TRATADO ELEMENTAL

DE

TOPOGRAFÍA, GEODESIA

Y ASTRONOMÍA PRÁCTICA

POR

FRANCISCO DÍAZ COVARRUBIAS

Ingeniero Geógrafo.
Miembro de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística,
de la Astronomische Gesellschaft de Alemania.
Miembro corresponsal de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Antiguo Ministro
plenipotenciario de México en la América Central. Delegado de México
al Congreso Internacional
de las Unidades Eléctricas en París, etc., etc.

(Esta obra es la adoptada como texto en los Colegios de la República Mexicana,
y fué premiada en la Exposición de Filadelfia en 1876)

TERCERA EDIION.

TOMO II.

GEODESIA Y ASTRONOMIA.

MÉXICO

OFICINA TIPOGRÁFICA DE LA SECRETARÍA DE FOMENTO.
Calle de San Andrés núm. 15. (Avenida Oriente 51.)

1899

INTRODUCCIÓN.

1.—La Geodesia es la ciencia que comprende todos los procedimientos aplicables á la determinación de la figura y dimensiones de la tierra.

Considerada en su conjunto, su estudio es uno de los más vastos, necesitando el auxilio, no sólo de las partes más elevadas de la matemática, sino el de varios ramos de las ciencias físicas. La Geodesia, en efecto, unida á la Astronomía, da los medios de medir y configurar las grandes divisiones naturales del globo terrestre, como los continentes y los mares; determina la forma, magnitud y dirección de las cordilleras; traza el curso de los ríos; establece los límites convencionales de los Estados; y construye, por último, *proyecciones* ó cartas geográficas, que presentan á la vista, en reducida escala, toda la tierra, ó una extensión cualquiera de su superficie. Enriquecida con sus descubrimientos, acompaña otras veces á la Geología y á la Física en sus investigaciones respecto de la estructura y estado actual del interior de nuestro planeta; y aun se atreve á acercarse con ellas al origen de los tiempos, estableciendo hipótesis fundadas respecto de la forma, naturaleza y estado que debió presentar la tierra mucho antes de que apareciera en ella el hombre y todos los demás séres que hoy la habitan.

El plan que me propuse en la redacción de este libro no me permite tratar de la Geodesia con toda la amplitud que brevemente se ha bosquejado; pero procuraré desarrollar con suficiente extensión aquellas partes de la ciencia que tienen aplicaciones más frecuentes y mayor utilidad desde el punto de vista práctico, objetos que constituyen el fin principal hacia el cual se dirigen mis esfuerzos.

Con esta mira, y sin descuidar por eso la exposición de ninguno de los procedimientos importantes de la Geodesia propiamente dicha, he dado una extensión comparativamente considerable á los de la Astronomía práctica. Los métodos que proporciona esta última ciencia pueden, en efecto, reemplazar en muchos casos á los de la primera, considerados unos y otros como medios de adquirir los datos necesarios para el levantamiento de las cartas geográficas; y acaso la Astronomía es, por lo general, más fácilmente aplicable que la Geodesia á la adquisición de tales elementos.

No debe olvidarse que escribo un libro para la América, cuyas condiciones de inmensos territorios y escasa población me han puesto en el deber de ensanchar, por una parte, los límites de la Topografía á expensas de la Geodesia; y por otra, en el de dar una importancia especial á las aplicaciones que la Geografía encuentra en la ciencia de los astros, y que son las que le constituyen quizá su más sólido fundamento.

PARTE PRIMERA.

GEODESIA PRÁCTICA.

CAPITULO I.

ELIPSOIDE TERRESTRE Y EXPRESIONES ANALÍTICAS DE SUS PARTES ELEMENTALES.

2.—Al considerar la figura general del globo terrestre es preciso prescindir por lo pronto de las desigualdades de su superficie, que casi desaparecen ante la magnitud de sus dimensiones, puesto que las montañas más elevadas del mundo apenas llegan á la milésima parte del radio del globo, y son comparativamente mucho menos perceptibles que las leves rugosidades que presenta la superficie de una naranja. Conviene, pues, suponer que la tierra está terminada por una superficie unida é igual, tal como la que ofrecen las aguas del Océano en su estado de reposo, prolongándola con la imaginación en todas direcciones por encima ó por debajo de los continentes con la misma ley de curvatura que el conjunto del globo. En este sentido es como debe entenderse todo lo que se diga respecto de la magntud y forma asignadas á la tierra; pues si bien la realidad es ciertamente contraria á esta suposición, la ciencia tiene medios, que conoceremos en lo sucesivo, para hacer concordar la teoría establecida con los hechos tales cuales son, en aquellos casos en que la exactitud de un resultado pudiera quedar menoscabada en virtud de la hipótesis de una superficie uniforme, que tanto contribuye á facilitar la resolución de los problemas geodésicos.

Consideraciones puramente teóricas y fundadas con especialidad en la rotación diurna de la tierra al derredor de su eje polar, habían inducido ya á los geómetras á admitir que este planeta no debería ser exactamente esférico, sino ligeramente comprimido en los polos y ensanchado hacia las regiones ecuatoriales. Los trabajos geodésicos practicados hasta el presente por los geógrafos confirman experimentalmente este resultado de la teoría, dando á conocer que el globo terrestre es un cuerpo esferoidal algo irregular, pero cuya forma *se confunde sensiblemente con la de un elipsoide de revolución al derredor de su eje menor.* Sin perjuicio de consagrar más adelante una parte de esta obra á la exposición de los procedimientos por cuyo medio se ha podido llegar á esta conclusión, partiremos de la figura elipsoidal admitida, para establecer los cálculos relativos á las dimensiones del globo.

3.—Supuesto lo anterior, toda sección hecha en la tierra por un

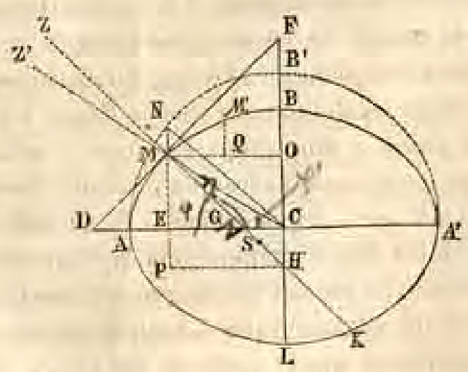


FIG. 1ª

plano que pase por sus polos B y L (fig. 1ª), da por resultado la elipse generatriz $BALK$, cuyo plano no es más que el de un meridiano

terrestre; y las secciones hechas perpendicularmente al eje polar son círculos llamados *paralelos.* El mayor de estos círculos es el *ecuador,* cuyo radio es el semieje mayor CA de la elipse generatriz. Todas las demás secciones que pueden imaginarse oblicua ó paralelamente al semieje menor CB, producen elipses más ó menos excéntricas.

Los valores absolutos de los semiejes fueron calculados por el astrónomo Bessel valiéndose de las medidas dignas de más confianza, y obtuvo los resultados siguientes:

Radio ecuatorial $CA = a =$ 6377397 metros. — 6 378 206 } Clarke
Radio polar...... $CB = b =$ 6356079 " 6 356 584
21318 a-b=21622, c = 1/295

El conocimiento de los ejes basta para caracterizar perfectamente á la elipse generatriz; pero lo mismo puede conseguirse por medio de uno solo de los ejes y la relación que existe entre ambos, lo que á veces produce más sencillez en los cálculos. Vamos á establecer esta relación.

Se llama *aplanamiento ó compresión polar* á la diferencia de los semiejes referida al semieje mayor como unidad. Designando por α el aplanamiento, se tendrá, pues:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \quad \text{.........................} \quad (1)$$

y si en esta expresión sustituimos los valores de a y b, obtendremos:

$$\alpha = 0.0033427 = \frac{1}{299.2} \text{ próximamente.}$$ $\frac{1}{295}$ Clarke

Se llama *excentricidad* á la distancia del centro de la elipse á uno de los focos, tomando también por unidad el semieje mayor, de lo que se deduce:

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad \text{ó bien} \quad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} \quad \text{.........} \quad (2)$$

Sustituyendo los valores precedentes se obtiene $e^2 = 0.0066743$.

Antes de pasar adelante notemos la pequeña diferencia que hay de la forma real de la tierra á la de una esfera. En efecto, por el valor del aplanamiento se ve que éste no es más que de 21 kilómetros, que equivalen á cosa de 5 leguas mexicanas; mientras que el radio medio de la tierra pasa de 6300 kilómetros, ó de 1500 leguas mexicanas. De aquí se infiere que en muchos casos puede suponerse esférica la tierra sin error de importancia.

Cualquiera de las expresiones (1) y (2) nos permitirá eliminar de los cálculos á uno de los ejes, reemplazándolo por la compresión polar ó por la excentricidad, pues de la primera se deduce:

$$b^2 = a^2 (1 - \alpha)^2$$

y de la segunda:

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Nótese de paso que si se elimina á b^2 entre estas dos ecuaciones, y se desarrolla la resultante, se encontrará la siguiente relación entre la excentricidad y el aplanamiento:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$

y puesto que α es una pequeña fracción, su cuadrado podrá casi siempre despreciarse, lo que equivale á decir que *el cuadrado de la excentricidad es próximamente igual al doble de la compresión.*

4.—Si en la ecuación general de la elipse $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ se introduce el valor (3), se tendrá la ecuación del meridiano terrestre en función de las constantes a y e^2, á saber:

$$y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Vamos ahora á expresar las coordenadas rectangulares x é y de un punto M de la superficie de la tierra en función de los elementos que pueden fijar su posición sobre el meridiano. Si por M se levanta una perpendicular á la tangente FD se tendrá la línea vertical HZ del punto M. Esta línea prolongada encuentra la esfera celeste en un punto Z, que es el *zenit geográfico ó astronómico* de M, y la prolongación del radio central CM marca el *zenit geocéntrico* Z'. El ángulo MGA formado por la normal MG con el ecuador, se llama *latitud geográfica*; y el ángulo MCA formado por el radio con el mismo plano del ecuador, se llama *latitud geocéntrica* de M.

Las observaciones astronómicas que se practican con el objeto de caracterizar la posición de un lugar sobre su meridiano, suministran directamente la latitud geográfica; de suerte que este elemento es el que introduciremos en los cálculos, pues una vez obtenido por medio de la observación directa, servirá como argumento para determinar todos los datos geodésicos correspondientes á ese punto. Designemos por φ la latitud geográfica de M, por φ' su latitud geocéntrica y por R el radio central CM. Llamemos además N la *normal mayor* de M, que es la parte MH de su vertical comprendida desde la superficie de la tierra hasta el eje polar, y n la *normal menor* MG terminada en el ecuador. Con estas anotaciones los triángulos MHP y MGE dan respectivamente, teniendo presente que $HP = CE = x$ y que $ME = y$:

$$\left.\begin{array}{l} x = N \cos\varphi \\ y = n \operatorname{sen}\varphi \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

También del triángulo MCE resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x = R \cos\varphi' \\ y = R \operatorname{sen}\varphi' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Con el objeto de calcular las normales N y n busquemos otro sistema de valores de x é y, que puede hallarse por las consideraciones siguientes. Si el arco AM del meridiano crece una cantidad infinitamente pequeña, MM', la ordenada recibirá un incremento $\mathrm{d}y$, la abscisa un decremento $\mathrm{d}x$, y en el triángulo infinitesimal $MM'Q$ rectángulo en Q, el ángulo M' es igual á φ, por lo cual se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\tan\varphi$$

Diferenciando ahora la ecuación (4) del meridiano, tendremos:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{y}{(1 - e^2)\,x}$$

de donde resulta: $y = (1 - e^2)\,x \tan\varphi$.

expresada en las mismas unidades que ρ. Calculemos, por ejemplo, el tamaño de un grado del meridiano á la latitud $19^\circ\ 26'\ 12''.3$ de la Escuela de Ingenieros de México.

ρ	6.8022169	
$3600''$	3.5563025	
sen. $1''$	4.6855749	
ds	5.0440943	.... $\mathrm{d}s = 110686^{m}.4$

Si esta cantidad se divide por 60, se tendrá $1844^{m}.77$ por extensión de $1'$, esto es, por la distancia entre dos puntos del meridiano de México cuyas verticales formen un ángulo de $1'$. De una manera semejante se encontraría que $1''$ vale $30^{m}.746$.

Basta la consideración de que es elíptico el meridiano terrestre para comprender que los arcos de igual amplitud deben tener extensiones variables á diversas latitudes. Para obtener la ley de esta variación sustituyamos en la ecuación (19) el valor de r, y elevemos su denominador al numerador, de lo que resulta desarrollando.

$$\mathrm{d}s = a(1-e^2)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\varphi + \frac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\varphi + \frac{35}{16}e^6\,\text{sen.}^6\varphi + \ldots\ldots\right)\mathrm{d}\varphi$$

Para $\varphi = O$ se tiene en el ecuador $\mathrm{d}s_o = a(1-e^2)\,\mathrm{d}\varphi$. Sustituyendo en la anterior y no apreciando más que hasta la segunda potencia de e, resultará:

$$\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_o = \frac{3}{2}\,\mathrm{d}s_o\, e^2\,\text{sen.}^2\,\varphi$$

Para una amplitud dada dφ, la extensión ds_o es constante, y por tanto, lo será el coeficiente de sen.$^2\,\varphi$. Representándolo por C tendremos:

$$\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_o = C\,\text{sen.}^2\,\varphi$$

resultado que indica que *el incremento de los arcos de igual amplitud en el meridiano, es proporcional al cuadrado del seno de la latitud á que se consideran.*

13.—La fórmula (19) permite calcular con bastante exactitud la extensión de los arcos del meridiano cuando son pequeños, esto es, cuando no exceden de dos ó tres grados; pero pasando de esa amplitud ya no sería exacto calcularlos por medio de una expresión diferencial, sino que será preciso hacer antes la integración de ésta. Para conseguirlo, desarrollémosla en serie para obtener:

$$s = a(1-e^2)\int\left(1 + \frac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\varphi + \frac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\varphi + \frac{35}{16}e^6\,\text{sen.}^6\varphi + \ldots.\right)\mathrm{d}\varphi$$

Se tiene, por otra parte:

$$\text{sen.}^2\,\varphi = \frac{1}{2}\,(1 - \cos.\,2\,\varphi)$$

$$\text{sen.}^4\,\varphi = \frac{1}{8}\,(3 - 4\cos.\,2\,\varphi + \cos.\,4\,\varphi)$$

$$\text{sen.}^6\,\varphi = \frac{1}{32}\,(10 - 15\cos.\,2\,\varphi + 6\cos.\,4\,\varphi - \cos.\,6\,\varphi)$$

Sustituyendo estos valores, y haciendo para abreviar:

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \ldots\ldots\ldots \qquad \text{Log. } A = 0.00218214$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \ldots\ldots\ldots \qquad ,,\ B = 7.7031107$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \ldots\ldots\ldots \qquad ,,\ C = 5.023664$$

$$D = \frac{35}{512}e^6 + \ldots\ldots\ldots \qquad ,,\ D = 2.30802$$

la serie anterior se representará así:

$$s = a(1-e^2)\int(A - B\cos.\,2\,\varphi + C\cos.\,4\,\varphi - D\cos.\,6\,\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi$$

y efectuando la integración, resulta:

$$s = a(1-e^2)\left(A\,\varphi - \frac{1}{2}\,B\,\text{sen.}\,2\,\varphi + \frac{1}{4}\,C\,\text{sen.}\,4\,\varphi - \frac{1}{6}\,D\,\text{sen.}\,6\,\varphi\right)\ldots..\ (20)$$

En esta fórmula el primer término del tercer factor contiene el arco φ contado desde el ecuador, y expresado en partes del radio trigonométrico; pero puede expresarse en segundos multiplicándolo por sen. 1″.

Para hallar la distancia entre dos puntos situados en el mismo meridiano, puede calcularse la de cada uno al ecuador por la ecuación precedente, y su diferencia será la distancia que se busca; pero es más breve determinarla directamente de este modo. Si es φ' la latitud del otro punto, se obtendrá por la fórmula la distancia s', que restada de s, produce:

$$s-s'=a(1-e^2)\begin{pmatrix} A(\varphi-\varphi')-B\,\text{sen.}\,(\varphi-\varphi')\cos.\,(\varphi+\varphi') \\ +\frac{1}{2}C\,\text{sen.}\,2(\varphi-\varphi')\cos.\,2(\varphi+\varphi')-\frac{1}{3}D\,\text{sen.}\,3(\varphi-\varphi')\cos.\,3(\varphi+\varphi') \end{pmatrix}$$

ó bien designando por g la diferencia de latitudes, esto es: $g=\varphi-\varphi'$, se obtiene:

$$s-s'=a(1-e^2)\begin{pmatrix} Ag-B\,\text{sen.}\,g\cos.\,(2\varphi-g) \\ +\frac{1}{2}C\,\text{sen.}\,2g\cos.\,2(2\varphi-g)-\frac{1}{3}D\,\text{sen.}\,3g\cos.\,3(3\varphi-g) \end{pmatrix}\cdot(21)$$

Calculemos, por ejemplo, el arco de meridiano comprendido entre los paralelos de 15° y 33° de latitud. Se tendrá: $\varphi-\varphi'=18°$ y $\varphi+\varphi'=48°$.

a	6.8046435						
$1-e^2$ ..	9.9970917						
				0.5	9.69897	0.3	9.4771
	6.8017352	....	6.8017352	....	6.80174	....	6.8017
A	0.0021821	B	7.7031107	C	5.02366	D	2.3080
64800″	4.8115750	sen. 18°	9.4899824	sen. 36°.	9.76922	sen. 54°	9.9080
sen. 1″	4.6855749	cos. 48°	9.8255109	cos. 96°.	9.01923−	cos. 144° ...	9.9080
	6.3010672		3.8203392		0.31282−		8.4028

Primer término	2000171.ᵐ4
Segundo „	−6612. 1
Tercero „	− 2. 1
Cuarto „	0. 0
$s-s'=$	1993557.ᵐ2

Cuando $\varphi=90°$, la fórmula (20) suministra el cuadrante del meridiano, siendo igual á $\frac{1}{2}\pi$ el arco φ en partes del radio, y se tiene:

$$\text{Cuadrante}=s=\frac{1}{2}a(1-e^2)\pi A \quad \text{.... ....} \quad (22)$$

ó bien introduciendo el valor de A y desarrollando, resulta la serie:

$$\text{Cuadrante}=s=\frac{1}{2}a\pi\left(1-\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{64}e^4-\frac{5}{256}e^6-\ldots\right)\ldots(23)$$

Hagamos la aplicación de estas fórmulas:

$\frac{1}{2}$	9.6989700
a	6.8046435
π	0.4971499
$1-e^2$	9.9970917
A	0,0021821
s	7.0000372 ...... Cuadrante = 10000857.ᵐ1 (1)

El mismo resultado se obtiene por el cálculo de la serie (23), según se ve á continuación:

	$\frac{1}{4}$	9.3979400	$\frac{3}{64}$	8.67094	$\frac{5}{256}$	8.2907
	e^2	7.8244057	e^4	5.64881	e^6	3.4732
$\frac{1}{2}a\pi=7.0007634$	....	7.0007634	....	7.00076	....	7.0008
		4.2231091		1.32051		8.7647

Primer término	10017593.ᵐ3
Segundo „	−16715. 1
Tercer „	− 20. 9
Cuarto „	− 0. 1
Cuadrante =	10000857.ᵐ1

1 Cuando en 1799 se adoptó en Francia el sistema decimal de medidas, se tomó por base el resultado de las operaciones ejecutadas para medir el arco del meridiano que pasa por Paris, estableciéndose en la ley que el *metro* representaba la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre; pero posteriormente se halló un error en los cálculos de Delambre, cuyo efecto fué el de haberse asignado al *metro legal* una extensión un poco menor de la que realmente le correspondía sin la existencia de ese error. Como se ve, el conjunto de las medidas modernas da 857ᵐ de más en la extensión del cuadrante, de modo que el metro *real ó físico* es casi 0ᵐ.0001 mayor que el legal.

14.—Arcos de paralelo.—Según la generación del elipsoide, cualquier punto M de la elipse generatriz describe un círculo que se llama *paralelo* al ecuador, por la posición que tiene realmente respecto de ese plano, siendo $MO = x$ su radio. Por consiguiente, un arco de g grados tendrá una extensión p, que puede calcularse por la fórmula:

$$p = \frac{\pi}{180^\circ}\, g\, N \cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

La cantidad $\frac{\pi}{180^\circ}$ expresa el arco 1° en partes del radio, cuyo logaritmo constante, introducido en la ecuación anterior, la reduce á la siguiente:

$$p = (8.2418774)\, g\, N \cos.\ \varphi$$

Determinemos la extensión en metros de un grado en el paralelo de México. En este caso se tiene $g = 1^\circ$, y $\varphi = 19^\circ\, 26'\, 12''.3$.

Const.	8.2418774
N	6.8048041
$\cos\varphi$	9.9745160
p	5.0211975

$p = 105002.^m0$

El arco de un minuto tendrá, pues, la extensión de $1750.^m03$, y el de un segundo la de $29.^m167$. Si $\varphi = 0^\circ$ y $g = 1^\circ$, resulta un grado del ecuador de $111306.^m6$, que equivale á 26.564821 leguas mexicanas.

15.—Intersecciones del elipsoide con planos verticales.—Todos los planos que contienen la línea vertical de un punto M (fig 2ª), se llaman planos verticales, y están caracterizados por la propiedad de ser perpendiculares al plano tangente en M, que se llama el *horizonte* de este punto. Entre todos los planos verticales hay uno cuyo azimut es de 90°, ó bien que forma un ángulo recto con el meridiano, y señala la posición de los puntos *Este* y *Oeste*.

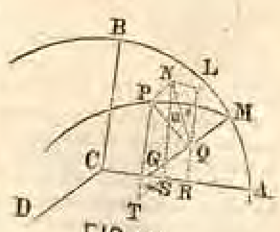


FIG 2A

Este plano es el que se designa con el nombre de *primer vertical*, según se ha dicho en la Topografía.

