* & *p*, ſunt (per hypotheſin) ut ipſæ ſuperficies directè, & quadrata diſtantiarum ſuperficierum à corporibus inversè, hoc eſt, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipſarum partes obliquas, quæ (factâ per legum corol. 2. reſolutione virium) ſecundum lineas *PS*, *ps* ad centra tendunt, ut *PI* ad *PQ*, & *pi* ad *pq*; id eſt (ob ſimilia triangula *PIQ* & *PSF*, *piq* & *psf*) ut *PS* ad *PF*, & *ps* ad *pf*. Unde, ex æquo, fit attractio corpuſculi hujus *P* verſus *S* ad attractionem corpuſculi *p* verſus *s*, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc (x) eſt, ut *ps quad.* ad *PS quad.* Et ſimili argumento vires, quibus ſuperficies convolutione arcuum *KL*,

(s) *Ut arcus IH ad arcum ih.* Nam triangula evaneſcentia RHI, rhi ſimilia ſunt ob angulos ad R & r rectos (ex hyp.) & angulos ad H & h æquales, quos nimirum metiuntur dimidii arcus æquales HK, hk (per prop. 32. lib. 3. Elem.) arcus enim HI, hi pro tangentibus in H & h uſurpari poſſunt (per Cor. 3. Lem. 7.). Quarè RI eſt ad ri, ut arcus IH ad arcum ih.

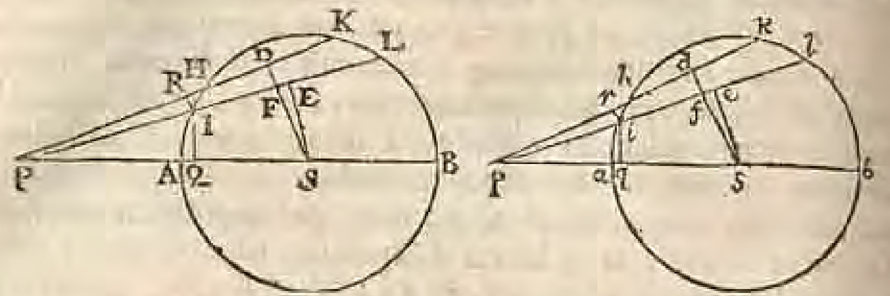
(t) * *Rurſus &c.* Ob triangula PQI, PES & pqi, pes ſimilia, eſt PI : PS = IQ : SE.

(u) 515 * *Hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam arcus IH convolutione ſemicirculi AKB circa diametrum AB deſcribet.* Nam circularis illa ſuperficies æqualis eſt facto ex peripheriâ circuli cujus radius IQ in arcum evaneſcentem IH, & ſimiliter ſuperficies circulari quam arcus ih, convolutione ſemicirculi akb circà diametrum ab, deſcribet, æquatur facto ex peripheriâ circuli cujus radius iq, in arcum evaneſcentem ih, (152). Cum igitur peripheriæ circulorum ſint ut radii, facta illa erunt inter ſe ut $IH \times IQ$, ad $ih \times iq$.

(x) * *Hoc eſt &c.* Deleto in utrâque quantitate facto $PF \times pf$, erunt attractiones ut $\frac{ps}{PS}$ ad $\frac{PS}{ps}$, ſeu reducendo ad eundem denominatorem, ut $\frac{ps^2}{PS \times ps}$ ad $\frac{PS^2}{ps \times PS}$, hoc eſt, ut ps^2 ad PS^2.

De Motu Corporum.

KL, kl descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut ps *quad.* ad PS *quad.* inque eâdem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capiendo sem-



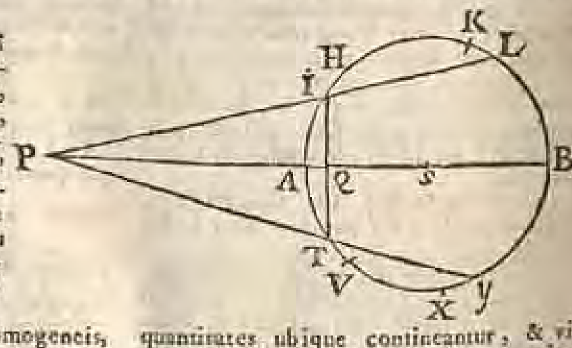
per sd æqualem SD & se æqualem SE, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; ac detur tum sphæræ densitas, tum ratio diametri sphæræ ad distantiam corpusculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim à (y) sphæris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & distantias co-

516. Scholium. Si ex alterâ parte diametri AB capiatur arcus $AT = AI$, & arcus $TV = IH$, vires obliquæ & æquales IQ, TQ sibi mutuò opponentur, nullumque motum in corpusculo P producent. Undè patet vires integras in corpusculum P ab utroque hemisphærio AHB, ATB seu à totâ superficie sphæricâ exercitas esse omninò viribus ad centrum S tendentibus æquales.



(y) * *A sphæris duabus* homogeneis, ejusdemque densitatis ità nempe ut sub æqualibus voluminibus æquales materiæ quantitates ubique contineantur, & vis absoluta attrahens sit semper ut quantitas materiæ.

z Ad

Liber Primus. Prop. LXXII. Theor. XXXII.

rum à sphærarum centris proportionales esse diametris sphærarum respectivè, sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphæræ alterius, in ratione compositâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ distantiarum inversè. Sed particulæ sunt ut sphæræ, hoc est, in ratione triplicatâ diametrorum, & distantiæ sunt ut diametri; & ratio prior directè unà cum ratione posteriore bis inversè est ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis, circa sphæras ex materiâ æqualiter attractivâ constantes, revolvantur; sintque distantiæ à centris sphærarum proportionales earumdem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versâ, si tempora periodica sint æqualia, distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per corol. 3. prop. IV.

Corol. 3. Si ad solidorum duorum quorumvis, similium & æqualiter densorum, puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; vires, quibus corpuscula, (z) ad solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri solidorum.

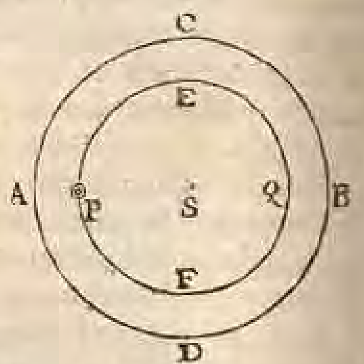
PRO-

(z) * *Ad solida illa duo similiter sita*, ità ut distantiæ corpusculorum à similibus solidorum duorum particulis sint ut eorum solidorum diametri.

517. Scholium. Hinc si hujusmodi sphæra per centrum perforetur, æqualia erunt tempora omnia, quibus corpus de locis quibusvis ad centrum usque cadit, (per cor. 2. prop. 38.) & corpusculorum in hujusmodi sphærâ per spatia libera minima revolventium tempora periodica erunt æqualia (per cor. 3. prop. 4.) atque ad hujus generis sphæram pertinent quæ in prop. 51. 52. hujusque corollariis demonstrata sunt.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.



In ſphærâ *ABCD*, centro *S* deſcriptâ, locetur corpuſculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe ſphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt, (per prop. LXX.) quod ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus ſuis per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in corpus *P*. Reſtat ſola attractio ſphæræ interioris *PEQF*. Et (per prop. LXXII.) hæc eſt ut diſtantia *PS*. *Q. E. D.*

Scholium.

Superficies, ex quibus ſolida componuntur, hic non ſunt purè mathematicæ, ſed orbes adeo tenues, ut eorum craſſitudo inſtar nihili ſit; nimirum orbes evaneſcentes, ex quibus ſphæra ultimò conſtat, ubi orbium illorum numerus augetur & craſſitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, ſuperficies & ſolida, componi dicuntur, intelligendæ ſunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

Nam diſtinguatur ſphæra in ſuperficies ſphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpuſculi à ſingulis ſuperficiebus oriundæ erunt reciprocè proportionales quadrato diſtantiæ corpuſculi à centro (per prop. LXXI.) Et componendo fiet ſumma attractionum, hoc eſt attractio corpuſculi in ſphæram totam, in eâdem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus diſtantiis à centris homogenearum ſphærarum attractiones ſunt ut ſphæræ. Nam (per prop. LXXII.) ſi diſtantiæ ſunt proportionales diametris ſphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur diſtantia major in illâ ratione; &, diſtantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc eſt, in ratione ſphærarum.

Corol. 2. In diſtantiis quibuſvis attractiones ſunt ut ſphæræ applicatæ ad (a) quadrata diſtantiarum.

Corol. 3. Si corpuſculum, extra ſphæram homogeneam poſitum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro, conſtet autem ſphæra ex particulis attractivis; (b) decreſcet vis particulæ cujuſque in duplicatâ ratione diſtantiæ à particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; dico quod ſphæra quævis alia ſimilaris ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciprocè ut quadratum diſtan-

(a) * *Ad quadrata diſtantiarum.* Nam æqualibus diſtantiis, attractiones ſunt ut ſphæræ (per cor. 1.) & æqualibus ſphæris, attractiones ſunt ut quadrata diſtantiarum à centris reciproce (per prop. 74.). Quare variantibus ſphæris & diſtantiis ſimul, attractiones ſunt ut ſphæræ ad quadrata diſtantiarum applicatæ.

(b) * *Decreſcet vis particulæ cujuſque &c.* Nam cum vis attractrix abſoluta quantitati materiæ proportionalis ſupponatur, ſi vis particularum ſphæræ in majori vel minori ratione quam duplicatâ diſtantiarum à particulis decreſceret, corpuſculum extrà ſphæram conſtitutum majori vel minori vi traheretur quam reciproce proportionali quadrato diſtantiæ à centro ſphæræ.

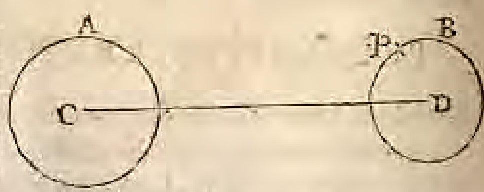
diſtantiæ ſuæ à centro ſphæræ trahentis, (per prop. LXXIV.) & propterea eadem eſt, ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus ſphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt, quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud à ſingulis ſphæræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio (per prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ à centro ſphæræ; ideoque huic æqualis attractio ſphæræ eſt in eâdem ratione. (c) *Q. E. D.*

(d) *Corol.* 1. Attractiones ſphærarum, verſus alias ſphæras homogeneas, ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum à centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi ſphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius eâdem vi, quâ ab ipſis viciſſim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum

(c) * *Q. E. D.* Demonſtratio clarius intelligitur appoſitâ figurâ. Sphæra *A* ſphæram ſimilarem *B* attrahat, & vis acceleratrix quâ ſphæræ *B* particula quævis *P* in centrum C ſphæræ *A* urgetur eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ P C à centro ſphæræ trahentis (per prop. 74.) & propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico C ſito in centro ſphæræ trahentis *A*, vis autem tota acceleratrix quâ ſphæra integra *B* à corpuſculo C trahitur, tanta eſt quanta foret viciſſim attractio ejuſdem corpuſculi C versùs centrum D ſphæræ *B*, ſi modò illud corpuſculum C à ſingulis ſphæræ *B* particulis eâdem vi traheretur quâ ipſas attrahit, ut manifeſtum eſt. Foret autem (in hâc hyp.) illa corpuſculi C verſus centrum D attractio (per prop. 74.) reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ C D à centro D ſphæræ *B*; Quarè attractio ſphæræ *B* verſus C ut potè æqualis attractioni ſuppoſitæ corpuſculi C verſus D, eſt in eâdem ratione inversâ quadrati diſtantiæ C D. Q. E. D.

(d) * *Cor.* 1. Vis acceleratrix quâ



ſphæræ *B* particula quævis *P* verſus centrum C ſphæræ *A* urgetur, eſt ut ſphæra *A* applicata ad quadratum diſtantiæ C *P*, (per cor. 2. prop. 74.) & propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens quæ eſſet ut ſphæra *A* manaret de corpuſculo unico C ſito in centro ſphæræ trahentis *A*; & ſimiliter ſphæra tota *B* ad centrum C trahitur ut corpuſculum unicum in centro D ſitum (per prop. 75.) vis autem acceleratrix quâ corpuſculum in centro D poſitum verſus C trahitur, eſt ut vis abſoluta corpuſculi C ſeu ut ſphæra *A* directè & quadratum diſtantiæ C D inversè. Quare *attractiones ſphærarum* acceleratrices *versùs alias ſphæras homogeneas ſunt ut ſphæræ trahentes applicatæ* &c.

tum attractum, (e) geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa umbilicum conicarum ſectionum (f) demonſtrata ſunt, obtinent, ubi ſphæra attrahens locatur in umbilico: & corpora moventur extra ſphæram.

Corol. 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum ſectionum (g) demonſtrantur, (h) obtinent ubi motus peraguntur intra ſphæram.

PRO-

(e) * *Geminabitur vis attractionis mutuæ* &c. Si ſphæra *A* ſphæram *B* vi propriâ attrahente deſtitutam trahat, erit vis acceleratrix ſphæræ *B* versùs centrum C ſphæræ trahentis *A*, ut $\frac{A}{CD^2}$, (per cor. 2. prop. 75.) jam ſi ſphæræ *B* vis propria attrahens tribuatur, vis acceleratrix ſphæræ *A* versùs *B* indè genita, erit ut $\frac{B}{CD^2}$, & vis illius motrix (15) ut $\frac{B \times A}{CD^2}$, quæ (per Leg. 3.) æquatur vi motrici ſphæræ *B* versùs ſphæram *A* ex reactione ſphæræ *A* genitæ. Quarè dividendo per *B*, vis acceleratrix ſphæræ *B*, versùs centrum C ſphæræ *A*, rursùs erit ut $\frac{A}{CD^2}$, ideòque attractio tota acceleratrix ſphæræ *B*, versùs centrum ſphæræ *A*, erit in diſtantiâ datâ ut ſphæra ipſa *A*, & in diſtantiâ variabili ut ſphæra *A* ad quadratum diſtantiæ applicata. Quod ſimiliter dicendum eſt de attractione ſphæræ *A* versùs centrum ſphæræ *B*. Obſervandum verò eſt quod ſi ſphæræ *A* & *B* æquales ſint & utraque vi propriâ attractivâ quantitati materiæ proportionali prædita ſit, attractio mutua dupla evadit; Si verò ſphærarum una alterâ major ſit vel minor, ver. gr. ſphæra *B* minor quam ſphæra *A*, dum vis attractrix propria ſphæræ *B* accedit, geminatur quidem attractio mutua, ſed non idcircò tamen duplicatur; nam attractio indè genita, cæteris paribus, ſphæræ *B* proportionalis eſt.

(f) * *Demonſtrata ſunt.* (In Sect. 3ª. 6ª. 7ª. 9ª. 11ª.)

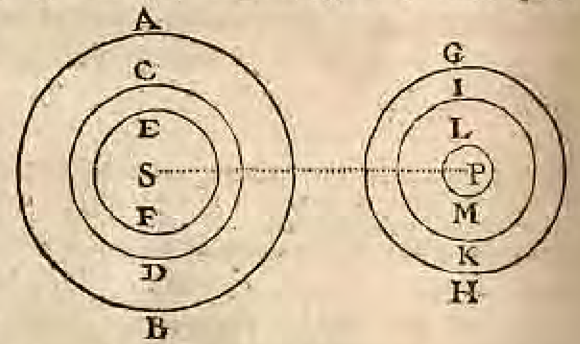
(g) * *Demonſtrantur.* (Prop. 10. 38. 47. 51. 52. 64.)

(h) * *Obtinent &c.* (per prop. 73.) ubi motus peraguntur intrà ſphæram, hoc eſt, ubi intrà ſphæram ſolidam via corporibus motis libera conceditur.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Sunto ſphæræ quotcunque concentricæ ſimilares AB, CD, EF, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per prop. LXXV.) trahent ſphæras alias quotcunque concentricas ſimilares GH, IK, LM, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato diſtantiæ SP. Et (i) componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias; hoc eſt, vis, quâ ſphæra tota, ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſita AB, trahit totam ex concentricis quibuſcunque vel concentricarum differentiis compoſitam GH; erit in eâdem ratione. Augeatur



(i) * *Et componendo vel dividendo &c.* Hoc eſt, in datâ diſtantiâ centrorum communium S, P, ſit attractio ſphærarum GH, IK, LM à ſphærâ AB, *a*, *b*, *c*; à ſphærâ CD, *d*, *e*, *f*; à ſphærâ EF, *g*, *h*, *i*: variante verò illâ diſtantiâ communium centrorum S, P vires omnes illæ mutabuntur reſpectivè ſecundum rationem illam inverſam quadrati diſtantiæ Centrorum, ergò ſumma vel differentia virium quibus omnes ſphæræ GH, IK, LM à ſphæris AB, CD, EF attrahuntur in primâ diſtantiâ, erit ad ſummam vel differentiam virium in altero caſu inversè ut quadrata diſtantiarum.

tur numerus ſphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas unà cum vi attractivâ, in progreſſu à circumferentiâ ad centrum, ſecundum legem quamcunque creſcat vel decreſcat; &, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut ſphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum ſuperius, in eâdem illâ diſtantiæ quadratæ ratione inverſâ. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures ſibi invicem per omnia ſimiles, ſe mutuò trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt, in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes.

(k) *Corol.* 2. Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras erunt, in æqualibus centrorum diſtantiis, ut ſphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta.

(l) *Corol.* 4. Inque diſtantiis inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata diſtantiarum inter centra inverſè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractiva mutuo exercita in ſphæram alteram.

(k) * *Cor.* 2. Attractiones acceleratrices ſphærarum GH, IK, LM &c. in ſphæras AB, CD, EF, &c. ſingularum versùs ſingulas ſunt (per cor. 1. prop 75.) ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra S, P. Quarè componendo vel dividendo ſumma attractionum illarum omnium vel exceſſus aliquarum ſuprà alias, hoc eſt, tota attractio acceleratrix ſphæræ compoſitæ GIMH versùs ſphæram compoſitam ACFB erit ut ſumma vel differentia ſphærum concentricarum ſimilarium AB, CD, EF, &c. ad quadratum diſtantiæ SP applicata. Sed ſi ſphæræ trahentes ſunt ſibi invicem per omnia ſimiles, ſummæ illæ vel differentiæ ſunt ut ſphæræ ipſæ. Quare patet veritas Coroll. 1. & 2.

(l) * *Cor.* 4. Corollaria 3um. & 4um. ex corollariis 1°. & 2°. manifeſta ſunt; Nam attractionis quantitas motrix, ſeu pondus ſphæræ attractæ in ſphæram trahentem æquipollet facto ex vi acceleratrice ductâ in quantitatem materiæ, ſeu in maſſam ſphæræ attractæ; vis autem acceleratrix (per cor. 2. prop. hujus) eſt ut ſphæra attrahens applicata ad quadratum diſtantiæ inter centra, & quantitates materiæ in ſphæris per omnia ſimilibus, ſunt ut volumina, ſeu ut ſphæræ ipſæ. Quare attractiones motrices ſeu pondera ſphærarum in ſphæras, ſunt ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta directè & quadrata diſtantiarum inter centra inverſè.

ram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servatâ.

Corol. 6. Si hujusmodi sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt (m) proportionales diametris.

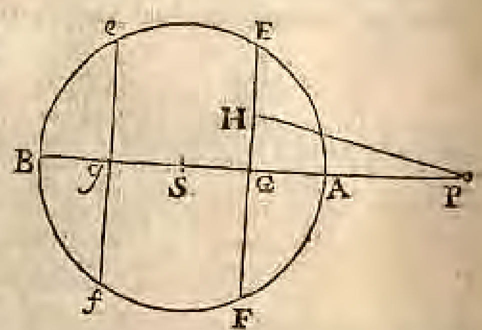
Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphæra attrahens formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

Corol. 9. (n) Ut & ubi gyrantia sunt etiam sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiis punctorum à corporibus attractis: dico quod vis composita, quâ sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphærarum.

Cas. 1. Sit $AEBF$ sphæra; S centrum ejus; P corpusculum attractum, $PASB$ axis sphæræ per centrum corpusculi transiens; EF, ef plana duo, quibus sphæra secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia à centro sphæræ; G, g intersectiones planorum & axis; & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpusculum P, secundum lineam PH exercita, est ut distantia PH; & (per legum corol. 2.) secundum lineam PG, seu versus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum omnium in plano EF, hoc est plani totius vis, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut distantia PG multiplicata per numerum punctorum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso EF & distantia illa PG. Et similiter vis plani ef, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg, sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam Pg; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG+Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & (o) corpusculi distantiam PS, hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS, vel ut summa æqualium planorum $EF+ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in sphærâ totâ, hinc inde æqualiter à centro sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS, hoc est, ut sphæra tota & ut distantia PS conjunctim. *Q. E. D.* (p)



(m) * *Proportionales diametris*. Cor. 6. & 7. constant per cor. 3. prop. 4æ.

(n) * *Ut & ubi gyrantia &c.* Patet per Cor. 2. Prop. 58.

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, quâ sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS. *Q. E. D.*

Cas. 3. Componatur jam sphæra altera ex corpusculis innumeris P; & quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi à centro sphæræ primæ, & (q) ut sphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphæræ; vis tota, quâ corpuscula omnia in sphæra secunda trahuntur, hoc est, quâ sphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphæræ primæ, & (r) propterea proportionalis est distantiæ inter centra sphærarum. *Q. E. D.*

Cas.

(o) * *Et corpusculi distantiam PS.* Est enim $Pg = PG + 2GS$, adeoque $Pg + PG = 2PG + 2GS = 2PS$.

(p) * *Q. E. D.* Observandum est vires obliquas GH, in plano quovis EF, ex utrâque axis PB parte in æqualibus distantiis sumptas esse æquales & opposítas, nullumque proinde motum producere.

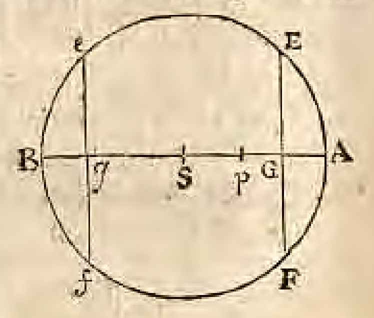
(q) * *Et ut sphæra eadem conjunctim*, per cas. 1.

(r) * *Et propterea proportionalis est distantiæ &c.* Si data est sphæra prima trahens per cas. 2.

DE MOTU CORPORUM.

Caſ. 4. Trahant ſphæræ ſe mutuo, & vis geminata proportionem priorem ſervabit. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Locetur jam corpuſculum p intra ſphæram $AEBF$; & quoniam vis plani ef in corpuſculum eſt ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ pg; & vis contraria plani EF ut ſolidum contentum ſub plano illo & diſtantiâ pG; (f) erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut ſumma æqualium planorum ducta in ſemiſſem differentiæ diſtantiarum, id eſt, ut ſumma illa ducta in pS diſtantiam corpuſculi à centro ſphæræ. Et ſimili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in ſphærâ totâ, hoc eſt, attractio ſphæræ totius, eſt conjunctim ut ſumma planorum omnium, ſeu ſphæra tota, & ut pS diſtantiâ corpuſculi à centro ſphæræ. *Q. E. D.*



Caſ. 6. Et ſi ex corpuſculis innumeris p componatur ſphæra nova, intra ſphæram priorem $AEBF$ ſita; probabitur ut prius quod attractio, ſive ſimplex ſphæræ unius in alteram, ſive mutua utriuſque in ſe invicem, erit ut diſtantia centrorum pS. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuo trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.

Demonſtratur ex propoſitione præcedente eodem modo, quo propoſitio LXXVI. ex propoſitione LXXV. demonſtrata fuit. (§)

(f) * *Erit vis ex utrâque compoſita ut differentia ſolidorum, hoc eſt, ut* $ef \times pg - EF \times pG$. Eſt autem $Sg = SG$, adeóque $pg - pG = pS + SG - pG = 2pS$; Quare cum ſit etiam $EF = ef$, erit $ef \times pg - EF \times pG = ef \times \overline{pg - pG} = 2\,ef \times pS = \overline{ef + EF} \times pS$. Si punctum G eſt inter p & S ſitum, vis tota erit ut $ef \times pg + EF \times pG$, & quoniam eſt ſemper $Sg = SG$, atque in hoc caſu $pg + pG = pS + SG + pG = 2pS$, ſimiliter invenietur vis tota ut $\overline{ef + EF} \times pS$.

LIBER PRIMUS. PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII.

Corol. Quæ ſuperius in propoſitionibus X. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum ſphæricorum conditionis jam deſcriptæ, & attracta corpora ſunt ſphæræ conditionis ejuſdem.

Scholium.

Attractionum caſus duos inſigniores jam dedi expoſitos; nimirum ubi vires centripetæ decreſcunt in duplicatâ diſtantiarum ratione, vel creſcunt in diſtantiarum ratione ſimplici; efficientes in utroque caſu ut corpora gyrentur in conicis ſectionibus, & componentes corporum ſphæricorum vires centripetas eâdem lege, in receſſu à centro, decreſcentes vel creſcentes cum ſeipſis: Quod eſt notatu dignum. Caſus cæteros, qui concluſiones minus elegantes exhibent, ſigillatim percurrere longum eſſet. Malim cunctos methodo generali ſimul comprehendere ac determinare ut ſequitur.

LEM-

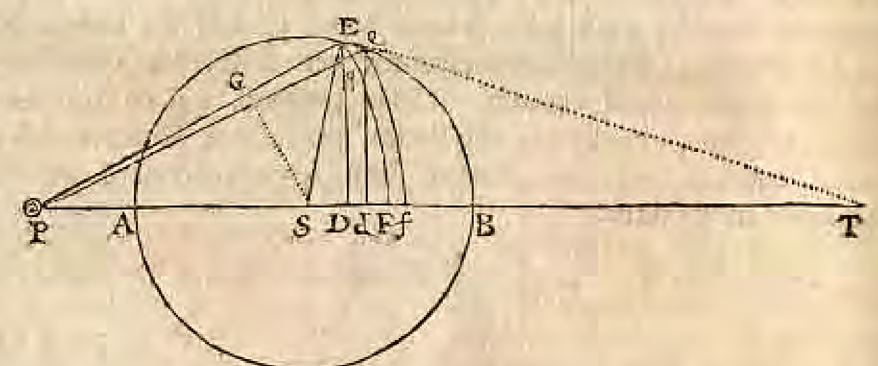
(§) Quæ in corollariis prop. 76. ubi attractio ſphæræ verſus ſphæram erat quadrato diſtantiæ centrorum reciproce proportionalis, demonſtrata ſunt, ea, mutatis mutandis, ad caſum hujus propoſitionis 78. transferri poſſunt. Nimirum ſi ejuſmodi ſphæræ complures per omnia ſimiles ſe mutuò trahant, attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt ut ſphæræ trahentes & diſtantiæ inter centra conjunctim; attractiones verò motrices ut ſphæræ attrahentes & attractæ & diſtantiæ inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur à ſphæræ utriuſque virtute attractivâ mutuò exercitâ in ſphæram alteram.

DE MOTU CORPORUM.

LEMMA XXIX.

Si describantur centro S *circulus quilibet* AEB, *& centro* P *circuli duo* EF, ef, *secantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; *& ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, si distantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam si linea *Pe* secet arcum *EF* in *q*; & recta *Ee*, quæ cum arcu evanescente *Ee* coincidit, producta occurrat rectæ *PS* in *T*; & ab *S* demittatur in *PE* normalis *SG*: ob (t) similia triangula *DTE*, *dTe*, *DES*; erit *Ed* ad *Ee*, ut *DT*



ad *TE*, seu *DE* ad *ES*; & ob (u) triangula *Eeq*, *ESG* (per lem. VIII. & corol. 3. lem. VII.) similia, erit *Ee* ad *eq* seu *Ff* ut *ES* ad *SG*; & ex æquo, *Dd* ad *Ff* ut *DE* ad *SG*; hoc est (ob similia triangula *PDE*, *PGS*) ut *PE* ad *PS*. *Q. E. D.*

PRO-

(t) * *Ob similia triangula DTE, dTe, DES.* Ob parallelas DE, de, triangula DTE, dTe similia sunt; & quoniam recta TE circulum AEB tangit in E, erit angulus SET rectus, & proinde demisso ex puncto E ad basim ST perpendiculo ED, erit triangulum DES simile triangulo DTE (prop. 8. Lib. 6. Elem.).

(u) * *Et ob triangula Eeq, ESG &c.* Anguli ad G & q recti sunt & proinde æquales, & quoniam anguli PEq, SEe sunt quoque recti & æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo SEq, anguli residui GES, qEe, erunt etiam æquales. Quare triangula Eeq, ESG sunt similia (prop. 4. lib. 6. Elem.).

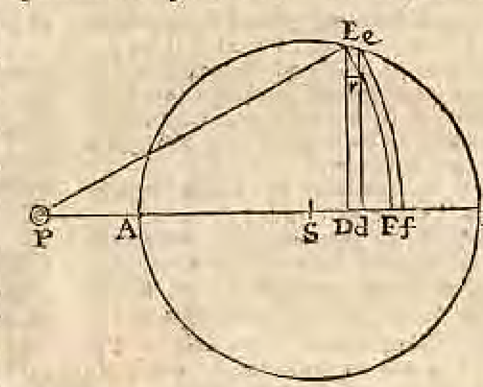
LIBER PRIMUS.

PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX.

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens EFfe, *convolutione sui circa axem* PS, *describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione compositâ ex ratione solidi* $DEq \times Ff$, *& ratione vis quâ particula data in loco* Ff *traheret idem corpusculum.*

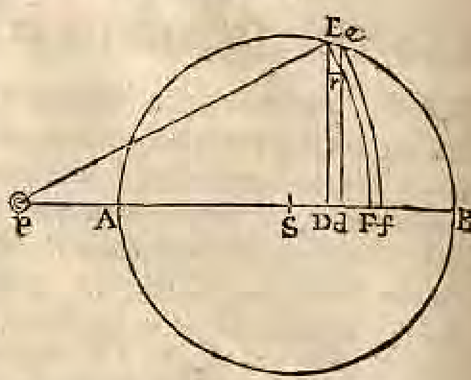
Nam si primò consideremus vim superficiei sphæricæ *FE*, quæ convolutione arcus *FE* generatur, & à linea *de* ubivis secatur in *r*; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus *rE* genita, ut lineola *Dd*, manente sphæræ radio *PE* (uti (x) demonstravit *Archimedes* in lib. de *Sphærâ & Cylindro.*) Et hujus vis, secundum lineas *PE* vel *Pr* undique in (y) superficie conicâ sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola *Dd*, vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphæræ radio *PE* & lineola illa *Dd*: at secundum lineam *PS* ad centrum *S* tendentem minor in ratione *PD* ad *PE*, (z) ideoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelliga-



(x) 518. *Uti demonstravit Archimedes &c.* Facilis est demonstratio. Quoniam enim angulus PEr rectus est (ex naturâ circuli) erit angulus DEr æqualis angulo DPE, ob summam angulorum DPE + PED recto PEr æqualem. Undè si ex puncto r in lineam DE demissum intelligatur perpendiculum quod æquale erit lineæ Dd, constituetur triangulum evanescens, simile triangulo EPD, eritque adeò $DE : PE = Dd : Er = \frac{PE \times Dd}{DE}$, sed (515) zona circularis convolutione arcûs rE genita, est ut rectangulum $rE \times DE$; Quare si in hoc rectangulo loco rE substituatur valor ipsius modò inventus, erit zona ut $PE \times Dd$, hoc est, ob datum radium PE, ut Dd. Q. E. D.

(y) * *In superficie conicâ.* Nam in convolutione puncti E, linea PE superficiem conicam describit.

(z) * *Ideoque ut PD × Dd.* Nam si vis secundum directionem PE agens per lineam PE exponatur, vis illius pars quæ tur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ ſingulæ nominentur Dd; & ſuperficies FE dividetur (a) in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium $PD \times Dd$, hoc eſt, ut $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$, ideoque ut (b) DE *quad.* Ducatur jam ſuperficies FE in altitudinem Ff; & fiet ſolidi $EFfe$ vis exercita in corpuſculum P ut $DEq \times Ff$: putâ ſi detur vis quam particula aliqua data Ff in diſtantia PF exercet



agit ſecundùm directionem P S, exponetur per lineam P D; erit P E ad P D ut rectangulum $PE \times Dd$ ad rectangulum $PD \times Dd$, quod proindè vim illam ſecundùm directionem P D exhibebit, vires autem obliquæ E D ab utrâque axis P B parte ſe mutuò deſtruunt.

(a) * *Dividetur in totidem æquales annulos.* (Per not. 518.).

(b) * *Et ſuperficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut ſumma omnium* $PD \times Dd$, *hoc eſt, ut* $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$, *ideoque ut DE quad.* Scilicet omnes P D, dum ex P D in P F mutantur uniformiter creſcendo progreſſionem Arithmeticam faciunt, quoniam omnes particulæ D d quibus lineæ P D ſucceſſive augentur ſunt æquales: ergo omnium P D ſumma eâ ratione invenitur quâ ſummæ progreſſionum Arithmeticarum obtinentur, nempe primum & ultimum progreſſionis terminum ſimul junctos multiplicando per numerum terminorum progreſſionis; & dimidium facti ſumendo; Progreſſionis verò hujuſce primus terminus eſt P D, ultimus P F numerus verò terminorum D F, ſiquidem D F eſt ſumma incrementorum æqualium evaneſcentium lineæ P D, ergo ſumma omnium P D eſt $\frac{\overline{PF+PD} \times DF}{2}$ ſive (quia D F eſt differentia linearum P F & P D) eſt ſumma omnium $PD = \frac{\overline{PF+PD} \times \overline{PF-PD}}{2}$ ſed (per 6. 2. Elem.) factum ſummæ & differentiæ duarum linearum æquatur differentiæ quadratorum ipſorum, ergo $\frac{\overline{PF+PD} \times \overline{PF-PD}}{2} = \frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$.

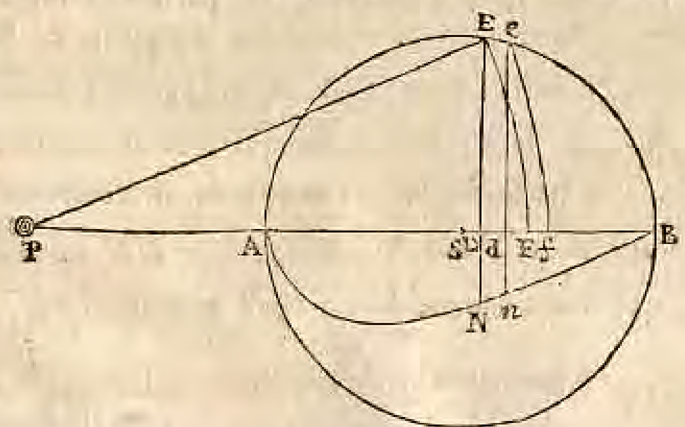
& ſumma omnium $PD \times Dd = \overline{\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2} \times Dd$, ſed D d eſt particula quæ in omnibus hiſce caſibus ut eadem aſſumitur, ergo vires totius ſuperficiei F E quæ ſunt ut ſumma omnium $PD \times Dd$ ſunt ut $\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$ ſive ut $PF^2 - PD^2$ ſed PF^2 eſt æquale PE^2 per conſtr. & $PE^2 - PD^2 = DE^2$ (per 47. 1. El.) ergo vires ſuperficiei F E, ſunt ut DE^2. Q. E. D.

Idem aliter. Sit radius datus $PE = a$; variabilis $FD = x$, erit fluxio $Dd = dx$, & $PD = a - x$, atquè adeò $PD \times Dd = adx - xdx$, & ſumptis utrinque fluentibus (165) S. $PD \times Dd = ax - \frac{1}{2}xx = \frac{2ax - xx}{2} = \frac{DE^2}{2}$, (prop. 13. lib. 6. Elem.). Quarè vis ſuperficiei convolutione arcûs F E genitæ erit ut DE^2.

cet in corpuſculum P. (c) At ſi vis illa non detur, fiet vis ſolidi $EFfe$ ut ſolidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad ſphæræ alicujus ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad ſphæræ axem* AB, *in quo corpuſculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE, *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particula ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P, *conjunctim: dico quod vis tota, quâ corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& lineâ curvâ* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*



Etenim ſtantibus quæ in lemmate & theoremate noviſſimo

(c) * *At ſi vis illa non detur &c.* Zona convolutione arcûs E genita ducatur in datam altitudinem F f, & erit annuli ſolidi indè geniti vis ſecundum lineam P E undiquè exercita ut hic ipſe annulus & vis lineolæ F f conjunctim, hoc eſt, ſi vis lineolæ F f dicatur V, ut $PE \times Dd \times Ff \times V$ (518). At vis annuli ſecundum lineam P S minor erit in ratione P D ad PE, ideòque erit ut $FD \times Dd \times Ff \times V$. Et quoniam variante PD, manet factum $Ff \times V$ quod nimirum vis V in ſingulis particulis datis F f, æqualis ſupponatur; Si ſumantur fluentes, ut ſuprà, erit vis tota ſolidi E F f e, in corpuſculum P ſecundùm lineam P S exercita ut $DE^2 \times Ff \times V$.

DE MOTU CORPORUM.

constructa sunt, concipe axem sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd & sphæram totam dividi in totidem laminas sphæricas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum dn. Per theorema superius vis, quâ lamina $EFfe$ trahit corpusculum P, est ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctim. Est autem (per lemma novissimum) Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est, sphæræ vis tota ut area tota ANB. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quâ corpusculum à sphæra attrahitur, (d) ut area ANB.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut distantia corpusculi à se attracti, & fiat (e) DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quâ corpusculum P à sphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut cubus distantiæ corpusculi à se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quâ corpusculum à totâ sphærâ attrahitur, ut area ANB.

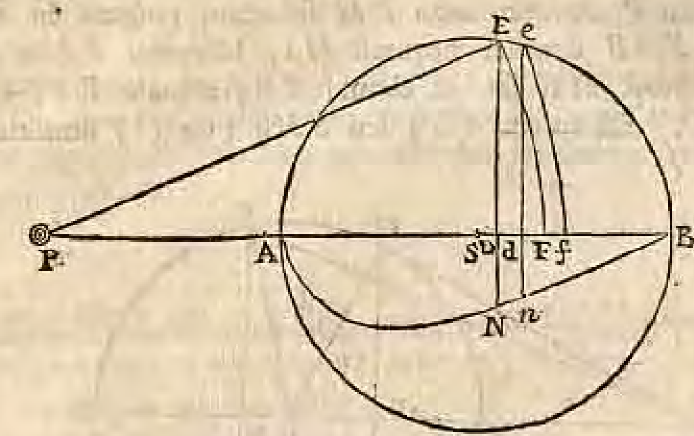
Co-

(d) * *Ut area ANB.* Nulla enim habenda est ratio vis particulæ Ff quæ eadem in omnibus distantiis manet ex hyp.

(e) * *Fiat DN &c.* Substitutâ quantitate $\frac{1}{PE}$ loco vis particulæ Ff.

LIBER PRIMUS. PROP. LXXX. THEOR. XL.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens ponatur esse reciprocè ut quantitas V, fiat



autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, quâ corpusculum à sphærâ totâ attrahitur, ut area ANB.

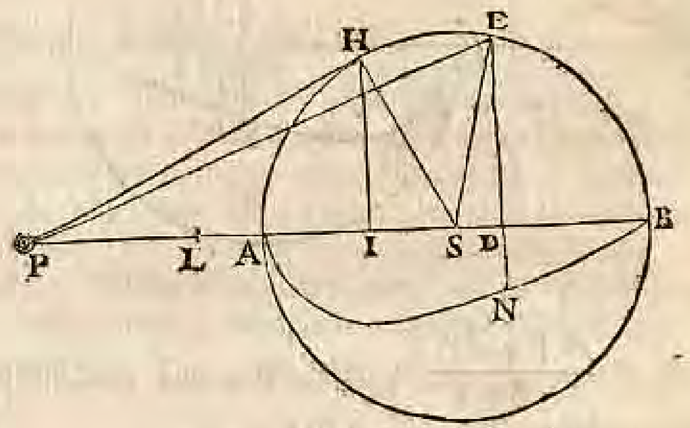
PRO-

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXXI. THEOREMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area ANB.

A puncto P ducatur recta PH sphæram tangens in H, & ad axem PAB demissa normali HI, bisecetur PI in L; & erit (per prop. XII. lib. 2. elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob (f) similitudinem



triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS+SI+2SD$, hoc (g) est, sub PS & $2LS+2SD$, id est, sub PS & $2LD$. Porro DE *quad.* æquale est $SEq - SDq$, seu (†) $SEq - LSq + 2SLD - LDq$, id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$ (per prop. VI. lib 2. elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum corollarium quar-

(f) * *Ob similitudinem triangulorum &c.* (Per prop. 13. lib. 6. Elem.)

(g) * *Hoc est sub PS & 2LS + 2SD.* Ob $PS + SI = PI + 2SI = 2LI + 2SI = 2LS$.

(†) * *Seu $SE^2 - LS^2$ &c.* Ob $SD = LD - LS$, adeóque $SD^2 = LD^2 - 2SLD + LS^2$.

Liber Primus. Prop. LXXXI. Theor. XLI.

tum propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PF \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, (h) quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

Exem-

(h) 519. *Quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt.* Sint variabiles PE $= z$, LD $= x$, adeoque D d $= dx$, sint constantes PA $= a$, PB $= b$, PS $= c$, & LS $= m$, LA $= p$, LB $= q$, & erit areæ AND fluxio DN $\times dx$ ut $\frac{2mcxdx}{zV} - \frac{cxxdx}{zV} - \frac{pqcdx}{zV}$: quoniam verò PE^2 $(zz) =$ 2PS$\times$LD $(2cx)$, est $x = \frac{zz}{2c}$ & $dx = \frac{zdz}{c}$, quibus valoribus loco x & dx in formula substitutis illa in hanc mutatur $\frac{mz^2dz}{cV} - \frac{z^4dz}{4c^2V} - \frac{pqdz}{V}$.

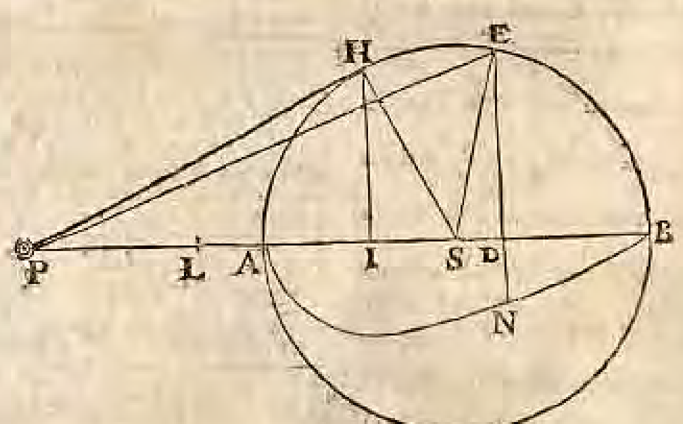
Sit vis attractiva ut distantiæ z dignitas $\frac{1}{z^n}$ erit $V = z^n$, quo valore loco V in formulâ posito, fiet DN $\times dx$ ut $\frac{mz^{2-n}dz}{c} - \frac{z^{4-n}dz}{4c^2} - pqz^{-n}dz$, unde sumptis singulorum terminorum fluentibus (165) erit S. DN $\times dx$, seu area AND, ut $\frac{mz^{3-n}}{3-n \times c} - \frac{z^{5-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pqz^{1-n}}{1-n} +$ *Q. constans.* Sed fluens illa evanescere debet dum fit PE $(z) =$ PA (a) est ergo $Q = \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$ ac proinde fluens accurata ubi PE $(z) =$ PB (b) erit $\frac{mb^{3-n}}{3-n \times c} - \frac{b^{5-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$:

520. Cum sit semper PE$^2 = 2$PS$\times$LD; & ubi PE fit PB fit LD $=$ LB, ubi verò PE fit PA fit LD $=$ LA, erit PB^2 $(b^2) = 2$PS$\times$LB $(2cq)$ & PA^2 $(a^2) = 2$PS$\times$LA $(2cp)$ quibus valoribus loco, b^2 & a^2 substitutis, formula fit $\frac{2mqb^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2b^{1-n}}{5-n} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{p^2a^{1-n}}{5-n} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{2mpa^{1-n}}{3-n}$. & restitutis litteris figuræ $\frac{2SLB \times PB^{1-n}}{3-n} - \frac{LB^2 \times PB^{1-n}}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{1-n}}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{1-n}}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{1-n}}{1-n} - \frac{2SLA \times PA^{1-n}}{3-n}$.

521. Cor. 1. Hinc liquet aream ANB, seu attractionem cui proportionalis est, semper posse algebraice inveniri, tribus tantum casibus exceptis in quibus est $n = 1$ vel 3, vel 5, seu in quibus vis attractiva decrescit in ratione distantiæ simplici, vel triplicatâ vel quintuplicatâ. In his enim casibus tribus divisores $1-n$, $3-n$, $5-n$ evanescunt; sed tum fluens per logarithmos, aut quod idem est, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infrà positis patebit.

DE MOTU CORPORUM.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciprocè ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam PE; dein $2PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2SL$ ducta in longitudinem AB deſcribet aream rectangulam $2SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini LD, (ı) deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, (†) id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de areâ

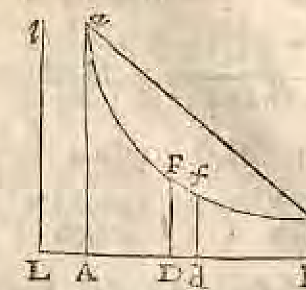


(ı) 522. *Deſcribet aream* $\frac{LBq - LAq}{2}$. Area quam deſcribet erit trapezium, nam ſi à puncto L in longitudinem A B ſemper erigantur perpendicula æqualia LD, omnes terminabuntur in recta linea ducta à puncto L in terminum perpendiculi in B erecti & æquali L B, ſicque formabitur Triangulum cujus pars ſecundum A B ſita eſt area quæſita, & ea erit Trapezium cujus latera in A & B perpendicularia, inter ſe parallela ſunt, & latus puncto A inſiſtens erit æquale L A, latus verò oppoſitum in B erectum erit æquale L B, hujus ergo trapezii ſuperficies erit $\frac{LA + LB}{2} \times AB$; ſed $AB = LB - LA$, ergo per 6. 2. El. $\frac{LA + LB}{2} \times LB - LA = \frac{LB^2 - LA^2}{2}$ (quod trapezium eſt æquale Trapezio A a b B in figura Newtoniana deſcripto ut liquet per ejus figuræ conſt.).

(†) *Id eſt, aream* $SL \times AB$, cum enim hæc area ſit

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXI. PROBL. XLI.

priore $2SL \times LAB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream hyperbolicam; quæ ſubducta de areâ $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam ANB. Unde talis emergit problematis conſtructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipſi LB, & Bb ipſi LA æquetur. Aſymptotis Ll, LB per puncta ab deſcribatur hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæſitæ ANB æqualem.



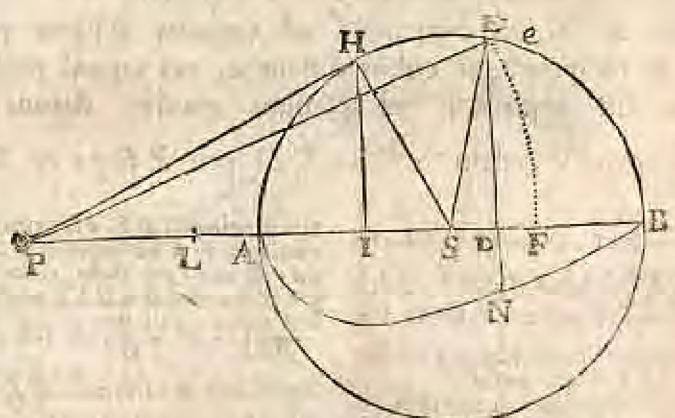
Exempl. 2. Si vis centripeta ad ſingulas ſphæræ particulas tendens ſit reciprocè ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\ cub.}{2ASq}$ pro V, dein $2PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN

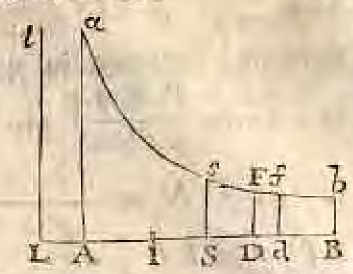
ſit $= \frac{LA + LB}{2} \times AB$, ſitque $LB = LA + 2AS$ erit $LA + LB = 2LA + 2AS = 2LS$ unde $\frac{LA + LB}{2} \times AB = LS \times AB$. Unde etiam ſequitur Trapezium A a b B rectangulo $LS \times AB$ eſſe æquale.

Cæterum per methodos vulgares caſus iſte ſequenti ratione ſolvitur. Sit $AD = x$, $Dd = dx$ erit areæ A N D fluxio $DN \times Dd = 2SL \times dx - LA \times dx - xdx - \frac{ALB \times dx}{LD}$. Primi termini $2SL \times dx$, fluens (165) eſt $2SL \times x = 2SL \times AB$, ubi AD, ſeu $x = AB$. Secundi termi $LA \times dx + xdx$, fluens eſt $LA \times x + \frac{1}{2}xx = \frac{2LA + AB \times AB}{2} = LS \times AB$, quandò x, ſeu AD, ſit AB. Quare duorum priorum terminorum fluens eſt $2SL \times AB - SL \times AB$ ſive $SL \times AB$. Jam ut tertii termini $\frac{ALB \times dx}{LD}$ fluens inveniatur deſcribatur hyperbola A B, prout Newtonus præſcribit, & ſuper aſymptoto L B erigantur perpendicula duo infinitè propinqua, DF, df, hyperbolæ occurrentia in F & f, ſitque $AD = x$, $Dd = dx$, & erit (per theor. 4. de hyperbolâ) $LA \times Aa = LD \times DF$, adeóque $DF = \frac{LA \times Aa}{LD} = \frac{ALB}{LD}$, & $DF \times Dd$, ſeu fluxio areæ $AaFD = \frac{ALB \times dx}{LD}$. Quarè area hyperbolicâ AaFD, æqualis eſt fluenti tertii termini, & area hyperbolica AabB, eſt ejuſdem termini fluens, ubi x, ſeu $AD = AB$. Hæc igitur ſubducta de rectangulo $SL \times AB$, ſive de trapezio A a b B ipſi æquali, relinquet aream quæſitam A N B. Relinquitur autem area a F b a; undè patet conſtructio.

523. Cor. 1. Si diſtantia corpuſculi P à ſphærâ evaneſcat, erit $Bb = LA = 0$ ideoque hyperbola A F b cum ſuis aſymptotis L l, L B congruet nullaque erit ejus area. Quarè corpuſculo poſito in A, ſeu in contactu ſphæræ attractio erit ut rectangulum $SL \times AB = 2AS^2$, ut etiam demonſtrari poſſet eodem modo ac demonſtrata fuit Prop. 72.

ut $\frac{SL\times ASq}{PS\times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB\times ASq}{2PS\times LDq}$, id (k) est (ob continuè proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB\times SI}{2LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB\times SI$; tertia $\frac{ALB\times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB\times SI}{2LA} - \frac{ALB\times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2}AB\times SI$. De primâ subducatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsita ANB. (l) Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erigo perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipsi SI æquetur, perque punctum s asymptotis Ll, LB describatur hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ subductum de area hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam ANB.





524. Cor. 2. Vis quâ corpusculum P, versùs portionem sphæræ convolutione superficiei A E F, genitam trahitur est ut LB $-\frac{1}{2}x \times x -$ AaFD; Nam (per not. 522.) vis illa est ut 2 SL $\times x -$ LA $\times x - \frac{1}{2}xx -$ AaFD, & 2 SL = 2 LA + 2 AS & 2 SL − LA = LA + 2 AS = LB, unde vis illa est LB $-\frac{1}{2}x \times x -$ AaFD; sed P posito in contactu sphæræ est LB = AB & areâ hyperbolicâ evanescit, vis ergo fit in contactu AB $-\frac{1}{2}x \times x$, sive AB $-\frac{1}{2}$ AD × AD.

525. Cor. 3. Quoniam attractio corpusculi P versùs sphæram totam est ut SL × AB − AabB, ejusdem attractio versùs portionem sphæræ convolutione superficiei FEeB (fig. prop. 80.) genitam, erit ut SL × AB − LB $\times x + \frac{1}{2}xx +$ AaFD − AabB = SL × AB − LB × AD + $\frac{1}{2}$ AD² − DFbB, sive substitutis LA + $\frac{1}{2}$ AB pro SL, LA + AB loco LB, & pro AB − AD posito BD fiet ut $\overline{\text{LA} + \frac{1}{2}\text{BD}}$ × BD − DFbB, & corpusculo in contactu posito, erit ut $\frac{1}{2}$ BD².