La intersección de cualquier plano vertical con la superficie de la tierra produce una elipse cuya ecuación vamos á determinar con el objeto de hallar su radio de curvatura en el punto M, por ser de uso frecuente en la Geodesia. Sea MP una parte de la sección originada por el plano vertical PMG, que forma con el meridiano un ángulo azimutal $BMP = u$. Tomando por planos coordenados el ecuador ACD, el meridiano ACB y otro meridiano BCD perpendicular á éste, adoptemos por eje de las x la línea CA, por eje de las y la CD, y finalmente la CB por eje de las z. Según esto, las coordenadas de un punto cualquiera P de la intersección serán: $x' = CS$, $y' = ST$ y $z' = TP$; y como P está situado en la superficie del elipsoide, sus coordenadas satisfarán la ecuación de éste, que es:

$$a^2 z'^2 + b^2(x'^2 + y'^2) = a^2 b^2$$

y que introduciendo el valor de b^2, puede ponerse bajo esta forma:

$$a^2 z'^2 + (1 - e^2)(x'^2 + y'^2) = a^2(1 - e^2)$$

Tomemos ahora en el plano de la curva la vertical GM por eje de ordenadas siendo G el origen, y designemos por x é y las coordenadas del mismo punto P referidas á este eje; á saber $y = GQ$, $x = QP$. Hallando los valores de x', y' y z' en función de x é y, y sustituyéndolos en la ecuación del elipsoide, determinaremos la de la curva. Para esto tracemos la línea PN perpendicular al meridiano, así como en este plano las líneas NL y LR, la primera paralela y la segunda perpendicular á CA. El plano PQN resultará perpendicular á GM, formando las líneas PQ y QN el ángulo PQN igual al azimut u de la sección. Igualmente la línea NQ, perpendicular á GM, formará con LR, perpendicular á CA, el ángulo

$$NQL = MGA = \varphi$$

De aquí se deducen los valores siguientes:

$$x' = CG + GR - NL \qquad y' = PN \qquad z' = RQ + QL$$

Y como además se tiene:

$$CG = \frac{a e^2 \cos. \varphi}{r}; \qquad NP = x \,\text{sen.}\, u;$$

$$GR = y \cos. \varphi; \qquad QR = y \,\text{sen.}\, \varphi;$$

$$NL = NQ \,\text{sen.}\, \varphi = x \cos. u \,\text{sen.}\, \varphi \qquad QL = NQ \cos. \varphi = x \cos. u \cos. \varphi$$

resultará sustituyendo:

$$x' = \frac{a e^2 \cos. \varphi}{r} + y \cos. \varphi - x \cos. u \,\text{sen.}\, \varphi$$

$$y' = x \,\text{sen.}\, u$$

$$z' = y \,\text{sen.}\, \varphi + x \cos. u \cos. \varphi$$

Introducidos estos valores en la ecuación del elipsoide, y haciendo para abreviar:

$$A = 1 - e^2 (1 - \cos.^2 u \cos.^2 \varphi) \qquad D = -\frac{a e^2 (1 - e^2) \cos. u \,\text{sen.}\, 2\varphi}{r}$$

$$B = 1 - e^2 \cos.^2 \varphi \qquad E = \frac{2 a e^2 (1 - e^2) \cos.^2 \varphi}{r}$$

$$C = e^2 \cos. u \,\text{sen.}\, 2\varphi \qquad F = \frac{a^2}{r^2} (1 - e^2)^2 (1 + e^2 \cos.^2 \varphi)$$

se obtendrá fácilmente la siguiente ecuación de la curva:

$$A x^2 + B y^2 + C x y + D x + E y = F$$

que es la de la elipse que resulta de la intersección de la tierra con el plano.

16.—Designando ahora por R_u el radio de curvatura para un punto de esta sección, se tiene:

$$R_u = -\frac{\left(1 + \frac{d y^2}{d x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$$

y diferenciando dos veces la ecuación anterior en el supuesto de ser dx constante, se obtendrá sucesivamente:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Ax + Cy + D}{2By + Cx + E}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{2A + 2B \frac{d y^2}{d x^2} + 2C \frac{dy}{dx}}{2By + Cx + E}$$

Sustituidos estos valores en la expresión de R_u, darán el radio de curvatura del punto cualquiera de la curva cuyas coordenadas sean x é y; pero como el que importa conocer es el correspondiente á M cuyas coordenadas son $x = 0$, $y = \frac{a(1-e^2)}{r}$, tendremos introduciendo estos valores y los de los coeficientes A B C, etc.:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{r[1 - e^2(1 - \cos.^2 u \cos.^2 \varphi)]}{a(1 - e^2)}$$

En consecuencia, el radio de curvatura en el punto M, es:

$$R_u = \frac{a(1 - e^2)}{r(1 - e^2 + e^2 \cos.^2 u \cos.^2 \varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Cuando u es igual á $0°$ ó á $180°$, esto es, cuando el plano secante se confunde con el meridiano, resulta:

$$R_0 = \frac{a(1 - e^2)}{r(1 - e^2 \,\text{sen.}^2 \varphi)} = \frac{a(1 - e^2)}{r^3}$$

que es en efecto el valor de ρ hallado para el radio de curvatura del meridiano. Si $u = 90°$, ó bien $u = 270°$, se obtiene:

$$R_{90} = \frac{a(1 - e^2)}{r(1 - e^2)} = \frac{a}{r} = N$$

luego *el radio de curvatura de una sección perpendicular al meridiano es igual á la normal mayor del punto de intersección de los dos planos.*

Para facilitar el cálculo logarítmico de la expresión (25) elevemos el denominador al numerador desarrollando hasta la segunda potencia de e; y teniendo presente que $\frac{a}{r} = N$, resultará:

$$R_u = N(1 - e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u) \text{ .... } (26)$$

de donde se obtiene la fórmula logarítmica:

$$\log. R_u = \log. N - M e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u$$

Esta ecuación suministra directamente el log. del radio de curvatura de la sección cuyo azimut es u, conociendo el de la normal mayor que corresponde á la misma latitud. Calculando el logaritmo de la cantidad constante $M e^2$, se tiene:

$$\log. R_u = \log. N - (7.46219) \cos^2 \varphi \cos.^2 u \text{ .... } (27)$$

Determinemos, por ejemplo, el radio del círculo osculador de la sección que forma un ángulo de 45° con el meridiano de México.

Const........	7.46219		
$\cos.^2 \varphi$	9.94903		
$\cos.^2 u$........	9.69897	$\log. N =$	6.8048041
	7.11019		$-$ 0.0012888
		$\log. R_{45} =$	6.8035153

$R_{45} = 6360852^m$

Como una de las Tablas que van al fin de este Capítulo proporciona los logaritmos de las normales para todas las latitudes de la República, se calculará con la mayor facilidad el radio de curvatura de cualquiera sección que tenga u por azimut.

17.—Si en los coeficientes A, B, C, etc., de la ecuación general de las secciones verticales del elipsoide se hace $u = 90°$, se nulificarán los valores de C y D, resultando $Ax^2 + By^2 + Ey = F$ por ecuación de la sección originada por el primer vertical, referida al extremo de la normal menor como origen. Busquemos los semiejes a' y b' de esta elipse. Desde luego, haciendo $x = 0$, se obtiene para los puntos M y K (fig. 1ª):

$$By^2 + Ey = F$$

cuya resolución da los dos valores siguientes, que corresponden á aquellos puntos:

$$y_1 = -\frac{E}{2B} + \frac{E}{2B}\sqrt{1 + \frac{4BF}{E^2}} \qquad y_2 = -\frac{E}{2B} - \frac{E}{2B}\sqrt{1 + \frac{4BF}{E^2}}$$

La semidiferencia de éstos suministrará el semieje menor MK, á saber:

$$b' = \frac{E}{2B}\sqrt{1 + \frac{4BF}{E^2}} = \frac{a e^2 (1 - e^2) \cos.^2 \varphi}{r(1 - e^2 \cos.^2 \varphi)} \sqrt{1 + \frac{1 - e^4 \cos.^4 \varphi}{e^4 \cos.^4 \varphi}}$$

$$b' = \frac{a}{r}\left(\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos.^2 \varphi}\right)$$

Para calcular el semieje mayor a' es necesario determinar las coordenadas de un punto por lo menos. Conservando el mismo eje de ordenadas MK, la ecuación de la curva referida á su centro S será:

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$$

Calculemos las coordenadas del punto de la elipse que está situado en el ecuador, y cuya proyección es G. Se tiene:

$$SG = y = \tfrac{1}{2} MK - n = \frac{a(1 - e^2)}{r(1 - e^2 \cos.^2 \varphi)} - \frac{a(1 - e^2)}{r} = \frac{a(1 - e^2) e^2 \cos.^2 \varphi}{r(1 - e^2 \cos.^2 \varphi}$$

La abscisa, que está situada en el plano del ecuador, será media proporcional entre las dos partes del diámetro $2a$, y así:

$$x^2 = \left(a + \frac{a e^2 \cos. \varphi}{r}\right)\left(a - \frac{a e^2 \cos. \varphi}{r}\right) = \frac{a^2}{r^2}(r^2 - e^4 \cos.^2 \varphi)$$

Conociendo los valores de x é y, la ecuación de la curva da:

$$a'^2 = \frac{x^2}{1 - \frac{y^2}{b'^2}}$$

Con los valores hallados se tiene $\frac{y}{b'}=e^2\cos.^2\varphi$, por lo cual se encuentra:

$$a'^2=\frac{a^2(r^2-e^4\cos.^2\varphi)}{r^2(1-e^4\cos.^2\varphi)}=\frac{a^2}{r^2}\,\frac{1-e^2+e^2\cos.^2\varphi-e^4\cos.^2\varphi}{(1-e^2\cos.^2\varphi)(1+e^2\cos.^2\varphi)}$$

$$=\frac{a^2}{r^2}\,\frac{(1-e^2)(1+e^2\cos.^2\varphi)}{(1-e^2\cos.^2\varphi)(1+e^2\cos.^2\varphi)}$$

y finalmente:

$$a'=\frac{a}{r}\left(\frac{1-e^2}{1-e^2\cos.^2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

La excentricidad de esta sección puede calcularse por la fórmula:

$$e'^2=\frac{a'^2-b'^2}{a'^2}=1-\frac{b'^2}{a'^2}=1-\frac{1-e^2}{1-e^2\cos.^2\varphi}=\frac{e^2\operatorname{sen.}^2\varphi}{1-e^2\cos.^2\varphi}$$

por la cual se ve que la excentricidad es nula cuando $\varphi=0$, y es igual á e cuando $\varphi=90°$, creciendo en general con la latitud. En efecto, si suponemos el punto M en A, su primer vertical se confunde con el ecuador, que es un círculo; y si se supone en B, su primer vertical será un meridiano perpendicular al de la figura. A la latitud de México el cuadrado de la excentricidad del primer vertical es sólo $e'^2=0{,}0007435$, ó próximamente la décima parte del valor que obtuvimos para el meridiano; de lo cual se deduce que aquella sección difiere muy poco de un círculo.

Un arco de g grados de amplitud y perpendicular al meridiano abrazará una extensión dada por la fórmula:

$$q=\frac{\pi}{180°}\,g\,N=(8.2418774)\,g\,N \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(28)$$

y puesto que N es mayor que ρ, concluiremos que en el sentido de Oriente á Poniente la curvatura de la tierra es algo menos pronunciada que de Norte á Sur. De la fórmula precedente resulta que á la latitud de México un grado del primer vertical tiene 111347.m6, y 30.m930 el arco de 1″, extensión que es 0.m184 mayor que 1″ del meridiano.

18.—Reducción de las líneas geodésicas á segundos.—Se llama *línea geodésica* la distancia más corta que hay entre dos puntos del globo, contada sobre la superficie de éste. Generalmente hablando, esta línea es de doble curvatura, puesto que las normales de sus diversos puntos no están en un mismo plano; pero como las mayores líneas geodésicas que se consideran en la práctica común de la ciencia, son muy pequeñas respecto del radio del elipsoide, ningún error apreciable se origina de suponerlas curvas planas; y así es que las consideraremos como rigurosamente tales.

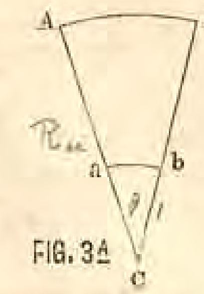


FIG. 3ª

Sea $AB=k$ (fig. 3ª) la línea geodésica que une los puntos A y B, y que por su pequeñez relativa se confunde sensiblemente con el arco trazado con el radio $CA=R_u$ de su círculo osculador. Si con un radio Ca tomado por unidad, se describe el arco $ab=\theta$, este arco medirá la amplitud de k, y la figura da la proporción $1:\theta::R_u:k$, de donde se obtiene:

$$\theta=\frac{k}{R_u}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(29)$$

En esta ecuación θ representa el arco expresado en partes de la unidad con que está descrito; para que exprese segundos, será necesario multiplicarlo por sen. 1″, y se tendrá poniendo el valor (26) de R_u:

$$\theta=\frac{k}{N\operatorname{sen.}1''}(1-e^2\cos.^2\varphi\cos.^2u)^{-1}=\frac{k}{N\operatorname{sen.}1''}+\frac{k\,e^2\cos.^2\varphi\cos.^2u}{N\operatorname{sen.}1''}$$

Haciendo $C=\frac{1}{N\operatorname{sen.}1''}$ y calculando el logaritmo de la constante, tendremos:

$$\theta=Ck+(7.82441)\,Ck\cos.^2\varphi\cos.^2u\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(30)$$

El coeficiente C hace un papel importante en la práctica, y sus logaritmos se hallan calculados en una Tabla del Capítulo VII.

Como ejemplo calcularemos el ángulo que forman las verticales de dos puntos cuya distancia, reducida al nivel del mar, es $k = 36000^m$, con un azimut de 30° y siendo la latitud 21° 30′.

C............	8.5095868	Const............	7.82441
k............	4.5563025	$\cos.^2 \varphi$............	9.93735
	3.0658893	....	3.06589
	1163″.83	$\cos.^2 u$............	9.87506
	5 .04	....	0.70271
$\theta = 1168.''9 = 19' 28''.9$			

19.—**Reducción de segundos á metros.**—Este problema, inverso del anterior, tiene por objeto hallar la extensión k de la línea geodésica cuya amplitud es θ. La ecuación (29) da, expresando á θ en segundos:

$$k = \theta R_u \operatorname{sen.} 1'' \quad \text{..........................} \quad (31)$$

Sustituyendo el valor de R_u y el de C, ó lo que es lo mismo, despejando á k en la fórmula (30), resulta:

$$k = \frac{\theta}{C} - (7.82441) \frac{\theta}{C} \cos.^2 \varphi \cos.^2 u \quad \text{.. ....} \quad (32)$$

Ejemplo. A la latitud de 32° ¿qué distancia habrá entre dos puntos del meridiano cuya diferencia de latitud sea $\theta = 25' 37''$?

θ................	3.1866739	Const............	7.82441
C................	8.5093742	$\cos.^2 \varphi$............	9.85684
	4.6772997	....	4.67730
	47566^m.3	$\cos^2 u$............	0.00000
	228 .3	....	2.35855
$k = 47338.^m0$			

En casos como este, puesto que se trata de una línea cuyo azimut

es nulo, sería preferible hacer uso de la fórmula (19) cuando se tiene una Tabla de los logaritmos de ρ como la que va al fin de este Capítulo. Expresando á θ en segundos y haciendo $A = \frac{1}{\rho \operatorname{sen.} 1''}$, se tendrá:

$$k = \frac{\theta}{A}$$

Los logaritmos de A son tan útiles como los de C, y constan igualmente en la Tabla del Capítulo VII. En el ejemplo precedente se obtendría:

θ........................	3.1866739	
A........................	8.5114678	
k........................	4.6752061	$k = 47338^m$

20.—**Diferentes formas de las expresiones geodésicas.**—La primera de las Tablas que terminan este Capítulo contiene los logaritmos de r, R y N calculados de 30′ en 30′ para todas las latitudes de nuestro país, con sus diferencias por 1′, cuyo objeto es el de facilitar las interpolaciones para cualquiera latitud intermedia. Estas diferencias son comunes á todos los logaritmos de aquellas cantidades, correspondientes á la misma línea horizontal, teniendo presente que r y R van decreciendo y N aumentando cuando crece la latitud, que es el argumento de la Tabla.

La Tabla II contiene los logaritmos de ρ y el valor del ángulo de la vertical $v = \varphi - \varphi'$, también con sus diferencias por 1′. La III da en metros, los valores crecientes de los grados del meridiano, y los decrecientes de los grados de los paralelos, con sus diferencias correspondientes.

Para calcular estas Tablas me he valido de las fórmulas desarrolladas hasta aquí; pero como no es raro encontrarlas en algunas obras bajo otras formas que presentan ventajas peculiares, daré á conocer estas transformaciones refiriéndome únicamente á las principales líneas del elipsoide. Algunos calculadores hacen uso de ángulos auxiliares que facilitan considerablemente las aplicaciones logarítmicas. Así, por ejemplo, haciendo:

$$e\,\text{sen.}\,\varphi = \text{sen.}\,\psi$$

el valor de r será:

$$r = (1 - e^2\,\text{sen.}^2\,\varphi)^{\frac{1}{2}} = \cos.\,\psi$$

y las demás líneas tendrán las siguientes expresiones:

$$N = \frac{a}{\cos.\,\psi}$$

$$R = a\cos.\,\psi$$

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{\cos.^3\,\psi}$$

$$\tan.\,v = \frac{0.5\,e^2\,\text{sen.}\,2\,\varphi}{\cos.^2\,\psi}$$

El ángulo subsidiario ψ es siempre muy pequeño, pues su mayor valor, que corresponde á $\varphi = 90°$, es sólo de $4°\ 41'\ 10''$. Este método de cálculo es ciertamente el más breve, sobre todo cuando hay necesidad de hacer numerosas aplicaciones, como sucede en la formación de Tablas.

Otros geómetras prefieren el uso de las series; así, por ejemplo, desarrollando la potencia $\frac{1}{2}$ de r, se obtiene:

$$r = 1 - \frac{1}{2}\,e^2\,\text{sen.}^2\,\varphi - \frac{1}{8}\,e^4\,\text{sen.}^4\,\varphi - \frac{1}{16}\,e^6\,\text{sen.}^6\,\varphi - \ldots\ldots$$

y de una manera semejante:

$$N = a + \frac{1}{2}\,a\,e^2\,\text{sen.}^2\,\varphi + \frac{3}{8}\,a\,e^4\,\text{sen.}^4\,\varphi + \frac{5}{16}\,a\,e^6\,\text{sen.}^6\,\varphi + \ldots\ldots$$

$$R = a - \frac{1}{2}\,a\,e^2\,\text{sen.}^2\,\varphi - \frac{1}{8}\,a\,e^4\,\text{sen.}^4\,\varphi - \frac{1}{16}\,a\,e^6\,\text{sen.}^6\,\varphi - \ldots\ldots$$

$$\rho = a(1-e^2)\left(1 + \frac{3}{2}\,e^2\,\text{sen.}^2\,\varphi + \frac{15}{8}\,e^4\,\text{sen.}^4\,\varphi + \frac{35}{16}\,e^6\,\text{sen.}^6\,\varphi + \ldots\right)$$

La ventaja de este procedimiento consiste en que el calculador es dueño de llevar la aproximación hasta el grado que quiera haciendo uso de logaritmos de cuatro ó cinco cifras; pero en general esta

ventaja deja de existir cuando se tiene por principal objeto el cálculo de los logaritmos de las cantidades y no el de las cantidades mismas, como sucede por lo común en la aplicación de las fórmulas geodésicas.

Finalmente, en algunos cálculos astronómicos se toma por unidad de longitud el radio ecuatorial a, en cuyo caso se tiene:

$$R = r$$

$$N = \frac{1}{r}$$

$$\rho = \frac{1-e^2}{r^3}$$

etc., etc.

Todas las fórmulas geodésicas adquieren una forma sencilla y de fácil aplicación para el cálculo logarítmico, expresándolas en función de un ángulo que difiere poco de la latitud geográfica, y que se designa con el nombre de latitud *correspondiente*. Sea $A\,B'\,A'$ (fig. 1ª) la esfera tangente al elipsoide en el ecuador, y cuyo radio será, en consecuencia, a. La perpendicular bajada al ecuador desde una estación M, encontrará á esta esfera en un punto N, que llamaremos el *correspondiente* de M. El ángulo $A\,C\,N = \lambda$ será la latitud *correspondiente* de la astronómica ó geográfica $A\,G\,M = \varphi$.