(k) * *Id est, ob continuè proportionales &c.* Per prop. 8. l. 6. El. unde AS² = PS × SL.

(l) 526. * *Unde talis emergit problematis constructio.* Sit, ut suprà AD = x, Dd = dx, erit areæ AND, fluxio DN × Dd, ut $\frac{\text{LSI}\times dx}{\text{LD}} - \frac{1}{2}\text{SI}\times dx - \frac{\text{ALB}\times\text{SI}\times dx}{2\,\overline{\text{LA}+x}^2}$.

Jam ut primi termini $\frac{\text{LSI}\times dx}{\text{LD}}$, fluens habeatur, describatur hyperbola aSb, eo modo quo jubet Newtonus, erectisque perpendiculis DF, df, sit AD = x, Dd = dx, & quoniam (per theor. 4. de hyperbolâ) LS × SI = LD × DF, erit DF = $\frac{\text{LSI}}{\text{LD}}$, & DF × Dd = $\frac{\text{LSI}\times dx}{\text{LD}}$. Patet igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam AasbB, æqualem esse fluenti primi termini, dum AD seu x = AB; secundi termini $\frac{1}{2}$SI × dx, fluens est $\frac{1}{2}$ SI × AD = $\frac{1}{2}$ SI × AB, dum fit AD = AB; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis $\frac{dx}{(\text{LA}+x)^2}$ fluens (165) est $-\frac{1}{\text{LA}+x} + Q$ *constans*; & quoniam fluens illa evanescere debet ubi $x = 0$, erit $Q = \frac{1}{\text{LA}}$. Quarè fluens accurata est $\frac{1}{\text{LA}} - \frac{1}{\text{LD}} = \frac{1}{\text{LA}} - \frac{1}{\text{LB}}$, ubi x = AB. Est igitur tertii termini $\frac{1}{2}\text{ALB}\times\text{SI}\times\frac{dx}{\overline{\text{LA}+x}^2}$ fluens = $\frac{\text{ALB}\times\text{SI}}{2\text{LA}} - \frac{\text{ALB}\times\text{SI}}{2\text{LB}} = \frac{1}{2}\text{LB}\times\text{SI} - \frac{1}{2}\text{LA}\times\text{SI} = \frac{1}{2}\text{AB}\times\text{SI}$, undè summa 2ⁱ & 3ⁱ termini est AB × SI = 2 AS × SI. Quarè rectangulum 2 ASI subductum de areâ hyperbolicâ AasbB relinquet aream quæsitam ANB.

527. Cor. 1. Si corpus P sphæram tangat in A, attractio evadet infinita, nam in hoc casu LA = o & Aa cum asymptoto Ll coincidit, ac proindè attractio per aream hyperbolæ infinitam BLlasb exponitur.

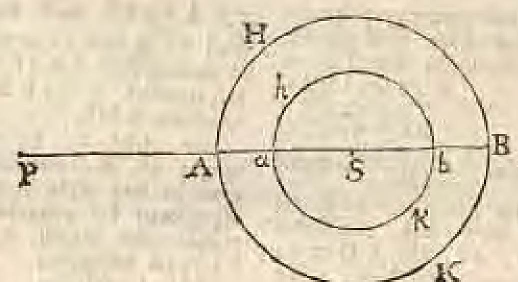
528. Coroll. 2. Vis quâ corpusculum P in sphæræ portionem convolutione superficiei AEF, genitam trahitur, est ut AaFD − $\frac{1}{2}$SI × AD − $\frac{1}{2}$LB × SI + $\frac{\text{ALB}\times\text{SI}}{2\text{LD}}$, ut ex notâ 526. manifestum est. Quare in contactu ubi LA = o, erit vis illa ut area infinita AaFD, cujus respectu aliæ finitæ quantitates evanescunt.

529. Cor. 3. Et quoniam corpusculi P attractio in sphæram totam est ut area hyperbolica AasbB − 2 ASI, ejusdem attractio versùs portionem concavo convexam, convolutione superficiei FEeB, genitam, erit ut AasbB − AaFD − 2 ASI + $\frac{1}{2}$AD × SI + $\frac{1}{2}$ LB × SI − $\frac{\text{ALB}\times\text{SI}}{2\text{LD}}$ = DFbB + $\overline{\frac{1}{2}\text{LA} - \frac{1}{2}\text{BD}}$ × SI − $\frac{\text{ALB}\times\text{SI}}{2\text{LD}}$, ponendo AB pro 2 AS, $\frac{1}{2}$ LA + $\frac{1}{2}$ AB pro $\frac{1}{2}$ LB, & $\frac{1}{2}$ BD pro $\frac{1}{2}$AB − $\frac{1}{2}$ AD.

Exem-

Exempl. 3. Si vis centripeta, ad singulas sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicatâ ratione distantiæ à particulis; scribe $\frac{PEqq}{2AScub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS\times LD}$ (m) pro PE, & fiet DN ut $\frac{SIq\times SL}{\sqrt{2SI}}\times\frac{1}{\sqrt{LDc}}-\frac{SIq}{2\sqrt{2SI}}\times\frac{1}{\sqrt{LD}}-\frac{SIq\times ALB}{2\sqrt{2SI}}\times\frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. (n) Cujus tres partes ductæ in

longi-



330. Cor. 4. Simili modo inveniri potest vis quâ corpus P trahitur versùs sphæram concavam A a H B K a, si ex attractione in sphæram totam solidam detrahatur attractio in sphæram interiorem a h b k. Patet autem corpusculi P in A, seu in contactu positi attractionem versùs sphæram cavam A a H B K a, interiori concentricam, infinitam esse; Nam si ex vi infinitâ quâ versùs sphæram solidam A H B K S, trahitur, subducatur vis finita quâ versùs sphæram interiorem a h b k s urgetur, relinquetur attractio infinita versùs sphæram concavam A a H B K a; quin imò, si ex sphærâ concavâ detrahatur pars quævis à contactu remota ut H h B K k, attractio corpusculi in contactu A positi versùs residuam H h A a K k, adhuc infinita erit, ut patet (per cor. 2. & 3.).

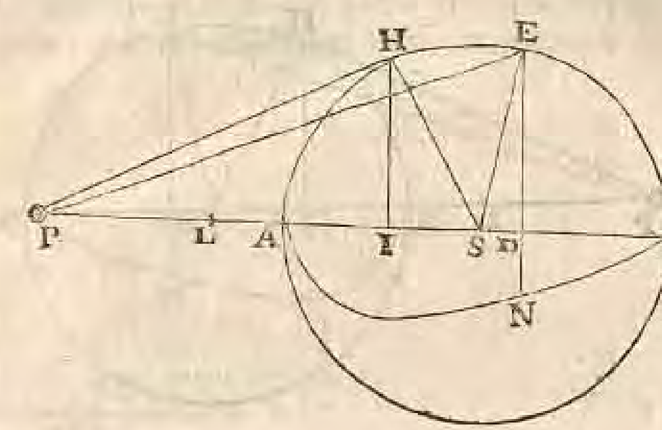
(m) * *Pro PE.* Erit $PE^5=4PS^2\times LD^2\times\sqrt{2PS\times LD}$, & $AS^3=PS\times SI\times\sqrt{PS\times SI}$. Unde fiet $\frac{SLD\times PS}{PE\times V}=\frac{4SLD\times PS\times AS^3}{PE^5}=\frac{4SL\times LD\times PS^2\times SI\sqrt{PS\times SI}}{4PS^2\times LD^2\times\sqrt{2PS\times LD}}=\frac{SL\times SI\sqrt{SI}}{LD\sqrt{2LD}}=\frac{SL\times SI^2}{LD\sqrt{2SI\times LD}}=\frac{SI^2\times SL}{\sqrt{2SI}}\times\frac{1}{\sqrt{LD^3}}$. Et ità de cæteris terminis.

(n) * *Cujus tres partes &c.* Sit $AD=x$ fluxio $AD=dx$, & erit areæ AND fluxio $DN\times dx$, ut $\frac{SI^2\times SL}{\sqrt{2SI}}\times\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}}-\frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}}\times\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{1}{2}}}-\frac{SI^2\times ALB}{2\sqrt{2SI}}\times\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{5}{2}}}$, quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{3}{2}}}$, seu $\overline{LA+x}^{-\frac{3}{2}}dx$ fluens est

LA

longitudinem AB, producunt areas totidem, *viz.* $\frac{2SIq\times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}}-\frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB}-\sqrt{LA}$; & $\frac{SIq\times ALB}{2\sqrt{2SI}}$

in

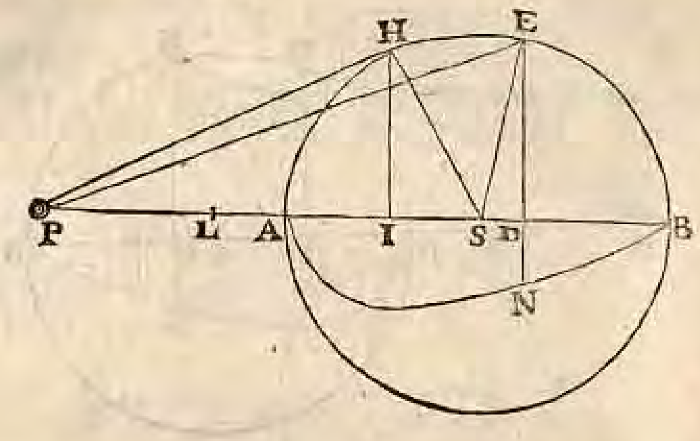


$\frac{-2}{\overline{LA+x}^{\frac{1}{2}}}+Q$ *const.* (165) quæ evanescere debet ubi $x=0$; Quarè erit $Q=\frac{2}{\sqrt{LA}}$, & fluens accurata $=\frac{2}{\sqrt{LA}}-\frac{2}{\sqrt{LB}}$, dum fit $x=AB$. Primi igitur termini fluens erit $\frac{2SI\times SL}{\sqrt{2SI}}$, in $\frac{1}{\sqrt{LA}}-\frac{1}{\sqrt{LB}}$. Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{1}{2}}}$, fluens est $2(LA+x)^{\frac{1}{2}}+Q$ *const.* & factâ $x=0$, invenitur $Q=-2\sqrt{LA}$; quare fluens accurata est $2\sqrt{LB}-2\sqrt{LA}$, dum $x=AB$. Secundi igitur termini fluens erit $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$, in $\sqrt{LB}-\sqrt{LA}$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^{\frac{5}{2}}}$, fluens est $\frac{-2}{3(LA+x)^{\frac{3}{2}}}+Q$, & $Q=\frac{2}{3\sqrt{LA^3}}$, undè fluens integra erit $\frac{2}{3\sqrt{LA^3}}-\frac{2}{3\sqrt{LB^3}}$, ubi $x=AB$, & proinde tertii termini fluens est $\frac{SI^2\times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA^3}}-\frac{1}{\sqrt{LB^3}}$.

* Et

in $\frac{1}{\sqrt{LA\,cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\,cub.}}$. Et (o) hæ post debitam re-



ductionem fiunt $\frac{2\,SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2\,SI\,cub.}{3\,LI}$. Hæ vero, subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4\,SI\,cub.}{3\,LI}$. Proin-

(o) * *Et hæ post debitam reductionem &c.* Est $PS \times SI = AS^2$ (per prop. 8. Lib. 6. Elem.) sed $PS = LS + LI$, ob $PL = LI$, (per constr.) & $SI = LS - LI$, ergò $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$, & hinc $LI^2 = LS^2 - AS^2 = \overline{LS + AS} \times \overline{LS - AS} = LB \times LA$. Quare LI sive $LS - LI = \sqrt{LA \times LB}$, & $2\,LS - 2\,SI = 2\sqrt{LA \times LB}$, & $2\,SI = 2\,LS - 2\sqrt{LA \times LB} = LB - 2\sqrt{LB \times LA} + LA$, & extractâ utrinque radice quadratâ $\sqrt{2\,SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$. His positis, facilis est terminorum reductio; erit enim $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}} = \frac{\sqrt{2\,SI}}{LI}$. Quare patet primum fluentis terminum esse $\frac{2\,SI^2 \times SL}{LI}$; secundum verò esse SI^2. Tertius terminus, reductione ad communem denominatorem factâ, est $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3\sqrt{2\,SI}} \times \frac{\sqrt{LB^3} - \sqrt{A^3}}{LA \times LB\sqrt{LA \times LB}} = \frac{SI^2 \times \sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{3\,LI \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$. Peractâ divisione invenitur $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB + LB^{\frac{1}{2}} \times LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI + LA = 2\,SI + 3\,LI$, ob $LB + LA = 2\,LS = 2\,SI + 2\,LI$. Quare tertius terminus est $\frac{SI^2 \times 2\,SI + 3\,LI}{3\,LI} = SI^2 + \frac{2\,SI^3}{3\,LI}$, unde tres fluentes ad communem denominatorem reducti fiunt $\frac{6\,SI^2 \times SL - SI^2 \times 3\,LI - SI^2 \times 3\,LI - 2\,SI^3}{3\,LI} = \frac{6\,SI^2 \times \overline{SL - LI} - 2\,SI^3}{3\,LI}$, sed quia $SL - LI = SI$ fiunt $\frac{6\,SI^3 - 2\,SI^3}{3\,LI} = \frac{4}{3}\frac{SI^3}{LI}$.

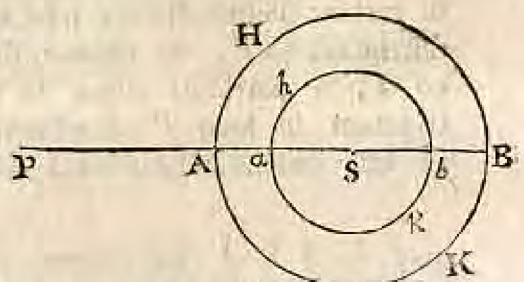
de vis tota, quâ corpusculum P in sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$, (p) id est, reciprocè ut $PS\,cub. \times PI$. Q. E. I.

Eâdem methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra sphæram, sed expeditius per theorema sequens.

PRO-

(p) * *Id est reciprocè ut $PS^3 \times PI$.* Nam cum sit $PS \times SI = AS^2$, ideóque $SI = \frac{AS^2}{PS}$, hinc, dato radio AS, est SI ut $\frac{1}{PS}$, SI^3, ut $\frac{1}{PS^3}$; Est verò $= \frac{1}{2}\,PI$ ideóque etiam & LI ut PI, unde erit $\frac{4\,SI^3}{3\,LI}$ ut $\frac{1}{PS^3 \times PI}$, neglectâ fractione $\frac{4}{3}$.

531. Cor. 1. In accessu corporis P ad sphæram, ità crescit illiùs attractio, ut in contactu infinita evadat, dum enim coincidit P cum A, puncta H & I cum eodem puncto A coincidunt, fitque $PI = 0$, & proindè quantitas $\frac{1}{PS^3 \times PI}$ infinita.



532. Cor. 2. Attractio corpusculi in contactu A positi versùs sphæram cavam AaHBKa, infinita est. Hæc enim attractio habetur, si ex attractione infinitâ versùs sphæram solidam AHBKS, subducatur attractio finita versùs sphæram interiorem ahbkS.

533. Hic adjungemus solutionem casûs tertii qui pendet à quadraturâ hyperbolæ, ubi nempè vis est ut PE^5 reciprocè (520). Scribe igitur $\frac{PE^5}{2\,AS^4}$, pro V; dein $8\,PS^3 \times LD^3$ pro PE^6, & $PS \times SI$ pro AS^2, unde est $\frac{PS}{PE \times V} = \frac{SI^2}{4\,LD^3}$ & fiet DN, ut $\frac{SL \times SI^2}{2\,LD^2} - \frac{SI^2}{4\,LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4\,LD^3}$ seu, ut $\frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2}{LD^3}$; undè fluxio $DN \times Dd$, erit ut $\frac{SL \times SI^2 \times dx}{\overline{LA + x}^2}$

=

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In sphærâ centro S intervallo SA descriptâ, si capiantur SI, SA, SP continuè proportionales: dico quod corpusculi intra sphæram, in loco quovis I, attractio est ad attractionem ipsius extra sphæram, in loco P, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiarum à centro IS, PS, & subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis P & I, ad centrum tendentium.

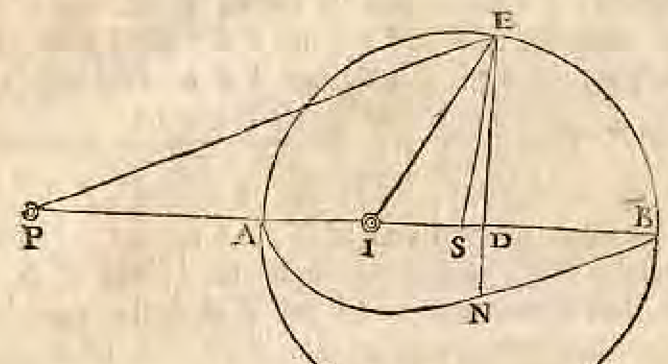
Ut, si vires centripetæ particularum sphæræ sint reciprocè ut distantiæ corpusculi à se attracti; vis, quâ corpusculum situm in I trahitur à sphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in P, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiæ SI ad distantiam SP, & ratione subduplicatâ vis centripetæ in loco I, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eâdem in centro particulâ oriundam, id est, ratione subduplicatâ distantiarum SI, SP ad invicem reci-

$-\frac{1}{2}\frac{SI^2 \times dx}{\overline{LA+x}} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2 \times dx}{\overline{LA+x}^3}$, positâ $AD = x$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^2}$, fluentem suprà (526) invenimus esse $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB} = \frac{LB-LA}{LA \times LB} = \frac{AB}{LI^2}$ ubi x seu $AD = AB$. Quarè primi termini fluens erit $\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA+x}^3}$ fluens $= \frac{-1}{2\,\overline{LA+x}^2} + Q$ *const.* quæ evanescere debet positâ x, seu $AD = 0$, quarè erit $Q = \frac{1}{2LA^2}$ & fluens accurata, ubi $AD = AB$, erit $\frac{1}{2LA^2} - \frac{1}{2LB^2} = \frac{LB^2 - LA^2}{2LA^2 \times LB^2} = \frac{2SL \times AB}{2LI^4} = \frac{SL \times AB}{LI^4}$; undè tertii termini fluens erit $\frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2 \times SL \times AB}{LI^4} = \frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$, & differentia fluentium primi & tertii termini erit $\frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$. Secundi termini $\frac{1}{2}SI^2 \times \frac{dx}{\overline{LA+x}}$, fluens est area hyperbolæ quæ ità describitur. Ad puncta L, A, B, vid. (fig. exempli 2i.) erige perpendicula Ll, Aa, Bb, & asymptotis Ll, LB, describe Hyperbolam æquilateram cujus sit dignitas $\frac{1}{2}SI^2$, & quoniam est (theor. 4. Hyp.) $LD \times DF = \frac{1}{2}SI^2$ ideóque $DF = \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD}$, erit $DF \times Dd = \frac{1}{2}\frac{SI^2 \times dx}{LA+x}$ positâ $AD = x$. Quapropter area hyperbolica AabB, æqualis est fluenti secundi termini ubi $AD = AB$. Hæc igitur area subducta de rectangulo $\frac{1}{2}\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$ relinquet aream quæsitam ANB.

reciprocè. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & proptereà attractiones in I & P à sphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum sphæræ sunt reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum, colligetur quod attractio in I sit ad attractionem in P, ut distantia SP ad sphæræ semidiametrum SA: si vires illæ sunt reciprocè



in triplicatâ ratione distantiarum, attractiones in I & P erunt ad invicem ut SP *quad.* ad SA *quad.*: Si in quadruplicatâ, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciprocè ut PS *cub.*$\times PI$, attractio in I erit reciprocè ut SA *cub.*$\times PI$, id est (ob datum SA *cub.*) reciprocè ut PI. Et (q) similis est progressus in infinitum. Theorema verò sic demonstratur. Stan-

(q) * *Similis est progressus in infinitum.* Vires centripetæ acceleratrices à particulâ aliquâ in centro positâ oriundæ, sint inter se in distantiis IS, PS reciprocè ut harum distantiarum potestates IS^n, PS^n, & vis quâ corpusculum situm in I trahitur à sphærâ totâ, erit ad vim quâ trahitur in loco P ut $IS^{\frac{1}{2}}$ ad $PS^{\frac{1}{2}}$ & $PS^{\frac{n}{2}}$ ad $IS^{\frac{n}{2}}$ conjunctim, hoc est, ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $IS^{\frac{n-2}{2}}$. Quarè cum sit, (ex Hyp.) $PS : AS = AS : SI$, adeóque $IS = \frac{AS^2}{PS}$, & $IS^{\frac{n-1}{2}} = \frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, vires illæ erunt ad invicem ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, seu ut PS^{n-1} ad AS^{n-1}. Hinc si $n = 1$, vires erunt in ratione æqualitatis, si $n = 2$, erunt ut PS ad AS; Si $n = 3$ ut PS^2 ad AS^2, si $n = 4$ ut PS^3 ad AS^3, & ità porrò in infinitum.

DE MOTU CORPORUM.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpusculo in loco quovis P, ordinatim applicata DN (r) inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur IE, ordinata illa pro alio quovis corpusculi loco I, (ſ) mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, è sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus n designet indicem potestatum PE & IE) & (t) ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continuè proportionales SI, SE, SP, (u) similia sunt triangula SPE, SEI, & inde fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE scribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. (x) Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI; &

(r) * *Ordinatim applicata DN inventa fuit &c.* (cor. 4. prop. 80.)

(ſ) * *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in I sito, radio IE, describendus arcus circuli, & in formulâ attractionis $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, loco PS & PE, scribe IS, & IE.

(t) * *Et ordinatæ illæ &c.* Si loco V scribantur PE^n, & IE^n, quæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices in locis P & I, (per cor. 4. prop. 80.)

(u) * *Similia sunt triangula SPE, SEI*, per prop. 6. Lib. 6. Elem.

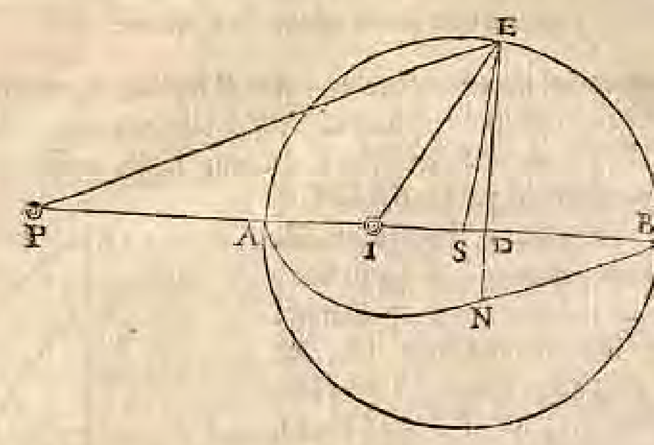
(x) * *Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI*, ob continuè proportionales PS, SA, SI. Porrò vires in distantiis PS, IS, sunt ad invicem ut IS^n, ad PS^n (ex Hyp.) & $IS : PS = IS^2 : AS^2 = IE^2 : PE^2$, (ob proportionales $IE : PE = IS : AS$), atque adeò $IS^n : PS^n = IE^{2n} : PE^{2n}$, & $IS^{\frac{n}{2}} : PS^{\frac{n}{2}} = IE^n : PE^n$. Quarè IE^n est ad PE^n in ratione subduplicatâ virium in distantiis PS, IS, & ordinatarum ratio $PS \times IE^n$, ad $SA \times PE^n$ æqualis est rationi $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{n}{2}}$, ad $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{n}{2}}$.

534. Scholium. Iisdem positis quæ in prop. 82. si centro I radio IA sphæra ACMD descripta sit, vis quâ corpusculum in I situm à totâ sphærâ majore AHBK versùs centrum S trahitur, æqualis est vi quâ subductâ sphæra minore ACMD traheretur. Nam corpusculum in centro I sphæræ ACMD positum, æqualiter undiquè ab hujus sphæræ minoris partibus trahitur.

535. Cor. 1. Si centro S radio SI descripta sit sphæra Ihbk, & vis centripeta in recessu corporis attracti decrescat in triplicatâ ratione distantiarum à particulis materiæ trahentibus, corpusculum in I situm seu in contactu sphæræ cavæ AIHBKI, subductâ sphærâ interiore Ihbk, vi infinitâ retrahitur à centro S versùs A. Nam vis quâ corpusculum

LIBER PRIMUS. PROP. LXXXII. THEOR. XLI.

& IE^n ad PE^n (ob proportionales IE ad PE ut IS ad SA) subduplicata est ratio virium in distantiis PS, IS. Ergo ordina-

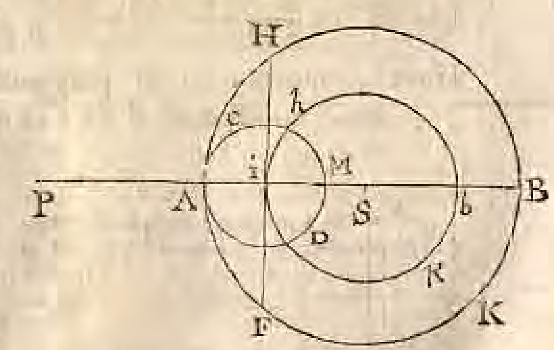


tæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt hisque proportionales attractiones, sunt in ratione compositâ ex subduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

PRO-

lum in contactu I à sphærâ interiore Ihbk versùs centrum S trahitur, infinita est (520. 527.) respectu vis illius quâ extrà contactum traheretur. Sed vis quâ à sphærâ totâ solidâ AHBKS, versus idem centrum S trahitur finita est, ut pote quæ rationem finitam habeat ad vim finitam, quâ corpusculum in loco P urgeretur (prop. 82.) ergò vis quâ à sphærâ cavâ AIHBKI, retrahitur à centro versùs A infinita est; vis enim quâ in centrum S, à sphærâ solidâ AHBKS in centrum trahitur, æqualis est vi sphæræ interioris Ihbks, demptâ vi contrariâ sphæræ cavæ AIHBKI.

536. Cor. 2. Ductâ per I rectâ HF ad AB perpendiculari & sphæræ occurrente in H & F vis quâ sphæræ segmentum AHF corpusculum in contactu, I situm versus A trahit, est etiam infinita in eâdem virium hypothesi. Nam partes omnes segmenti cavi IHbBKFI, corpus in I po

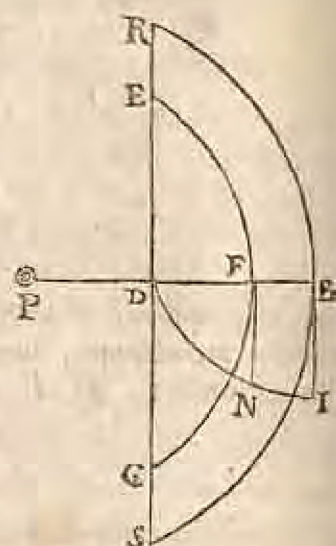


situm ad centrum S trahunt, ideóque à solo segmento AHF à centro versus A retrahitur, sed vi infinitâ à centro retrahitur 535. Ergo &c.

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim quâ corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.

Si P corpus in centro ſphæræ, & $RBSD$ ſegmentum ejus plano RDS & ſuperficie ſphæricâ RBS contentum. Superficie ſphæricâ EFG centro P deſcriptâ ſecetur DB in F, ac diſtinguatur ſegmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem ſuperficies illa non purè mathematica, ſed phyſica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur iſta profunditas O, & erit hæc ſuperficies (per (y) demonſtrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum ſphæræ eſſe reciprocè ut diſtantiarum dignitas illa, cujus index eſt n; & vis, quâ ſuperficies EFG trahit corpus P, erit (per prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id (z) eſt, ut $\frac{2 DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$.



Huic proportionale ſit perpendiculum FN ductum in O; & (a) area curvilinea BDI, quam ordinatim applicata FN in longitudinem DB per motum continuum ducta deſcribit, erit ut vis tota quâ ſegmentum totum $RBSD$ trahit corpus P. *Q. E. I.*

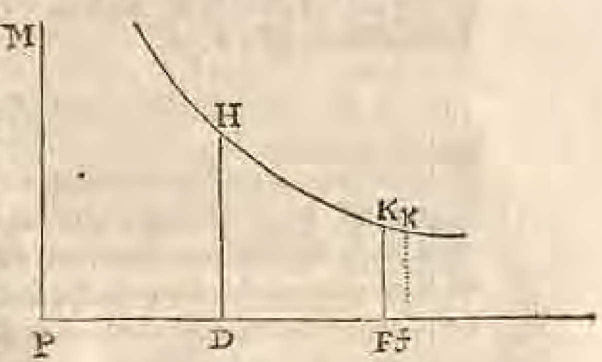
(y) * *Per demonſtrata Archimedis.* Nam (515) elementum ſuperficiei EFG, eſt ut PF ducta in elementum lineæ DF, adeóque ob datam PF, reſpectu ſuperficiei totius EFG, ſuperficies illa (165.) erit ut $PF \times DF$, & proinde lamina ex hâc ſuperficie & profunditate O, genita erit ut $PF \times DF \times O$.

(z) * *Id eſt* &c. Nam (per prop. 13. Lib. 6. Elem.) $DE^2 = 2PF - DF \times DF = 2PF \times DF - DF^2$. Quare $\frac{DE^2 \times O}{PF^n} = \frac{2 DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$.

(a) 537. * *Et area curvilinea &c.* Si ſegmentum RBSDR, in laminas innumeras profunditatis evaneſcentis O diviſum intelligatur, & capiatur ſemper perpendiculum FN, vi ſingularum laminarum proportionale; manifeſtum eſt (per Lem. 4.) ſummam elementorum $FN \times O$, ſeu aream curvilineam DNIB, proportionalem fore ſummæ virium. Sit igitur $PD = a$, $PF = x$, $DF = x - a$, & erit laminæ ſphæricæ EFG vis attractiva ut $\frac{2x\,dx - 2a\,dx}{x^{n-1}} = \frac{xx\,dx - 2ax\,dx + aa\,dx}{x^n} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{aa\,dx}{x^n} = x^{2-n}dx - aax^{-n}dx$, cujus fluens $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + Q$ *conſt.* Sed poſita $x = a$, ſegmentum & vis illius evaneſcunt, ergò erit $Q = -\frac{a^{3-n}}{3-n} + \frac{a^{3-n}}{1-n} = \frac{2a^{3-n}}{\overline{3-n} \times \overline{1-n}}$, & fluens accurata $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + \frac{2a^{3-n}}{\overline{3-n} \times \overline{1-n}}$.

538. Cor. Hinc patet vim quâ corpus in P locatum, à ſegmento trahitur ſemper poſſe algebraicè exponi, duobus caſibus exceptis in quibus n eſt 1 vel 3. tum autem per logarithmos vel areas hyperbolicas habetur. In 1°. caſu areæ DNI, fluxio erit $x\,dx - \frac{aa\,dx}{x}$. Primi termini fluens eſt $\frac{1}{2}xx + Q$, quæ evaneſcere debet poſitâ $x = a$, quare erit $Q = -\frac{1}{2}aa$, & fluens accurata $= \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}aa$. Ut ſecundi termini fluens obtineatur, per punctum P agatur PM ad PF normalis, & aſymptotis PM, PF, deſcribatur Hyperbola æquilatera cujus ſit dignitas PD^2, per puncta D, F, f erigantur perpendicula DH, FK, fk hyperbolæ occurrentia in H, F, f, ſintque puncta F, f, infinitè propinqua; & erit area hyperbolica DHKF, æqualis fluenti ſecundi termini; nam (per theor. 4. de hyperbolâ) $PD \times DH = PD^2 = PF \times FK$, & ideò $FK = \frac{PD^2}{PF}$, ac $FK \times Ff = \frac{PD^2 \times dx}{x}$ & area DHKF evaneſcit, ubi PF ſeu $x = PD$.

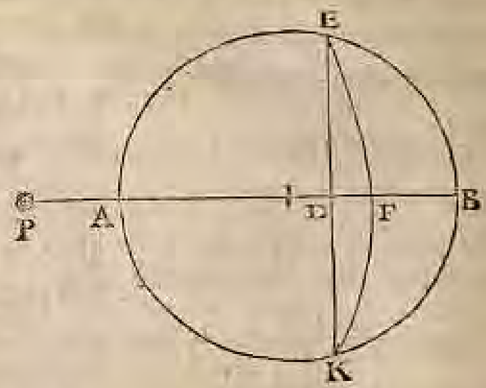
In 2°. caſu areæ DNI, fluxio eſt $\frac{dx}{x} - \frac{aa\,dx}{x^3}$. Secundi termini fluxio eſt $\frac{aa}{2xx} + Q$, & invenitur $Q = -\frac{1}{2}$, poſitâ $x = a$, atque adeò fluens accurata, erit $\frac{aa}{2ax} - \frac{1}{2}$. Ponatur $a = 1$, & primi termini $\frac{dx}{x}$, fluens, erit area hyperbolica $DHKF = S. \frac{aa\,dx}{x}$. Quarè area DNI eſt ut, $DHKF + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xx$.



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim, quâ corpusculum, extra centrum sphæræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.

A segmento *EBK* trahatur corpus *P* in ejus axe *ADB* locatum. Centro *P* intervallo *PE* describatur superficies sphærica *EFK*, quâ distinguatur segmentum in partes duas *EBKFE* & *EFKDE*. (b) Quæratur vis partis prioris per prop. LXXXI. & vis partis posterioris per prop. LXXXIII.; & summa virium erit vis segmenti totius *EBKDE*. *Q. E. I.*



Scholium.

Explicatis attractionibus corporum sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum deque motibus inde oriundis, ob (c) earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SEC-

(b) * *Quæratur vis partis prioris.* 525. 529.

(c) * *Ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum.* Vide quæstiones Lib 4. opsices Newtoni. 30 theoremata ad calcem astronomiæ clariss. Keillii, Physicam Clariss. s'Gravesandii, Dissertationem Clariss. De Maupertuis in commentariis Paris. 1732. ubi has Newtoni sectiones clare exponit.

SECTIO XIII.

De corporum non sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum à particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum à particulis; attractio versus corpus sphæricum, propterea quod (per. prop. LXXIV.) sit reciprocè ut quadratum distantiæ attracti corporis à centro sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphæris attractivis. Et (d) par est ratio orbium sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si sphæris hisce orbibusque sphæricis partes quælibet à loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint à loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum à particulis, attractio longe fortior erit in contactu, quam cum trahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujus-

(d) * *Et par est ratio orbium sphæricorum concavorum.* (Per prop. 71.). * Aumodi sphæram trahentem (e) augeri in infinitum, constat per solutionem problematis XLI. in exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa & theorema XLI. inter se collata, facile (f) colligitur de attractionibus corporum versus orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his sphæris & orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit propositio de corporibus universis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materiâ æqualiter attractivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales, & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus (g) ad attractionem in totum secundum. *Q. E. D.*

Co-

(e) * *Augeri in infinitum constat &c.* (521. 527. 531.).

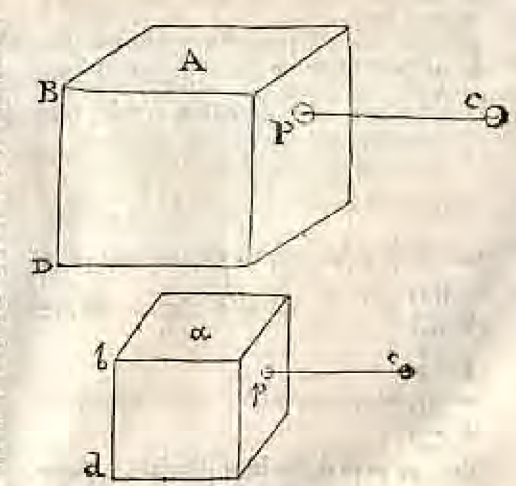
(f) * *Facilè colligitur de attractionibus &c.* 528. 530. 532. 535. 536.

(g) 539. * *Ad attractionem in totum secundum.* Corpora similia A, a, seorsim attrahant corpuscula C, c sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita, sintque P, p particulæ totis A, a, proportionales & in totis similiter sitæ & attractio decrescat in ratione dignitatis distantiarum, cujus sit index n; erit attractio corpusculi C in particulam P ad attractionem corpusculi c in particulam p, ut P × pc^n, ad p × PC^n. Unde si corpora A & a in particulas innumeras ut P & p divisâ intelligantur, erit, componendo, attractio corpusculi C in totum corpus A ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut P × pc^n ad p × PC^n, quod par-

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & distantiarum dignitates illæ inversè. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicatâ distantiarum à corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ à corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$, id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicatâ distantiarum à corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$, id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ q\ q.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ q\ q.}$, id est, reciprocè ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Co-

particulæ omnes P, p sint ubique totis similes & in iis similiter sitæ, & distantiæ earum à corpusculis C, c semper maneant proportionales distantiis PC, pc. Cum igitur sit P ad p ut A ad a, & distantiæ pc, PC sint lateribus homologis bd, BD proportionales (ex Hyp.) erit attractio corpusculi C, in totum corpus A, ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut A × pc^n ad a × PC^n, atque etiam ut A × bd^n ad a × BD^n, & ut BD^3 × bd^n, ad bd^3 × BD^n, hoc est, ut bd^{n−3} ad BD^{n−3}, ob proportionales A : a = BD^3 : bd^3, (per Hyp.) ex quibus patet corollarium 1^um, quod sequitur; Nam si n = 2, erunt attractiones ut BD ad bd; si n = 3, erunt æquales; si, n = 4, erunt ut bd, ad BD, hoc est, reciprocè ut latera cubica corporum.

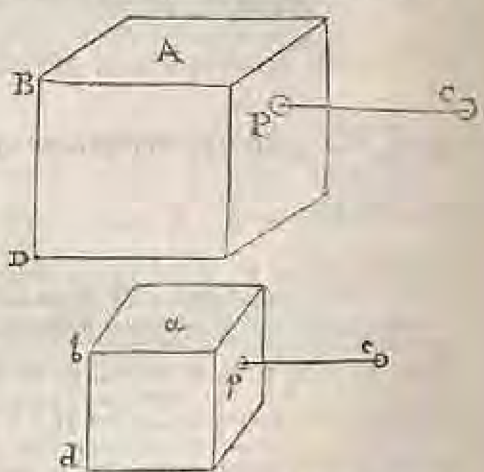


Corol. 2. (h) Unde viciffim, ex viribus, quibus corpora fimilia trahunt corpufcula ad fe fimiliter pofita, colligi poteft ratio decrementi virium particularum attractivarum in receffu corpufculi attracti; fi modo decrementum illud fit directè vel inversè in ratione aliquâ diftantiarum.

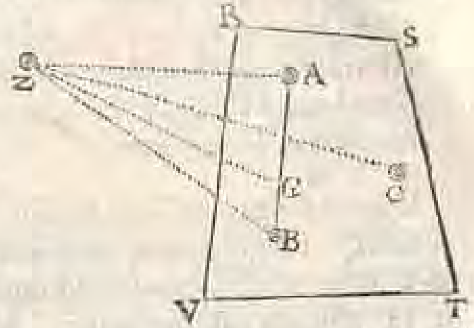
PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium corporis cujufcunque vires attractivæ fint ut diftantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipfius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materiâ confimili & æquali conftantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis $RSTV$ particulæ A, B trahant corpufculum aliquod Z viribus, quæ, fi particulæ æquantur inter fe, fint ut diftantiæ AZ, BZ; fin particulæ ftatuantur inæquales, fint ut hæ particulæ & ipfarum diftantiæ AZ, BZ conjunctim,



five (fi ita loquar) ut hæ particulæ in diftantias fuas AZ, BZ refpectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB, & fecetur ea in G ut fit AG ad BG ut particula B ad particulam A; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per legum corol. 2.) refolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, fe mutuo deftruunt. Reftant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z verfus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc eft, vim eandem ac fi particulæ attractivæ A & B confifterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, fi adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G & particulæ C; hoc eft, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit, ac fi globus & particula C confifterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et fic pergitur in infinitum. Eadem eft igitur vis tota particularum omnium corporis cujufcunque $RSTV$, ac fi corpus illud, fervato gravitatis centro, (i) figuram globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac fi corpus attrahens $RSTV$ effet fphæricum: & propterea fi corpus il-

(h) 540. * *Undè viciffim &c.* Nam fi experimentis inventum fit attractionem corpufculi C in corpus A, effe ad attractionem corpufculi c, in corpus a, ut eft BD ad bd, vel ut 1 ad 1, vel ut bd ad BD, vires particularum attractivarum decrefcunt in ratione diftantiarum duplicatâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (539). Et generatim, fi experimentis inventa fuerit attractio corpufculi C in A ad attractionem corpufculi c in a, ut numerus N ad numerum n, ponaturque vim particularum attractivarum in receffu corpufculi attracti decrefcere in ratione dignitatis diftantiarum cujus fit index x erit (539) $n : N = BD^{x-3} : bd^{x-3}$, adeoque (fi L logarithmum fignificet quantitatis cui præponitur) erit $L. \frac{n}{N} = L. \frac{BD^{x-3}}{bd^{x-3}} = \overline{x-3} \times L. \frac{BD}{bd}$. Quare erit $x \times L. \frac{BD}{bd} = L. \frac{n}{N} + 3. L. \frac{BD}{bd}$, & $x = \frac{L. \frac{n}{N}}{L. \frac{BD}{bd}} + 3$. Invenietur itaque dignitatis index x, per tabulas logarithmicas. Exempli causâ. Si $\frac{n}{N} = \frac{bd}{BD}$, erit $L. \frac{bd}{BD} = -L. \frac{BD}{bd}$, & ideò $x = -1 + 3 = 2$. Si $\frac{n}{N} = 1$, erit $L. \frac{n}{N} = 0$, & proinde $x = 3$. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}$, erit $x = 4$, prorsus ut fuprà. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD^p}{bd^p}$, erit $L. \frac{n}{N} = p \times L. \frac{BD}{bd}$, & $x = p + 3$. Sed fi $\frac{n}{N} = \frac{bd^p}{BD^p}$, invenietur $x = 3 - p$. Si $\frac{BD}{bd} = 10$, erit $x = \frac{L. \frac{n}{N}}{1.0000000} + 3 = L. \frac{n}{N} + 3$.

(i) * *Figuram globi indueret.* Per prop. 77.

lud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum (k) movebitur in ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atque propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

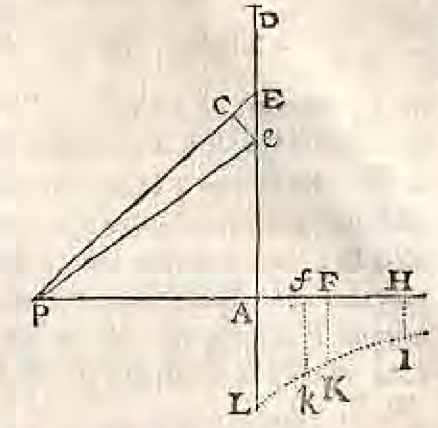
PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro A intervallo quovis AD, in plano, cui recta AP perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis P in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis E ad corpusculum attractum P agatur recta PE. In rectâ PA capiatur PF ipsi PE æqualis, &

(k) * *Movebitur in ellipsi &c.* Per cor. prop. 78. & per cor. 1. prop. 10.

& erigatur normalis FK, quæ sit ut vis quâ punctum E trahit corpusculum P. Sitque IKL curva linea quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In PA capiatur PH æqualis PD, & erigatur perpendiculum HI curvæ prædictæ occurrens in I; & erit corpusculi P attractio in circulum ut area $AHIL$ ducta in altitudinem AP. *Q. E. I.*

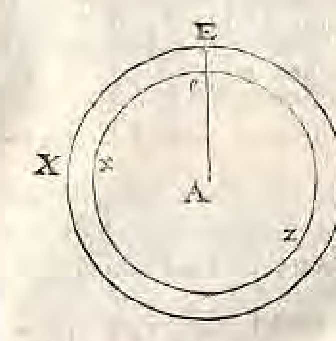


Etenim in AE capiatur linea quam minima Ee. Jungatur Pe & in PE, PA capiantur PC, Pf ipsi Pe æquales. Et quoniam vis, quâ annuli centro A intervallo AE in plano prædicto descripti punctum quodvis E trahit ad se corpus P, ponitur esse ut FK, & inde vis quâ punctum illud trahit corpus P versus A, (l) est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis, quâ annulus totus trahit corpus P versus A, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; (m) annulus autem iste est ut rectangulum sub radio AE & latitudine Ee, & hoc (n) rectangulum (ob proportionales PE & AE, Ee & CE) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE \times Ff$; erit vis, quâ annulus iste trahit corpus P versus A, ut $PE \times Ff$ & AP

(l) * *Est ut* $\frac{AP \times FK}{PE}$, per leg. cor. 2.

(m) * *Annulus autem iste &c.* Nam annulus E Z X e, æqualis est differentiæ circulorum A E Z X, A e z x, hoc est, $\frac{AE \times EZXE - Ae \times ezxe}{2}$, & quoniam evanescente E e, fit EZXE = ezxe, erit annulus evanescens ut $\overline{AE - Ae} \times EZXE$, hoc est, ut Ee × EZXE sive quia radius AE est ut peripheria EZXE, ut Ee × AE.

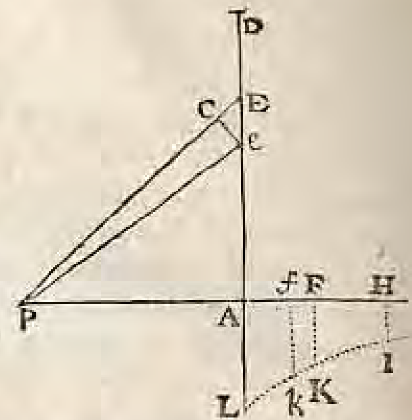
(n) * *Et hoc rectangulum &c.* Angulis enim ad C & A recti æquantur, &



an-

DE MOTU CORPORUM.

$\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area $FKkf$ ducta in AP. Et (o) propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A & intervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF\ quad.}$, (p) atque ideo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciprocè ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, (q) ideoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}}$

angulus PEA utrique triangulo CEc, AEP communis est, adeóque triangula hæc similia sunt, & latera habent proportionalia. (Per prop. 4. lib. 6. Elem.)

(o) * *Et propterea summa virium &c.* Per cor. lem. 4.

(p) * *Atque ideò area &c.* Sit enim $PF = x$, $Ff = dx$, & erit $FK \times Ff$, ut $\frac{dx}{xx}$ (ex hyp.) cujus fluens est $-\frac{1}{x} + Q$ *const.* (165); Et quoniam area ALKF evanescere debet, ubi $PF = PA$, erit $Q = \frac{1}{PA}$ & area ALKF ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$ ubi $PF = PH$. Cùm igitur attractio corpusculi P, in circulum sit ut AHIKL $\times$ PA, erit quoque ut $1 - \frac{PA}{PH} = \frac{PH - PA}{PH} = \frac{AH}{PH}$.

(q) * *Idcóque area &c.* Si enim D dicatur x, erit $PK \times Ff$ ut $\frac{dx}{x^n}$, (ex hyp.) & (165.) area AFKL, ut $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + Q$ *const.* positâ x seu $PF = PA$, invenitur $Q = \frac{1}{(n-1)PA^{n-1}}$, ideoque area AFKL, ut $\frac{1}{(n-1)PA^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ hoc est, ob datam quantitatem $n-1$, ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$ ubi $PF = PH$.

LIBER PRIMUS. PROP. XC. PROBL. XLIV.

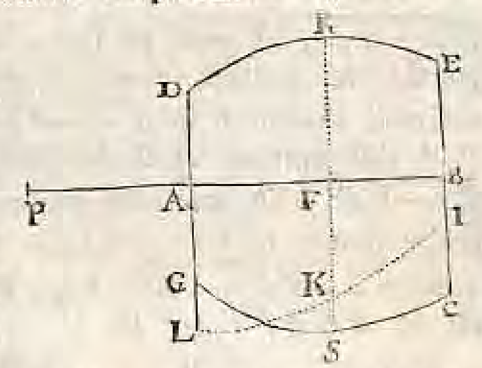
$-\frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciprocè ut PA^{n-2}, propterea quod (r) terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrescentes.

In solidum (f) $DECG$ trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB. Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus semidiametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (per prop. xc.) longitudo FK vi, quâ corpusculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in L & I; & erit attractio corpusculi P in solidum ut (t) area $LABI$. *Q. E. I.*



Co-

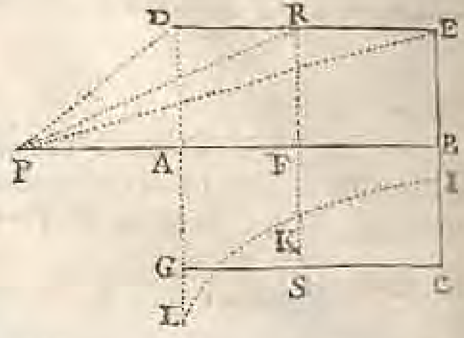
(r) * *Terminus alter evanescet.* Ob PH, infinitam.

(f) * *In solidum DECG &c.* Convolutione superficiei ADREB circa axem AB genitum.

(t) * *Ut area LABI.* Patet per cor. lem. 4. Nam area illa est ut summa virium singulorum circulorum, qui per omnia puncta lineæ AB describi possunt.

541. Scholium. Sit abscissa $PF = x$, ejus fluxio dx, ordinatim applicata $FR = y$, $PR = \sqrt{yy + xx}$, & vis reciprocè ut

Corol. 1. Unde si solidum cylindrus sit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciprocè ut quadrata distantiarum à punctis: (u) erit attractio corpusculi P in hunc cylindrum ut $AB - PE + PD$. Nam ordinatim applicata FK (per corol. 1. prop. xc.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, describit aream $1 \times AB$: & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, describit aream 1 in $\overline{PE - AD}$, id quod ex curvæ LKI quadraturâ facilè ostendi potest; & similiter pars eadem ducta in longitudinem PA describit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipsarum PB, PA differentiam AB describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum postremum 1 in $\overline{PE - PD}$, & restabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD$.

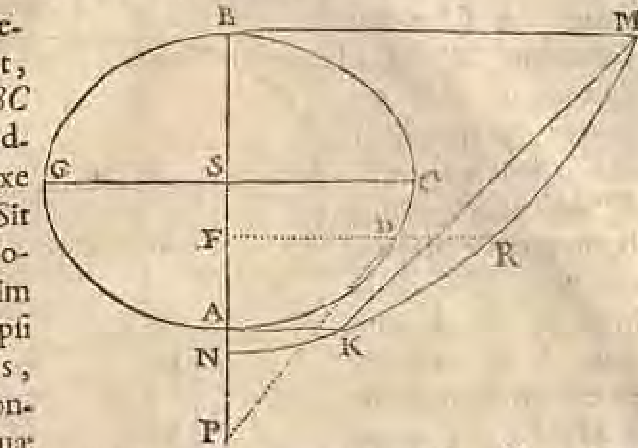


Co-

ut distantiæ dignitas cujus index n, erit FK ut $\frac{1}{PF^{n-2}} - \frac{PF}{PR^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{x}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$ (per cor. 2. prop. 90.) Quarè areæ AFKL fluxio erit ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{-xdx}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$, & hujus fluens ut vis quâ corpusculum P in solidum DRSG trahitur. Datâ verò curvæ DRE naturâ, inveniendus est valor ordinatæ y per abscissam x, & inde fluens determinanda.