Comencemos por calcular λ en función de φ. Siendo Y la ordenada $N\,E$ del círculo, é y la $M\,E$ de la elipse para la misma abscisa $C\,E = x$, los triángulos $C\,E\,N$, y $G\,E\,M$ dan:

$$Y = x\tan.\,\lambda \qquad y = x\,(1-e^2)\tan.\,\varphi$$

y como

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$$

resulta:

$$\frac{b}{a} = (1-e^2)\,\frac{\tan.\,\varphi}{\tan.\,\lambda} = \frac{b^2\tan.\,\varphi}{a^2\tan.\,\lambda}$$

y por último:

$$\tan.\,\lambda = \frac{b}{a}\tan.\,\varphi = (1-\alpha)\tan.\,\varphi = \frac{298.2}{299.2}\tan.\,\varphi$$

También es fácil derivar de este resultado el valor de $\varphi - \lambda$, que será:

$$\tan.(\varphi - \lambda) = \frac{\alpha \tan.\varphi}{\sec.^2\varphi - \alpha \tan.^2\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\alpha \,\text{sen}.\,2\varphi}{1 - \alpha\,\text{sen}.^2\varphi}$$

ó próximamente en segundos:

$$\varphi - \lambda = \frac{\frac{1}{2}\alpha\,\text{sen}.\,2\varphi}{\text{sen}.\,1''}$$

Es notable la relación que existe entre las tres latitudes geográfica φ, geocéntrica φ' y correspondiente λ. Hemos hallado, en efecto:

$$\tan.\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\tan.\varphi \qquad \tan.\lambda = \frac{b}{a}\tan.\varphi$$

y con estas relaciones se obtiene: $a \tan.\varphi' = b \tan.\lambda$, y también: $\tan.^2\lambda = \tan.\varphi \tan.\varphi'$, lo que expresa que la tangente de la latitud correspondiente es media geométrica entre las de las latitudes geográfica y geocéntrica. Esta relación permite calcular cualquiera de ellas, conociendo las otras dos. Se notará igualmente que la relación entre $\tan.\lambda$ y $\tan.\varphi$ es igual á la que existe entre $\tan.\varphi'$ y $\tan.\lambda$, la cual es la misma de los semiejes b y a, á saber:

$$\tan.\lambda = \frac{b}{a}\tan.\varphi \qquad \tan.\varphi' = \frac{b}{a}\tan.\lambda$$

El valor de esta relación es $\frac{b}{a} = 1 - \alpha$, según vimos al principio de este Capítulo, y con su ayuda se calcula fácilmente el ángulo de la vertical en función de λ, por la ecuación:

$$\tan.(\varphi - \varphi') = \left(\frac{2\alpha - \alpha^2}{1-\alpha}\right)\frac{\tan.\lambda}{1+\tan.^2\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha - \alpha^2}{1-\alpha}\right)\text{sen}.\,2\lambda$$

que expresada en serie da:

$$\tan.(\varphi - \varphi') = \left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 + \ldots\ldots\right)\text{sen}.\,2\lambda$$

bastando casi siempre tomar:

$$\varphi - \varphi' = \frac{\alpha\,\text{sen}.\,2\lambda}{\text{sen}.\,1''}$$

Si se compara este valor con el de $\varphi - \lambda$, y se recuerda que φ y λ difieren muy poco, se hallará con corta diferencia:

$$\varphi - \lambda = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$$

ó bien:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$$

Con esta relación se puede también calcular el valor aproximativo de cualquiera de las tres latitudes, conociendo las otras dos.

Calculemos ahora las principales líneas del elipsoide en función de λ. Para la normal mayor MH, se tiene: $x = N\cos.\varphi = a\cos.\lambda$, y por tanto:

$$N = a\frac{\cos.\lambda}{\cos.\varphi}$$

Nótese de paso que comparando esta expresión de N con la que hasta ahora habíamos empleado, se halla que la cantidad que designamos por r es:

$$r = \sqrt{1 - e^2\,\text{sen}.^2\varphi} = \frac{\cos.\varphi}{\cos.\lambda}$$

Para la normal menor MG, tendremos: $Y = a\,\text{sen}.\lambda$, $y = n\,\text{sen}.\varphi$, de donde resulta:

$$n = b\frac{\text{sen}.\lambda}{\text{sen}.\varphi} = a(1-\alpha)\frac{\text{sen}.\lambda}{\text{sen}.\varphi} = a\frac{\text{sen}.\lambda \tan.\lambda}{\text{sen}.\varphi \tan.\varphi}$$

El radio de curvatura del meridiano, puesto bajo la forma $\rho = \frac{n}{r^2}$, toma las siguientes por la sustitución:

$$\rho = a(1-\alpha)\frac{\text{sen}.\,2\lambda\cos.\lambda}{\text{sen}.\,2\varphi\cos.\varphi} = a\frac{\text{sen}.\lambda\,\text{sen}.\,2\lambda}{\text{sen}.\varphi\,\text{sen}.\,2\varphi}$$

En cuanto al radio central MC, tenemos:

$$R^2 = x^2 + x^2(1-e^2)^2\tan.^2\varphi = a^2\cos.^2\lambda\left(1 + \frac{b^4}{a^4}\tan.^2\varphi\right)$$

$$= a^2\cos.^2\lambda\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\tan.^2\lambda\right) = a^2\cos.^2\lambda + b^2\,\text{sen}.^2\lambda$$

Esta última expresión, aunque muy simétrica, no es cómoda para el cálculo; pero eliminando á b, se halla:

$$R^2 = a^2 \cos.^2 \lambda + a^2 (1-\alpha)^2 \operatorname{sen.}^2 \lambda = a^2 [1 - (2\alpha - \alpha^2) \operatorname{sen.}^2 \lambda]$$

de donde se obtiene finalmente:

$$R = a (1 - e^2 \operatorname{sen.}^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}$$

expresión de la misma forma que la que habíamos adoptado; pero que es exacta, mientras que aquella no lo era del todo, si bien lo suficiente para la generalidad de las aplicaciones.

La diferencia $N - n = \frac{a e^2}{r}$ de las dos normales, será:

$$N - n = a e \frac{\cos. \lambda}{\cos. \varphi}$$

y puesto que se tiene: $CH = (N-n) \operatorname{sen.} \varphi$ y $CG = (N-n) \cos. \varphi$, se hallará:

$$CH = a e^2 \cos. \lambda \tan. \varphi = \frac{a e^2}{1-\alpha} \operatorname{sen.} \lambda$$

$$CG = a e^2 \cos. \lambda$$

Se ve por lo que precede que, con el ángulo λ, casi todas las expresiones geodésicas toman formas monomias que facilitan su cálculo logarítmico; y aunque la misma ventaja se consigue con φ, según vimos al fin del número 8 en que hallamos el valor de r bajo la forma monomia, siempre contendrán radicales, pues se hallará:

$$N = a \left(\frac{\cos. \varphi'}{\cos. \varphi \cos. v} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \rho = a (1-e^2) \left(\frac{\cos. \varphi'}{\cos. \varphi \cos. v} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y así de las demás expresiones. En consecuencia, pareciéndome preferible el uso de λ, he aumentado la segunda de las tablas que van al fin de este Capítulo, con los valores de $\varphi - \lambda$.

21.—**Superficie del elipsoide terrestre.**—Para resolver este problema con más generalidad, comenzaré por determinar la superficie de un cuadrilátero formado sobre el elipsoide por dos paralelos de

latitud y dos meridianos cualesquiera que formen entre sí un ángulo de L grados.

Al girar la elipse generatriz al derredor del eje polar, cualquiera de sus puntos M (fig. 1ª) cuya distancia al eje de rotación es x, describirá una circunferencia representada por $2\pi x$, y por consiguiente los dos meridianos, cuyos planos forman el ángulo L, interceptarán una parte de esta circunferencia que tendrá por valor $\frac{\pi L x}{180°}$. Si este se multiplica por el arco elemental del meridiano, tendremos la expresión del elemento de la superficie, á saber:

$$dS = \frac{\pi}{180°} L x \, ds$$

y puesto que $x = N \cos. \varphi$, y $ds = \rho \, d\varphi$, resultará sustituyendo:

$$dS = \frac{\pi a^2 L (1-e^2)}{180°} \cdot \frac{\cos. \varphi \, d\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi)^2}$$

Con el objeto de facilitar la integración de esta expresión, hagamos $\operatorname{sen.} \varphi = z$, de donde resulta $\cos. \varphi \, d\varphi = dz$. Sustituyendo se tiene:

$$dS = \frac{\pi a^2 L (1-e^2)}{180°} \cdot \frac{dz}{(1 - e^2 z^2)^2}$$

Pasando el denominador al numerador, y desarrollando, resulta:

$$dS = \frac{\pi a^2 L (1-e^2)}{180°} (1 + 2 e^2 z^2 + 3 e^4 z^4 + 4 e^6 z^6 + \ldots\ldots) dz$$

y efectuando la integración de la serie:

$$S = \frac{\pi a^2 (1-e^2) L}{180°} \left(z + \frac{2}{3} e^2 z^3 + \frac{3}{5} e^4 z^5 + \frac{4}{7} e^6 z^7 + \ldots\ldots \right)$$

No he añadido constante porque la integral se nulifica cuando $z = 0$, lo que equivale á contar la superficie desde el ecuador hasta la latitud φ. Reponiendo, finalmente, $\operatorname{sen.} \varphi$ en lugar de z, se obtendrá:

$$S = \frac{\pi a^2 L (1-e^2) \operatorname{sen.} \varphi}{180°} \left(1 + \frac{2}{3} e^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \operatorname{sen.}^4 \varphi + \frac{4}{7} e^6 \operatorname{sen.}^6 \varphi \ldots\ldots \right) \ldots (33)$$

Por abreviación designando por A la constante $\frac{\pi a^2(1-e^2)}{180^\circ}$, la ecuación anterior da para las latitudes φ_1 y φ_2:

$$S_1 = A\,L\left(\text{sen.}\,\varphi_1 + \frac{2}{3}e^2\,\text{sen.}^3\varphi_1 + \frac{3}{5}e^4\,\text{sen.}^5\varphi_1 + \ldots\ldots\right)$$

$$S_2 = A\,L\left(\text{sen.}\,\varphi_2 + \frac{2}{3}e^2\,\text{sen.}^3\varphi_2 + \frac{3}{5}e^4\,\text{sen.}^5\varphi_1 + \ldots\ldots\right)$$

cuya diferencia, que es:

$$S_1 - S_2 = 2\,A\,L\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\cos.\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) +$$

$$+ \frac{2}{3}A\,e^2 L\,(\text{sen.}^3\varphi_1 - \text{sen.}^3\varphi_2) + \frac{3}{5}A\,e^4 L\,(\text{sen.}^5\varphi_1 - \text{sen.}^5\varphi_2)$$

dará la superficie del cuadrilátero de L grados de *longitud geográfica*, y comprendido entre las latitudes φ_1 y φ_2. Nótese que en esta ecuación el término más influente es el primero, por lo cual si admitimos que L y $\varphi_1 - \varphi_2$ sean constantes, deduciremos con bastante aproximación que *las áreas de los cuadriláteros terminados por arcos de igual amplitud decrecen como los cosenos de sus latitudes medias.*

Si en la ecuación (33) hacemos $L = 360^\circ$, resultará la superficie de la zona comprendida entre el ecuador y el paralelo de latitud φ.

Si además se supone $\varphi = 90^\circ$ y se duplica el resultado, se obtendrá por superficie de todo el elipsoide:

$$S = 4\pi a^2(1-e^2)\left(1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \ldots\ldots\right) =$$

$$= 4\pi a^2\left(1 - \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{15}e^4 - \frac{1}{35}e^6 - \ldots\ldots\right)$$

Se ve que esta expresión dará la superficie de la esfera que tenga a por radio, cuando se suponga nula la excentricidad e.

Para aplicar la fórmula (33) calculemos por zonas la superficie del

elipsoide terrestre. La zona tórrida se supone limitada por los paralelos de 23° 30′ de latitud tanto al Norte como al Sur del ecuador. Las zonas templadas desde esta latitud hasta la de 66° 30′; y finalmente las glaciales terminadas en los polos. Por consiguiente, haremos $L = 360^\circ$, φ sucesivamente igual á 23° 30′, 66° 30′ y 90°, y duplicaremos los resultados de la fórmula para obtener las zonas de ambos semi-elipsoides. Además de esto, como el metro es una unidad demasiado pequeña para valuar áreas tan considerables como son las geográficas, introduciremos en el cálculo el valor del radio ecuatorial a en miriámetros, con el fin de obtener la superficie en miriámetros cuadrados ó hecto-miriaras. Se tendrá, pues, $a = 637{,}7397$ mir.

Zona tórrida. $\qquad \varphi = 23^\circ 30'$

arc. 1º......	8.2418774				
a^2......	5.6092870				
$1-e^2$......	9.9970917				
360°......	2.5563025				
C......	6.4045586	$\frac{2}{3}e^2$.........	7.648316	$\frac{3}{5}e^4$.........	5.42696
sen. φ......	9.6006997	sen.$^3\varphi$.........	9.201399	sen.$^5\varphi$.........	8.40280
	6.0052583....................		6.005258		6.00526
			2.854973		9.83502

Primer término	=	1012181.3
Segundo „	=	716.1
Tercer „	=	0.7

Media zona tórrida = 1012898.1 hecto-miriaras.

De igual manera con $\varphi = 66^\circ\ 30'$ se hallaría que la zona terrestre, contada desde el ecuador hasta esa latitud, tiene 2336612.5 hecto-miriaras, de la que restando el resultado anterior, da 1323714.4 para cada zona templada. Haciendo ahora $\varphi = 90^\circ$, hallaremos el área del semi-elipsoide, de la que deduciremos después la que corresponde á cada zona glacial.

	$\frac{2}{3}e^2$......... 7.648316	$\frac{3}{5}e^4$......... 5.42696	
C......... 6.4045586	.... 6.404559	.... 6.40456	
	4.052875	1.83152	

Primer término	= 2538391.3
Segundo „	= 11294.7
Tercer „	= 67.8
Medio elipsoide	= 2549753.8
	− 2336612.5
Zona glacial	= 213141.3

Duplicando las superficies de las zonas para obtener las correspondientes á los dos hemisferios, resulta la siguiente de toda la tierra:

Zona tórrida	= 2025796.2
Zonas templadas	= 2647428.8
Zonas glaciales	= 426282.6
Superficie del globo	= 5099507.6 hecto-miriaras.

En números más breves, puede decirse que la superficie de la tierra es de cinco millones y cien mil hecto-miriaras, ó bien de quinientos diez millones de miriaras.

22.—**Volumen del elipsoide.**—La superficie de un paralelo al ecuador es πx^2, que multiplicada por d y produce la siguiente expresión del volumen elemental:

$$\mathrm{d}\,V = \pi x^2 \mathrm{d}\,y$$

y sustituyendo los valores de x y de d y, se tendrá:

$$\mathrm{d}\,V = \pi a^3 (1-e^2) \frac{\cos.^3 \varphi \,\mathrm{d}\,\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi)^{\frac{5}{2}}}$$

Haciendo sen. $\varphi = z$, será muy fácil transformarla en la que sigue:

$$\mathrm{d}\,V = \pi a^3 (1-e^2) \frac{(1-z^2)}{(1-e^2 z^2)^{\frac{5}{2}}} \mathrm{d}\,z$$

que desarrollada en serie, da:

$$\mathrm{d}\,V = \pi a^3 (1-e^2) \Big[1 - \left(1 - \frac{5}{2} e^2\right) z^2 - \left(\frac{5}{2} e^2 - \frac{35}{8} e^4\right) z^4 -$$

$$- \left(\frac{35}{8} e^4 - \frac{105}{16} e^6\right) z^6 - \ldots\ldots \Big] \mathrm{d}\,z$$

Integrando, sustituyendo el valor de z, haciendo $\varphi = 90°$ y duplicando se obtendrá por volumen del elipsoide:

$$V = 2\pi a^3 (1-e^2) \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^2 + \frac{1}{4} e^4 + \ldots\ldots \right) =$$

$$= \frac{4}{3} \pi a^3 (1-e^2) \left(1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \ldots\ldots \right)$$

Fácilmente se reconoce que el último factor equivale á $(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}$, por lo que

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (34)$$

El cálculo anterior es molesto por el uso de las series; pero si en la expresión del volumen elemental se sustituye el valor de x tomado de la ecución (4) del meridiano, se tiene:

$$V = \int \left(\pi a^2 \mathrm{d}\,y - \frac{\pi}{1-e^2} y^2 \mathrm{d}\,y\right) = \pi a^2 y - \frac{\pi y^3}{3(1-e^2)}$$

El volumen se supone contado desde el ecuador, puesto que V es nulo con y. Para todo el elipsoide haremos $y = b = a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$, y duplicaremos para obtener como antes:

$$V = 2\pi a^3 (1-e^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \pi a^3 (1-e^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \pi a^3 (1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

Apliquemos la fórmula expresando en miriámetros el radio ecuatorial.

$\frac{4}{3}$	0.1249387
π	0.4971498
a^3	8.4139305
$\sqrt{1-e^2}$	9.9985458
V	9.0345648 $\quad V = 1082841293$

En números redondos diremos que el volumen de la tierra es de 1083 millones de miriámetros cúbicos.

23.—**Tablas geodésicas.**—Terminaré este Capítulo con las Tablas siguientes que contienen los logaritmos de r, R, N y ρ, así como el ángulo de la vertical, los valores de $\varphi - \lambda$ y los de un grado de meridiano y de paralelo para todas las latitudes de la República. Como es continuo el uso de estos elementos en los cálculos geodésicos, se encontrará una gran ventaja en tomarlos de las Tablas por medio de una simple interpolación para cualquiera latitud intermedia, en lugar de determinarlos por la aplicación directa de las fórmulas.

TABLA I.

Logaritmos de r, R y N.

Latitud.	Log. r.	Log. R.	Log. N.	Dif. común por 1′
15°00′	9.9999028	6.8045463	6.8047407	2.1
15 30	. 8964	. 5399	. 7471	2.2
16 00	. 8898	. 5333	. 7537	2.3
16 30	. 8830	. 5265	. 7605	2.3
17 00	. 8761	. 5196	. 7674	2.4
17 30	. 8689	. 5124	. 7746	2.4
18 00	. 8616	. 5051	. 7819	2.5
18 30	. 8540	. 4975	. 7895	2.6
19 00	. 8463	. 4898	. 7972	2.6
19 30	. 8384	. 4819	. 8051	2.7
20 00	. 8304	. 4739	. 8131	2.8
20 30	. 8221	. 4656	. 8214	2.8
21 00	9.9998137	6.8044572	6.8048298	2.8
21 30	. 8052	. 4487	. 8383	2.9
22 00	. 7965	. 4400	. 8470	2.9
22 30	. 7877	. 4312	. 8558	3.0
23 00	. 7786	. 4221	. 8649	3.1
23 30	. 7694	. 4129	. 8741	3.1
24 00	. 7601	. 4036	. 8834	3.2
24 30	. 7506	. 3941	. 8929	3.2
25 00	. 7410	. 3845	. 9025	3.3
25 30	. 7312	. 3747	. 9123	3.3
26 00	. 7213	. 3648	. 9222	3.4
26 30	. 7112	. 3547	. 9323	3.4
27 00	9.9997011	6.8043446	6.8049494	3.4
27 30	. 6908	. 3343	. 9527	3.5
28 00	. 6803	. 3238	. 9632	3.5
28 30	. 6697	. 3132	. 9738	3.6
29 00	. 6590	. 3025	. 9845	3.6
29 30	. 6482	. 2917	. 9953	3.6
30 00	. 6372	. 2808	6.8050062	3.7
30 30	. 6263	. 2698	. 0172	3.7
31 00	. 6152	. 2587	. 0283	3.7
31 30	. 6040	. 2475	. 0395	3.8
32 00	. 5926	. 2361	. 0509	3.8
32 30	. 5812	. 2247	. 0623	3.9
33 00	9.9995696	6.8042131	6.8050739	

TABLA II.

Logaritmos de ρ, valores de $\varphi - \lambda$ y ángulo de la vertical.

Latitud.	Log. ρ.	Dif. por 1′.	$v = \varphi - \varphi'$	Dif. por 1′.	$\varphi - \lambda$	Dif. por 1′.
15°00′	6.8020267	6.4	5′44.″3	0.″35	2′52.″4	0.″17
15 30	. 0459	6.6	5 54. 7	. 34	2 57. 5	. 17
16 00	. 0657	6.8	6 4. 9	. 34	3 2. 6	. 17
16 30	. 0861	6.9	6 15. 1	. 33	3 7. 7	. 17
17 00	. 1069	7.2	6 25. 1	. 33	3 12. 7	. 16
17 30	. 1284	7.3	6 35. 0	. 33	3 17. 6	. 16
18 00	. 1504	7.6	6 44. 8	. 32	3 22. 5	. 16
18 30	. 1731	7.7	6 54. 5	. 32	3 27. 4	. 16
19 00	. 1963	7.9	7 4. 1	. 31	3 32. 2	. 16
19 30	. 2196	8.0	7 13. 5	. 31	3 36. 9	. 16
20 00	. 2439	8.3	7 22. 8	. 31	3 41. 6	. 15
20 30	. 2688	8.4	7 32. 0	. 30	3 46. 2	. 15
21 00	6.8022940	8.5	7 41. 0	. 30	3 50. 7	. 15
21 30	. 3195	8.7	7 49. 9	. 29	3 55. 1	. 15
22 00	. 3456	8.8	7 58. 6	. 29	3 59. 4	. 15
22 30	. 3721	9.1	8 7. 2	. 28	4 3. 7	. 14
23 00	. 3993	9.2	8 15. 6	. 28	4 7. 9	. 14
23 30	. 4269	9.3	8 23. 9	. 27	4 12. 1	. 14
24 00	. 4549	9.5	8 32. 1	. 27	4 16. 2	. 13
24 30	. 4833	9.6	8 40. 1	. 26	4 20. 2	. 13
25 00	. 5122	9.8	8 47. 9	. 26	4 24. 1	. 13
25 30	. 5416	9.9	8 55. 6	. 25	4 27. 9	. 13
26 00	. 5713	10.1	9 3. 1	. 25	4 31. 7	. 12
26 30	. 6015	10.1	9 10. 5	. 24	4 35. 4	. 12
27 00	6.8026318	10.3	9 17. 6	. 23	4 39. 0	. 12
27 30	. 6627	10.5	9 24. 6	. 23	4 42. 5	. 11
28 00	. 6942	10.6	9 31. 5	. 22	4 45. 9	. 11
28 30	. 7260	10.7	9 38. 2	. 22	4 49. 2	. 11
29 00	. 7581	10.8	9 44. 7	. 21	4 52. 4	. 11
29 30	. 7905	10.9	9 51. 0	. 20	4 55. 6	. 10
30 00	. 8232	11.0	9 57. 1	. 20	4 58. 7	. 10
30 30	. 8562	11.1	10 3. 1	. 19	5 1. 6	. 10
31 00	. 8895	11.2	10 8. 8	. 19	5 4. 5	. 09
31 30	. 9232	11.4	10 14. 4	. 18	5 7. 3	. 09
32 00	. 9573	11.4	10 19. 8	. 17	5 10. 0	. 09
32 30	. 9916	11.6	10 25. 0	. 17	5 12. 6	. 09
33 00	6.8030264		10 30. 1		5 15. 2	

TABLA III.

Valores de un grado de meridiano y de paralelo.