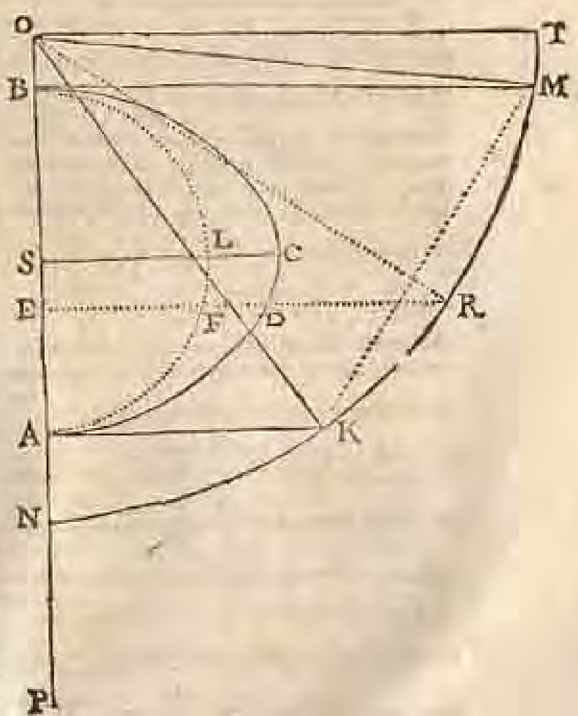
(u) * *Erit attractio corpusculi P &c.* Si ordinatim applicata FR, dicatur b, patet (429) areæ AFKL, elementum fore ut $dx - \frac{xdx}{(bb+xx)^{\frac{1}{2}}}$. Fiat $bb + xx = zz$, & erit $xdx = zdz$, & proinde elementum prædictum ut $dx - dz$. Quare AFKL erit ut $x - z + Q$, & quoniam hæc area evanescit, ubi PF, seu x = PA, & PR seu z = PD, erit Q = PD − PA, & area AFKL, seu attractio corpusculi P, in cylindrum DRSG, ut PF − PR + PD − PA = AF − PR + PD = AB − PE + PD, ubi fit PF = PB, & PR = PE.

Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit, quâ sphærois $AGBC$ attrahit corpus quodvis P, exterius in axe suo AB situm. (x) Sit $NKRM$ sectio conica cujus ordinatim applicata ER, ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata ista sphæroidem secat.



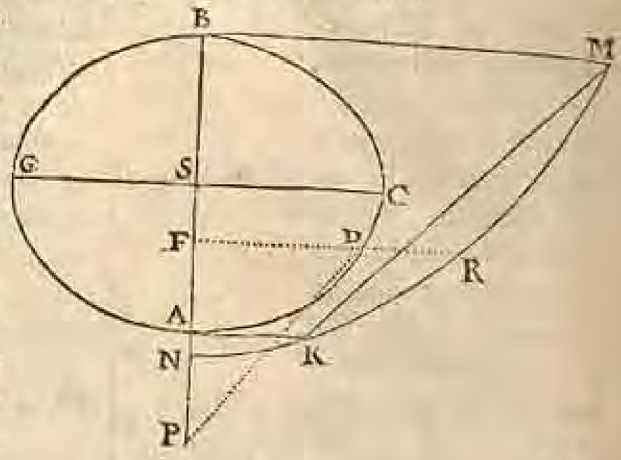
(x) 542. *Sit NKRM sectio conica cujus ordinatim applicata ER æquetur semper longitudini PD &c.* Sit AP = a, curvæ datæ ACB cujus convolutione generatur sphærois sit semiaxis AS = b, alter semiaxis SC = c, AE = x, erit PE = $a + x$, & (ex naturâ Ellipseos) erit $BD^2 = \frac{cc}{bb} \times \overline{2bx - xx}$, unde quadratum ER ordinatæ ad curvam NKRM sive $PD^2 = PE^2 + ED^2 = a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} \times 2bx - \frac{cc}{bb}xx$; cum ergo hæc Æquatio ad curvam NKRM, ultrà secundum gradum non assurgat constat eam curvam esse ex Sectionibus Conicis: erit autem Ellipsis si quantitas $xx - \frac{cc}{bb}xx$ sit negativa, quod evenit ubi SC (sive c) major est quàm AS (sive b), Erit verò Parabola si ea quantitas evanescat, ideoque si $c = b$ quod evenit ubi curva ACB est circulus; Denique erit Hyperbola si ea quantitas sit positiva, hoc est, si AS sit longior axis.

543. Sit ACB Ellipsis cujus axis CS sit major axi AS, quo casu curva NKRM erit Ellipsis, hac ratione ejus curvæ NKRM determinabuntur Axes & Vertex. Dicatur ejus Ellipseos NKRM semiaxis ON = s, alter semiaxis OT dicatur t, distantia verticis N à vertice A curvæ ACB, dicatur



P.

secat. A sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipsis AP, BP æqualia respectivè, & propterea sectioni conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eâdem segmentum $KMRK$. Sit autem



sphæ-

p, abscissa NE erit $= p + x$, & ordinatæ ER quadratum erit ex Ellipseos natura $\frac{tt}{rr} \times \overline{2rp + 2rx - pp - 2px - xx}$, quod ex constructionis Hypothesi fuit repertum (542) $= a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} 2bx - \frac{cc}{bb} xx$. Conferantur horum valorum termini homogenei, scilicet constantes cum constantibus, eos qui unam variabilem includunt cum similibus &c. fient tres istæ Æquationes (variabilibus deletis) $a^2 = \frac{tt}{rr} \times \overline{2rp - pp}$; $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{rr} \times \overline{r - p}$; $1 - \frac{cc}{bb} = -\frac{tt}{rr}$. Ex hac tertiâ Æquatione, mutatis signis utrinque, reducto primo membro ad communem denominatorem, & inversis terminis fit $\frac{rr}{tt} = \frac{bb}{cc - bb}$ & $rr = \frac{bbt^2}{cc - bb}$. Tum secundæ Æquationis $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{rr} \times \overline{r - p}$ multiplicatis terminis per $\frac{rr}{tt}$, reductione factâ primi membri ad eumdem denominatorem, & substitutione factâ valoris $\frac{rr}{tt}$ supra inventi fit $r - p = \frac{b}{cc - bb} \times \overline{ba + cc}$.

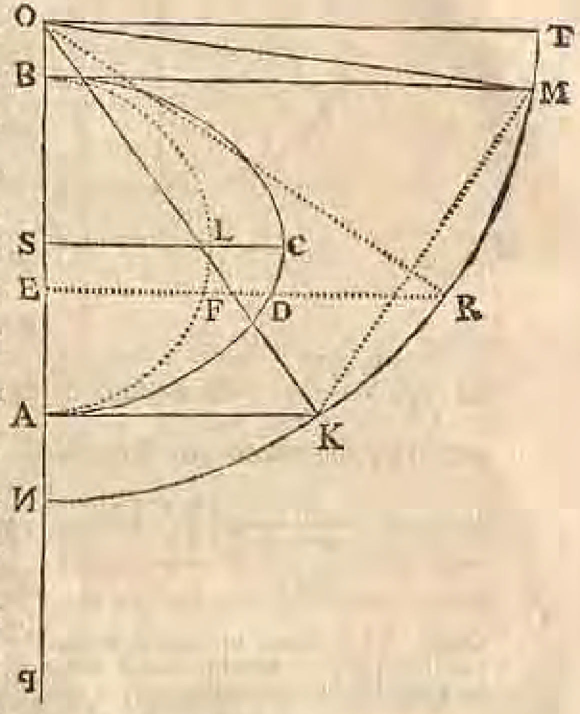
Denique, primæ Æquationis $a^2 = \frac{tt}{rr} \times \overline{2rp - pp}$ multiplicatis membris per $\frac{rr}{tt}$, substituto ejus valore, utrinque mutatis signis & addito rr, fit tandem $rr - \frac{b^2}{c^2 - b^2} a^2 = rr - 2rp + pp$, in quâ novâ Æquatione cum secundum membrum sit ipsum quadratum quantitatis $r - p$, substituto ejus valore prius reperto, & loco rr in primo membro substituto etiam ejus valore, fit $\frac{bb}{c^2 - b^2} \times \overline{t^2 - a^2} = \frac{bb}{c^2 - b^2} \times \overline{ba + cc}^2$ & diviso utroque membro per $\frac{b^2}{c^2 - b^2}$ transponendo a^2, & reducendo secundum membrum ad communem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{a^2 + 2ab + c^2}$, sive quia $PS = a + b$ est $PS^2 - b^2 = a^2 + 2ab$, ideoque est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{PS^2 - b^2 + c^2}$ nempe $OT^2 = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \overline{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ qui termini sunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad Ellipsim pertinentia commode invenientur.

In gratiam notæ sequentis, ex his valorem

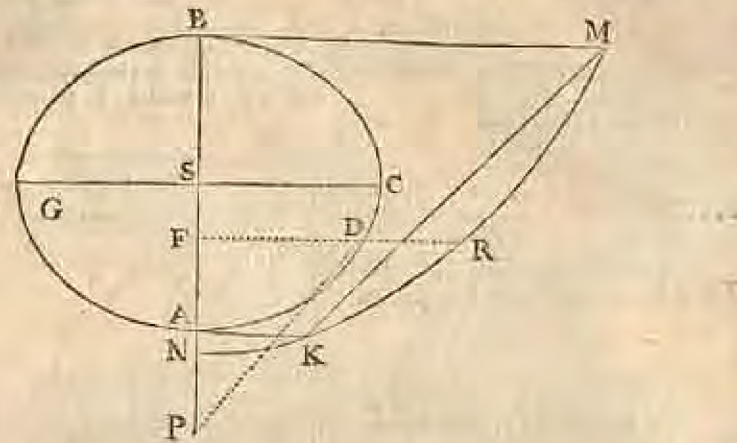
sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis, quâ sphæ-

lorem quantitatis $\frac{r^2 + t^2 - PO^2}{t^2}$ determinabimus, quam esse æqualem quantitati $\frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$, ita ex valoribus supra inventis statuitur; Est $rr = \frac{bbt^2}{c^2 - b^2}$ ex tertiâ Æquatione, unde erit $r^2 + t^2 = \frac{b^2t^2 + c^2t^2 - b^2t^2}{c^2 - b^2} = \frac{c^2t^2}{c^2 - b^2}$, ideoque $\frac{r^2 + t^2}{t^2} = \frac{c^2}{c^2 - b^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2}$. Est verò $AO = r - p$, & $PO = PA + AO = a + r - p$, & cum sit $r - p = \frac{b}{cc - bb} \times \overline{ba + cc}$ (ex secundâ Æquatione) est $PO = a + \frac{b}{cc - bb} \times \overline{ba + cc}$, quo valore reducto ad communem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $PO = \frac{cc}{c^2 - b^2} \times \overline{a + b}$ sive $= \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times PS$, cumque sit $t^2 = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \overline{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ est $\frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ & $\frac{PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$. Unde tandem est $\frac{r^2 + t^2 - PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} - \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ sive $= \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \overline{1 - \frac{PS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}}$ reducendoque ad eumdem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus $= \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{-AS^2 + CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ diviso numeratore & denominatore per $CS^2 - AS^2$. Est ergo $\frac{r^2 + t^2 - PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$. Q. E. D.

544. Sit autem curvâ data ACB circulus, ita ut sphærois ejus convolutione genita, sit accurata sphæra, erit curva NKRM Parabola, stantibus enim quæ in nº. 542. dicta sunt, erit ut prius $PE = a + x$, & ex naturâ Circuli $EF^2 = 2bx - xx$, unde erit PF^2 quadratum $= PE^2 + EF^2 = a^2 + 2ax + xx + 2bx - xx = a^2 + 2ax + 2bx$; cum ergo ordinata ER ad curvam NKRM



sumatur æqualis PF, ejus ordinatæ quadratum erit æquale abscissæ ipsi per quantitates constantes ductæ, sed ultra primum gradum non assurgenti, quæ est Parabolæ proprietas. Dicatur ergo ejus Parabolæ latus rectum l, distantiâ verticis N à vertice A curvæ ACB dicatur p, abscissa NE erit $p + x$ & ex Parabolæ natura erit ordinatæ ER quadratum $= lp + lx$ conferatur hic valor cum valore ejusdem ER^2 supra invento $a^2 + 2ax + 2bx$, termini constantes cum constantibus & qui variabilem includunt cum similibus, fient duæ Æquationes $lp = a^2$, & $l = 2a + 2b = 2PS$, ideo-ſphærois (†) trahit corpus P, erit ad vim, quâ ſphæra diametro AB deſcripta trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CS\,q - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$



ad $\frac{AS\ cub.}{3\ PS\ quad.}$ Et eodem computandi fundamento invenire licet vires ſegmentorum ſphæroidis.

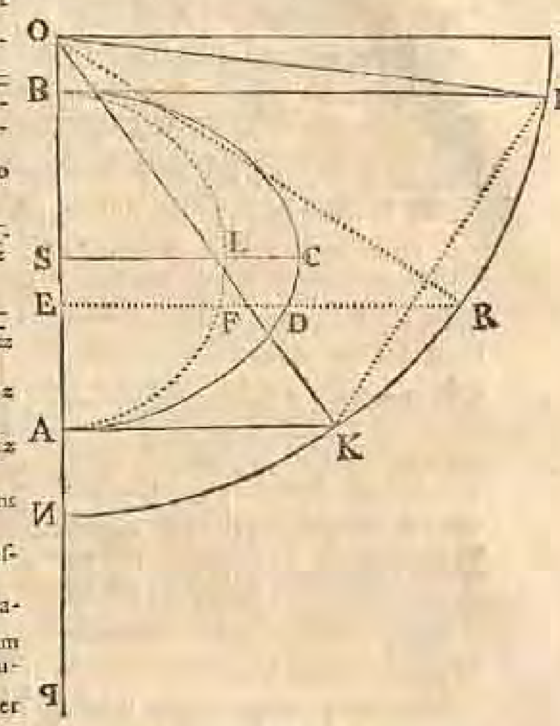
ideoque $p = \frac{a^2}{2a+2b} = \frac{PA^2}{2PS}$; & cum ex natura Parabolæ, ſit $ER^2 = l \times p + x$ erit $p + x = NE = \frac{ER^2}{2PS}$; Cumque area Parabolica inter abſciſſam, ordinatam, & curvam intercepta ſit æqualis duobus tertiis Rectanguli abſciſſæ per ordinatam, erit area Parabolica $NER = \frac{\frac{2}{3}ER^3}{2PS} = \frac{ER^3}{3PS}$, & quoniam, ex conſtructione, ordinatæ in A & B erectæ ſunt æquales PA & PB, erit area Parabolica $PAK = \frac{PA^3}{3PS}$ & area Parabolica $PBM = \frac{PB^3}{3PS} = \frac{\overline{PA + 2AS}^3}{3PS}$ & differentia harum arearum AKRMB reſpondens axi Sphæræ AB, erit $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$, & denique dempto trapezio AKMB, ſegmentum Parabolicum reſiduum KRM erit æquale $\frac{2AS^3}{3PS}$, trapezium enim AKMB eſt æquale $\frac{1}{2}AB \times \overline{AK + BM}$ ſive (quia $\frac{1}{2}AB = AS$, $AK = PA$ & $BM = PB = PA + 2AS$) eſt æquale $2AS \times PA + 2AS^2$, & reducendo ad denominatorem $3PS$ ſive $3PA + 3AS$ eſt æquale $\frac{6AS \times PA^2 + 12AS^2 \times PA + 6AS^3}{3PS}$ quod deductum ex area AKRMB $= \frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$ remanet $\frac{2AS^3}{3PS}$. Q. E. D.

(†) 545. *Vis quâ ſphærois trahit corpus P eſt ad vim quâ ſphæra Diametro AB deſcripta trahit idem corpus ut* $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ *ad* $\frac{AS^3}{3PS^2}$.

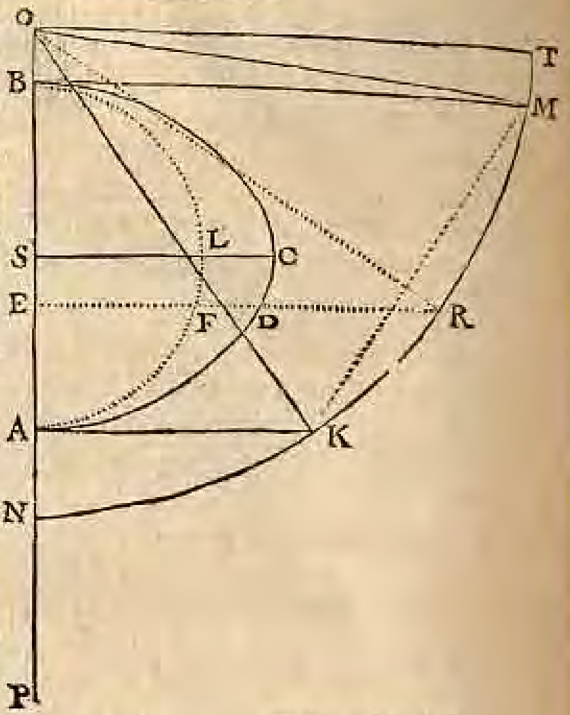
Supponatur juxta ſolutionem hujuſce Problematis, curvam deſcribi ſecundum AB, cujus ordinatæ ſingulo puncto E applicatæ ſint æquales vi quâ corpus P à circulo cujus radius eſt ED trahitur; ea vis eſt per Cor. 1. Prop. XC. ut $1 - \frac{PE}{PD}$, ſit OE hujus curvæ abſciſſa ſumpta à puncto O (centro curvæ NKRM juxta notam 543. determinatæ) dicaturque z, ejus fluxio erit dz, fluxio itaque areæ curvæ quæ exhibet vim ſphæroidis erit $dz - \frac{PE}{PD}dz$, cumque ſit $PE = PO - OE = PO - z$ & $PD = ER$ ordinatæ curvæ NKRM, per conſtructionem, ſitque ER (ut facile deducitur ex n°. 543) $= \frac{t}{s}\sqrt{ss - zz}$, fluxio ejus areæ erit $dz - \frac{PO\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}} + \frac{z\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$.

Terminorum poſitivorum $dz + \frac{z\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens eſt $z - \frac{s}{t}\sqrt{ss - zz}$ (165) ſed ut $z = OE$ & $\frac{s}{t}\sqrt{ss-zz} = \frac{ss}{tt} \times \frac{t}{s}\sqrt{ss-zz} = \frac{ss}{tt}ER$ fluxio terminis poſitivis reſpondens eſt $OE - \frac{ss}{tt}ER$, & area toti lineæ OA reſpondens eſt $OA - \frac{s^2}{t^2}AK$, ex quâ demenda area parti OB reſpondens ſecundum quam curva quæ vim ſphæroidis exprimit non ducitur quæque eſt $OB - \frac{s^2}{t^2}BM$, utque per conſtructionem $AK = AP$, & $BM = PB = BA + AP$ erit vera fluens $OA - OB - \frac{s^2}{t^2} \times \overline{AP - BA - AP} = AB + \frac{s^2}{t^2}AB = AB \times \frac{t^2 + s^2}{t^2}$.

Tertii termini $\frac{PO\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ fluens ſic invenitur, Sectoris Elliptici TOK fluxio eſt (424) $\frac{\frac{1}{2}\,st\,dz}{\sqrt{ss-zz}}$ multiplicetur per $\frac{2PO}{ts^2}$ naſcetur terminus propoſitus $\frac{PO\,dz}{\frac{t}{s}\sqrt{ss-zz}}$ unde fluens termini propoſiti erit Sector ille Ellipticus TOK per $\frac{2PO}{t^2}$ multiplicatus, ſed quoniam area quæſita non reſpondet toti OA, ſed tantum ejus parti AB, vera fluens areæ quæſitæ ex tertio termino inveniendo eſt ſector $TOK \times \frac{2PO}{t^2}$ dempto ſectore $TOM \times \frac{2PO}{t^2}$ ſive ſector $MOK \times \frac{2PO}{t^2}$; Dividitur autem ſector MOK in figuram rectilineam MOK & mixtilineam MRK; Triangulum MOK valet $\frac{1}{2}PO \times AB$, nam producatur recta MK pertinget ad P, propter $PA = AK$ & $PB = BM$, totum verò Triangulum $OMP = \frac{1}{2}OP \times BM = \frac{1}{2}OP \times PB$, & Triangulum $OKP = \frac{1}{2}OP \times AK = \frac{1}{2}OP \times AP$, unde ſublato Triang. OKP ex Triang. OMP, remanet Triang. OMK =



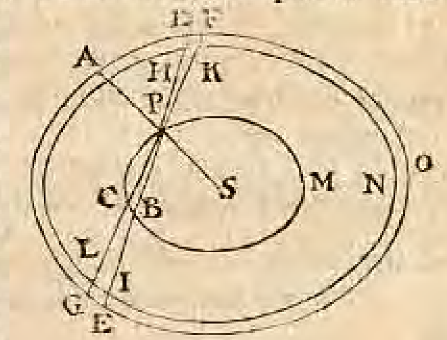
$= \frac{1}{2}OP \times PB - AP = \frac{1}{2}OP \times AB$. Unde tandem fluens quæſita hujus tertii termini eſt $\frac{2PO}{t^2} \times \frac{1}{2}OP \times AB + \frac{2PO}{t^2} \times MRK = \frac{PO^2}{t^2} \times AB + \frac{2PO}{t^2} \times MRK$, quæ detracta ex fluente terminorum poſitivorum $AB \times \frac{s^2+t^2}{t^2}$ fit $AB \times \frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2} - \frac{2PO}{t^2} \times MRK$, cum ergo ſit $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ & $\frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ (543) eſt fluens quæſita (quia $AB = 2AS$) $\frac{2AS \times CS^2 - 2PS \times MRK}{PS^2-AS^2+CS^2}$.



Si autem curva ACB ſit circulus, ſphærois in ſphæram veram mutatur, ſit $CS = AS$ & ſegmentum MRK ſit $\frac{2AS^3}{3PS}$ (544) ideoque mutatur hæc formula in iſtam $\frac{2AS \times AS^2 - \frac{2PS \times 2AS^3}{3PS}}{PS^2-AS^2+AS^2}$, $= \frac{2AS^3 - \frac{4}{3}AS^3}{PS^2} = \frac{2AS^3}{3PS^2}$ quæ exprimet vim ſphæræ; itaque diviſa expreſſione vis ſphæroidis & vis ſphæræ per communem multiplicatorem 2; Erit *vis ſphæroidis ad vim ſphæræ ut* $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2-AS^2+CS^2}$ *ad* $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Q. E. D.

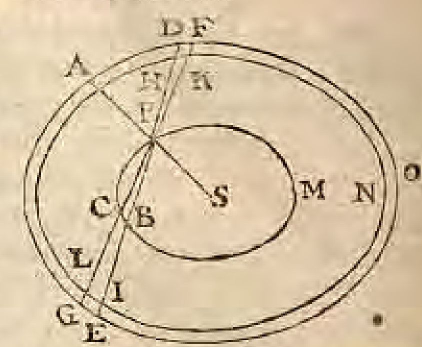
Poteſt etiam determinari vis ſphæræ, hoc calculo, ſit ut prius $PA = a$, $AB = 2b$, abſciſſa $AE = x$, $PF = v$, erit $PE^2 = a^2 + 2ax + xx$, & $EF^2 = 2bx - xx$ (ex naturâ circuli) ideoque $PF^2 (vv) = a^2 + 2ax + 2bx$, unde invenitur $x = \frac{vv - a^2}{2 \times \overline{a+b}}$ & $dx = \frac{2v\,dv}{2 \times \overline{a+b}} = \frac{v\,dv}{a+b}$ & $PE = a + x = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times \overline{a+b}}$ & $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a+b}$. Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim ſphæræ ſit per Cor. 1. Prop. xc. ut $dx - \frac{PE\,dx}{PF}$, erit ea fluxio ut $dx - \frac{a^2+2ab+vv}{2 \times \overline{a+b}^2}dv$ cujus fluens eſt $x - \frac{a^2v + 2abv + \frac{1}{3}v^3}{2 \times \overline{a+b}^2} + Q\ conſt.$, quæ evaneſcere debet ubi $x = 0$ & $v = a$ ideoque eſt $-\frac{a^3 + 2a^2b + \frac{1}{3}a^3}{2 \times \overline{a+b}^2} + Q = 0$, & $Q = \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b}{2 \times \overline{a+b}^2}$: Vis autem totius Sphæræ obtinetur ſi fiat $x = AB$ $(2b)$ & $v = PB\ (a+2b)$, eſtque ideo $2b + \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b - a^3 - 4a^2b - 4ab^2 - \frac{1}{3}a^3 - 2a^2b - 4ab^2 - \frac{8}{3}b^3}{2 \times \overline{a+b}^2}$ $= 2b - \frac{4a^2b + 8ab^2 + \frac{8}{3}b^3}{2 \times \overline{a+b}^2} = 2b \times 1 - \frac{2a^2 + 4ab + \frac{4}{3}b^2}{2 \times \overline{a+b}^2}$, & reducendo ad eumdem denominatorem $= 2b \times \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 2a^2 - 4ab - \frac{4}{3}b^2}{2 \times \overline{a+b}^2}$ $= 2b \times \frac{\frac{2}{3}b^2}{2 \times \overline{a+b}^2}$ ſive ponendo AS pro b, & PS pro $a+b$ dividendoque numeratorem & denominatorem per 2, vis tota Sphæræ eſt $\frac{2AS^3}{3PS^2}$. Q. E. I.

Corol. 3. Quod ſi corpuſculum intra ſphæroidem in axe collocetur, attractio erit ut ipſius diſtantia à centro. Id quod facilius hoc argumento colligitur, ſive particula in axe ſit, ſive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit *AGOF* ſphærois attrahens, *S* centrum ejus, & *P* corpus attractum. Per corpus illud *P* agantur tum ſemidiameter *SPA*, tum rectæ duæ quævis *DE*, *FG* ſphæroidi hinc inde occurrentes in *D* & *E*, *F* & *G*; ſintque *PCM*, *HLN* ſuperficies ſphæroidum duarum interiorum, exteriori ſimilium & concentricarum, quarum prior tranſeat per corpus *P*, & ſecet rectas *DE* & *FG* in *B* & *C*, poſterior ſecet eaſdem rectas in *H*, *I* & *K*, *L*. Habeant autem ſphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* ſibi mutuò æquales; (y) propterea quod rectæ *DE*, *PB* & *HI* biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ *FG*, *PC* & *KL*. Concipe jam *DPF*, *EPG* deſignare conos oppoſitos, angulis verticaliibus *DPF*, *EPG* infinitè parvis deſcriptos, & lineas etiam *DH*, *EI* infinitè parvas eſſe; & conorum particulæ ſphæroidum ſuperficiebus abſciſſæ *DHKF*, *GLIE*, ob æqualitatem linearum *DH*, *EI*, (z) erunt ad invicem ut quadrata diſtantiarum ſuarum à corpuſculo



(y) * *Propterea quod rectæ DE, PB, &c.* Cum enim tres ellipſes AGO, HLN, PCM ſimiles ſint, idemque centrum & axes communes ac proindè communes etiam diametros homologas habeant, patet lineas DE, HI, PB eſſe in tribus illis ellipſibus ad communem diametrum ordinatas, idemque dicendum eſſe de tribus lineis FG, KL, PC. Nam ſi per punctum A, in ellipſi AGO homologum puncto P in ellipſi PCM ducta intelligatur recta ipſi PB, ſeu DE parallela, hæc linea ordinata erit ad eandem ellipſeos AGO diametrum ad quam in ellipſi PCM ordinata eſt linea PB, atque adeò rectæ DE, PB ſunt ad eandem diametrum ordinatæ, idemque eodem modo de cæteris lineis oſtendi poteſt. Quare ab illâ communi diametro rectæ DE, PB, & HI, biſecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC, & KL a ſuâ communi diametro.

(z) * *Erunt ad invicem &c.* Si ex punctis D & E in lineam FG demiſſa intelligantur perpendicula infinite parva p, & P, hæc, ob angulos DPF, EPG, æqua-



culo P, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia DPF, $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires coni DPF & segmenti conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P à sola sphæroide intimâ $PCBM$, & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus A trahitur à sphæroide totâ $AGOD$, ut distantia PS ad distantiam AS. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est sphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) (a) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis

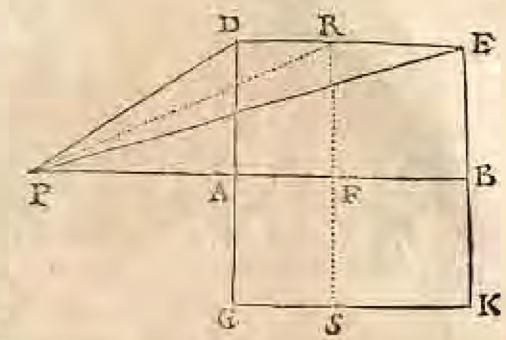
æquales, erunt ut distantiæ DP, EP. Sed quoniam evanescentibus angulis DPF, EPG, lineæ DH, FK & GL, EI, fiunt parallelæ, erit superficies DHKF, ad superficiem GLIE, ut rectangulum $p \times \frac{DH+FK}{2}$, ad rectangulum $P \times \frac{GL+EI}{2}$, hoc est, (ob $DH+FK = LG+EI$) ut p ad P, seu ut DP ad EP. Quare si DPF, EPG conos vel pyramides in sphæroide AGO designent, solida DHKF, GLIE erunt ut superficies prædictæ in perpendicula perpendiculis p, P, similia ductæ, hoc est, ut quadrata distantiarum DP, EP. Quoniam igitur vis quâ particula solida DHFK trahit corpusculum P est ad vim quâ illud trahitur à particulâ solidâ GLIE, ut solidum $\frac{DHKF}{DP^2}$, ad solidum $\frac{GLIE}{EP^2}$, hoc est, ut $\frac{DP^2}{DP^2}$, ad $\frac{EP^2}{EP^2}$, manifestum est corpusculum P utrinque æqualiter attrahi.

(a) * *Inveniri potest.* Hoc est per propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpusculi in sphæram vel cylindrum aliamve figuram regularem, & lex attractionis corpusculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illâ formulâ, & indè habebitur æquatio cujus ope determinari poterit formulæ generali exponens indeterminata, quæ exhibebit attractionem in singulas particulas materiæ.

Exemplum. In cylindrum ADEKG trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB, ut in prop. XCI; supponaturque vis in singulas cylindri particulas tendens reciprocè ut distantiæ dignitas cujus index n, & dicatur $PA = a$, $PD = b$, $PB = c$, $PE = e$, $RF = g$, $PF = x$, $PR = y$, eritque $yy = xx + gg$, ideoque $ydy = xdx$. Quare fluxio vis quâ corpusculum P in cylindrum ADRSG trahitur, erit (541) ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{xdx}{y^{n-1}} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{ydy}{y^{n-1}} = x^{2-n}dx - y^{2-n}dy$; cujus fluens $= \frac{x^{3-n} - y^{3-n} + Q \text{ const.}}{3-n}$; hæc autem evanescit, ubi $x = a$, & $y = b$; Quare erit $Q = b^{3-n} - a^{3-n}$, & fluens accurata $= \frac{b^{3-n} - a^{3-n} + c^{3-n} - e^{3-n}}{3-n}$, ubi $x = c$, & $y = e$. Jam verò vis quâ corpusculum P in totum cylindrum ADEKG trahitur, experimentis inventa sit ut $b - a + c - e$, & habebitur æquatio $b - a + c - e = \frac{b^{3-n} - a^{3-n} + c^{3-n} - e^{3-n}}{3-n}$, ex quâ determinandus est valor indicis generalis n. Porro posito $n = 2$, æqualia fiunt æquationis membra ergo vis in singulas cylindri particulas tendens erit reciprocè ut quadratum distantiæ à particulâ, quemadmodum in cor. I. prop. XCI. positum est. Verum si hâc ratione, varios tentando numeros, non potest indicis generalis n valor inveniri, ponatur $3 - n = z$, & vis corpusculi in cylindrum experimentis reperta sit ut quantitas q; & erit $qz = b^z - a^z + c^z - e^z$. Fiat $a^z = p$, $b^z = v$, $c^z = r$,

sis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

P R O-



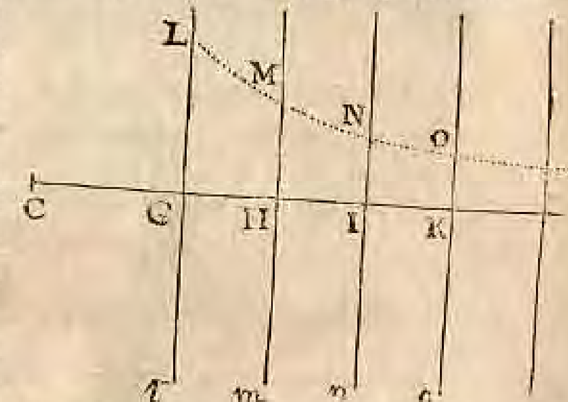
$e^z = s$, & erit (L significante Logarithmum quantitatis cui præfigitur) $L.\,a^z = L.\,p$, $L.\,b^z = L.\,v$, $L.\,c^z = L.\,r$, $L.\,e^z = L.\,s$, adeoque $zL.\,a = L.\,p$, & $z = \frac{L.\,p}{L.\,a} = \frac{L.\,v}{L.\,b} = \frac{L.\,r}{L.\,c} = \frac{L.\,s}{L.\,e}$. Unde $\frac{L.\,a \times L.\,v}{L.\,b} = L.\,p$, atque adeo $L.\,v^{\frac{L.\,b}{L.\,a}} = L.\,p$, proindeque $v^{\frac{L.\,b}{L.\,a}} = p$, & simili modo invenietur $v^{\frac{L.\,c}{L.\,b}} = r$, & $v^{\frac{L.\,e}{L.\,b}} = s$. Quare æquatio erit $\frac{q.\,L.\,v}{L.\,b} = v - v^{\frac{L.\,a}{L.\,b}} + v^{\frac{L.\,c}{L.\,b}} - v^{\frac{L.\,e}{L.\,b}}$, quæ ab exponente indeterminata libera est. Ut autem tollatur etiam $L.\,v$, ponatur $v = t + 1$, & (383) erit $L.\,v = L.\,t + 1 = t - \frac{1}{2}tt + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. in infinit. Si itaque in æquatione modo inventa loco v scribatur $t + 1$, & loco $L.\,v$ series $t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 -$ &c., obtinebitur æquatio ab exponentibus & logarithmis indeterminatis libera, ex quâ per reversionem serierum invenietur valor quantitatis t, & inde reperietur $L.\,v$, atque per $L.\,v$ habebitur valor

De Motu Corporum.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu à solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi à plano, & index ternario minor quam index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit LGl planum quo solidum terminatur. Jaceat solidum autem ex parte plani hujus versus I, inque plana innumera mHM, nIN, oKO, &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra solidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo



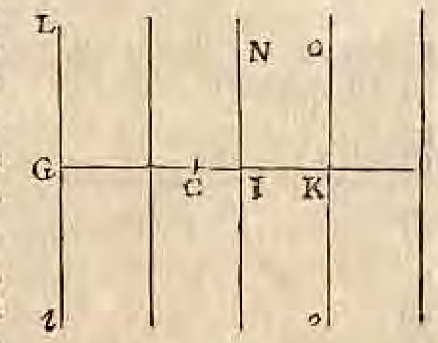
lor indicis z, & inde valor ipsius n. Nam cum sit $z = \frac{L.v}{L.a}$, & $L.v = L.t + 1$, erit $z = \frac{L.t+1}{L.a}$, & $n = 3 - z = 3 - \frac{L.t+1}{L.a}$.

Si in æquatione vel quantitate exponentiali proposita, indeterminata z in solis quantitatum datarum exponentibus reperiretur, hæc æquatio vel quantitas superiori methodo posset ad aliam reduci numero terminorum finitam, in quâ nulla esset amplius exponens vel logarithmus indeterminata. Nam si $q = fa^{z} + gb^{2z} + hc^{4z}$ + &c., sitque $v = a^{z}$ erit $q = fv +$

Liber Primus. Prop. XCIII. Theor. XLVII.

(per corol 3. prop. xc.) vis, quâ planum quodvis mHM trahit punctum C, (b) est reciprocè ut CH^{n-2}. In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis singulis lGL, nIN, oKO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipsis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciprocè ut CG^{n-3}, & propterea vis solidi totius est reciprocè ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

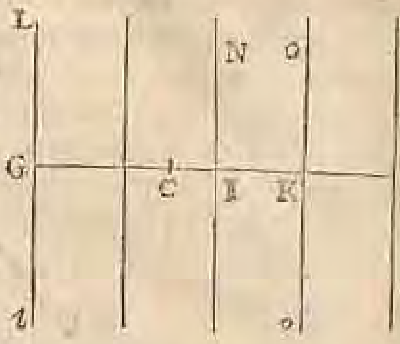
Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani lGL intra solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiæ CG. Et solidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuò per æqualitatem tollentibus. Proinde corpusculum C solâ vi solidi ultra planum



$g v^{\frac{2L.b}{L.a}} + h v^{\frac{4L.c}{L.a}}$ + &c. erit enim $z = \frac{L.v}{L.a}$ & $b^{2z} = b^{2\frac{L.v}{L.a}}$ & $Lb^{2z} = \frac{2L.v}{L.a} L.b = \frac{2L.b}{L.a} L.v$, unde est $b^{2z} = v^{\frac{2L.b}{L.a}}$ & sic de cæteris.

(b) * *Est reciprocè &c.* Sit $CH = x$, erit MH ut $\frac{1}{x^{n-2}}$, (Hyp.) & areæ GLMH, elementum ut $\frac{dx}{x^{n-2}}$, adéque (165) area ipsa ut Q *const.* $- \frac{1}{(n-3)x^{n-3}}$, quæ evanescit ubi $x = CG$. Quare $Q = \frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, & area GLMH, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}} - \frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$. At cum CH infinita evadit, terminus $\frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$ evanescit fitque area infinitaG LOK, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, seu ob datam $n-3$, ut CG^{n-3}, reciprocè.

DE MOTU CORPORUM. num OK ſiti trahitur. Hæc autem vis (per caſum primum) eſt reciprocè ut CK^{n-3}, hoc eſt (ob æquales CG, CK) reciprocè ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc ſi ſolidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; (c) innoteſcit ejus vis attractiva, ſubducendo de vi attractivâ ſolidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum verſus KO productæ.

Corol. 2. Si ſolidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene eſt momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo diſtantiam (d) decreſcet quam proximè in ratione poteſtatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc ſi corpus quodvis finitum & ex unâ parte planum trahat corpuſculum è regione medii illius plani, & diſtantia inter corpuſculum & planum collata cum dimenſionibus corporis attrahentis perexigua ſit, conſtet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis cujuſvis pluſquam quadruplicatæ diſtantiarum; vis attractiva corporis totius decreſcet quamproximè in ra-

(c) * *Innoteſcit ejus vis &c.* Ex demonſtratis attractio ſolidi totius LGKO, in infinitum verſus O producti, eſt ut $\frac{1}{CG^{n-3}}$ ſolidi verò infiniti NICO, ut $\frac{1}{CI^{n-3}}$. Quarè attractio ſolidi L G I N, eſt ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$.

(d) * *Decreſcet quam proximè &c.* Vis enim attractiva, ſi corpus infinitum ſit, eſt ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$; ſed ſi perexigua ſit diſtantia CG reſpectu CI, terminus $\frac{1}{CI^{n-3}}$, minimus erit reſpectu termini $\frac{1}{CG^{n-3}}$ & negligi poterit, ideoque attractio erit quam proxime ut CG^{n-3} reciprocè. Quod tamen verum eſſe non poteſt, ſi fuerit $n=3$; Nam in hoc caſu $\frac{1}{CH^{n-2}} = \frac{1}{CH}$, ideoque MH erit ut $\frac{1}{CH}$ & rectangulum MH × CH datum, proindeque curva LMO hyperbola, cujus aſymptotus CK, & area illius finita LMNIG vim exponit ſolidi LGIN; area verò infinita NOKI, vim ſolidi infiniti NIKO.

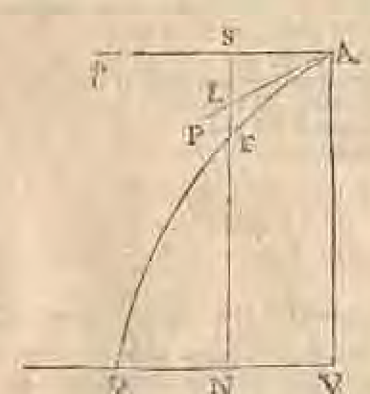
LIBER PRIMUS. PROP. XCIII. THEOR. XLVII.

ratione poteſtatis, cujus latus ſit diſtantia illa perexigua, & index ternario minor quam index poteſtatis prioris. De corpore ex particulis conſtante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione poteſtatis triplicatæ diſtantiarum, aſſertio non valet; propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario ſecundo, ſemper eſt infinitè major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratur motus corporis: ſolvetur problema quærendo (per prop. XXXIX.) motum corporis rectà deſcendentis ad hoc planum, & (per legum corol. 2.) componendo motum iſtum cum uniformi motu, (a) ſecundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, ſi quæratur lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ mo-

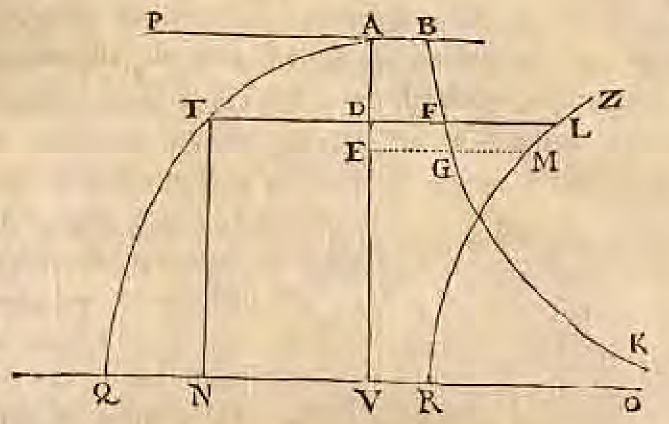
(a) 546. *Secundum lineas eidem plano parallelas &c.* Corpus A quod ad planum VQ perpendiculariter & ſecundum lineas lineæ AV parallelas trahitur, exeat de loco A juxtà directionem quamlibet AP. 1°. Si projectionis directio AP plano VQ parallela fuerit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam AS, & per prop. 39. invenietur in lineâ SN lineæ AV parallelâ ſpatium ST quod corpus vi attractrice eodem tempore deſcribit, & hinc habebitur punctum T in trajectoriâ ATQ, quam corpus utroque motu, impreſſo nimirum & ex vi attractrice genito deſcribit. 2°. Si directio projectionis AP plano trahenti VQ parallela non eſt, ductâ AS plano VQ & SL rectæ AV parallelis, motus projectionis AL reſolvatur in motus AS & SL, & datis velocitatibus uniformibus AS & SL, dabuntur tum tempus quo percurritur AS, tum ſpatium ST quod corpus hoc eodem tempore deſcri-



bit ex vi attractrice & motu impreſſo SL ſimul (per cor. 3. prop. 39.) unde habebitur punctum T trajectoriæ A T Q cujus omnia puncta eodem modo poſſunt inveniri.

moveatur, (b) solvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

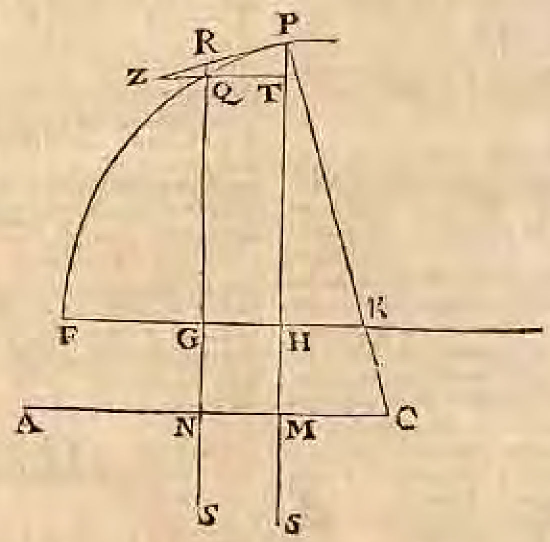
Ope-



Exemplum. Exeat corpus de loco A secundum directionem AP plano trahenti VQ parallelam, & ductâ DT eidem plano parallelâ, sit vis trahens in totâ lineâ DT, ut DV cubus reciprocè. De loco D, erigatur semper DF perpendicularis ad AV & vi trahenti in lineâ DT proportionalis, sitque BFG linea curva quam punctum G perpetuò tangit. In DF capiatur DL lateri quadrato areæ ABFD reciprocè proportionalis, & punctum L sit semper in lineâ curvâ ZLR, prorsùs ut in prop. 39. Jam dicatur $AV=a$, $DV=x$, $TD=y$, erit area ABFD ut $\frac{aa-xx}{xx}$ (430) & proindè DL, ut $\frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$ adeóque elementum DLME, ut $\frac{x\,dx}{\sqrt{aa-xx}}$, & area VDLR, ut hujus elementi fluens $Q-\sqrt{aa-xx}$ (165 166), evanescit autem area VDLR ubi $x=o$. Quarè $Q=a$, & area VDLR, ut $a-\sqrt{aa-xx}$. Hinc positâ $x=a$, erit area VABZR, ut a, & area DABZL, ut $\sqrt{aa-xx}$. Porrò si punctum T est in trajectoriâ ATQ erit DT seu y proportionalis tempori quo uniformiter describitur DT, & quo motu accelerato percurritur AD seu (per prop. 39.) erit y, ut $\sqrt{aa-xx}$, adeoque yy ut $aa-xx$. Undè patet trajectoriam ATQ esse ellipsim cujus centrum V, semiaxis unus VA, alter conjugatus VQ. Iisdem positis & vi ad planum VQ trahente in vim repellentem mutatâ corpus describet hyperbolam cujus centrum V semiaxis VA vertex A.

(b) 547. *Solvetur problema &c.* Moveatur corpus P in curvâ PQF vi perpendiculariter tendente ad planum FK, sint P & Q puncta infinitè propinqua, PZ tangens in P, PC radius circuli curvam PQF osculantis in P; PH, QG perpendicula ex punctis P, Q in planum FK demissa, CA recta lineæ FK parallela & secans perpendicula PH, QG producta in M & N; producatur GQ, ut tangenti PZ occurrat in R, & per Q agatur recta ZQT plano FK parallela, ac tangenti occurrens in Z rectæ verò PH in T. Jam ob similia triangula CPM, PZT & RZQ, est $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, & ex naturâ circuli osculatoris $PR^2 = QR \times \overline{RN+QN}$ (per prop. 36. lib. 3. Elem.) sivè coeuntibus punctis P & Q, $PR^2 = QR \times 2PM$. Er-

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis quâ corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel à basi fugatum, moveri possit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono basem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam A +



Ergò $CP^2, PM^2 = QR \times 2PM : QT^2$, ideóque $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, consideretur vis centripeta ut tendens ad centrum S infinitè distans, & erit SP quantitas constans, ac $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$. Est igitur (per cor. 1. & 5. prop. 6.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, hoc est, ob constantem quantitatem $2SP^2$, reciprocè ut $\frac{PM^3}{CP^2}$, seu in ratione compositâ ex duplicatâ ratione radii osculatoris CP directè & triplicatâ perpendiculi PM inversè. Porrò datâ curvâ PQF invenietur in singulis locis radius osculi CP (214) & punctum K ubi plano occurrit ac proinde invenietur PM, per proportionem: $PK : PH = PC : PM$, vel etiam per proportionem PR vel $PQ : QT = PC : PM$. Quare dabitur lex vis centripetæ.

$\overline{A+O}|^{\frac{m}{n}}$ resolvo (†) in seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm - mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$

(†) 548. *Resolvo in seriem infinitam &c.* Ut hæc liqueant sequentia de dignitatum formulis sunt memoriæ revocanda.

Lemma. Binomii $a+b$, dignitas $\overline{a+b}^n$ cujus index n, est $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{n-4} b^4$ + &c. Satis patet ex potentiarum formatione. Si enim binomium $a+b$, ad 2^{am}, 3^{am}, 4^{am}, &c. dignitates evehatur, in singulis dignitatis cujusque terminis, index litteræ a unitate perpetuò decrescit, dum contrà index litteræ b unitate crescit, & coefficientes seu unciæ singulorum terminorum progrediuntur ut numeri $\frac{n}{1}$, $\frac{n \times n-1}{1 \times 2}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c.

549. Cor. 1. Si ponatur $a = P$, & $Q = \frac{b}{a}$, adeóque $a^n = P^n$, $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$, $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$, his valoribus in lemmatis formulâ substitutis erit $\overline{a+b}^n = P^n + \frac{n}{1} P^n Q + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3$ + &c. & si rursus ponatur $P^n = A$; $\frac{n}{1} P^n Q = B$; $\frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 = C$; $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3 = D$, & ità porrò, erit $\overline{a+b}^n = \overline{P+PQ}^n = P^n + \frac{n}{1} AQ + \frac{n-1}{2} BQ + \frac{n-2}{3} CQ + \frac{n-3}{4} DQ +$ &c.

550. Cor. 2. Iisdem formulis uti possumus pro polynomio quovis ad datam dignitatem evehendo, si pars una polynomii litteræ a binomii ponatur æqualis, cæteræ verò partes omnes supponantur æquales litteræ b. Exempli causâ. Sit trinomium $d+e+f$ ad tertiam dignitatem elevandum, pone $n=3$, $d=a$, $e+f=b$, & formula $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$, mutabitur in seriem $d^3 + 3d^2(e+f) + 3d(e+f)^2 + (e+f)^3$; cum enim perventum est ad coefficientem in quâ est $n-3$, abrumpitur series ob $n-3=0$. Porrò per eandem formulam generalem $(e+f)^2 = ee + 2ef + ff$, & $(e+f)^3 = e^3 + 3e^2 f + 3ef^2 + f^3$. Quare tandem $(d+e+f)^3 = d^3 + 3d^2 e + 3d^2 f + 3de^2 + 6def + 3dff + e^3 + 3e^2 f + 3ef^2 + f^3$.

Ita etiam formulam pro dignitate infinitinomii possumus obtinere, sit enim series $A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + EZ^4$ &c. ad dignitatem p evehenda sub ducto calculo invenietur.

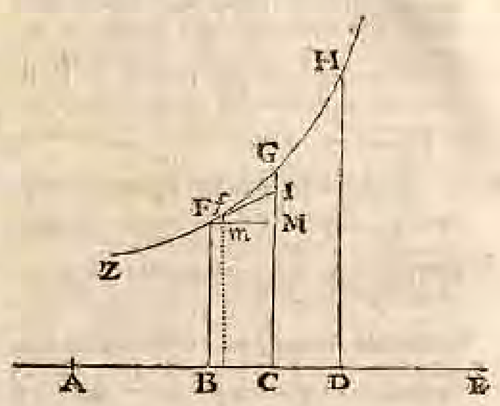
$A^p + pA^{p-1}BZ + pA^{p-1}CZ^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} B^2 Z^2 + pA^{p-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2 [\ldots] + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{[\ldots]}$

551. Cor. 3. Si ex binomio $a+b$, extrahenda sit radix cujus index $\frac{m}{p}$, loco n, in formulâ generali scribatur $\frac{m}{p}$, & erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b^1 + \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2 + \frac{m \times m-p \times m-2p}{1 \times 2 \times 3 p^3} a^{\frac{m-3p}{p}} b^3 + \frac{m \times m-p \times m-2p \times m-3p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 p^4} a^{\frac{m-4p}{p}} b^4$ + &c. vel etiam erit $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}} = \overline{P+PQ}^{\frac{m}{p}} = P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} AQ + \frac{m-p}{2p} BQ + \frac{m-2p}{3p} CQ + \frac{m-3p}{4p} DQ$ + &c.

Nam sit Radix quæsita $\overline{a+b}^{\frac{m}{p}}$ æqualis seriei infinitæ $A + BZ + CZ^2 + DZ^3$ &c. erit $\overline{a+b}^m$ æqualis huic seriei ad dignitatem p evectæ, sumatur ergo series potentiæ $\overline{a+b}^m$ quæ erit $a^m + m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ & conferantur cum terminis dignitatis infinitinomii $A + BZ + CZ^2 + DZ^3$ &c. ad dignitatem p evecti, (n°. 550) invenieturque $A^p = a^m$; $pA^{p-1}BZ = ma^{m-1}b$; $pA^{p-1}CZ^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2}B^2Z^2 = m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2}b^2$; $pA^{p-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2BCZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3}B^3Z^3 = m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ &c.

Unde invenietur $A = a^{\frac{m}{p}}$, $BZ = \frac{m}{p} \times \frac{a^{m-1}}{a^{m-\frac{m}{p}}} b = \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b$; $CZ^2 = \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2$ &c.