Latitud.	Grado de meridiano.	Dif. por 1′.	Grado de paralelo.	Dif. por 1′.
15°00′	$110637.^{\mathrm{m}}8$	$0.^{\mathrm{m}}17$	$107538.^{\mathrm{m}}0$	$8.^{\mathrm{m}}47$
15 30	642. 8	. 17	107284. 0	8. 74
16 00	647. 9	. 17	107021. 9	9. 01
16 30	653. 1	. 18	106751. 7	9. 28
17 00	658. 4	. 18	106473. 4	9. 55
17 30	663. 8	. 19	106187. 0	9. 81
18 00	669. 4	. 19	105892. 6	10. 08
18 30	675. 2	. 20	105590. 2	10. 35
19 00	681. 2	. 20	105279. 7	10. 61
19 30	687. 3	. 21	104961. 3	10. 88
20 00	693. 4	. 21	104634. 8	11. 15
20 30	699. 7	. 21	104300. 4	11. 41
21 00	110706. 0	. 22	103958. 2	11. 67
21 30	712. 5	. 22	103608. 0	11. 93
22 00	719. 2	. 23	103250. 0	12. 20
22 30	726. 0	. 23	102884. 1	12. 46
23 00	732. 9	. 23	102510. 4	12. 72
23 30	739. 9	. 24	102128. 9	12. 97
24 00	747. 0	. 24	101739. 7	13. 23
24 30	754. 3	. 25	101342. 7	13. 49
25 00	761. 7	. 25	100938. 1	13. 74
25 30	769. 2	. 25	100525. 8	14. 00
26 00	776. 8	. 26	100105. 9	14. 26
26 30	784. 5	. 26	99678. 2	14. 51
27 00	110792. 3	. 26	99243. 0	14. 75
27 30	800. 1	. 27	98800. 4	15. 00
28 00	808. 1	. 27	98350. 3	15. 26
28 30	816. 2	. 27	97892. 5	15. 51
29 00	824. 4	. 28	97427. 3	15. 75
29 30	832. 7	. 28	96954. 7	16. 00
30 00	841. 1	. 28	96474. 7	16. 24
30 30	849. 5	. 28	95987. 4	16. 48
31 00	858. 0	. 29	95492. 9	16. 73
31 30	866. 6	. 29	94991. 1	16. 98
32 00	875. 3	. 29	94482. 0	17. 21
32 30	884. 1	$0.^{\mathrm{m}}29$	93965. 7	17. 45
33 00	110982. 9		93442. 1	

CAPITULO II.

TRIANGULACIONES GEODÉSICAS Y MODO DE CONSIDERAR LOS TRIÁNGULOS TRAZADOS EN LA SUPERFICIE DEL ELIPSOIDE.

24.—En el primer tomo de esta obra, al tratar de las operaciones topográficas en general, vimos que el fundamento en que descansan es que la superficie de una esfera y su plano tangente casi se confunden en una reducida extensión; y aun se recordará que el pequeño error que en realidad proviene de esta suposición, nos sirvió de base para fijar el límite de aquellas operaciones cuando se practicasen aisladamente. Pero se dijo al mismo tiempo que podrían hacerse extensivas á una porción cualquiera de la superficie del globo, sujetándolas á terminar de trecho en trecho en ciertos puntos muy bien determinados, lo cual equivale á suponer la superficie de la tierra compuesta de elementos planos muy pequeños, lo mismo que se consideran las líneas curvas formadas de partes elementales rectilíneas. Vamos ahora á ocuparnos en la manera de fijar, por medio de las triangulaciones geodésicas, la posición de aquellos puntos fundamentales que sirven de término y de rectificación á las operaciones topográficas.

Las triangulaciones geodésicas no tienen solamente el objeto que acabo de indicar, sino que se aplican también á la medida de grandes arcos del elipsoide, los cuales sirven para calcular en seguida sus ejes, y por consiguiente todo lo que se refiere á su figura y dimensiones. Los planos de vastas porciones de la tierra, como los conti-

nentes y los Estados, se forman principalmente por medio de grandes triangulaciones que determinan la posición de las ciudades y de las poblaciones más importantes, de las cadenas de montañas, de los ríos, de las costas, de las líneas limítrofes, etc., pues por lo común las escalas en que se construyen estas *cartas geográficas* son tan pequeñas, que no pueden aparecer en ellas caracteres topográficos más pormenorizados.

Aunque el espíritu de las triangulaciones geodésicas y su objeto final sean en rigor los mismos que los de las topográficas, fácilmente se comprende que deben existir entre ellas notables diferencias. Efectivamente, en la Topografía se proyectan ortogonalmente los puntos del terreno sobre el plano tangente á la superficie de la tierra; mientras que en la Geodesia la proyección se verifica por medio de líneas convergentes hacia el centro del globo, que son las verticales de los puntos. Las cadenas topográficas constan de triángulos rectilíneos que se resuelven por medio de la trigonometría plana; y las geodésicas, por el contrario, se componen de triángulos que podemos llamar *esferoídicos*, trazados en la superficie curva de un elipsoide, el cual, como se ha dicho, se supone formado por la prolongación ideal de los mares. Hay todavía otra diferencia esencial: la posición de un punto situado en una superficie plana se determina por medio de sus distancias á dos líneas fijas; mientras que estando situado sobre una superficie curva, hay necesidad de adoptar un sistema de coordenadas angulares ó esféricas, tales como la *longitud* y la *latitud* geográficas, referidas á dos planos coordenados que en este caso son el ecuador y un meridiano.

25.—Recordemos ahora brevemente las definiciones de longitud y latitud. En el Capítulo I se ha dicho ya que la latitud de un punto es su distancia angular al ecuador contada sobre el meridiano que pasa por el mismo punto. Se comprende desde luego que esta coordenada no basta por sí sola para fijar la posición de un lugar sobre el elipsoide, puesto que conviene á todos los que se hallen en el mismo paralelo.

Las latitudes se cuentan desde 0° hasta 90° partiendo del ecuador hacia ambos polos; y para distinguir las que se refieren á uno ú otro hemisferio, se les agregan los nombres de *Norte* ó *Sur*, según que los puntos á que pertenecen se hallen en el hemisferio boreal ó en el austral. Así decimos, por ejemplo, que la catedral de México está á los 19° 26′ 5″.3 de latitud Norte, y la ciudad de Santiago de Chile á 33° 26′ 42″.0 de latitud Sur. Con más frecuencia se designan las latitudes del hemisferio boreal con el signo +, y las del austral con el signo —, de modo que se dice que la latitud de México es de + 19° 26′ 5″.3 y la de Santiago — 33° 26′ 42″.0.

El ángulo formado por dos meridianos cualesquiera, se llama en general su *diferencia de longitud*, y se mide por el arco del ecuador ó de un paralelo interceptado por sus planos. La longitud y la latitud reunidas fijan perfectamente la situación de un lugar sobre la superficie de la tierra; porque la última determina la posición del punto sobre su meridiano, y la primera establece la del meridiano mismo respecto de otro que se toma por origen de las longitudes.

Como en el supuesto de ser la tierra un sólido de revolución, son iguales todos los meridianos, no hay razón alguna que haga adoptar uno de ellos de preferencia á cualquier otro para establecer el *cero* ú origen de las longitudes; así es que cada nación elige por lo común el que pasa por su capital ó por su principal Observatorio astronómico. Cuando decimos que México está á 99° 7′ 9″ de longitud al Oeste de Greenwich, se entiende que el meridiano de México forma ese ángulo con el que pasa por aquel Observatorio. El de Paris está á 2° 20′ 9″.4 al Este del de Greenwich, y por consiguiente, la longitud de México referida al meridiano de Paris como origen, es de 101° 27′ 18″.4 al Oeste.

Las longitudes se cuentan desde 0° hasta 180° tanto al Este como al Oeste, por lo que es preciso indicar la dirección del punto fijado respecto del meridiano que sirve de origen. También se acostumbra, y es preferible por la brevedad, á señalar las longitudes occidentales con el signo +, y con el signo — las orientales. Así diremos que la longitud de México respecto de Greenwich es + 99° 7′ 9″, y la de Paris, contada desde el mismo meridiano, es — 2° 20′ 9″.4. Esta anotación tiene también la ventaja de facilitar la combinación de las longitudes para cambiar de origen, ó para referir al mismo las que se

cuentan respecto de distintos meridianos, lo cual se consigue por una suma ó una resta atendiendo á las reglas de los signos. Por ejemplo, si determinamos la longitud de un punto respecto de México, y encontramos que es de — 1° 57′ 10″.2, su posición referida á Greenwich será $L_0 = L_1 + L_2$, ó bien:

$$L_0 = +\,99°\,7'\,9''.0 - 1°\,57'\,10''.2 = +\,97°\,9'\,58''.8$$

Si se quisiera referir la posición del meridiano de México al del Observatorio de Cambridge (Estados Unidos), cuya longitud contada desde Greenwich es + 71° 7′ 39″.9, se tendría $L_0 = L_1 - L_2$, ó lo que es lo mismo:

$$L_0 = +\,99°\,7'\,9''.0 - 71°\,7'\,39''.9 = +\,27°\,59'\,29''.1$$

Se comprenderá por estas definiciones que la cantidad que designé por L en la fórmula (33) del Capítulo I relativa á la superficie de un cuadrilátero terrestre, no es otra cosa más que la diferencia de longitud de los meridianos que lo terminan.

Las longitudes geográficas no siempre se expresan en medidas angulares como lo he hecho hasta aquí, sino en unidades de tiempo. Expliquemos brevemente la causa y la ventaja de este modo de contarlas: En virtud del movimiento de rotación del globo terrestre al derredor de su eje, cualquiera de sus puntos emplea 24 horas en describir un círculo paralelo al ecuador ó perpendicular al eje polar; y como este movimiento es uniforme, resulta que la velocidad angular será de 15° por hora. Por otra parte, la diferencia de meridianos ó de longitudes de dos lugares, es el ángulo que forman sus respectivos meridianos; y en consecuencia, puede expresarse por el tiempo que emplea la tierra en describirlo con la velocidad uniforme que acaba de indicarse. De esa manera la diferencia de longitudes representa directamente la diferencia de horas que se cuentan en los dos meridianos en un mismo instante físico; y bajo este aspecto facilita notablemente ciertos cálculos astronómicos, como se verá en otro lugar.

La reducción de unidades angulares á unidades de tiempo, y viceversa, se hace con la mayor facilidad, pues designando por a un arco cualquiera expresado en medidas angulares, y por t expresado en unidades de tiempo, se tiene la ecuación: $a = 15\,t$. Pero como el coeficiente 15 puede ponerse bajo la forma $\frac{60}{4}$, tendremos $a = \frac{60}{4}\,t$, lo cual indica que para convertir tiempo en arco debe multiplicarse el primero por 60 y tomar la cuarta parte del producto. La multiplicación por 60 equivale á convertir los segundos en minutos y éstos en grados, de modo que la operación queda reducida *á tomar la cuarta parte de la cantidad dada después de haber convertido los minutos en grados, los segundos en minutos y las fracciones de segundo de tiempo en segundos de arco.*

Si por el contrario, se da un arco para reducirlo á tiempo, *se multiplicará por cuatro después de haber convertido los grados en minutos, los minutos en segundos y los segundos en fracción decimal.*

Expresemos, por ejemplo, en tiempo la longitud 99° 7′ 9″.0 de México respecto de Greenwich. Convirtiendo los 99° en minutos de tiempo, etc., se tendrá:

$$\begin{array}{r} 1^{h}\,39^{m}\ \ 7^{s}.15 \\ 4 \\ \hline \text{Longitud en tiempo} = 6^{h}\,36^{m}\,28^{s}.60 \end{array}$$

De igual manera hallaríamos que la longitud — 2° 20′ 9″.4 de París contada desde Greenwich, es — $9^{m}\,20^{s}.63$ expresada en tiempo. La de México respecto de Cambridge será + $1^{h}\,51^{m}\,57^{s}.94$.

De lo que antes se ha expuesto inferimos que, por ejemplo, cuando se cuenta en México exactamente la hora del medio día, se contará en Cambridge la $1^{h}\,51^{m}\,57^{s}.94$, en Greenwich las $6^{h}\,36^{m}\,28^{s}.60$, en París las $6^{h}\,45^{m}\,49^{s}.23$, etc.

En los cálculos geodésicos casi siempre se expresan en arco las longitudes; pero como generalmente en los astronómicos se expresan en tiempo, he creído útil anticipar estas nociones, ya que ha sido preciso ocuparnos de las coordenadas que fijan geográficamente la posición de un lugar cualquiera del globo.

26.—Supongamos ahora proyectada una triangulación sobre la superficie del elipsoide por medio de las verticales de cada uno de sus vértices, y consideremos los triángulos que se originan de esta pro-

yección. Los lados de los triángulos serán lo que hemos llamado *líneas geodésicas* (número 18) que son las distancias más cortas entre cada dos puntos reducidas al nivel del mar.

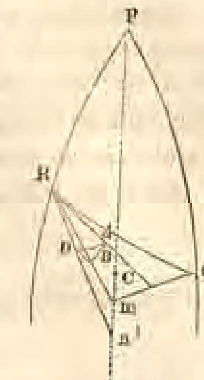


FIG. 4ª

Sean $P\,Q$ y $P\,R$ (fig. 4ª) los meridianos de dos puntos trigonométricos, cuyas proyecciones son Q y R; y $Q\,R$ el arco ó línea geodésica que los une. Si por la vertical $Q\,m$ del punto Q y por la segunda estación R se hace pasar un plano, este plano será vertical respecto del horizonte de Q; pero no lo será respecto del de R, como sucedería si la tierra fuese esférica. En efecto, para que el plano fuera vertical en R era preciso que contuviese la normal $R\,n$ de este punto; y por consiguiente, esta última prolongada debería encontrar á la de Q. La normal de Q está en el plano del meridiano $P\,Q$, la de R en el meridiano $P\,R$ y ambas cortan al eje de la tierra en distintos puntos m y n; luego estas líneas no se encuentran, y por tanto no pueden determinar un plano, con excepción únicamente del caso en que Q y R estuviesen sobre un mismo paralelo ó sobre un mismo meridiano.

Las verticales de los demás puntos de la línea geodésica encontrarán al eje entre m y n, formando en su conjunto una superficie curva, cuya intersección con la del elipsoide no podrá ser una curva plana como $Q\,R$, sino una línea de doble curvatura. De aquí podemos deducir que toda sección del elipsoide sujeta á la condición de contener las verticales de todos los puntos por donde pase, es en general una curva de doble curvatura. Debe exceptuarse, sin embargo, el caso en que la sección coincida con el meridiano, según se ha visto.

Una línea geodésica se supone originada por una superficie normal á la tierra en todos sus puntos; luego en rigor esta línea no puede considerarse como una curva plana. Investiguemos el error que resultaría de admitir que la sección $Q\,m\,R$ es normal á la superficie del elipsoide en todos sus puntos, ó lo que es lo mismo, de suponer que la línea geodésica es una curva plana. Para conseguirlo nada me parece más propio que calcular el pequeño ángulo que forma con esta sección la normal Rn del punto R. Haciendo pasar por Rn un plano ARD perpendicular á la sección QmR, el ángulo nRA será el que se busca; y considerando al punto R como el centro de una esfera cuyo radio sea la unidad, sus intersecciones con el meridiano de R, con la sección QmR y con el plano que le es perpendicular, originará un triángulo rectángulo en A, cuyo lado $AD = x$ mide el ángulo que se desea calcular.

Haciendo $BD = p$, se tiene:

$$\text{sen.}\, x = \text{sen.}\, p \,\text{sen.}\, ABD$$

Para determinar el arco p, el triángulo plano mRn da:

$$\text{sen.}\, p = \frac{mn}{Rm}\,\text{sen.}\, Rnm$$

Basta la consideración de que la tierra difiere poco de la forma esférica para comprender que los ángulos p y x deben ser muy pequeños, y que esta circunstancia nos permite hacer importantes simplificaciones en las ecuaciones anteriores sin alterar sensiblemente la exactitud del resultado. Desde luego se ve que siendo C el centro del globo, mn es igual á $Cn - Cm$, líneas cuya expresión se ha expuesto en el número 10. Además, como las mayores líneas geodésicas son muy pequeñas respecto de la magnitud del elipsoide terrestre, las normales de Q y R difieren poco entre sí, y mucho menos debe diferir la línea Rm de la normal del punto Q, la cual designaré por N. El ángulo Rnm es complemento de la latitud del punto R, y por tanto, sustituyendo en el valor de x, lo transformaremos en este otro:

$$\text{sen.}\, x = \frac{Cn - Cm}{N}\cos.\, \varphi' \,\text{sen.}\, u$$

en el que designo por φ' la latitud de R y por u el ángulo que forma la sección QmR con el meridiano de R. Llamando φ la latitud del punto Q, é introduciendo los valores de Cn y Cm, resulta:

$$\text{sen.}\, x = \left(\frac{a e^2 \,\text{sen.}\, \varphi'}{r'} - \frac{a e^2 \,\text{sen.}\, \varphi}{r}\right)\frac{\cos.\, \varphi' \,\text{sen.}\, u}{N}$$

Puesto que x debe ser muy pequeño, podemos suponer $r = r'$ y tomar φ por φ' en la primera parte de la ecuación, con lo cual, introduciendo el valor de N, se obtiene:

$$\text{sen.}\, x = e^2(\text{sen.}\, \varphi' \cos.\, \varphi - \text{sen.}\, \varphi \cos.\, \varphi')\,\text{sen.}\, u = e^2 \,\text{sen.}\, (\varphi' - \varphi)\,\text{sen.}\, u$$

Como siempre es muy pequeña la diferencia de latitudes de los extremos de una línea geodésica, no hay inconveniente en tomar los arcos por sus senos, y así resultará finalmente:

$$x = e^2(\varphi' - \varphi)\,\text{sen.}\, u$$

La forma de esta expresión comprueba lo que habíamos anticipado, á saber, que x es extremadamente pequeño aun para los mayores valores que pueda adquirir en la práctica el factor $\varphi' - \varphi$. El ángulo u, que puede tomarse por el azimut de la sección, entra también en el valor de x; pero nótese que para una misma distancia QR, al paso que crece $\varphi' - \varphi$ disminuye u, y por el contrario, cuando este ángulo aumenta, disminuye la diferencia de latitud. En efecto, el mayor valor de $\varphi' - \varphi$ corresponde al caso en que Q y R estén en el mismo meridiano, y entonces $u = 0$. El mayor valor de sen. u corresponde al caso en que la sección es perpendicular al meridiano, y entonces $\varphi' - \varphi$ es muy pequeño aun para un valor considerable de la distancia QR. Así, pues, para aplicar la fórmula adoptaré el caso en que ambos factores contribuyen á aumentar el valor de x, suponiendo $u = 45°$. En esta circunstancia, y atendiendo á las dimensiones de la tierra, se halla que siendo la distancia QR de 100000 metros, la diferencia de latitud de sus extremos es de 38′ próximamente, de lo que resultará:

e^2	7.82441	
2280″	3.35793	
sen. 45°	9.84948	
x	1.03182	$x = 10''.8$

Se ve por este resultado la pequeñez del ángulo formado por la normal y la sección, á pesar de haberse supuesto de 100 kilómetros la línea geodésica, lo que equivale á cerca de 24 leguas mexicanas. En los casos ordinarios de la práctica están lejos los lados trigonométricos de llegar á esas dimensiones, pues lo más común es que estén comprendidos entre 20000 y 50000 metros; y entonces los valores de u variarán desde 2″ hasta 5″, ó sea casi 1″ por cada miriámetro, sin olvidar que esto se verifica en el caso desventajoso que corresponde á $u = 45°$.

Las consecuencias inmediatas de todo lo expuesto, son: que no resulta error alguno perceptible de suponer curvas planas las mayores líneas geodésicas; que las secciones de que provienen deben considerarse normales en todos sus puntos á la superficie del elipsoide; y por consiguiente, que los lados de una triangulación geodésica pueden tratarse como pequeños arcos de círculo máximo trazados sobre la superficie de una esfera. De aquí se deduce también que los ángulos de un triángulo geodésico, que no son otra cosa más que los de los planos verticales que por su intersección con la superficie del elipsoide terrestre determinan los lados trigonométricos, no difieren sensiblemente de los de un triángulo esférico.

27.—Hemos llegado en último resultado á la conclusión de que un triángulo geodésico puede considerarse como trazado sobre una esfera, conclusión á la que podría también habernos conducido la simple consideración de que siendo los mayores triángulos de una cadena extremadamente pequeños respecto de las dimensiones del globo, no debería resultar error de importancia al suponer la superficie terrestre compuesta de cascos esféricos, ó lo que es lo mismo, de admitir que cada elemento de la superficie esferoidal se confunde con el correspondiente al de la esfera osculatriz.

Aceptadas estas consecuencias, queda todavía una dificultad, cuál es la de asignar el radio de la esfera que coincida sensiblemente con el elipsoide en una pequeña extensión, tal como la superficie de un triángulo geodésico.

Hemos visto que todas las secciones verticales que pueden imaginarse al derredor de un punto tienen radios de curvatura que dependen del azimut de cada sección; pero que están comprendidos entre los límites ρ y N. La primera idea que se presenta naturalmente á la imaginación es la de investigar si alguno de estos límites puede tomarse por radio de la esfera osculatriz, pues se recordará que el pri-

mero mide la curvatura del meridiano y el segundo la del primer vertical, y que por tanto, los círculos descritos con esos radios se confunden sensiblemente en un espacio de uno ó dos grados con la curva á que pertenecen. La forma de sus expresiones indica á primera vista que para una misma variación de latitud, ρ debe variar más que N; pero para hacerlo más perceptible, si se diferencian los valores de N y ρ con relación á la latitud, se tendrá:

$$\mathrm{d}\,N = \frac{\frac{1}{2}\,a\,e^2\,\mathrm{sen.}\,2\,\varphi}{r^3}\,\mathrm{d}\,\varphi$$

$$\mathrm{d}\,\rho = \frac{\frac{3}{2}\,a\,e^2\,(1-e^2)\,\mathrm{sen.}\,2\,\varphi}{r^5}\,\mathrm{d}\,\varphi$$

y si se suprimen los denominadores, que siempre difieren poco de la unidad, y se desecha la cuarta potencia de e, se halla:

$$\mathrm{d}\,N = \frac{1}{2}\,a\,e^2\,\mathrm{sen.}\,2\,\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$$

$$\mathrm{d}\,\rho = \frac{3}{2}\,a\,e^2\,\mathrm{sen.}\,2\,\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi$$

de donde se deduce que $\mathrm{d}\,\rho = 3\,\mathrm{d}\,N$. Por consiguiente la esfera descrita con N, que se confundiría en un largo espacio con una zona elemental del elipsoide en la dirección de Oriente á Poniente, daría de Norte á Sur una curvatura algo menos pronunciada que la que corresponde al meridiano; y por el contrario, la esfera descrita con ρ por radio, daría una curvatura demasiado fuerte al primer vertical.

En vista de esto, lo que parece más razonable es buscar cuál es la sección cuya curvatura sea un término medio entre las del meridiano y del primer vertical. Sea M la primera y V la segunda: designando por S la de la sección que se busca, estableceremos la condición:

$$S = \frac{1}{2}\,(M + V)$$

de la que resulta esta otra:

$$M - S = S - V$$

Teniendo presente que las curvaturas de dos líneas son inversamente proporcionales á los radios que las miden, hallaremos:

$$M\rho = S R_u$$
$$VN = S R_u$$

La ecuación (26) del Capítulo I expresa el valor de R_u en función de N; para obtenerlo en función de ρ tendremos:

$$N = \rho(1 - e^2 \operatorname{sen.}^2 \varphi)(1 - e^2)^{-1} = \rho(1 + e^2 \cos.^2 \varphi)$$

valor que sustituído en la fórmula (26) produce:

$$R_u = \rho(1 + e^2 \cos.^2 \varphi)(1 - e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u) = \rho(1 + e^2 \cos.^2 \varphi \operatorname{sen.}^2 u)$$

Introduciendo esta expresión en la primera de las relaciones anteriores, y la (26) en la segunda, resultará:

$$\frac{M}{S} = 1 + e^2 \cos.^2 \varphi \operatorname{sen.}^2 u$$
$$\frac{V}{S} = 1 - e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u$$

de las que se obtiene:

$$M - S = S e^2 \cos.^2 \varphi \operatorname{sen.}^2 u$$
$$S - V = S e^2 \cos.^2 \varphi \cos.^2 u$$

Igualando estos valores para cumplir la condición establecida, hallaremos:

$$\operatorname{sen.}^2 u = \cos.^2 u \qquad \text{ó bien: } \tan.^2 u = 1$$

ecuaciones que quedan satisfechas para $u = 45°$. También las satisfacen los azimutes de $90° + 45°$, de $180° + 45°$ y de $360° - 45°$; pero como de estos últimos el primero y el tercero corresponden á la misma sección, así como el segundo á la sección de 45° de azimut, y todas ellas están igualmente inclinadas respecto del plano del meridiano contando los azimutes por cuadrantes, deduciremos que *la*

sección cuya curvatura es media entre las del meridiano y del primer vertical, es la que tiene 45° de azimut. (1)

Representando por R' el radio de curvatura de esta que podría llamarse *sección media*, tendremos las siguientes expresiones que crecen lentamente con la latitud:

$$R' = N\left(1 - \frac{1}{2} e^2 \cos.^2 \varphi\right)$$
$$R' = \rho\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \cos.^2 \varphi\right)$$

y que por lo demostrado, producirán una esfera que consideraremos como osculatriz, puesto que es la que mejor conviene al conjunto de curvaturas que presenta el elipsoide al derredor de un punto cuya

(1) Si suponiendo $u = 45°$, se multiplican uno por otro los valores de $\frac{M}{S}$ y $\frac{V}{S}$ desechando la cuarta potencia de e, resulta:

$$S = \sqrt{MV}$$

lo cual indica que la curvatura de la sección, cuyo azimut es de 45°, puede tomarse igual al medio geométrico entre las correspondientes al meridiano y al primer vertical. A primera vista parece que este resultado no puede conciliarse con el que antes se ha obtenido; pero es fácil demostrar que los términos medios aritmético y geométrico entre dos cantidades, se confunden sensiblemente siempre que la diferencia de las cantidades es pequeña respecto de sus magnitudes.

Sean, en efecto, a y $a + x$ las dos magnitudes. Su medio aritmético será:

$$A = a + \frac{1}{2} x$$

y su medio geométrico:

$$G = (a^2 + ax)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{x^3}{16a^3} - \ldots\ldots\right)$$

ó bien:

$$G = A - \frac{x^2}{8a} + \frac{x^3}{16a^2} - \ldots\ldots$$

Se ve por esta relación que los valores de A y G se aproximan tanto más á la igualdad, cuanto más pequeño sea x respecto de a, y llegarían á ser rigurosamente iguales si $x = 0$. Según esto, en casos análogos, puede adoptarse en la práctica indiferentemente el medio aritmético ó el geométrico según la naturaleza de los cálculos, siendo el geométrico más cómodo para el uso de los logaritmos. Por esta razón se adoptó en el teorema demostrado en el número 11, referente al radio medio de la tierra.

latitud sea φ. Con ayuda de las Tablas que contienen los logaritmos de N y de ρ, se hallará fácilmente el de R', por las fórmulas:

$$\log. R' = \log. N - (7.16116) \cos.^2 \varphi$$
$$\log. R' = \log. \rho + (7.16116) \cos.^2 \varphi$$

28.—Casi todos los autores de Geodesia consideran suficientemente exacto el tomar la normal mayor por radio de la esfera osculatriz. Sin negar que este procedimiento basta en la mayor parte de los casos, creo que el método expuesto es menos arbitrario, y de resultados más estrictos en aquellos casos excepcionales en que los triángulos adquieran dimensiones considerables. Por otra parte, cuando la resolución de un problema recae sobre una línea cuyo radio de curvatura difiera notablemente del de la esfera osculatriz que se haya supuesto, y se tema que esta diferencia dé lugar á algún error de importancia, puede corregirse el primer resultado de la manera que voy á indicar.

Sea s la extensión lineal de una línea geodésica, que se ha hallado que abraza una amplitud de g' grados en una esfera de radio R'. La relación entre estas cantidades existe en la ecuación:

5

$s : 2\pi R' = g' : 360°$

R' $\quad s = \frac{2\pi R' g'}{360°} \longrightarrow$

$$s = \frac{\pi}{180°} R' g'$$

Pero si se reconoce que el arco cuya extensión es s forma parte de una sección cuyo radio de curvatura es λ, la amplitud g que realmente le corresponde se tendrá por la fórmula:

$$s = \frac{\pi}{180°} \lambda g$$

De donde igualando los dos valores de s resulta:

$$g = g' \frac{R'}{\lambda}$$

de suerte que basta multiplicar la amplitud hallada en la esfera supuesta, por la relación que existe entre su radio y el de curvatura

de la sección á que pertenece la línea, para hallar su verdadera amplitud.

Si por el contrario, la amplitud es constante y se desea conocer el valor lineal s, sabiendo que es s' en la esfera osculatriz, se tendrá:

$$s = s' \frac{\lambda}{R'}$$

que permite, como antes, corregir el primer resultado cuando se juzgue necesario.

Creo poder anticipar que sólo en casos especiales será preciso hacer esta corrección, como cuando se trata de arcos pertenecientes al meridiano ó al primer vertical, cuyas curvaturas forman los extremos mayor y menor entre los cuales están comprendidas las de las demás secciones. En la mayoría de los casos basta emplear el radio de la esfera osculatriz, y aun en muchos, usar un valor constante del radio terrestre, tal como el que convenga á la latitud media del país en que se trabaja.

29.—Reducido así el problema de las triangulaciones geodésicas á las aplicaciones comunes de la trigonometría esférica, enumeremos brevemente las diversas operaciones que constituyen una triangulación. Lo mismo que se hizo en la Topografía, las clasificaremos en el orden siguiente:

I.—La medida de una ó más bases, cuya longitud sea proporcionada á los lados de los primeros triángulos, y que según las circunstancias, varía desde 5000 hasta 15000 ó más metros.

II.—La elección de los vértices trigonométricos, considerándolos desde el doble punto de vista de ser notables por su posición y de prestarse á que los triángulos de la cadena tengan una forma conveniente.

III.—La medida de los ángulos y la orientación de uno ó más lados.

IV.—La resolución de los triángulos y los cálculos relativos á las coordenadas geográficas de sus vértices.

V.—La formación de la *carta*, ó sea de la *proyección*, que es una construcción geométrica convencional para representar sobre la superficie plana del papel otra superficie no desarrollable, como es la del elipsoide terrestre.

A las diferencias establecidas en este Capítulo entre las triangulaciones topográficas y las geodésicas, es preciso agregar otras de la mayor importancia. En primer lugar, la orientación de una cadena geodésica debe hacerse por procedimientos astronómicos, únicos que pueden suministrar toda la exactitud que se necesita. En segundo lugar, el cálculo de las coordenadas geográficas de los vértices demanda la determinación directa de las de uno de ellos por lo menos, también por métodos astronómicos de la mayor precisión. Por esta razón he consagrado la Parte Tercera de este libro á la exposición de los métodos más usuales que sirven para medir directamente el azimut de una línea, y para determinar la latitud y la longitud geográficas de un punto. Estas operaciones constituyen la aplicación indispensable de la Astronomía práctica á la Geodesia.

CAPITULO III.

MEDIDA DE LAS BASES.

30.—La medida de las bases geodésicas es la operación más importante y quizá la más difícil de una triangulación. Nada hay que añadir á lo que se dijo en la Topografía respecto de la elección del terreno, si no es que siendo las bases geodésicas más grandes que las topográficas, necesitan mayor esmero en la elección de las localidades y en el trazo ó demarcación de las líneas. Por lo común se hace éste con un buen teodolito perfectamente nivelado, estableciendo jalones á intervalos de 50^m, exactamente en la dirección que marca el hilo de la retícula, el cual se ha hecho coincidir primero con la señal que indica el término de la línea.

Los instrumentos que se usan para la medida consisten en reglas de madera ó de metal, cuya longitud varía generalmente de 3^m á 5^m, montadas en caballetes ó tripiés con todos los mecanismos necesarios para comunicarles pequeños movimientos en el sentido vertical y en el horizontal, á fin de colocarlas á nivel y exactamente en el plano vertical que pasa por los extremos de la base. La longitud total de las reglas se llama *estación*.

Antes de describir algunos de estos aparatos, indiquemos el método que se sigue para determinar con toda precisión el tamaño de las reglas. Se sabe que todos los cuerpos experimentan variaciones en sus dimensiones, debidas á los cambios de temperatura á que están sujetos, y esta propiedad general de la materia es la que se llama *dilatabilidad.* Sus efectos son tan constantes, que se han utilizado para construir instrumentos, llamados *termómetros*, que sirven para medir las temperaturas. Un termómetro común consiste en un tubo de vidrio cilíndrico, hueco y muy delgado, lleno en parte de un líquido como mercurio ó espíritu de vino, y con una escala al lado que señala el lugar en que se detiene la columna líquida en cualquiera temperatura. Para graduar la escala de los termómetros se han tomado por término de comparación dos temperaturas fijas: la inferior es la que tiene una masa de hielo cuando se deshace ó se funde, y la superior la que conserva el agua pura al pasar al estado de vapor bajo la influencia del calórico. La primera es constante en cualquier lugar de la tierra; pero la segunda depende mucho de la presión que experimenta el líquido en el momento de la ebullición, ya sea que aquélla provenga del peso de la atmósfera, ya del de cualquiera otro gas que lo oprima. Por esta causa se ha adoptado por temperatura normal de la ebullición, la que adquiere el agua pura hirviendo libremente al nivel del mar, donde se supone constante la presión atmosférica.

Si un termómetro construído como se ha dicho, perfectamente cerrado y libre de aire en su interior, se pone en contacto con trozos de hielo al fundirse, presentará el fenómeno de que va disminuyendo la altura de la columna líquida hasta que se detiene en un punto en el cual permanece por todo el tiempo que tarda el hielo en liquidarse. Entonces se hace una señal en el tubo para marcar el lugar que ocupa el extremo de la columna á esta temperatura fija. En seguida se pone en una vasija de agua caliente, y se ve que la columna sube gradualmente, y se detiene cuando el agua comienza á hervir permaneciendo en el mismo punto mientras dura la ebullición. Si esta última operación se ha hecho al nivel del mar, podrá marcarse el segundo término de la escala termométrica, y dividirse en partes iguales el espacio comprendido entre ellos, á fin de apreciar con el instrumento así graduado, las temperaturas intermedias.

En la escala del termómetro centesimal ó centígrado se divide ese espacio en 100 partes iguales, representando cada una de ellas un grado de temperatura, y colocándose el *cero* de la escala en el punto

de fusión del hielo. En el termómetro de Réaumur el cero está también en el punto de fusión; pero difiere del centígrado en que tiene marcados 80° en la temperatura de la ebullición. El termómetro Farenheit señala 32° en el punto de fusión y 212° en el de ebullición. Las dos primeras escalas, especialmente la centesimal, se usan en Francia: los ingleses emplean casi siempre la de Farenheit.

En todo lo que haya necesidad de exponer respecto de temperaturas adoptaré la escala centesimal; pero como es frecuente tener que valerse de termómetros de otra construcción, trazaré el modo de convertir los grados de cada uno en los de los demás. Llamando c, f y r respectivamente las graduaciones centesimal, de Farenheit y de Réaumur, puesto que el cero de la primera y la última corresponden á la misma temperatura, se tienen $100:80::c:r$, de donde resulta: $r=0.8\,c$ y también $c=\frac{5}{4}r$. El de Farenheit señala 32 en el punto de fusión, y así tendremos: $212-32:100::f-32:c$, y de aquí se obtiene:

$$f=\frac{9}{5}c+32°$$

$$c=\frac{5}{9}f-17°.78$$

Del mismo modo se hallará:

$$r=\frac{4}{9}f-14°.22$$

$$f=\frac{9}{4}r+32$$

fórmulas que permiten hacer fácilmente la reducción de las indicaciones de una escala á las de cualquiera otra.

31.—Puesto que el fenómeno de la dilatabilidad altera las dimensiones de los cuerpos, es preciso llevarlo en cuenta al comparar con la unidad fundamental el aparato que sirve para medir las bases geodésicas. Se llama *coeficiente de dilatación* de una substancia cualquiera, la cantidad que aumenta su unidad de longitud por un incremento de un grado centesimal de temperatura. Según esto, una regla que que tenga l_0 unidades de longitud á la temperatura de cero, aumentará cl_0 por un grado, y en general ctl_0 por t grados de temperatura, siendo c su coeficiente de dilatación, de modo que su longitud á t grados será:

$$l_t = l_0 + ctl_0 = l_0(1+ct) \quad \text{.........................} \quad (1)$$

Si se mide, pues, una barra de cualquier material á la temperatura del hielo, y después á la temperatura t, la fórmula anterior dará su coeficiente, á saber:

$$c = \frac{l_t - l_0}{tl_0} \quad \text{.........................} \quad (2)$$

Para los cuerpos sólidos siempre es c extremadamente pequeño, de suerte que no es indispensable que una de las medidas de la barra se haga á 0°; porque si se hacen dos medidas á las temperaturas t_1 y t_2 se tiene:

$$l_1 = l_0(1+ct_1)$$
$$l_2 = l_0(1+ct_2)$$

de donde eliminando á l_0 resulta:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1+ct_1}{1+ct_2} = (1+ct_1)(1-ct_2) = 1 + c(t_1 - t_2)$$

y despejando se encuentra:

$$c = \frac{l_1 - l_2}{l_2(t_1 - t_2)} \quad \text{.........................} \quad (3)$$

La Tabla que sigue presenta los valores del coeficiente de dilatación c hallados experimentalmente para diversas substancias:

MATERIAS.	COEF. DE DILAT.
Oro	0.00001466
Platina	0.00000884
Plata	0.00001910
Cobre	0.00001718
Latón	0.00001878
Bronce	0.00001817
Hierro forjado	0.00001220
Hierro fundido	0.00001125

MATERIAS.	COEF. DE DILAT.
Acero no templado	0.00001079
Acero templado	0.00001239
Plomo	0.00002857
Zinc	0.00002942
Estaño	0.00002173
Vidrio	0.00000861
Mercurio	0.00018018
Agua pura	0.000466
Agua salada	0.000500
Aire y gases	0.00367

32.—Los modelos ó patrones de medidas que conservan los gobiernos son por lo regular de metal, y tienen marcada la temperatura á la cual representan la unidad legal de longitud. El metrotipo de Francia es de platina, y el de México, comparado con aquél, es de latón. Ambos representan el metro legal á 0° de temperatura, y á cualquiera otra, deberán calcularse sus longitudes por la fórmula (1), haciendo en ella $l_0 = 1$, y tomando por c el valor que corresponde al metal de que están construídos.

Supongamos que la unidad–modelo con que se cuente para determinar la verdadera longitud de una regla geodésica, no represente el metro á 0°, sino que haya sido construída igual al metro de Francia cuando ambos tenían la temperatura θ. Llamando F el metro francés que es de platina, y M el que va á usarse, se tiene:

$$F_\theta = M_\theta$$

Pero designando por p el coeficiente de dilatación de la platina, y por c el del material del metro M, se tiene también:

$$F_\theta = 1^m + p\theta$$
$$M_\theta = M_0(1 + c\theta)$$

luego igualando, hallaremos:

$$M_0 = \frac{1+p\theta}{1+c\theta} = 1^m - (c-p)\theta \quad \text{...............} \quad (4)$$

fórmula por cuyo medio se determina la longitud del modelo M á 0° de temperatura.

La temperatura x á la cual M es exactamente igual á 1^m, se obtendrá por la ecuación:

$$1^m = M_x = M_0(1+cx)$$

Sustituyendo el valor de M_0 y despejando, resulta:

$$x = \frac{(c-p)\theta}{c - c(c-p)\theta}$$

pero como el segundo término del denominador es de segundo orden, tendremos desechándolo:

$$x = \frac{(c-p)\theta}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

La temperatura θ de la comparación debe estar grabada en el metro. Su longitud á cualquiera otra temperatura t, será:

$$M_t = M_0(1+ct) = 1^m + p\theta + c(t-\theta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ó bien en función de x:

$$M_t = M_x[1+c(t-x)] = 1^m + c(t-x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Supongamos que se tenga un metro de latón cortado igual al de Francia á la temperatura de 8°. La temperatura á la cual representa realmente el metro legal, es:

$$x = \frac{(0.0000188 - 0.0000088)\,8}{0.0000188} = 4°.3$$

Su longitud á 0° será:

$$M_0 = 1^m - 0.0000188 \times 4.3 = 0^m.99991916$$

y la que tenga á cualquiera otra temperatura t:

$$M_t = 1^m + 0.0000188\,(t - 4°.3)$$

33.—Comprendidas estas generalidades, supongamos que se quiera determinar la longitud de una regla geodésica para medir una base. Llamemos R_0 su tamaño á 0° y m el coeficiente de dilatación del material de que está construída. A una temperatura cualquiera

t, á la cual se hace la comparación con el metro-modelo, tendrá la regla la longitud:

$$R_t = R_0(1+mt) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Siendo c el coeficiente de dilatación que conviene al metal de la unidad-modelo, y n el número de veces que esta cupo en la longitud de la regla, se tendrá:

$$R_t = n(1+ct) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Igualando ambos valores, resulta:

$$R_0 = n[1+(c-m)t] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Conociendo la longitud de la regla á 0°, la ecuación (8) dará la que tiene á otra temperatura cualquiera. Si la regla y el metro son de una misma substancia, se tendrá $m=c$, y la última fórmula da $R_0 = n$. En efecto, en este caso son iguales los cambios de longitud.

Puede suceder que m no sea conocido, y entonces para determinar su valor á la vez que el de R_0, es insuficiente la ecuación (10); pero repitiendo la comparación á otra temperatura t', se tendrá:

$$R_0 = n'[1+(c-m)t']$$

y eliminando á R_0 entre ésta y la fórmula (10), se halla:

$$m = c + \frac{n-n'}{nt-n't'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

En seguida la ecuación (10) suministrará el valor de R_0. Debe procurarse que las temperaturas t y t' difieran bastante con el objeto de disminuir el efecto de los pequeños errores de observación.

34.—El método que he expuesto fué con poca diferencia el que seguí para comparar el aparato geodésico con que medí la base para la triangulación del Valle de México. Las reglas eran de madera, substancia cuya dilatabilidad es tan pequeña, que muchos físicos la suponen nula. Sin embargo, Kater ha hallado que el pino blanco tiene un coeficiente de 0,0000041, y Puissant encontró 0.0000047 para la madera de sabino. Yo no conocía más que esas dos experiencias, y me propuse determinar el coeficiente de nuestro pino [*oyamel*] que se han hecho posteriormente á la medida de la base. El coeficiente de dilatación del pino resulta:

Según mis observaciones...................	$m = 0.0000041$
" las del Sr. Fernández....................	$m = 0.0000039$
" las del Sr. Herrera.......................	$m = 0.0000044$
" las del Sr. Iglesias.......................	$m = 0.0000045$

"Atendida la extremada pequeñez de esta cantidad, todos estos números pueden considerarse idénticos á los de Kater y Puissant."

A pesar de la concordancia de los anteriores resultados, para adoptar los valores finales se combinaron todas las observaciones, obteniéndose definitivamente:

$$E_0 = 20^m.55134 \qquad m = 0.0000042$$

35.—Los aparatos para la medida de las bases se han variado tanto, que no podríamos hacer la descripción de todos ellos, ni aun mencionar los diversos arbitrios á que han acudido los geógrafos para conseguir la mayor precisión combinada hasta donde es posible con la comodidad en el manejo de estos instrumentos. Haremos sólo una breve descripción de dos ó tres sistemas, persuadidos de que bien penetrado el ingeniero de las condiciones que debe reunir cualquiera de ellos, apreciará las modificaciones que advierta en los que tenga ocasión de usar, y aun acaso inventará otras que estén adecuadas á las circunstancias que le rodeen.