552. Lemma. Si in rectâ AE positione datâ, ad quam curva ZFH refertur, capiatur abscissa quævis AB, sitque ordinata correspondens FB æqualis dignitati abscissæ AB^q, in datam quantitatem 1 ductæ, & deinde capiantur intervalla æqualia BC, CD, & agantur ordinatæ CG, DH, ac per punctum F ducatur tangens FI ordinatæ CG occurrens in I, & recta FM parallela lineæ AE, eidem ordinatæ occurrens in M, ac tandem ordinata CG, seu $\overline{AB+BC}^q$, elevetur ad dignitatem cujus est index q atque ità in seriem infinitam convergentem resolvatur, hujus seriei primus terminus erit semper



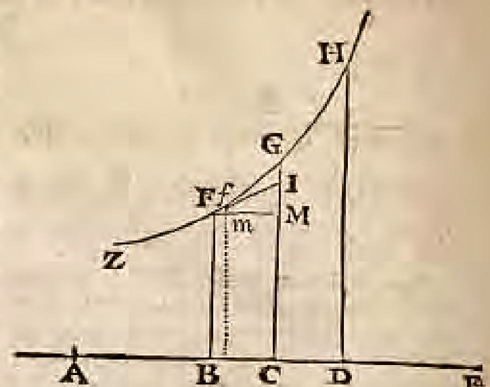
æqualis ordinatæ FB, insistenti ad initium quantitatis constantis BC; secundus terminus æqualis erit differentiæ inter FB & CI, id est, lineæ MI, & tertius terminus unà cum sequentibus in infinitum æquabitur lineæ CI quæ jacet inter tangentem & curvam.... Dem. sit AB $= x$, FB $= y$, data BC $= O$, ducta intelligatur ordinata fb, alteri FB infinitè propinqua quæ lineam FM secet in m, & punctis F, f, coeuntibus erit Fm $= dx$, fm $= dy$, ac triangula Fmf, FMI similia, ideoque $dx : dy = O$: MI, sed quoniam $y = x^q$ (ex hyp.) & proinde $dy = qx^{q-1} dx$, est $dx : dy = 1 : qx^{q-1}$, ergò MI $= qx^{q-1} \times O$ & CI $=$ FB $+$ MI $= x^q + qx^{q-1} \times O$. Præterea (ex hyp.) est GC $= \overline{x+O}^q = x^q + qx^{q-1}O + \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} O^3$ + &c. in infinitum (548). Quare erit GI $=$ GC $-$ CI $= \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3}$

$x^{q-3}O^3$ + &c. in infinitum. Ergò seriei in quam resolvitur $\overline{x+O}^q$, terminus primus x^q, æqualis est ordinatæ FB, secundus terminus $qx^{q-1}O$, æqualis differentiæ inter FB & CI, & tertius terminus unà cum sequentibus in infinitum æqualis lineæ GI. Eadem est demonstratio, si curva ZFH concavitatem lineæ AE obvertat. Q. E. D.

553. Cor. 1. Si quantitas O, seu BC, in infinitum minuatur ut fiat $=dx$, termini omnes in seriæ subsequentes sunt infinitè minores quovis termino antecedente, quod quantitatis O index in singulis terminis unitate crescat, ideóque termini illi subsequentes negligi possunt, & proinde in hac hypothesi $MI=dy=MG$, $GI=\frac{q\times q-1}{1\times2}x^{q-2}O^2=\frac{q\times q-1}{1\times2}x^{q-2}dx^2=\frac{1}{2}ddy$. Nam cum sit $dy=qx^{q-1}dx$ & dx, constans, erit sumptis fluxionibus, $ddy=q\times q-1\,x^{q-2}dx^2$.

554. Cor. 2. In eâdem Hypothesi erit $dddy$ ut quartus seriei terminus, $ddddy$, ut quintus, & ità porro in infinitum. Nam quia est $ddy=q\times q-1\,x^{q-2}dx^2$, erit $dddy=q\times q-1\times q-2\,x^{q-3}dx^3$, & $ddddy=q\times q-1\times q-2\times q-3\,x^{q-4}dx^4$, & ità deinceps. Quartus autem seriei terminus positâ $O=dx$, est $\frac{q\times q-1\times q-2}{1\times2\times3}x^{q-3}dx^3$. Quintus $\frac{q\times q-1\times q-2\times q-3}{1\times2\times3\times4}x^{q-4}dx^4$; Ergò ob datos numeros $1\times2\times3$ & $1\times2\times3\times4$. &c. patet corollarium.

555. Cor. 3. Eadem omnia vera sunt, si fuerit ordinata BF seu y æqualis seriei cuivis potentiarum quarumlibet abscissæ AB in datas quantitates ductarum, hoc est $y=ex^h\mp fx^m\mp gx^p+$ &c. Eadem enim demonstratio. Observandum tamen est in hoc casu primum seriei terminum dici in quo quantitas O, seu BC, non extat, secundum terminum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum dimensionum & sic in infinitum, licet in singulis terminis ità definitis plures contineantur quantitates signis + vel − conjunctæ. Exempli causâ. Positâ $y=ex^n+fx^m=$ BF, erit GC $=e(x+O)^n+f(x+O)^m=ex^n+fx^m+\frac{m}{1}ex^{n-1}O+\frac{n}{1}ex^{m-1}O+$ &c. in infinitum. Primus seriei terminus est



ex^n+fx^m, secundus $\frac{n}{1}ex^{n-1}\times O+\frac{m}{1}ex^{m-1}\times O$ & ità de cæteris.

556. Cor. 4. Hinc sequitur eadem omnia valere, si fuerit ordinata BF seu y æqualis cuilibet functioni ipsius abscissæ AB, seu x, hoc est $y=Q$, & Q quantitas ex abscissâ x, ipsiusque potentiis ac aliis quantitatibus datis quomodolibet compositâ. Nam quantitas illa Q poterit semper vel (per Lemma 548.) ejusque corollaria vel per divisionem in seriem aliquam resolvi, cujus singuli termini erunt vel ipsius abscissæ x potentiæ in quantitates datas ductæ, vel quantitates omnino datæ, omnis verò quantitas data $e=ex^0$. Quare æquatio $y=Q$, semper reduci poterit in formam æquationis cor. 3. (555.) $y=ex^n\mp fx^m\mp gx^p\mp$ &c. Exempli causâ: Sit $y=g+\frac{ee}{b+x}+(ff+xx)^{\frac{1}{2}}$.

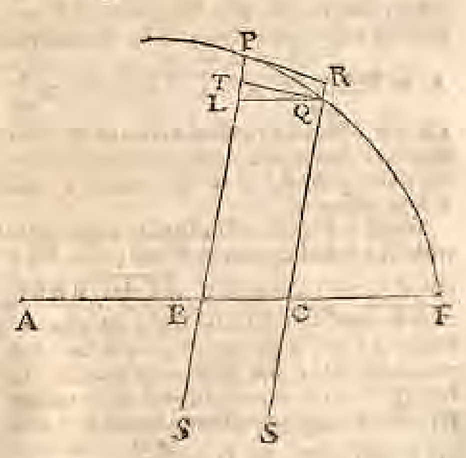
Peractâ divisione in infinitum; erit $\frac{ee}{b+x}=\frac{ee}{b}-\frac{eex}{b^2}+\frac{eex^2}{b^3}-\frac{eex^3}{b^4}+\frac{eex^4}{b^5}$ &c. in infinitum; & $\overline{ff+xx}^{\frac{1}{2}}=f+\frac{x^2}{2f}-\frac{x^4}{8f^3}+\frac{x^6}{16f^5}$ &c. in infinitum. Nam in hoc casu erit in formulâ $P^{\frac{m}{p}}+\frac{m}{p}AQ+\frac{m-p}{2p}BQ$ &c. (551.)

m

vim proportionalem esse suppono. (c) Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-nn}{nn}A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm-nn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^0$, ideoque dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemadmodum

$m=1$, $p=2$, $P=ff$, $Q=\frac{x^2}{ff}$, $A=P^{\frac{m}{p}}=ff^{\frac{1}{2}}=f$. $B=\frac{m}{p}\times AQ=\frac{x^2}{2f}$, & sic deinceps, ergò erit $y=g+\frac{ee}{b}+f-\frac{eex}{b}+\left(\frac{ee}{b^3}+\frac{1}{2}f\right)x^2-\frac{eex^3}{b^4}+\left(\frac{ee}{b^5}-\frac{1}{8f^3}\right)x^4$, &c. in infinitum.

(c) 557. * *Est igitur vis quæsita &c.* Moveatur corpus in curvâ PQF, vi tendente ad planum seu basim AF, secundum lineas PB, QC cum basi AF angulum datum constituentes. Producatur ordinata CQ ut tangenti per P ductæ occurrat in R, & ex puncto curvæ Q ad ordinatam PB agantur QL parallela AF, & QT ad PB perpendicularis. Jam si vis centripeta fingatur ad punctum S infinitè distans tendere, coeuntibus punctis P & Q vis illa in puncto P erit (per cor. 1. prop. 6.) directè ut $\frac{QR}{SP^2\times QT}$, hoc est, ob constantem SP, ut $\frac{QR}{QT}$. Porrò ob angulum QLT datum, & angulum QTL rectum, datur specie triangulum LQT, & ideò datâ QL, datur etiam QT, ergò datâ BC seu QL, vis erit ut QR. Sed si abscissa AB dicatur $=A$, ordinata $BP=B$, & $BC=O$; cum sit (ex Hyp.) B, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit ordinata CQ, ut $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ & (553), QR, ut tertius terminus seriei in quam resolvitur $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$, hoc est, (550) ut $\frac{m\times m-n}{1\times2\times n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}\times OO=\frac{mm-mn}{2n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}\times OO$, seu ut $\frac{mm-mn}{n^2}\times A^{\frac{m-2n}{n}}$, ob datam quantitatem

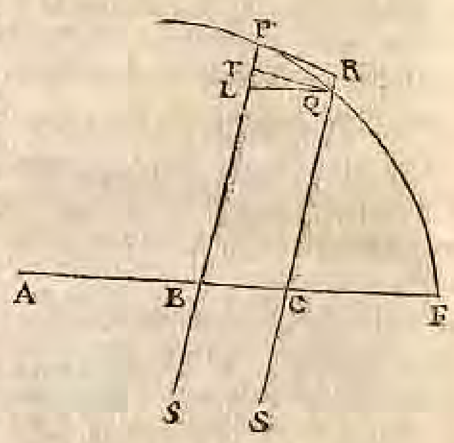


$\frac{OO}{2}$. Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-mn}{1\times2\times n^2}\times A^{\frac{m-2n}{n}}$ vel ut $\frac{mm-mn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}$; quia cum sit B, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit $B^{\frac{n}{m}}$ ut A, &

B

modum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ seu $2B^3$: ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed missis hujusmodi propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

S E C



$B^{\frac{n}{m}\times\frac{m-2n}{n}}$, seu $B^{\frac{m-2n}{m}}$, ut $A^{\frac{m-2n}{n}}$. Itaque si ponatur $m=2$, $n=1$, erit B, ut A^2, & curva PF parabola, & $\frac{mm-mn}{nn}B^{\frac{m-2n}{m}}=2B^0$, adeóque vis ut data $2B^0=2$. Quod si ponatur $m=-1$, & $n=1$, erit B, ut $\frac{1}{A}$ hoc est $B\times A$ rectangulum datum, & proindè curva PF hyperbola cujus asymptotus AF, & centrum A; & $\frac{mm-mn}{nn}A^{\frac{m-2n}{n}}=2A^{-3}=\frac{2}{A^3}=2B^3$, & ideò vis ut cubus ordinatæ B. Sed quoniam hyperbola convexitatem obvertit asymptoto AF, vi illâ corpus à basi AF repelletur.

Si curva PQF, est ellipsis cujus centrum A, semidiameter $AF=C$, erit PB^2 seu B^2, ut rectangulum $\overline{AF+AB}\times BF=\overline{C+A}\times\overline{C-A}=CC-AA$, & ponennendo $BC=O$, erit QC^2, ut $CC-AA-2AO-OO$, fiat $CC-AA=DD$, erit QC^2, ut $DD-2AO-OO$, & radice per formulam generalem extractâ (550 551) erit QC, ut $D-\frac{AO}{D}-\frac{OO}{2D}-\frac{AAOO}{2D^3}-\frac{AO^3}{2D^3}-\frac{A^2O^3}{2D^5}$, &c. tertius seriei terminus est $\frac{OO}{2D}+\frac{AAOO}{2D^3}=\frac{\overline{DD+AA}\times OO}{2D^3}=\frac{CCOO}{2D^3}$, erit igitur QR (552. 556) seu vis ut $\frac{CC}{2D^3}$, hoc est, ob datam quantitatem $\frac{CC}{2}$, ut $\frac{1}{D^3}$, ac proindè quoniam BB est ut $CC-AA$ seu DD, vis erit ut $\frac{1}{B^3}$, hoc est, ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè, quod convenit cum solutione Problematis III. Eodem modo demonstratur vim à plano AF repellentem decrescere in ratione triplicatâ ordinatim applicatæ PB si corpus moveatur in hyperbolâ, cujus diameter una sit in plano AF, altera conjugata in lineâ parallelâ ordinatis PB, QC, & convexitas plano AF obversa.

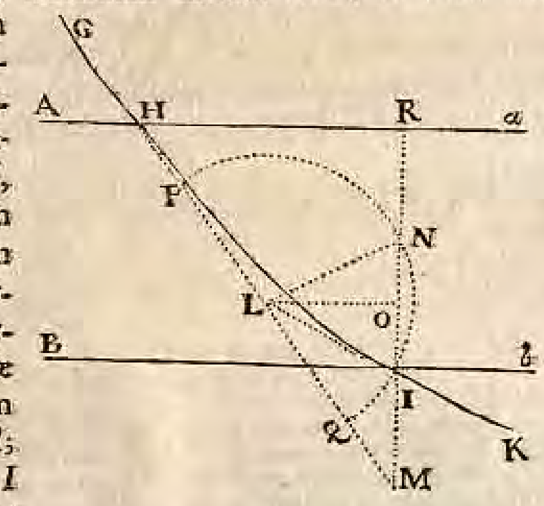
SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.

Cas. 1. Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa (d) secundum lineam GH, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eâque actione describat lineam curvam HI, & emergat (e) secundum lineam IK. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum IM, occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M, tum plano incidentiæ Aa in R; & linea emergentiæ KI producta occurrat HM in

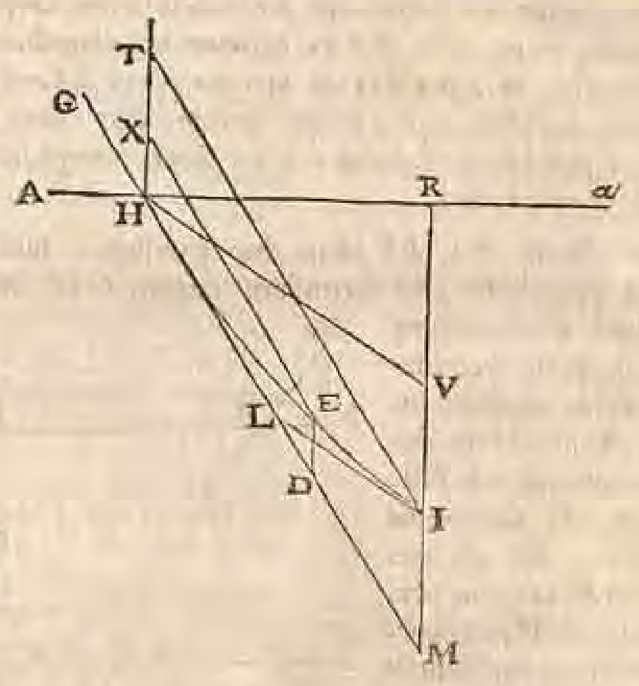


L.

(d) 558. * *Secundum lineam* GH. Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli GHA ad rectum, seu angulus quem linea GH constituit cum rectâ ad planum incidentiæ A a perpendiculariter erectâ in H. Angulus emergentiæ est etiam angulus KIM, quem linea directionis corporis emergentis, efficit cum rectâ IM ad planum emergentiæ Bb, perpendiculari in I.

(e) * *Et emergat secundum lineam.* Patet rectas GH, IK seu corporis in H & I directiones, curvam HI in punctis H, I contingere.

L. Centro *L* intervallo *LI* describatur circulus, secans tam *HM* in *P* & *Q*, quam *MI* productam in *N*; & primò si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) (f) curva *HI* parabola (g) cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & lineâ *IM* æquale sit *HM* quadrato; sed & linea *HM* bisecabitur in *L*. Unde si ad

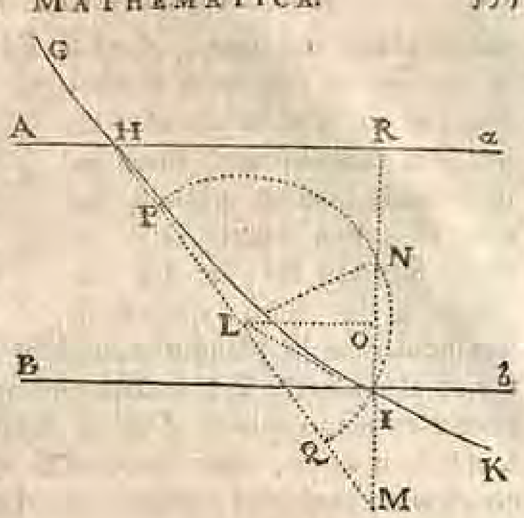


(f) * *Curva HI parabola*, cujus diameter IR, patet (per not. 40.).

(g) * *Cujus hæc est proprietas &c.* Ductis per punctum H diametro HT, & rectâ HV ad alteram diametrum IR ordinatim applicatâ, atque ex puncto I ad diametrum HT ordinatâ IT, erit ob parallelas MI, HT (per th. 1. de parabolâ) & parallelas MH, IT (per lem. 4. de conic.) MI = HT & IT = MH (per 34. 1. Elem.); sed (per theor. 1. de parabolâ) quadratum ordinatæ TI æquale est rectangulo sub dato latere recto diametri HT & abscissâ HT, ergò rectangulum sub dato latere recto & lineâ MI æquale est HM quadrato; Et quoniam HM parabolam tangit in H estque proindè (per cor. 1. lem. 5. de conic.) IM = VI, & HV parallela LI, erit quoque HL = LM. Q. E. D.

559. Ut latus rectum diametri HT in variis angulis incidentiæ datum sit, oportet corporis parabolam describentis velocitatem in puncto H, & plani incidentiæ Aa vim attractricem esse datas. His autem datis, datum esse hoc latus rectum ità demonstratur. Per punctum X in diametro HT datum, agatur ordinatim applicata XE parabolæ occurrens in E, & per E ducatur ED parallela XH & tangenti HM occurrens in D, ac proindè æqualis datæ XH. Jam vero HX seu DE, est spatium quod corpus vi attractrice describit eodem tempore dato quo motu uniformi projectionis percurrit HD, idcoque datis vi attractrice & velocitate projectionis, data quoque erit linea HD in quovis incidentiæ angulo GHT. Est autem latus rectum diametri HT tertia proportionalis ad abscissam HX, & ordinatam XE seu HD. Ergò datis vi attractrice & velocitate projectionis, datum seu constans est latus rectum diametri HT. Q. E. D.

ad *MI* demittatur perpendiculum *LO*, (h) æquales erunt *MO*, *OR*; & additis (i) æqualibus *ON*, *OI*, fient totæ æquales *MN*, *IR*. Proinde cum *IR* detur, datur etiam *MN*, estque rectangulum *NMI* ad rectangulum sub latere recto & *IM*, hoc est, ad *HMq*, in datâ ratione. (k) Sed rectangulum *NMI* æquale est rectangulo *PMQ*, id est, differentiæ quadratorum *MLq*, & *PLq* seu *LIq*; & *HMq* datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem *MLq*: ergo datur ratio *MLq* − *LIq* ad *MLq*, (l) & convertendo ratio *LIq* ad *MLq*, & ratio dimidiata *LI* ad *ML*. Sed in omni triangulo *LMI*, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ *LMR* ad sinum anguli emergentiæ *LIR*. *Q. E. D.*



Cas. 2. Transeat jam corpus successivè per spatia plura paral-

(h) * *Æquales erunt MO, OR* (per prop. 2. lib. 6. Elem.)

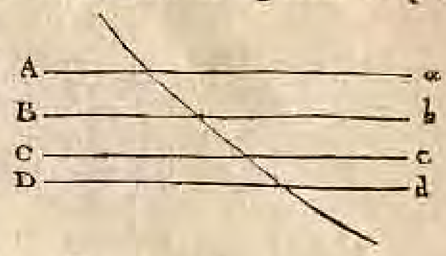
(i) * *Æqualibus ON, OI*. Per prop. 3. lib. 3. Elem.

(k) * *Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ*; (per cor. 1. prop. 36. lib. 3. Elem.) *id est, differentiæ quadratorum* ML^2 & PL^2; est enim $PM = ML + PL$, & $QM = ML - LQ = ML - PL$, Quare $PM \times QM = ML^2 - PL^2$. (Per Corol. 6. 2¹. Elem.)

(l) * *Et convertendo*. Sint enim *A* & *B*, quantitates datæ; & $ML^2 - LI^2 : ML^2 = A^2 : B^2$, erit $ML^2 : LI^2 = B^2 : B^2 - A^2$, quæ est ratio data.

De Motu Corporum.

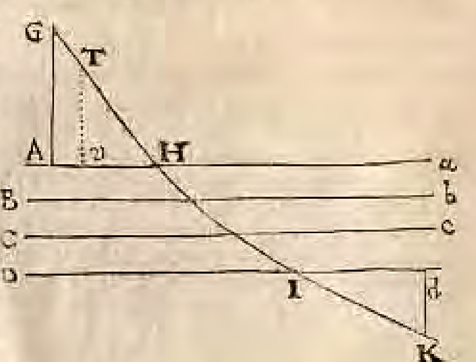
rallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$, &c. & agitetur vi quæ ſit in ſingulis ſeparatim uniformis, at in diverſis diverſa; & per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum Aa erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo Bb, in datâ ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum Bb, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio Cc, in datâ ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto Dd, in datâ ratione; & ſic in infinitum: & (m) ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

Capiantur AH, Id æquales, & erigantur perpendicula AG, dK occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK, in G & K. In GH capiatur TH æqualis IK, & ad planum Aa demittatur normaliter Tv. Et (per legum corol 2.) diſtinguatur motus corporis in duos,



(m) * *Et ex æquo.* Sint quantitates datæ A, B, C, D, &c. Sinus incidentiæ in planum primum S, ſinus emergentiæ ex ſecundo plano, idem qui ſinus incidentiæ in ſecundum planum T, & ità porrò ſinus ſint S, T, V, X, &c. ponaturque $S:T=A:B$, $T:V=B:C$, $V:X=C:D$, & erit, ex æquo, $S:X=A:D$.

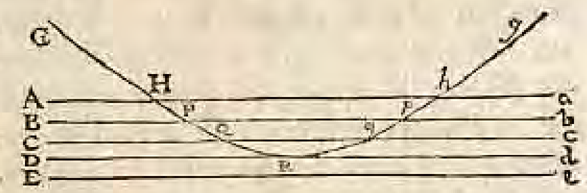
Liber Primus. Prop. XCVI. Theor. L.

unum planis Aa, Bb, Cc, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam AG & punctum H, interque punctum I & lineam dK; (n) hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas GH, IK. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut GH ad IK vel TH, id (o) eſt, ut AH vel Id ad vH, hoc eſt (reſpectu radii TH vel IK) (p) ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iiſdem poſitis, & (q) quod motus ante incidentiam velocior ſit quam poſtea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana Aa, Bb, Cc, &c. deſcribere arcus parabolicos, ut ſupra; ſintque arcus illi HP, PQ, QR, &c. Et ſit ea lineæ incidentiæ GH obliquitas ad planum primum Aa, ut ſinus incidentiæ ſit ad radium circuli, cujus eſt ſinus, in eâ ratione quam habet idem ſinus



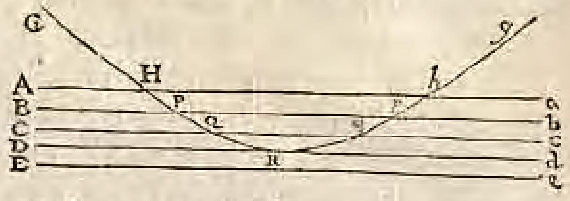
(n) * *Hoc eſt, æqualibus temporibus.* Quoniam motu compoſito corpus fertur per lineas G H & I K, eodem tempore deſcribit G H quo A H, & I K quo I D, ſed (ex Dem.) tempora quibus conficiuntur intervalla parallela & æqualia A H, I D æquantur, ergò corpus æqualibus temporibus deſcribit lineas G H & I K.

(o) * *Id eſt ut AH vel Id ad vH.* Per prop. 2. lib. 6. Elem.

(p) * *Ut ſinus emergentiæ.* Eſt enim angulus vTH anguli THv, & angulus IKd anguli KId, complementum ad rectum, & proindè (558) prior eſt æqualis angulo incidentiæ, poſterior eſt æqualis angulo emergentiæ.

(q) * *Et quod motus antè incidentiam &c.* Ut angulus emergentiæ ſemper creſcat (prop. 95.) & ipſius proindè complementum ad rectum ſemper decreſcat in tranſitu corporis per diverſa media.

ſinus incidentiæ ad ſinum emergentiæ ex plano Dd, in ſpatium $DdeE$: & ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano Dd. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum Ee.



Sed nec poteſt idem pergere in lineâ emergentiæ Rd, propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur (r) verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana Cc, Dd, deſcribendo arcum parabolæ QRq, (ſ) cujus vertex principalis (juxta demonſtrata *Galilæi*) eſt in R; ſecabit planum Cc in eodem angulo in q, ac prius in Q; dein pergendo in arcubus parabolicis qp, ph, &c. arcubus prioribus QP, PH ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in p, h, &c. ac prius in P, H, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in h, quâ incidit in H. Concipe jam planorum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulſus ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ ſemper angulo incidentiæ æqualis exiſtens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

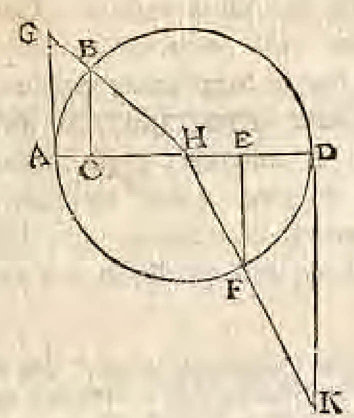
S.ho-

(r) * *Verſus medium incidentiæ* v. gr. Cc.