Las reglas, llamadas de Borda, con que se han medido algunas de las bases de la carta de Francia, son de platina y en número de cuatro. La longitud de cada una es próximamente de 4^m, y tiene sobrepuesta otra regla de cobre un poco más corta, fijada invariablemente por uno de sus extremos á la de platina y libre por el otro. El objeto de esta combinación bimetálica es el de poder apreciar la temperatura del aparato, por medio de la diferencia de dilataciones de las dos reglas, con cuyo fin tiene trazadas la de cobre algunas divisiones en su extremidad libre, y la de platina un vernier para estimar las fracciones de aquellas. Además de esto, cada regla de platina tiene en uno de sus extremos otra regla pequeña que se mueve en una ra-

nura, en la cual hay otro vernier para apreciar la partes de las divisiones de la regla pequeña. Con este mecanismo, no es preciso poner las reglas en contacto al hacer la medida, sino que se colocan á una corta distancia una de otra, la cual se mide después sacando la regla pequeña hasta que toque á la inmediata, y anotando la prolongación que indica el vernier de la ranura. Cada una de las reglas está sostenida por otra de madera que descansa á su vez sobre tripiés con puntas de hierro que se clavan en el suelo por medio de un mazo.

El célebre astrónomo Bessel hizo uso de un aparato, también bimetálico, compuesto de reglas de hierro y de zinc. Las primeras tenían una longitud de 4^m, por $0^m.025$ de anchura y $0^m.01$ de espesor próximamente; y las de zinc de igual grueso y de unos $0^m.012$ de ancho, eran un poco menores que las de hierro. Estas últimas estaban terminadas por aristas verticales en forma de bisel, y las de zinc por aristas horizontales. La diferencia de longitud de estas dos reglas se medía por medio de una lámina de vidrio dividida, y terminada por caras no paralelas, formando así una especie de cuña que se introducía entre la arista vertical de la regla de hierro y la horizontal de la de zinc. Esta medida daba á conocer la diferencia de dilataciones de los dos metales.

Los astrónomos Zach y Plana midieron las bases de Aix y de Turin con reglas de madera de sabino impregnadas de aceite y barnizadas, con el objeto de preservarlas de la humedad. Al operar, el barón de Zach dejaba de una regla á la inmediata un pequeño espacio, que medía en seguida con otra regla pequeña de cobre dividida. Plana hacía mover una de las reglas hasta que un hilo muy fino que tenía cada una en un anillo fijo en su extremidad, cortase exactamente un punto marcado en la regla inmediata.

El ingeniero piamontés Porro ha inventado un aparato de la mayor precisión, y que resulta del uso combinado de una varilla de madera y de dos ó más microscopios. La varilla, de 3^m de longitud próximamente y de $0^m.01$ de diámetro, está contenida por medio de diafragmas en el eje de un tubo de cobre, y lleva en sus extremidades dos láminas metálicas pequeñas y divididas en diezmilímetros. Los microscopios, apoyados en sólidos tripiés que se clavan en la dirección de la base, y á una distancia uno de otro próximamente igual á la longitud de la varilla, están dispuestos de manera que sus ejes ópticos pueden colocarse verticalmente por medio de niveles de aire. De esta manera, la distancia entre los ejes de dos microscopios consecutivos es la que se mide con la regla ó varilla de madera, pudiéndose estimar pequeñísimas fracciones de las divisiones que la terminan, con los hilos micrométricos de los microscopios.

Se han usado también cadenas metálicas á una tensión constante, hilos delgados de hierro, tubos de vidrio, etc., etc. El vidrio tiene un coeficiente de dilatación tanto más pequeño cuanto menor es la cantidad de plomo que contiene: el del *flint glass* inglés es sólo 0.00000812; pero además de la fragilidad de los aparatos construídos de vidrio, parece que esta substancia no se dilata con mucha regularidad, lo cual puede ser causa de graves errores.

La madera, como se ha visto, es muy poco dilatable; pero varía notablemente de longitud por la acción de la humedad. De los experimentos del General Roy, geógrafo inglés, resulta que una regla de madera expuesta durante una noche á la humedad aumentó 0.000133 de su longitud. Para evitar este inconveniente se impregnan muy bien las reglas de aceite hirviendo, y después se cubren con varias capas de barniz, de pintura al óleo, ó mejor de ambas cosas. Con estas precauciones, y la de preservarlas siempre de las variaciones higrométricas demasiado bruscas, creo que se puede estar seguro de que un aparato de madera suministrará cuanta exactitud se necesita, teniendo la ventaja del poco peso, respecto de los aparatos metálicos.

36.—Para concluir, copiaré de la memoria que antes se ha citado, la descripción del aparato con que se midió la base del Valle de México, una de cuyas reglas está representada en la fig. 5ª, y que se construyó en esta ciudad.

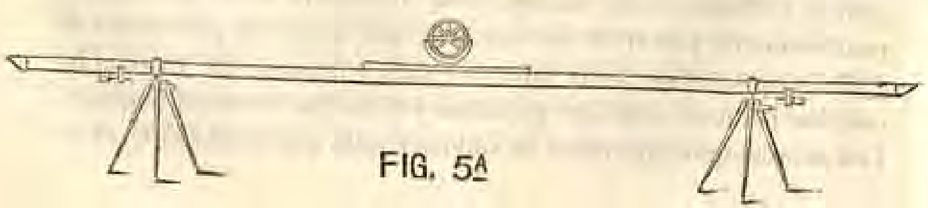


FIG. 5ª

"Las cinco reglas que lo componen son de madera de pino [*oyamel*], de poco más de cuatro metros de longitud cada una, y cuya sección es rectangular de 0ᵐ.05 por 0ᵐ.06. Cada regla está terminada por casquillos de latón de una forma tal, que siendo sus extremos de un poco más de un milímetro cuadrado, conservan una de las aristas de la regla en toda su longitud, disposición muy ventajosa tanto para alinear el sistema y establecer bien los contactos, como para determinar la verdadera longitud de las reglas, comparándolas con la unidad fundamental. Armado el aparato, cada regla queda sostenida por dos rectángulos de madera, colocados al cuarto y tres cuartos de su extensión, y provistos de tornillos que obrando lateralmente, sirven para comunicar los movimientos azimutales y para fijar la regla en una posición invariable luego que se ha situado de una manera conveniente. A cada rectángulo va unido un eje vertical que entra en una abertura correspondiente practicada en las mesetas de los tripiés, que sirven de apoyo á todo el sistema, y que tienen también tornillos de presión que sirven para colocar la regla invariablemente á la altura que conviene. Los movimientos longitudinales se comunican á cada regla por un tornillo que se le fija voluntariamente y obra sobre los rectángulos que la sostienen. Al principio había yo adoptado en lugar de los tripiés unas estacas cónicas de encino, terminadas por casquillos y puntas de hierro, que tenían cosa de 0ᵐ.75 de longitud y 0ᵐ.07 de diámetro en su cara superior, en cuyo centro estaba la abertura destinada á recibir el eje cilíndrico de que he hablado, y el tornillo de presión correspondiente.

"Estas estacas que se clavaban en la tierra á golpe de mazo, me parecieron preferibles á los tripiés, por ser más portátiles y prestar mucha solidez; pero me ví en el caso de renunciar á su uso, teniendo que operar á lo largo de un camino cuyo lecho, formado de piedras, hacía difícil y dilatada la operación de fijar las estacas. Sin embargo, la construcción de los tripiés y otras pequeñas modificaciones que se han hecho al aparato, cuando lo indicaba la experiencia, no han aumentado los gastos del Ministerio, pues han sido á mis expensas.

"Las reglas no están formadas de una sola pieza, sino compuestas de láminas delgadas de madera ensambladas longitudinalmente, lo que, como se sabe, garantiza más la rigidez del conjunto. La madera se escogió bastante seca, y se impregnó además de aceite caliente aplicado varias veces, cubriendo en seguida las reglas de una capa gruesa de pintura al óleo, con el objeto de preservarlas mejor de la humedad.

"Para determinar la pequeña inclinación de las reglas durante la medida, había yo adoptado primero un clisímetro de perpendículo, provisto de un arco de círculo graduado, que con el vernier de la alidada móvil, daba directamente los ángulos con aproximación de un minuto; pero también tuve que desecharlo, pues noté que cuando hacía algún viento la alidada se desviaba algo de la vertical, no siendo bastante pesada para conservar su posición invariable. Un aumento de peso me hacía temer la flexión de la regla geodésica que sostenía el clisímetro al determinar su ángulo de inclinación; y por otra parte, no era fácil construir el mecanismo de tornillos de presión y aproximación con que se hubiera podido remediar aquel inconveniente; y así es que adopté otro sistema de clisímetro incomparablemente más exacto, y libre de aquel defecto. El nuevo instrumento es un círculo entero dividido, que da una aproximación de 10″ con dos nonius, y cuyo primer destino era la construcción de los ángulos sobre el papel. Para adaptarlo al uso á que iba á dedicarse, lo hice colocar sobre un apoyo de madera, de modo que permaneciendo fijo el círculo, quedase móvil la alidada, en cuyo centro se le fijó un nivel de aire. Con esta disposicion, situado el clisímetro sobre la superficie cuya inclinación se quiere determinar, no hay más que conducir la burbuja de aire al medio del tubo del nivel por medio del tornillo de aproximación, y leer la indicación de la graduación, procediendo en seguida del mismo modo después de invertir el clisímetro. Esta doble lectura de la graduación proporciona inmediatamente el conocimiento de que no ha habido error en las indicaciones obtenidas en las dos posiciones del instrumento, pues al paso que la semidiferencia de ambas lecturas da el ángulo de inclinación que se busca, su semisuma da el error del índice, que debe ser una cantidad constante."

37.—Pasemos ahora al modo de operar en el terreno. Luego que se tiene perfectamente determinada la longitud de las reglas á 0° ó

á cualquiera otra temperatura, y conocido el coeficiente de dilatación de la substancia de que están construidas, se procede á la medida de la base, previamente trazada, como se ha dicho, por medio de jalones á 50 ó 100 metros de distancia. Para establecer próximamente en el alineamiento de la base los tripiés que sostienen las reglas, es muy conveniente atar un cordel muy tendido de estaca á estaca, á fin de mover ya poco las reglas para alinearlas con precisión. Este alineamiento se hace valiéndose de una de las aristas de las reglas, ó si se cree necesario se colocan con ese objeto encima de ellas dos pínulas para dirigir la visual.

La extremidad de la primera regla se pone en la vertical del punto que señala el extremo de la base; punto que suponemos muy bien marcado en el centro de un poste ó pilastra de piedra. Una plomada de hilo muy fino se usará para señalar esta vertical, de suerte que la primera regla se pone en contacto con el hilo. Luego que está colocada así, y bien alineada, se fija á sus apoyos por temor de algún movimiento, y se establece la segunda en el alineamento, sin tocar la primera regla, hasta que ambas se ponen en contacto, valiéndose de los tornillos que les comunican movimientos pequeños. Se procede del mismo modo hasta colocar las cuatro ó cinco reglas que forman la estación. En seguida se anota la temperatura del aparato indicada por el termómetro ó los termómetros que van unidos á él, teniendo cuidado de que estos instrumentos estén en contacto con las reglas, pero á cubierto de los rayos directos del sol.

Si las reglas no se han establecido horizontalmente, lo cual si no difícil es dilatado, se anota su ángulo de inclinación, que se mide ó con un círculo como el que se describió al hablar del aparato del Valle, ó bien por medio del instrumento representado en la fig. 6ª Este es un clisímetro común de perpendículo al que se adapta un arco de círculo $A\,B$, que recorre la alidada $C\,D$, fija en el centro de la graduación. Un nivel de aire pequeño E indica la verticalidad de la

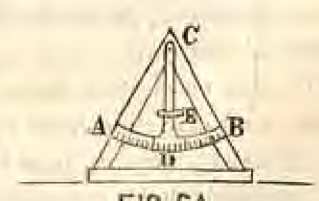


FIG. 6ª

alidada, la cual tiene un vernier y sus tornillos de presión y aproximación. Es necesario leer la indicación del clisímetro en dos posiciones inversas para eliminar el efecto de los errores iniciales, según se ha explicado en la Topografía. Una aproximación de $1'$ es suficiente en todos casos.

Luego que se ha anotado la inclinación de cada regla y la temperatura media del aparato, se quita la primera para colocarla á continuación de la última, y se prosigue así, teniendo cuidado de evitar que choquen entre sí, y de inscribir en el apunte la indicación que corresponde á cada una, para lo cual es conveniente numerarlas.

Como el choque de una regla con otra podría acaso producir el retroceso de la ya establecida, y por consiguiente, la pérdida de toda la operación ó al menos del trabajo del día, es en general preferible dejarlas á una pequeña distancia, y medir en seguida este espacio por medio de otra regla pequeña finamente dividida y un vernier, ó bien por medio de un triángulo de madera ó de metal $A\,B\,C$ (fig. 7ª). Estando divididos sus lados, para valuar la distancia $b\,c$ de una regla á la inmediata, se tiene:

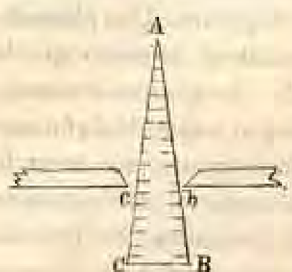


FIG. 7ª

$$b\,c = A\,b\,\frac{B\,C}{A\,B}$$

Si $B\,C$ es, por ejemplo, de $0^m.025$ y $A\,B$ de $0^m.5$, se podrá apreciar teóricamente $\frac{1}{20}$ de las divisiones de $A\,B$, las que si son milímetros, darán al instrumento una aproximación de $0^m.00005$.

Cuando en el curso de la medida y por los accidentes del terreno, haya necesidad de colocar algunas reglas más altas ó más bajas que las ya establecidas, se hace también uso de una plomada para situar los extremos de las reglas en contacto con el hilo, cuyo espesor debe llevarse escrupulosamente en cuenta. El peso de la plomada debe recibirse en una vasija llena de agua para evitar las oscilaciones que harían incierto el contacto. Se usa igualmente la plomada al termi-

nar el trabajo de cada día, proyectando la extremidad de la última regla sobre la cabeza horizontal de una estaca firmemente clavada en el suelo. Desde el punto así fijado se parte al día siguiente.

Toda precaución, por exagerada que parezca, jamás lo es en una operación tan delicada como la medida de una base geodésica. No insistiré más sobre el particular, considerando que lo expuesto será suficiente para persuadir al geómetra de que en este género de trabajos debe ponerse á cubierto hasta donde le sea posible de toda clase de errores, acudiendo á todos los recursos de su ingenio y de su saber para conseguirlo.

Los ángulos de inclinación sirven para reducir cada regla á su proyección horizontal, por medio de la fórmula:

$$r = R \cos.\, i$$

Como el ángulo i raras veces excede de $2°$, es más exacto introducir un seno en la ecuación, calculando la diferencia de la regla á su proyección, á saber:

$$R - r = R(1 - \cos.\, i) = 2R\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Esta fórmula se reduce á tabla con el valor hallado para R, y haciendo variar á i de dos en dos ó de tres en tres minutos desde $0°$ hasta $2°$. De ella se interpola para cualquiera inclinación. Si no todas las reglas tienen exactamente la misma longitud, no es, sin embargo, necesario calcular la tabla para cada una, pues diferenciando la fórmula con relación á R, se encuentra:

$$\text{d}\,(R - r) = 2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,i\,.\,\text{d}\,R$$

y dividiendo por aquella, se tiene:

$$\text{d}(R - r) = (R - r)\,\frac{\text{d}\,R}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

de manera que para una regla de longitud $R + \text{d}\,R$, se tomará la reducción que corresponde á R y se multiplicará por la constante $\frac{dR}{R}$ para obtener la pequeña corrección que debe sufrir la reducción primitiva, que para la nueva regla será $R-r+d(R-r)$.

Lo más común en la práctica es que i no llegue á 1°, y entonces la ecuación (12) puede simplificarse introduciendo á i en minutos, con lo que se tendrá:

$$R-r=\frac{1}{2}Ri^2 \text{sen.}^2 1'=(2.62642)Ri^2 \text{............} \quad (14)$$

Atendiendo á la pequeñez de la reducción, es evidente que R puede tomarse á cualquiera temperatura, sin hacerle corrección alguna por la dilatación.

38.—Veamos ahora cómo se calcula el valor definitivo de la base. Sea n el número de estaciones contenidas en ella, y $t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots t_n$ las temperaturas anotadas en cada estación. La base será:

$$B=E_1+E_2+E_3+\ldots\ldots E_n \text{..................} \quad (A)$$

En lugar de calcular separadamente la longitud de cada estación, Mr. Salneuve propone un procedimiento que voy á exponer dándole más generalidad. Sea x la temperatura que debe tener la estación para representar exactamente N metros á 0°, y se tendrá la condición:

$$E_x=N \text{................................} \quad (B)$$

Llamando θ la temperatura á que se comparó el aparato con la unidad fundamental, se tiene también la ecuación:

$$E_\theta=N_\theta$$

Pero como $E_\theta=E_x[1+m(\theta-x)]$ y también $N_\theta=N(1+c\theta)$, resultará atendiendo á la relación (B):

$$x=\frac{(m-c)\theta}{m}$$

Una vez conocida x, cada uno de los términos de la ecuación (A) puede expresarse en función de x, pues se tiene:

$$\begin{aligned}
E_1&=E_x[1+m(t_1-x)]\\
E_2&=E_x[1+m(t_2-x)]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_n&=E_x[1+m(t_n-x)]
\end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$B=nE_x+mE_x(t_1+t_2+t_3+\ldots\ldots t_n)-mnxE_x$$

Sustituyendo N metros en lugar de E_x, según expresa la condición establecida, se tendrá en último resultado:

$$B=Nn+Nm(t_1+t_2+t_3+\ldots\ldots t_n)-Nn(m-c)\theta \text{......} \quad (15)$$

No debe olvidarse que m representa el coeficiente de dilatación de las reglas, y c el de la unidad-tipo, siendo θ la temperatura en el momento de la comparación.

Este método es sin duda muy elegante; pero me parece más sencillo el que seguí para calcular la base del Valle de México. Expresando los términos de la ecuación (A) en función de la longitud del aparato á 0°, para lo cual se tiene:

$$\begin{aligned}
E_1&=E_0(1+mt_1)\\
E_2&=E_0(1+mt_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_n&=E_0(1+mt_n)
\end{aligned}$$

se hallará:

$$B=nE_0+mE_0(t_1+t_2+t_3+\ldots\ldots t_n)$$

Llamando T el promedio de todas las temperaturas anotadas durante la medida, tendremos:

$$nT=t_1+t_2+t_3+\ldots\ldots t_n$$

con lo cual el valor de la base es:

$$B=nE_0+mnTE_0 \text{........................} \quad (16)$$

El valor de E_0 se obtiene, según se ha visto, por las comparaciones del aparato con el metro-patrón.

Lo precedente supone que todas las reglas se colocaron horizontalmente y en contacto; pero por lo general no es así, y se corregirán los valores precedentes de la base, añadiéndoles la suma de las distancias de las reglas, y restándoles la suma de las reducciones al horizonte dadas por las fórmulas (12) ó (14). Designando por Δ los pequeños espacios de una regla á otra, y por Σ la suma de términos semejantes, la corrección es: $\Sigma(\Delta)-\Sigma(R-r)$. Cuando se haya usado la plomada también se hará una corrección aditiva para llevar en cuenta el grueso del hilo.

39.—Según se recordará, las triangulaciones geodésicas deben proyectarse sobre la superficie del elipsoide formado por la prolongación ideal de las aguas del Océano; y esto se consigue proyectando la base, puesto que la resolución de la cadena dará en seguida las proyecciones de los demás lados. Sea $AB=A$ (fig. 8ª) la base medida en un terreno cuya altura sobre el nivel del mar es $Aa=n$; la proyección de esta línea será $ab=b$, siendo $Ca=R'$ el radio de la esfera osculatriz. Los sectores semejantes ABC y abC darán:

FIG. 8ª

$$R'+n:B::R':b$$

de donde resulta:

$$b=B\,\frac{R'}{R'+n}$$

Como n es siempre muy pequeña respecto de R', es preferible calcular la diferencia entre la base medida y su proyección. Dividiendo por R' los dos términos de la ecuación anterior, tendremos:

$$b=B\frac{1}{1+\frac{n}{R'}}=B\left(1+\frac{n}{R'}\right)^{-1}=B\left(1-\frac{n}{R'}+\frac{n^2}{R'^2}+\frac{n^3}{R'^3}+\ldots\right)$$

de donde se obtiene por último:

$$B-b=B\frac{n}{R'}-B\frac{n^2}{R'^2}+\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Esta reducción al nivel del mar es en todos casos tan poco considerable, que basta calcular solamente los dos primeros términos de la serie. Por la misma razón no hay inconveniente en tomar en lugar de R' la normal mayor ó el radio central correspondientes á la latitud media del país en que se trabaja. Cuando el terreno de la base sea inclinado, n expresará su altura media, que se determina por medio del barómetro, sin que sea indispensable hacerlo con mucha precisión, pues un error de algunos metros en ese elemento no altera sensiblemente el valor de la serie, á causa de la magnitud considerable de los denominadores.

Concluiré este Capítulo tomando por ejemplo los cálculos de la base del Valle de México, y la apreciación de su grado de exactitud.

"Las correcciones que deben hacerse al valor que se obtiene por el número de reglas colocadas en toda la extensión de la base, son: 1ª, reducción de la longitud del aparato á la temperatura media que se obtuvo durante la medida, y que fué de 19°.6 centígrados; 2ª, reducción de cada regla al horizonte, para lo cual se hace uso de los ángulos de inclinación medidos con el clisímetro; 3ª, reducción á la línea recta, habiéndose medido la base en línea quebrada, como se dijo al principio; 4ª, reducción al nivel del mar; 5ª, corrección por el espesor de los monumentos que la terminan.

Haciendo todos los cálculos se obtienen los números siguientes:

Longitud del aparato á 0° de temperatura..................	$E_0 =$	20^m.55134
Número de estaciones que contiene la base..................	$n =$	420 . 6394
Producto..	$n\,E_0 =$	8644^m.703
Reducción á la temperatura media..................	$m\,n\,T\,E_0 = +$	0 .712
Suma de las reducciones al horizonte............	$\Sigma(R-r) = -$	0 .334
Suma de las reducciones á la línea recta....................	$-$	0 .021
Reducción al eje de los monumentos..........................	$+$	0 .962
Reducción al nivel del mar (¹)	$B-b = -$	3 .062
Longitud de la base al nivel del mar..........................	$b =$	8642^m.96

(¹) Para esta reducción supuse de 2260^m la altura del terreno en que se midió la línea, que fué en la carretera de México al Peñón.

"Por temor de alguna equivocación al consignar en el registro el número de estaciones medidas, encargué al Sr. Iglesias que hiciese una triangulación á lo largo de la línea, apoyándose en una base pequeña de poco menos de 2000^m, á fin de conocer de esta manera la distancia aproximativa entre ambos monumentos. Se ejecutó así en efecto, y el valor que resulta de la operación trigonométrica es 8642^m.76, de suerte que se puede estar seguro de que no ha habido equivocación alguna.

"Será ahora muy interesante calcular cuál puede ser el mayor error que tenga la base, en cuanto depende tanto del valor adoptado para la longitud del aparato, cuanto de los demás elementos que se deducen de la manera de operar en el terreno. Para lo primero puede tomarse por punto de partida la mayor diferencia que exista entre una de las comparaciones aisladas de las reglas y el valor medio que se admitió; pues aunque sea un hecho constante que la repetición de experiencias conduce siempre á promedios más ó menos independientes de los errores fortuitos, y por consiguiente casi idénticos, deberé considerar aquí el caso más desfavorable, suponiendo que uno de los valores extremos tiene mayor grado de probabilidad que el resultado medio. Con respecto á los errores que dependen del modo de operar, se les podrá atribuir un valor estimativo, deducido del grado de aproximación de los instrumentos, y de la manera con que estos errores deben figurar en las fórmulas ó métodos de cálculo, admitiendo, además, que se han cometido en todas las operaciones.

"Hay cierta clase de errores que jamás pueden producir compensación, pues se repiten siempre en el mismo sentido, tendiendo á aumentar ó disminuir el valor que se busca; entre éstos figuran los de la longitud del aparato, los de reducción al horizonte y los de alineamiento. Otros, por el contrario, son unas veces aditivos y otras substractivos, de suerte que si no se destruyen completamente, por lo menos el análisis enseña que su influencia en el resultado final es solamente proporcional á la raíz cuadrada del número de veces que pueden cometerse. A esta clase pertenecen los errores de los contactos de las reglas, que pueden ser más ó menos forzados, y también

el error que se tenga al terminar la medida de cada día. De las 24 medidas que se hicieron de la regla que se tomó por unidad para comparar los demás, la mayor diferencia entre el resultado medio admitido y el que más se aleja de éste, llega á 0^m.00006. Combinando con este número las mayores diferencias obtenidas en la comparación de las otras reglas, encuentro que suponiendo que todos los errores máximos obrasen en el mismo sentido, la longitud del aparato diferiría 0^m.00046 del valor adoptado, lo que produciría en la base una diferencia de 0^m.194.

"La inclinación de las reglas fué generalmente muy pequeña, pues pocas veces llegaba á 1°, y sólo en dos ó tres casos excedió de 2°; mas suponiéndola de 1° en término medio, y admitiendo en las lecturas del clisímetro una incertidumbre de 1′, el error que resulta en la reducción al horizonte es 0^m.00002 por regla, lo que produce 0^m.044 en la base.

"La manera de alinear las reglas no creo que pueda producir error sensible, teniendo á cada paso la comprobación, no sólo de los piquetes ó jalones, sino del cordel establecido entre cada dos de ellos; pero suponiendo, sin embargo, que el aparato se desviase de la línea recta una cantidad igual al espesor de cada regla, el cálculo aplicado á esta hipótesis da 0^m.00006 por estación, lo que supone en la base un error de 0^m.025.

"En los contactos de las reglas puede admitirse una incertidumbre de 0^m.0001, por regla, lo que originaría 0^m.004 en el resultado.

"Finalmente, el error al terminar cada día la operación, no puede exceder de 0^m.001, y esta cantidad produciría en toda la línea 0^m.006.

"En cuanto á las correcciones que provienen de los cálculos, es claro que puede suponérseles constantes.

"Es ciertamente muy difícil que los errores lleguen á los límites que les he asignado, y lo es mucho más que todos ellos tiendan á obrar en el mismo sentido; pero aun en este caso, que es el más desfavorable que puede admitirse, resultará:

Error que puede provenir			de la longitud del aparato	0m.194
"	"	"	de la reducción al horizonte	0 .044
"	"	"	del alineamiento	0 .025
"	"	"	de los contactos	0 .004
"	"	"	del término diario	0 .006
			Suma de los errores	0m.27

"Todas las consideraciones que preceden me inducen á creer que el error de la base no es probable que llegue á 0m.2, por lo menos en la suposición de que el aparato comparador represente exactamente el *metro* á la temperatura normal, y de que no haya algún vicio constante en el modo de comparar, lo que parece garantizar la concordancia que hemos obtenido en la determinación del coeficiente de dilatación de la madera. Por otra parte, el tramo de 800m que se había medido usando estacas, se rectificó después que adopté los tripiés, y hechas todas las reducciones, la diferencia de las dos medidas no llega á 0m.005, lo que proporcionalmente produciría en toda la línea una incertidumbre de 0m.06."

CAPITULO IV.

ELECCIÓN DE LOS VÉRTICES.

40.—El reconocimiento previo del terreno, que se recomendó como muy útil en las triangulaciones topográficas, es del todo indispensable en las geodésicas, porque de él depende la elección de un buen plan de operaciones, la economía de tiempo en los trabajos subsecuentes, y acaso el menor costo de la triangulación misma. Generalmente hablando, los principales vértices de una cadena deben establecerse en las montañas elevadas, desde las que se descubre una gran extensión del país, procurando que sean aquellos en el menor número posible, y que los triángulos adquieran las mayores dimensiones compatibles con el poder y el mérito de los instrumentos de que disponga el ingeniero para medir los ángulos. La magnitud de los lados geodésicos, aunque muy variable como fácilmente se comprenderá atendidas las dificultades que presente el terreno y los medios de acción con que se cuente, puede establecerse entre los límites de 20 á 50 ó 60 mil metros, al menos en las operaciones del orden común. (1)

Para hacer un buen proyecto de triangulación conviene formar un croquis del país, tomando algunos ángulos con un instrumento portátil desde lo alto de los montes, á fin de determinar aproximada-

1 Creo que el mayor triángulo medido hasta hoy es uno de los de la triangulación del meridiano de Francia, el cual sirvió para enlazar una de las islas Baleares con la costa de España. El mayor lado de este triángulo tiene 160904m, que representan 38.4 leguas mexicanas. El menor es de 110236m, ó 26.3 leguas.

mente la posición de todos aquellos puntos que se crean llenar las condiciones necesarias para servir de vértices. Es también muy útil tomar vistas de las montañas distantes con el objeto de reconocer mejor los puntos que parezcan propios para las estaciones; y en general, no elegir definitivamente un vértice sin haber estado en él, para juzgar por sí mismo de las dificultades que ofrezca para continuar las operaciones, porque sucede muchas veces que á distancia se cree conveniente un lugar por su posición elevada ú otra circunstancia, al paso que colocándose en él se encuentra la vista obstruída por obstáculos que al principio no habían podido apreciarse. La copia del aspecto que presentan los vértices lejanos sirve también para juzgar de qué modo se verán las señales que en ellos se coloquen. Así, por ejemplo, si una estación se distingue limitando el horizonte, la señal que se ponga en ella se proyectará en el cielo, y de consiguiente convendrá pintarla de un color obscuro para que se vea con precisión; mientras que si se ha de proyectar sobre objetos terrestres, será mejor pintarla de blanco, y en general, deberá dársele un color que forme contraste con el del objeto sobre el cual se ve proyectada.

Al ocupar cada estación cuando se hace el reconocimiento, puede averiguarse la manera con que se verá proyectada la señal que se establezca en ella. Sea A (fig. 9ª) la estación de que se trata, y B otro vértice desde el cual se desea saber si se proyectará en el cielo ó en la tierra la señal que se ponga en A. Midiendo la distancia zenital $z = ZAB$ del punto B, y también la del punto C, que limita el horizonte en una dirección opuesta á la de B, se tendrá: $z' = ZAC$. Si $z + z'$ es mayor que 180°, es claro que el punto C estará deprimido respecto de la línea AB, y en consecuencia, desde B se verá la señal de A proyectada sobre el cielo. Si, por el contrario, $z + z'$ es menor que 180° la señal establecida en A se distinguirá desde B proyectada sobre objetos terrestres.

FIG. 9ª

Muchas veces se establecen los vértices en las poblaciones; en tales casos es necesario elegir puntos muy notables que se distingan de la masa general de edificios, porque de otra manera suele ser muy dificultosa la medida de los ángulos. En todas ocasiones se procurará evitar la elección de estaciones que den lugar á la *reducción al centro*, que se ha dado á conocer en el número 69 de la Topografía.

Cuando se desea establecer geodésicamente un gran número de puntos, se dividen por lo regular las triangulaciones en primarias, secundarias, etc., lo mismo que en la Topografía. Debe, sin embargo, advertirse que cuando los lados no exceden de 15000ᵐ se obtiene toda la precisión apetecible tratando los triángulos como se ha enseñado en las operaciones topográficas, de manera que no estableceremos diferencia alguna respecto de los triángulos geodésicos de las mismas dimensiones, admitiendo que los secundarios de éstas equivalen á los topográficos de primer orden. Cuando las cadenas geodésicas se establecen con el fin de que sirvan de apoyo á una extensa operación topográfica, puede evitarse la medida de las bases topográficas, sirviendo de tales los lados menores de la triangulación geodésica, porque en general deben éstos considerarse como más exactos que las líneas medidas directamente con el decámetro.

41.—Los triángulos geodésicos pueden tratarse como esféricos, según lo que se ha expuesto en el Capítulo II; pero por ser siempre sus lados muy poco curvos, no habría inconveniente en hacerles extensivo lo que se dijo en la Topografía respecto de la figura más ventajosa de los triángulos planos para que influyan menos en ellos los errores de observación. No obstante, demostraré directamente la misma propiedad en los triángulos esféricos poco curvos, valiéndome del análisis infinitesimal, por ser más breve el cálculo.

Si la ecuación

$$\text{sen.}\, a = \text{sen.}\, b \frac{\text{sen.}\, A}{\text{sen.}\, B}$$

se diferencia suponiendo variables todos sus elementos, se obtiene:

$$\text{d}a = \frac{\cos.\, b\, \text{sen.}\, A}{\cos.\, a\, \text{sen.}\, B}\, \text{d}b + \frac{\text{sen.}\, b \cos.\, A\, .\, \text{d}A - \text{sen.}\, a \cos.\, B\, .\, \text{d}B}{\cos.\, a\, \text{sen.}\, B}$$

Como los errores angulares, según se ha dicho varias veces, son independientes de los valores de los ángulos, si suponemos $dA = dB$, y además sustituímos el valor de sen. b, resulta:

$$da = \frac{\cos. b \operatorname{sen.} A}{\cos. a \operatorname{sen.} B} db + \tan. a (\cot. A - \cot. B) dB$$

y puesto que los lados son siempre de poca amplitud, la relación de sus cosenos, que entra en el primer término, es sensiblemente igual á la unidad; así es que omitiéndola, se tendrá la siguiente expresión del error del lado a:

$$da = \frac{\operatorname{sen.} A}{\operatorname{sen.} B} db + \tan. a (\cot. A - \cot. B) dB$$

Igualmente hallaríamos para el tercer lado c:

$$dc = \frac{\operatorname{sen.} C}{\operatorname{sen.} B} db + \tan. c (\cot. C - \cot B) dB$$

Por estas ecuaciones se ve que los errores ó variaciones de los lados a y c provienen de dos causas: la primera es el pequeño error db que pueda existir en la base b del cálculo, y la segunda el error angular. El efecto de la primera no puede nulificarse más que con $db = 0$, y crecerá ó menguará según que el ángulo opuesto á la base sea menor ó mayor que el adyacente.

El efecto de la segunda causa podrá ser nulo cuando lo sean los coeficientes de dB; condición que equivale á suponer $A = B = C$.

La parte de error que proviene de db, para valores poco diferentes de los ángulos adyacentes á la base, tendría un *minimum* cuando $B = 90°$; pero ésta condición trae consigo la necesidad de ir disminuyendo la longitud de los lados trigonométricos, lo cual es contrario á la conveniencia, porque sería preciso haber partido de una base sumamente grande. Aunque por lo regular los errores de las bases tienen más influencia que los angulares, se adopta la forma deducida de la primera condición, que destruye el efecto de estos últimos, recomendándose solamente el medir las bases con extremada escrupu-

losidad. En la misma hipótesis de triángulos equiláteros, el error que proviene de db, si bien existe, al menos no aumenta. Por idéntica razón se debe tener mucho cuidado de ir aumentando gradualmente la magnitud de los primeros triángulos cuando la base sea menor que la longitud media que se juzgue conveniente dar á los lados de la cadena.

Los coeficientes de dB son de la misma forma que los hallados en el cálculo referente á la mejor figura de los triángulos topográficos (Tomo I, núm. 32), por lo que, si se quiere, podrá transformarse como allí se hizo, para el caso en que el error angular varíe de signo de un ángulo á otro, pues no creo necesario repetirlo aquí. Sólo recordaré que si bien es imposible en la práctica sujetarse á formar triángulos equiláteros, debe procurarse no salir de los límites 30° y 120° para los ángulos. He visto, sin embargo, triangulaciones de mucho mérito en que hay algunos ángulos muy agudos, y en realidad la magnitud de los errores angulares ha disminuído considerablemente en razón de la perfección progresiva que ha logrado alcanzarse en la graduación de los instrumentos, muy superior en su línea al grado de exactitud con que pueden medirse las distancias; así es que cuando no pueda evitarse la elección de triángulos mal configurados, creo que midiendo sus ángulos con más precaución, no deben temerse malos resultados.

FIG. 10ª

42.—Para la demarcación de los vértices se han usado señales geodésicas muy diversas. Las más comunes (fig. 10ª) consisten en tres ó cuatro maderos que forman un trozo de pirámide terminado en su parte superior por un cono invertido, que sirve de punto de mira. El eje del cono se proyecta en el suelo, y se marca su proyección sobre una estaca, á fin de colocarse en el centro mismo de la señal cuando desde ella se observan los ángulos. A veces se cubre de madera su parte superior para que sirva de abrigo al ingeniero y para resguardar el instrumento.

FIG. 11ª

También se ha hecho uso de señales (fig. 11ª) cuyo punto de mira es móvil, consistiendo en una lámina de madera ó de metal, que gira alrededor de un eje vertical, á fin de poderla dirigir hacia el punto desde el cual se observa.

Otras señales más permanentes (fig. 12ª) forman pequeños observatorios de mampostería, de ladrillo ó de piedra. En su parte superior están terminadas por un cilindro que sirve á la vez de punto de mira y de apoyo al teodolito.

FIG. 12ª

Se han usado también como puntos de mira, cilindros, conos ó esferas formados de láminas metálicas (hoja de lata ó latón) que pulimentadas, se ven á grandes distancias, especialmente cuando las hiere la luz del sol.

Respecto de la altura de las señales, se dijo ya en la Topografía que debe ser por lo menos igual á 0.00015 de la distancia desde la cual se han de observar. En cuanto al diámetro del punto de mira, por algunas experiencias que he hecho, creo poder asentar que una señal se distingue muy bien con un anteojo mediano cuando su grueso se ve bajo un ángulo de 2″, lo que próximamente equivale á adoptar señales cuyo diámetro sea $\frac{1}{15}$ de su altura, ó bien 0.00001 de la distancia. Con estas dimensiones está formada la tabla siguiente:

DIST.	ALTURA.	DIAM.
20000	3ᵐ.0	0ᵐ.2
30000	4 .5	0 .3
40000	6 .0	0 .4
50000	7 .5	0 .5
60000	9 .0	0 .6
70000	10 .5	0 .7
80000	12 .0	0 .8

Un teodolito de telescopio poderoso permitirá disminuir notablemente el grueso de las señales, con especialidad cuando á esta circunstancia reuna la de permitir las lecturas angulares con mucha aproximación.

En algunas operaciones geodésicas se han medido los ángulos de noche, poniendo señales luminosas en los vértices. Estas han consistido en lámparas colocadas en el foco de reverberos ó reflectores parabólicos cuya superficie interna, muy bien pulimentada, envía los rayos luminosos á una gran distancia paralelamente al eje del paraboloide. Así midieron los astrónomos Biot y Arago los ángulos del gran triángulo que liga las costas de Cataluña con la Isla de Ibiza. En las operaciones ejecutadas en la India por los geógrafos ingleses se han empleado fuegos de Bengala como señales. Creo que la luz llamada de Drummond, producida sobre un trozo de cal por una corriente de gases oxígeno é hidrógeno, ó mejor todavía la luz eléctrica, suministrarían magníficas señales, con cuya ayuda podrían formarse triángulos muy extensos. Nuestro país se presta admirablemente á grandes trabajos geodésicos; porque en todas partes se encuentran dilatadas llanuras interrumpidas por elevadas sierras y por picos aislados que proporcionarían excelentes estaciones.

Parece que las observaciones nocturnas dan por lo regular resultados más acordes que las ejecutadas de día. Es probable que sea así principalmente en nuestros climas intertropicales, porque la causa más influente de incertidumbre en la dirección de las visuales proviene del movimiento vibratorio del aire, cuyas capas inferiores, calentadas desigualmente, dan lugar á corrientes que hacen ver trémulas las señales, y por lo cual se recomienda medir los ángulos en las primeras horas del día ó hacia la caída de la tarde.

En todos casos las señales nocturnas no deben tener más que el tamaño necesario para que se distingan con el telescopio del teodolito como un punto luminoso ó una estrella pequeña.

CAPITULO V.

MEDIDA DE LOS ANGULOS.

43.—Al tratar de este mismo asunto en la Topografía se dió á conocer el teodolito y se explicó detenidamente su manejo y la manera de practicar sus diversas rectificaciones. A lo que se dijo entonces sólo debe agregarse que los instrumentos que se usan en la Geodesia son de mayores dimensiones, de graduación más delicada y de telescopios más poderosos. Un teodolito cuyo limbo tenga de $0^m.30$ á $0^m.40$ de diámetro es suficiente para las triangulaciones más esmeradas, por lo tocante á la exactitud que puede proporcionar en la lectura de las divisiones; pero lo que es de la mayor importancia y debe fijar más la atención del ingeniero es el poder y la claridad de los telescopios, sin lo cual no es posible formar grandes triángulos como conviene á la velocidad de los trabajos, á la economía de gastos y de tiempo y á la precisión de los resultados.

Se recordará que el principio de la repetición, aplicado á los instrumentos angulares, tiene por principal objeto disminuir los errores de la graduación; mas como últimamente ha llegado el arte de dividir á tan alto grado de perfección, han perdido los instrumentos repetidores gran parte de su importancia primitiva, y se usan en el dia instrumentos portátiles no repetidores, cuyos resultados, en nada ceden á los que suministran los primeros. Los ingenieros franceses son partidarios del teodolito, alegando en su favor todas las ventajas teóricas del principio de la repetición; mientras que los geógrafos in-

gleses y americanos dan la preferencia á los instrumentos no repetidores, fundados en la exactitud con que se ejecutan hoy las divisiones, y sobre todo, en la mayor estabilidad y solidez de estos últimos, que no necesitan la complicación de movimientos y todo el juego de tornillos que el teodolito. Sin intentar decidir esta cuestión, sólo asentaremos como un hecho, que en los observatorios astronómicos y para toda clase de operaciones delicadas que demandan firmeza en los aparatos, no se emplean actualmente instrumentos repetidores.

Describiremos el *altazimut* llamado también *universal*, que puede tomarse por tipo de los instrumentos no repetidores, y cuya importancia no es menor para las operaciones astronómicas que para las geodésicas. El altazimut (fig. 13ª) consiste en un círculo azimutal dividido G, G' firmemente unido á un tripié provisto de tornillos T, T' para nivelar. En el centro de este círculo se eleva un eje ligeramente cónico que sostiene otro círculo A concéntrico al primero, sobre el cual gira libremente, y cuyo movimiento puede paralizarse con un tornillo de presión que fija el círculo superior al inferior. El tornillo de aproximación permite, sin embargo, comunicar pequeños movimientos al círculo ó placa superior. Esta última es la que sostiene todo el resto del instrumento por medio de dos fuertes columnas B, B' en cuya extremidad superior están los apoyos en que descansa

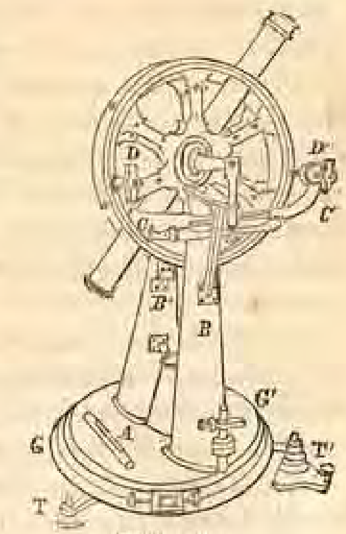


FIG 13ª

el eje horizontal del telescopio. El círculo vertical está invariablemente unido al telescopio, y se compone de dos limbos reunidos entre sí por pequeñas y numerosas columnas metálicas, que proporcionan la firmeza necesaria sin aumentar mucho el peso del aparato. Uno de estos círculos es el que lleva la graduación, y constituye el limbo vertical propiamente dicho.

El instrumento tiene tres niveles: uno fijo en el círculo azimutal; otro colocado paralelamente al círculo vertical y sostenido por las piezas C, C' en cuyas extremidades hay dos microscopios D, D' destinados á apreciar las fracciones de la graduación, como veremos después; y el tercero, es un nivel movible que puede colocarse sobre el eje horizontal del telescopio para establecer su perfecta horizontalidad. En cada una de las columnas B, B' está también fijo un microscopio que tiene por objeto la lectura y aproximación de las divisiones del círculo azimutal.