(ſ) * *Cujus vertex principalis.* Quoniam enim (ut patet ex not. 40.) omnes diametri parabolæ QRq ſunt ad baſim Qq perpendiculares, erit Qq ad axem ordinatim applicata, cumque recta DRd ipſi Qq parallela parabolam tangat in R, (40) erit R vertex principalis (per lem. 4. de conic.) & propterea velocitates corporis in locis Q & q à vertice R æquè remotis æquales erunt; & directiones illius ad lineam Qq æque inclinatæ: Inſuper velocitas perpendicularis quâ corpus ex ſolâ vi attractrice ad planum Pp urgetur, iiſdem gradibus creſcit per totum ſpatium qp, quibus antè decreverat per ſpatium æquale PQ. Quare corpus *pergendo in arcubus parabolicis* &c.

Scholium.

Harum attractionum haud multum diſſimiles ſunt lucis reflexiones & refractiones, factæ ſecundum datam ſecantium rationem, ut invenit *Snellius*, (t) & per conſequens ſecundum datam ſinuum rationem, ut expoſuit *Carteſius*. Namque lucem ſucceſſivè propagari & ſpatio quaſi ſeptem vel octo minutorum primorum à ſole ad terram venire, (u) jam conſtat per phænomena ſatellitum *Jovis*, obſervationibus diverſorum aſtronomorum confirmata. Radii autem in aëre exiſtentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebroſum cubiculum admiſsâ, invenit, & ipſe quoque expertus ſum) in tranſitu ſuo prope corpo-

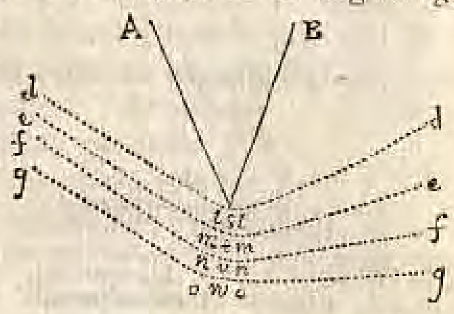


(t) * *Et per conſequens.* Lucis radius GH incidat in planum refringens AD, ſitque radius refractus HK. Centro H & radio quovis HA, circulus deſcribatur planum ſecans in A & D radioſque lucis in B & F. Erigantur ad planum perpendicula AG, CB, EF, DK. Villebrordus Snellius, referente Iſaaco Voſſio in ſuâ diſſertatione de lucis naturâ & proprietate, invenerat ſecantes GH, HK angulorum GHA, KHD, eſſe in datâ ratione. Verùm indè ſequitur quod Carteſius poſteà vulgavit, datam quoque eſſe rationem linearum CH, HE quæ ſunt ſinus angulorum incidentiæ CBH, & emergentiæ HFE (558). Nam BH : GH = CH : AH (ſeu BH) & KH : FH (ſeu BH) = HD (ſeu BH) : HE, & ex æquo, KH : GH = CH : HE. Quarè datâ ratione GH ad KH, datur quoque ratio HE ad CH.

(u) * *Jam conſtat per phænomena.* Jupiter cum ſuis quatuor ſatellitibus circà ſolem ceù centrum revolvitur in trajectoriâ quæ tellurem ambitu ſuo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur Jovis à tellure diſtantia, quæ, cæteris paribus, minima eſt, tellure ſolem inter & Jovem poſitâ, maxima verò, ſole inter Jovem & tellurem locato, atque harum diſtantiarum differentia orbis magni diametro, ſeu duplæ diſtantiæ ſolis à terrâ æqualis eſt. Si igitur lucis propagatio inſtantanea non eſt, ſed ſucceſſiva, & per orbis magni diametrum ſenſibili aliquo tempore diffundatur, neceſſe eſt ut ſatellitis Eccliplis, quæ contingit dum Jovis umbram ſubit, tardiùs à nobis videatur in majori illâ Jovis diſtantiâ, citiùs in minori, atque ità rem ſe habere Roemerus aliique deindè plures aſtronomi obſervarunt. Cæterum alii cauſæ præter ſucceſſivam lucis propagationem inæqualitatem illam ſatellitum tribuendam eſſe contendit Clariſſ. Maraldus in comm. Pariſ. 1707. quod etiam jam antea Magno Caſſino viſum fuerat. Sed Clariſſimus Granjean ejus argumentis reſpondet in comm. Pariſ. 1732. horum diſſertationes videſis.

DE MOTU CORPORUM.

porum vel opacorum vel perſpicuorum angulos (quales ſunt nummorum ex auro, argento & ære cuſorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quaſi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in tranſitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, (x) quaſi magis attracti, ut ipſe etiam diligenter obſervavi. Et qui tranſeunt ad majores diſtantias minus incurvantur; & ad diſtantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum faſcias efformant. In figura deſignat *s* aciem cultri vel cunei cujuſvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* ſunt radii, arcubus *owo*, *mtm*, *lsl* verſus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro diſtantia eorum à cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par eſt ratio incidentium in vitrum. (z) Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, ſed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam



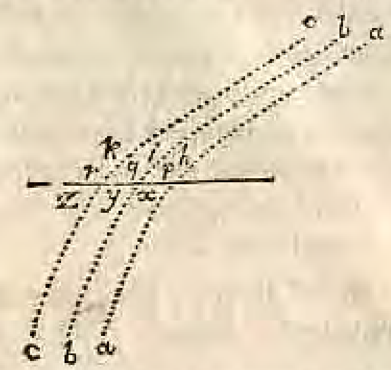
(x) * *Quaſi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in Newtoni optica initio lib. 3. & quæſt. 29.

(z) * *Fit igitur refractio & reflexio.* Vide Prop. 8. & 9. Partis 3æ. Lib. optices Newtoni. Sed ut res clarius intelligatur, ſint media duo contigua, A a b B, B b c C, planis parallelis terminata, & quorum talis ſit attractionis lex ut ultrà diſtantiam p R à medio alterutro evaneſcat ejus medii attractio. Itaque centro p & radio pR (fig. 1.) deſcribatur circulus vel potiùs ſphæra RZVX quæ planum B b non attingat, corpus p verſus omnia hujus ſphæræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, ſed manebit in lineâ rectâ G C, ſecundum quam moveri ſupponitur. Si in eâdem rectâ G C, capiatur punctum C, à plano B b remotum diſtantiâ C V = P R, ſitque vis attractiva verſùs medium B b c C, major vi attractivâ medii A a b B, in eo ipſo loco c corpus a rectâ viâ G c deflectere curvamque lineam deſcribere incipiet. Perveniat (2°.) corpus ex C in e, per curvam c e, & ductâ H M ad plana A a, B b perpendiculari, ac per punctum e, rectâ e T, quæ curvam c e tangat in e, & perpendiculo H M occurrat in T, erit angulus e T c minor angulo incidentiæ G H M; nam cum ſegmentum K V L, in hemiſphærio XVZ magis trahat verſùs planum B b, quam ſegmentum ipſi æquale in hemiſphærio XRZ, (ex hyp.) verſùs planum A a, manifeſtum eſt curvam deorſum inflecti, ideóque tangentem e T à radio inciden-

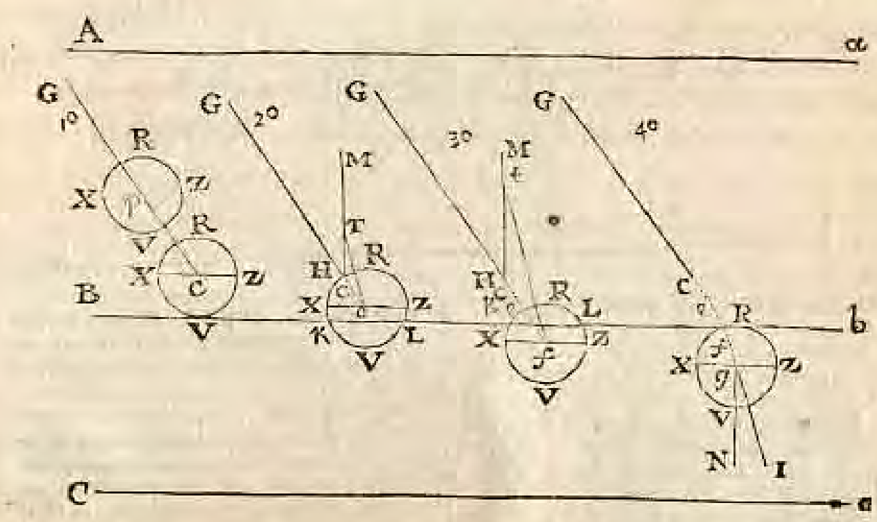
tæ

LIBER PRIMUS. PROP. XCVI. THEOR. L.

factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, poſtquam illud ingreſſi ſunt: uti in radiis *ckzc*, *biyb*, *ahxa* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x*, incurvatis, delineatum eſt. Igitur ob analogiam quæ eſt inter propagationem radiorum lucis & progreſſum corporum, viſum eſt propoſitiones ſequentes in uſus opticos ſubjungere; interea de naturâ radiorum (utrum ſint corpora necne) nihil omnino diſputans, ſed trajectorias corporum trajectoriis radiorum perſimiles ſolummodo determinans.



PRO-



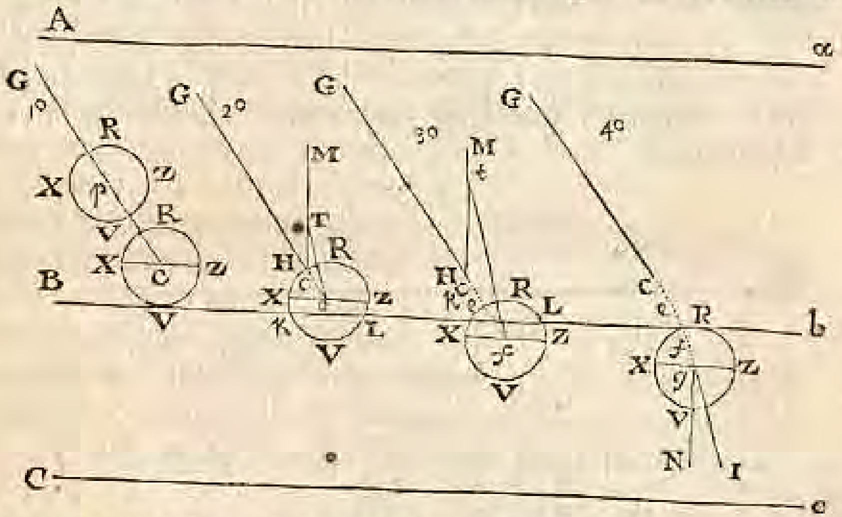
te G C, verſùs ſuperiora M recedere. Similiter ubi corpuſculum C eſt in f (3°.) intrà medium B b c C, magis trahitur verſùs planum C c, ab hemiſpherio X V Z, quam retrahitur verſùs planum B b, ab altero hemiſpherio XRZ, cujus ſegmentum kRL, minus trahit, quam æquale ſegmentum in hemiſpherio X V Z; quarè angulus H t f, quem tangens f t cum perpendiculo H M efficit, adhuc minor eſt quam angulus H T e (2°). Sed cum tandem corpuſculum c pervenit in g (4°), locum à plano B b remotum diſtantiâ maximâ g R = p R, tum corpus p, æqualiter undique attractum (ex hypotheſi) ſemitam non ampliùs mutat, ſed rectâ movetur per

g I.

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

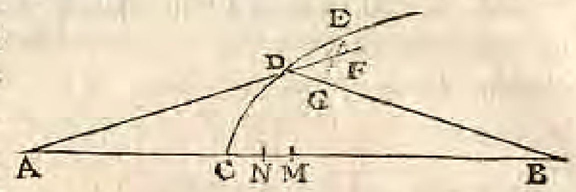
Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit *A* locus à quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB*



gI, quæ curvam cefg tangit in g, estque angulus NgI, quem gI cum gN ad Bb perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo Htf (3°). Oppositum eveniet, si medium BbcC, minùs trahat quam medium AabB, & refractio in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractio & reflexio non in puncto incidentiæ R (4°). Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut Newtonus docet. Quod si itaque certissimis experimentis constet radios lucis à corporibus quasi attrahi in minimis distantiis, Newtonus veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis resiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, obliquè penetrantes refrangantur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, ità ut sinus incidentiæ & emergentiæ datam servent rationem. Satis enim liquet plana linearum GHI & GHRh, in superioribus propositionibus, perpendicularia esse ad plana Aa, Bb; ut planum parabolæ quam gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendiculare est ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsûs radiorum lucis in corpora: alia quæstio est quam hic agitare minimè necesse est, quâque sepositâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonstratione, ostensa est reflexionis & refractionis lex & causa; quem-

revoluta describit superficiem quæsitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF*, quâ *AD* augetur, ad lineam *DG*, quâ *DB* diminuitur, (y) ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur ipsius *AC* incrementum *CM* ad ipsius *BC* decrementum *CN* in datâ illâ ratione, centrisque *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* describantur circuli duo se mutuo secantes in *D*; (z) punctum illud *D* tanget curvam quæsitam *CDE*, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*



Corol. 1 Faciendo autem ut punctum *A* vel *B*, nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*,

quemadmodum semel cognitis (per experientiam) gravitate atque elaterio aëris, rectè quis ascensus & descensus liquorum in tubis vacuis causam atque legem demonstrasse censetur, dum ex iis aëris proprietatibus quarum causas ignorat, hæc phænomena accurate deduxit. Nam juxta rectam philosophandi rationem, in naturæ phænomena primum debemus diligenter inquirere, ut posteà motus corporum eorumque leges & causas accuratiùs investigare & cognoscere possimus. Cæterum in phænomena reflexionis ac refractionis lucis eorumque causas inquisierunt philosophi ac Mathematici celeberrimi, Cartesius cap. 2°. dioptrices per leges generales resolutionemque motuum, & supponendo lumini minorem resistentiam in densioribus quam in rarioribus mediis objici; Leibnitzius in Actis eruditorum Lipsiensibus an. 1682. pag. 185 hâc factâ hypothesi, quod lumen à puncto radiante ad punctum illustrandum viâ omnium facillimâ perveniat, quâ etiam usus erat anteà Fermatius; Hugenius in tractatu de lumine per naturam undulationis luminis rem totam explicat, & Joannes Bernoullius in Actis Lips. an. 1701. ex æquilibrii fundamento eam ingeniosissime deduxit.

(y) * *Ratio ultima erit eadem.* Nam lineolâ DE pro radio seu sinu toto usurpatâ, lineolæ DF, DG sunt sinus angulorum DEF, DEG; sed angulus DEF est complementum ad rectum anguli EDF, seu ADC, ideoque æqualis est angulo incidentiæ, & angulus DEG est complementum ad rectum anguli EDG, ideoque æqualis est angulo emergentiæ (558). Ergò lineæ DF ad lineam DG ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, ideóque data. Et hinc (per cor. Lem. 4.) datur ratio incrementi totius finiti lineæ AD, ad decrementum totum finitum lineæ DB.

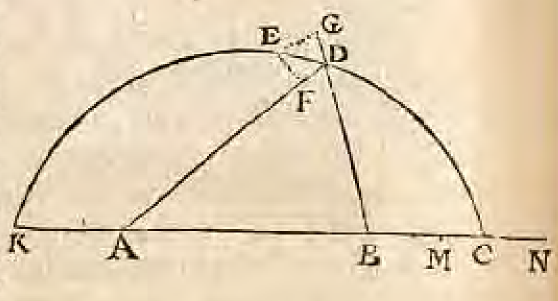
(z) * *Punctum illud* D. Atque eodem modo, assumendo varia incrementa CM, & decrementa CN, puncta diversa lineæ CDE determinabuntur. Si verò centro B & radio quovis describatur circulus, curvam CE secans in E, & lineam AB in-

(b) habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Cartesius* in optica & geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* celaverit, visum fuit hâc propositione exponere.

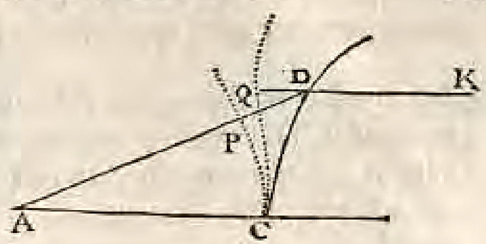
Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis CD, secundum lineam rectam AD, lege quâvis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam DK, & à puncto C duci intel-

in N, & indè convolutione superficiei CEN, circá axem CN solidum corpus conficiatur, corpusculum ex D, per lineam DB ad centrum B circuli descripti tendens, non refrangetur, dum ex superficie circulari concavâ EN egreditur, quod corpusculi directio DB, sit ad illam superficiem perpendicularis, atque ita corpusculum semper perveniet ad punctum B.

(b) * *Habebuntur figuræ illæ omnes.* Quas enim lineas Cartesius Geometriæ lib. 2°. Pag. 50. & seq. dicit A5, A6, vel A7., A8, eas Newtonus hic vocat CM, CN, & de cætero eadem est utriusque authoris constructio. Undè manifestum est, si punctum C, inter puncta A & B, & punctum N inter C & M, sita sint, primam Cartesii ovalem Newtonianâ constructione describi; si manentibus punctis A, C, B, M. punctum N, inter C & A locetur, 2^{am}. ovalem Cartesianam obtineri; si vero punctum B ad ad alteras partes puncti C migret ultrà A, & punctum C sit inter A & N, atque M, 3^{am}. Cartesii ovalem haberi, iisdemque positis; si punctum N sit inter C, & A, 4^{am}. ovalem Cartesii delineari. Porrò, si punctum A vel B in infinitum abeat ut radii incidant vel refringantur paralleli, tum per punctum M vel N erigendum erit perpendiculum, quod circulus centro B vel A, & radio BN, vel AM; descriptus secabit in puncto quæsito D, curvæ CDE, quæ erit ellipsis vel hyperbola, ut calculo inito facilè patet, atque hæ sunt figuræ quibus Cartesius cap. 8°. dioptrices usus est.

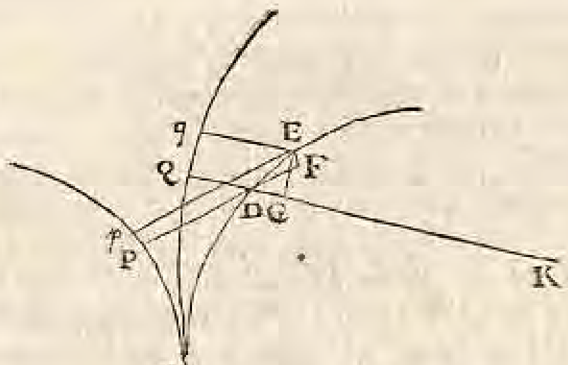


Eadem est demonstratio, si superficies CDE incidentes radios reflectit, quo casu fit CN = CM, ob angulum incidentiæ æqualem angulo emernentiæ (per prop. 96.) & curva CDE erit sectio conica, videlicet hyperbola, si punctum C inter A & B situm; ellipsis, si extrà positum sit; Parabola, si ellipscos focus B in infinitum abeat, & circulus, si puncta A & B coeant. Nam si punctum C inter A & B situm sit, & N inter A & C, cum sit AD = AM, & BD = BN (per constr.) rectarum AD, BD differentia data erit, ut potè æqualis $AM - BN = AC + CM - BC - CN = AC - BC$, ob $CM = CN$, ideòque curva CDE erit hyperbola cujus foci A & B, (per theor. 3. de hyperbolâ). Si punctum C inter puncta A & B positum non est, ut in hâc figurâ, rectarum AD, BD summa data erit, in hoc enim casu punctum C, est inter N, & M, atque $AD + BD = AC - CM + BC + CN = AC + BC$. Est igitur CDE ellipsis cujus foci A & B, (Theor. 3. de Ellipsi) quæque foco alterutro in infinitum abeunte mutatur in parabolam & focis coeuntibus mutatur in circulum.



telligantur lineæ curvæ CP, CQ ipsis AD, DK semper perpendiculares: (c) erunt incrementa linearum PD, QD, atque ideo lineæ ipsæ PD, QD, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.

PRO-



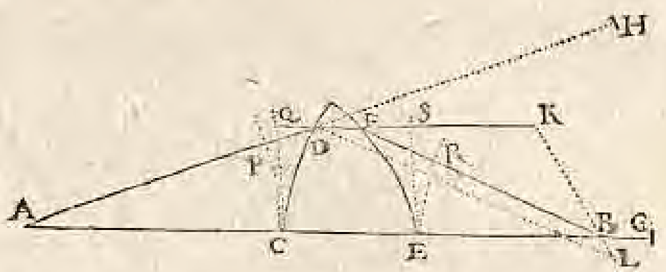
(c) 561. * *Erunt incrementa &c.* Nam si capiatur arcus quam minimus DE, atque ex puncto E in curvas CP, CQ, & in rectas PD, QK, demittantur perpendicula Ep, Eq & EF, EG, coeuntibus punctis E & D, erunt EF, Pp & EG, Qq sibi mutuò parallelæ, & proindè PF, pE & QG, qE, æquales, ideóque DF & DG erunt rectarum PD, QD incrementa nascentia. Sed, (ex demonstratis suprà) DF est ad DG, ut sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, quarè incrementa linearum PD, QD, atque adeò (cor. Lem. 4.) lineæ ipsæ PD, QD, (quæ simul nascuntur in puncto C) incrementis illis genitæ, erunt ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem, & contrà, si lineæ PD, QD curvis CP, CQ perpendiculares sint ut sinus incidentiæ & emergentiæ, erunt earum incrementa nascentia in eâdem semper ratione, ac proinde si corpus in superficiem CD secundum lineam PD incidat, emerget secundum lineam QD seu DK.

DE MOTU CORPORUM.

PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem AB *descriptâ superficie quâcunque attractivâ* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta AB secet superficiem primam in C & secundam in E, puncto D utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eâdem, & (d) sinu emergentiæ è superficie secundâ ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: pro-



duc tum AB ad G, ut sit BG ad CE ut M−N ad N; tum AD ad H, ut sit AH æqualis AG; tum etiam DF ad K, ut sit DK ad DH ut N ad M. Junge KB, & centro D intervallo DH describe circulum occurrentem KB productæ in L, ipsique DL parallelam age BF: & punctum F tanget lineam EF, quæ circa axem AB revoluta describet superficiem quæsitam. *Q. E. F.*

Nam

(d) * *Et sinu emergentiæ è superficie secunda &c.* Est enim sinus emergentiæ e superficie secunda EF, ad sinum incidentiæ in eamdem, ut sinus incidentiæ in superficiem primam C D, ad sinum emergentiæ ex eâdem. Nam si radius incidens A D refrangitur per D F, ob eandem rationem radius F D, incidens in D refrangetur per D A, & qui sinus erat incidentiæ in primo casu, fit sinus emergentiæ in secundo.

LIBER PRIMUS. PROP. XCVIII. PROBL. XLVIII.

Nam concipe Lineas CP, CQ ipsis AD, DF respectivè, & Lineas ER, ES ipsis FB, FD ubique perpendiculares esse, (e) ideoque QS ipsi CE semper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) PD ad QD ut M ad N, (f) ideoque ut DL ad DK vel (g) FB ad FK; & (h) divisim ut $DL - FB$ seu $PH - PD - FB$ ad FD seu $FQ - QD$; & compositè ut $PH - FB$ ad FQ, id est (ob (i) æquales PH & CG, QS & CE) $CE + BG - FR$ ad $CE - FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & M−N ad N) est etiam $CE + BG$ ad CE ut M ad N: (k) ideoque divisim FR ad FS ut M ad N, & propterea per Corol. 2. Prop. XCVII, superficies EF cogit corpus, in ipsam secundum lineam DF incidens, pergere in linea FR ad locum B. *Q. E. D.*

Scholium. Eâdem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphæricè figuratis & Aquam inter se claudentibus conflentur; fieri potest ut à refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accuratè corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diver-

(e) * *Ideòque QS ipsi CE semper æqualem.* Cum enim linea Q S, sit semper perpendicularis utrique lineæ CQ, ES (ex Hyp.) ea nec crescit, nec decrescit, ob partes curvarum in Q & S semper parallelas, ut patet.

(f) * *Ideoque ut DL ad DK.* Est enim (per constr.) DK ad DH, ut N ad M, & DL = DH, per const.

(g) * *Vel FB ad FK.* Ob parallelas DL, FB (per constr.)

(h) * *Et divisim.* Cum sit PD : QD = DH : DK = FB : FK, erit divisim DH : DK, seu PD : QD = DH − FB : DK − FK = PH − PD − FB : DF, seu QF − QD, & compositè PD : QD = PH − PD + PD − FB, seu PH − FB : QF − QD + QD, seu QF = M : N.

(i) * *Ob æquales PH & CG.* Nam (per constr.) AH = AG, & quoniam punctum A datum est, estque AP semper perpendicularis ad curvam CP, liquet eam curvam esse circulum cujus centrum A, undè AP = AC, & hinc PH = CG; & simili modo patet esse BR = BE, ob datum punctum B.

(k) * *Ideoque divisim &c.* Nam cum sit (ex demonstratis) M : N = CE + BG − FR : CE − FS = CE + BG : CE, erit divisim M : N = FR : FS.

DE MOTU CORPORUM.

diversa diversorum radiorum Refrangibilitas impedimento est, quò minus Optica per figuras vel Sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis (l) imperitè collocabitur.

(l) * *Imperitè collocabitur.* Vide primam partem Lib. 1. Optices Newtonianæ ubi egregiis experimentis auctor demonstravit radios diversi coloris esse etiam diversè refrangibiles; unde fit ut focus Lentis objectivæ Telescopiorum (in quo fit objectorum imago quæ trans vitrum oculare spectatur) non sit unicus, sed focus radiorum violaceorum remotissimus sit ab oculari, focus radiorum rubrorum sit proximus, radii ergo ex illis variis imaginibus procedentes inæqualiter colliguntur à vitro oculari, nisi ejus focus adeo remotus sit ut intervallum inter diversas illas imagines ejus respectu evanescat, sed manente Lente objectivâ, aucto foco Lentis ocularis diminuitur in eâdem ratione amplificatio objecti; sic ergo quantumvis accurate colligerentur radii per objectivæ Lentis figuram, hæc focorum multiplicitas neutiquam corrigetur nisi dispendio amplificationis objecti: Hæc Theoria Newtonum ad inventionem Telescopiorum Catoptricorum deduxit, quæ Prop. 7. & 8. Lib. 1. Optices ab ipso explicantur, & quæ cum levi mutatione in usum communissimum venére.

FINIS TOMI PRIMI.

PHILO
NATURA

TOM I