Este limbo está numerado desde 0° hasta 360°; pero el círculo vertical lo está por cuadrantes numerados á continuación uno de otro desde 0° hasta 90°; disposición que, según dijimos (Tomo I, número 243), permite obtener distancias zenitales en una posición del instrumento, y alturas en la posición inversa.

De esta rápida descripción se deduce que son dos los movimientos generales del altazimut; el primero al derredor del eje vertical, hace girar la placa superior del círculo azimutal, y por consiguiente, á todo el instrumento. El segundo se verifica al derredor del eje horizontal del telescopio unido á él. Ambos movimientos permiten dar una revolución entera á los círculos al derredor de sus ejes respectivos.

La retícula del telescopio consta de cinco hilos horizontales y cinco verticales equidistantes, cuyo uso más bien que á la Geodesia pertenece á la Astronomía; porque el altazimut se aplica á las mismas observaciones celestes que el instrumento astronómico llamado *telescopio de tránsitos*. En las operaciones geodésicas se toman los ángulos sirviéndose del punto de intersección de los dos hilos centrales, vertical y horizontal, que es el que debe colocarse en el eje óptico, lo mismo que sucede en el teodolito común.

44.—Antes de exponer las rectificaciones del altazimut, describiré los microscopios micrométricos que sirven para hacer las lecturas angulares tanto en el círculo vertical como en el horizontal, y que reemplazan ventajosamente al vernier. Se ha dado ya una idea de estos aparatos (Tomo I, número 165) al hablar de la estadia; pero no será inútil recordar aquí su mecanismo.

En frente de la graduación de los limbos vertical y azimutal están firmemente colocados dos ó más microscopios $N N'$ (fig. 14ª) sostenidos por la pieza P que los une á las columnas verticales del altazimut. Dos tuercas g y g' los fijan á esta pieza, teniendo por tornillo una parte del tubo mismo del microscopio, y sirven para variar la distancia de éste á la graduación. En el cuerpo del tubo hay otra pieza rectangular q, en cuyo interior y en coincidencia con el foco común del objetivo h y del ocular d, se halla el micrómetro, cuyo corte está representado aparte en el rectángulo $F E$, que manifiesta también la apariencia del campo del instrumento, tal como se ve al través del ocular d, con algunas divisiones a, b, c, del limbo graduado, amplificadas por el microscopio. Unida á la armadura ó tubo del aparato hay una pequeña lámina metálica $B C$ una de cuyas orillas está cortada en forma de sierra. En la pieza rectangular $E F$, fija también al tubo, y que contiene todo el mecanismo micrométrico, se mueve otro rectángulo de metal $G H$, cuyos lados mayores están en contacto con la caja $E F$ á los que va unido un hilo muy delgado m n, el cual por el movimiento de la pieza $G H$ puede ponerse en coincidencia con cualquiera de las divisiones a, b, c, del limbo. El movimiento se le comunica desde el exterior por medio de un tornillo muy fino $K L$, que se atornilla en el rectángulo $G H$. Estando fijo este tornillo á la caja $E F$, es claro que al girar obliga al rectángulo interior $G H$ á moverse á lo largo de la misma caja, contribuyendo á hacer suave y uniforme este movimiento los dos resortes G y J colocados entre las dos piezas. Al tornillo micrométrico está unido un círculo graduado M, y en la caja va fija la pequeña lámina F, la cual tiene grabada una línea que sirve de índice con el que van coincidiendo las divisiones

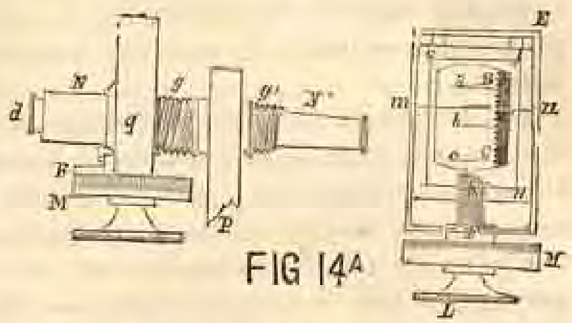


FIG 14A

de la cabeza M del tornillo cuando éste gira. El tornillo y la sierra $B\,C$ están construídos de manera que al dar aquel una vuelta completa, el hilo $m\,n$ recorre precisamente el espacio que hay de un diente á otro de la sierra, en cuyo medio está el *cero* ó punto de partida, que por lo común se indica con un círculo pequeño, como lo representa la figura.

Para comprender el uso del micrómetro, supongamos que estando el índice F en coincidencia con el cero del círculo M, también esté el hilo $m\,n$ coincidiendo con el cero de la sierra. Si en este estado de cosas se quiere medir el espacio comprendido entre este último punto y la imagen a de una de las divisiones del limbo, no habrá más que mover el tornillo hasta que el hilo coincida exactamente con la división a, y entonces el número de vueltas enteras del micrómetro y la fracción de vuelta darán la medida del espacio que se busca. El número de revoluciones enteras quedará indicado por los dientes de la sierra, y la fracción por la división del círculo M que coincida con el índice F. Si, pues, hay algún medio de averiguar el valor angular de una revolución del tornillo, y en consecuencia, el de una división de su cabeza M, podremos apreciar en medidas angulares, con este instrumento, los espacios más pequeños del limbo.

El valor de una revolución del micrómetro se determina haciendo coincidir el hilo sucesivamente con dos divisiones contiguas b y c del limbo, y contando el número N de vueltas que ha sido necesario dar al tornillo para pasar de una posición á la otra. Si llamamos D el valor angular de cada división del limbo, el del micrómetro será:

$$v = \frac{D}{N} \qquad \text{(1)}$$

Por lo regular, en los instrumentos que tienen micrómetros, está dividido el grado en 12 partes, por lo que $D = 5' = 300''$, y el tornillo está construído de manera que dé exactamente 5 vueltas en el espacio de dos divisiones consecutivas, de lo cual resulta: $v = 1' = 60''$. Además de esto, la cabeza del micrómetro tiene 60 divisiones, de donde se deduce que cada división vale $1''$, cantidad que constituye en tal caso la aproximación que da directamente el

instrumento, aunque para apreciación pueden estimarse medias divisiones, ó sea espacios angulares de $0''.5$.

Al ajustar las diversas partes del aparato micrométrico, puede hacerse de manera que el índice exterior F señale el cero de las divisiones del círculo M, siempre que el hilo coincida con el cero de la sierra, y en general con cualquiera de los intervalos de sus dientes, cada uno de los cuales representa una revolución del tornillo, según se ha dicho; pero se comprenderá fácilmente que no es indispensable esa precisión en el ajuste, si se hace la lectura del micrómetro que corresponda á la coincidencia del hilo con el cero de la sierra; porque entonces esta lectura se considerará como error inicial del instrumento, que se llevará en cuenta para aplicarlo como corrección á cualquiera otra lectura. En general, la diferencia algebraica de dos lecturas del micrómetro mide el espacio que ha recorrido el hilo para trasladarse de una á otra de las dos posiciones en que aquellas se hayan hecho.

De las explicaciones precedentes se deduce que el microscopio micrométrico sirve para medir las pequeñas fracciones de la graduación del limbo. En cuanto á las divisiones enteras, se aprecian por medio de un índice colocado cerca de la graduación, y en el plano que pasa por el eje óptico del microscopio y el cero de la sierra. Para obtener, pues, la indicación completa que corresponda á una posición determinada de los círculos del altazimut, se leen por el exterior con una lente común los grados y las divisiones enteras de $5'$, aplicando en seguida la vista al microscopio y haciendo mover el tornillo en el sentido de la numeración de su cabeza, hasta que el hilo coincida con la división más inmediata al cero de la sierra. La lectura que se obtenga, corregida por el error inicial si lo hubiere, se añade á la de los grados y divisiones enteras de $5'$, siendo la suma la indicación correspondiente á la posición del círculo.

45.—Las rectificaciones de los microscopios micrométricos consisten en hacer de manera que se vean con igual claridad en el foco del objetivo el hilo y las imágenes de las divisiones del limbo; así como que cinco revoluciones del tornillo hagan trasladar exactamente al primero de una división á otra del segundo. Para practicar la primera rectificación se saca el ocular d hasta que se vea con entera precisión el hilo, y si entonces se ven igualmente bien definidas las divisiones, y no se nota que éstas se muevan respecto de aquél cuando la vista se hace variar ligeramente de posición, existe la condición de que las imágenes de las divisiones se formen en el plano focal que contiene al hilo. Si por el contrario, cuando se ve el hilo con claridad, no sucede lo mismo con las divisiones, ó que al menos cambien éstas aparentemente de lugar respecto de aquel al mover un poco la vista hacia un lado ú otro del ocular, se tiene la prueba de que las imágenes no se forman en el plano focal que pasa por el hilo, y es preciso variar la distancia del microscopio al limbo aflojando uno de los tornillos g y apretando el otro. Después de algunos tanteos, se consigue la visión perfecta, tanto del hilo como de las divisiones sin movimiento relativo aparente, y entonces se afirman los tornillos g para que no se altere de nuevo la distancia. Para comprobar la segunda condición, se mueve el tornillo micrométrico de una división á otra, y si las dos lecturas que se obtienen dan exactamente 5 revoluciones enteras por diferencia, existe el perfecto ajuste del micrómetro; pero si no sucede así, es á causa de que la imagen del espacio comprendido entre las divisiones es demasiado pequeña ó demasiado grande. Si para pasar de una linea á la inmediata ha sido preciso dar al tornillo más de cinco revoluciones, las imágenes son demasiado grandes; y en el caso contrario, demasiado pequeñas. Cuando se verifica lo primero, se hará la corrección alejando el objetivo h del plano del limbo, con cuyo fin se atornilla la rosca que lo une al tubo. Si la imagen es muy pequeña, se acerca un poco el objetivo al limbo desatornillando la misma rosca. Hecha esta variación, la imagen ya no se formará en el plano del hilo, sino en un punto más inmediato al objetivo ó más distante de él, según que éste se haya alejado ó se haya acercado al limbo; pero se reproducirá la visión perfecta volviendo á variar la distancia de todo el microscopio por medio de los tornillos g.

En general, es bastante difícil hacer con entera precisión estas correcciones, y sólo se consigue después de diversos ensayos practicados con mucho esmero. Comunmente los fabricantes arreglan con

bastante cuidado las diversas partes del micrómetro, y á menos de que hayan sufrido un desarreglo notable, es acaso preferible comprobar solamente la condición relativa á la claridad de las imágenes, y determinar el error llamado *error de curso* del tornillo, á fin de llevarlo en cuenta para corregir las lecturas angulares, más bien que intentar destruirlo completamente por medios mecánicos. Por otra parte, aun cuando llegue á nulificarse por lo pronto, no permanece mucho tiempo rectificado el instrumento, en razón de los pequeños movimientos que se producen, aunque no sea por otra causa más que por los cambios de temperatura, que dilatan desigualmente las diversas partes del aparato.

46.—El error de curso se determina midiendo, en revoluciones enteras y fracciones del micrómetro, el espacio comprendido entre las divisiones. Sea N el número de revoluciones enteras que debían medir exactamente ese espacio, y $N \pm e$ el que las mide en realidad, siendo e una fracción de revolución. En tal caso, la ecuación (1) dará por valor angular del tornillo:

$$v' = \frac{D}{N \pm e} = \frac{D}{N\left(1 \pm \frac{e}{N}\right)} = \frac{D}{N}\left(1 \mp \frac{e}{N} + \frac{e^2}{N^2}\right)$$

Como se tiene $v = \frac{D}{N}$, resultará, sustituyendo y estimando sólo hasta la primera potencia de e en atención á que esta cantidad es siempre muy pequeña en un instrumento medianamente arreglado:

$$v' = v\left(1 \mp \frac{e}{N}\right)$$

Para tener la fracción de vuelta e, sea n el número de divisiones de la cabeza del tornillo, y n' el número de ellas que sobran ó faltan á las N revoluciones enteras. Tendremos: $e = \frac{n'}{n}$, lo cual reduce la fórmula anterior á la siguiente:

$$v' = v\left(1 \mp \frac{n'}{Nn}\right) \text{ .... (2)}$$

Si como sucede habitualmente, se tiene $D=300''$, $N=5$ y $n=60$, resultará $v=60''$, y en consecuencia:

$$v'=60''\mp 0''.2n' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Supongamos, por ejemplo, que el espacio de 5' del limbo se haya medido con cuatro revoluciones enteras, y 54 divisiones de la cabeza del micrómetro. El valor de cada revolución sería, puesto que $n'=-6$:

$$v'=60''+1''.2=61''.2$$

y cada división de la cabeza valdría: $d=\frac{v'}{60}=1''.002$, en lugar de 1'' que debería valer si n' hubiese resultado nulo.

Tomemos por segundo ejemplo el caso en que se obtuviesen 5 revoluciones y 17 divisiones para medir el mismo espacio de 5'. Hallaríamos:

$$v'=60''-3''.4=56''.6$$

valiendo, por consiguiente, 0''.9433 en vez de 1'', cada división del círculo micrométrico.

Para determinar bien el valor angular del micrómetro, es preciso repetir muchas veces la medida de las divisiones del limbo tanto de b hacia c como en el sentido contrario, y presentando en el campo micrométrico diversas partes del limbo con el objeto de independer el resultado de los pequeños errores de la observación y de la graduación.

En los micrómetros sucede casi siempre que al comenzar á mover el tornillo en una dirección contraria á aquella en que se había movido antes, pasan algunas divisiones de su cabeza frente al índice sin que el hilo comience á moverse; y esto sucede á causa de la existencia de un *punto muerto*, ó sea una falta de ajuste exacto entre el tornillo y la tuerca, que deja al primero un pequeño juego en la segunda. Supongamos que *atornillando* el micrómetro se mueva el hilo de b hacia a (fig. 15ª), y que en este movimiento las divisiones de su cabeza vayan pasando por el índice en el orden creciente de su numeración.

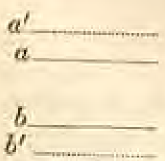


FIG. 15ª

Si partiendo de b hacemos coincidir el hilo con la línea a, leemos d divisiones. Continuando el movimiento en el mismo sentido podremos llevar el hilo hasta una posición cualquiera a', y si entonces *desatornillamos* el micrómetro para hacer retroceder al hilo, al volver este á coincidir con la línea a ya no señalará d divisiones, sino $d-u$, siendo u las divisiones que han pasado por el índice antes de que comience á moverse el hilo. He notado que u es sensiblemente constante para cada micrómetro, y que á veces llega hasta 8 ó 10 divisiones. Por consiguiente, para eliminar el error que de esto puede originarse, lo que debe hacerse es medir los espacios angulares siempre atornillando ó siempre desatornillando el micrómetro, sin comparar nunca las lecturas que se hayan obtenido por medio de su movimiento en direcciones opuestas. Así, en el primer caso, para medir el espacio ab, se partirá de b', un poco antes de b, y se llevará el hilo sucesivamente á b y á a leyendo las indicaciones que corresponden á las dos posiciones, cuya diferencia da el espacio ab libre del error u. Si por el contrario, quiere medirse ab desatornillando el micrómetro, se parte de una posición a' más avanzada que a para llevar el hilo á a y en seguida á b. Los mismos procedimientos deben seguirse para determinar el valor angular de las revoluciones micrométricas.

Conocido así el valor angular del micrómetro, un espacio que se hubiera medido por r revoluciones enteras y d divisiones, sería en segundos:

$$e=rv'+\frac{1}{60}dv'=v'\left(r+\frac{1}{60}d\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

No es preciso contar el número r de revoluciones en la cabeza del tornillo, puesto que es igual al de dientes de la sierra que haya recorrido el hilo; basta sólo anotar el punto de partida en el índice y ver la posición del hilo al comenzar y al terminar el movimiento.

Con el fin de facilitar la inteligencia del uso del micrómetro, he supuesto que es uno solo el hilo que se mueve con el tornillo, y esta disposición es realmente la que se adopta en los micrómetros colocados á veces en los oculares de los telescopios para medir, dentro de su campo, pequeños espacios angulares; pero por lo común en los microscopios destinados á la apreciación de las fracciones de un limbo graduado, el tornillo micrométrico hace mover dos hilos que se cortan en ángulo agudo hacia el centro del campo, y las coincidencias se establecen haciendo de manera que las divisiones del limbo bisequen el ángulo de los hilos. La bisección, en efecto, se aprecia con más precisión que la simple superposición de un solo hilo á la imagen de las divisiones. Se comprende que esta diversa disposición no constituye una diferencia real en la teoría y el uso del micrómetro.

47.—Ocupémonos ahora de las rectificaciones de altazimut. Este instrumento debe reunir las condiciones siguientes: 1ª El eje del círculo azimutal á cuyo derredor se mueve la parte superior del aparato, debe ser perfectamente vertical. 2ª El eje del círculo vertical y del telescopio debe ser horizontal. 3ª Los micrómetros del círculo vertical deben estar á la altura necesaria para que correspondan á los extremos de uno de sus diámetros. 4ª Los hilos de la retícula deben ser verticales los unos y horizontales los otros. 5ª La línea de colimación del telescopio debe ser perpendicular á su eje de rotación.

Para examinar la primera condición se hace uso del nivel fijo en el círculo azimutal, ó mejor aún, del que es paralelo al círculo vertical; porque generalmente éste es más sensible que aquél. Muévase el instrumento en azimut hasta que el nivel quede colocado en la dirección de dos de los tornillos del tripié, y por el movimiento simultáneo de éstos llévese la burbuja al medio del tubo, de modo que sus dos extremidades señalen divisiones iguales. En seguida hágase girar el instrumento 180° al derredor de su mismo eje vertical, y si se ha desviado la burbuja, vuélvase á conducir al centro dividiendo la corrección en dos partes iguales, de las que una se hace por medio de los dos tornillos del tripié, y la otra subiendo ó bajando uno de los extremos del nivel con los tornillos de que al efecto está provisto. Si se ha practicado bien la corrección, y si además el eje no está muy inclinado en una dirección perpendicular á la de los dos tornillos, deberá permanecer la burbuja en el medio del tubo al lle-

var el instrumento á su primera posición. Si no sucede así, se vuelve á hacer la corrección, siempre por mitad, con los tornillos del tripié y con el del nivel mismo, repitiendo la operación cuantas veces sea necesario hasta que en las dos posiciones opuestas y paralelas del círculo vertical, permanezca la burbuja en el centro del nivel.

En seguida se hace girar el instrumento 90° en azimut respecto de la posición que ocupaba, quedando por consiguiente el nivel en una dirección paralela á la del tercer tornillo, con el cual se hace la corrección en caso de que la burbuja se desvíe. En esta nueva posición no deben ya tocarse los tornillos del nivel, pues éste ha quedado corregido en la operación precedente, y toda la desviación de la burbuja proviene de la inclinación del eje vertical hacia el tercer tornillo del tripié.

Cuando al comenzar la rectificación de que me ocupo, el eje vertical está muy inclinado en una dirección perpendicular á la de los dos tornillos del pie con los cuales se principia, es en general muy dilatada la corrección del nivel, á menos que se pase de una posición á la opuesta, midiendo exactamente los 180° con la graduación del círculo azimutal. Por esta razón es preferible establecer primero la verticalidad del eje de un modo aproximativo, y corregir después el pequeño error que aún pueda existir. Para ello se hace de manera que en las dos primeras posiciones opuestas no se aleje mucho la burbuja del centro del tubo, corrigiendo su desviación por partes iguales, como se ha dicho; y en seguida, antes de acabar de arreglar el nivel, se lleva á la posición perpendicular á la que ocupaba, con el objeto de destruir en su mayor parte la inclinación del eje por medio del tercer tornillo. De este modo, son ya pequeños el error de verticalidad y el del nivel, y puede volverse á comenzar la operación ejecutando las correcciones con más esmero, hasta conseguir que no sólo en las dos posiciones rectangulares, sino en cualquiera otra intermedia, den sensiblemente la misma indicación ambos extremos de la burbuja. También puede abreviarse mucho la operación ejecutándola primero aproximadamente con el nivel fijo al círculo azimutal, el que siempre es menos sensible que el paralelo al limbo vertical; y después de reducir así á una pequeña cantidad la inclinación del eje, se acaba de establecer su verticalidad con este último nivel, corrigiéndolo al mismo tiempo.

Para hacer perfectamente horizontal el eje á cuyo derredor se mueve el telescopio con el círculo vertical, se hace uso del nivel movible que se mencionó al principio y que generalmente se llama nivel *montante*. Este se apoya por medio de los pies de igual longitud de que está provisto, sobre los extremos del eje del telescopio, debiendo hacerse pasar entre dos de los radios del círculo vertical, con cuyo fin se inclina el anteojo lo que sea necesario. Si la burbuja se desvía del centro del tubo, se conduce á él subiendo ó bajando uno de los apoyos del eje, que tiene sus tornillos propios para este objeto. En seguida, sin tocar el instrumento, se invierte el nivel, de manera que el pie que se apoyaba en el extremo del eje que estaba á la derecha, pase á apoyarse en el extremo izquierdo y vice versa. Generalmente la burbuja quedará desviada del medio del tubo en su nueva posición; mas como esta desviación indica que no son exactamente iguales los dos pies del nivel, se aumentará ó se disminuirá la longitud de uno de ellos con los tornillos que también tiene al efecto, hasta que se haya corregido la mitad de la desviación observada, haciendo desaparecer la otra mitad subiendo ó bajando, según el caso, el apoyo en que descansa el extremo del eje del telescopio que se movió al principio.

Para cerciorarse de si se ha practicado ó no con exactitud la corrección, debe volverse á invertir el nivel, colocándolo en su posición primitiva, y en caso de que todavía se note algún error, es á causa de que no se hizo bien la corrección por partes iguales. Para acabar de rectificar tanto el eje como el nivel, se destruye el error restante dividiéndolo siempre en dos partes iguales, una de las cuales se corrige modificando de nuevo la longitud del apoyo ó pie del nivel, y la otra volviendo á subir ó bajar el apoyo de una de las extremidades del eje. Se habrá conseguido la corrección completa cuando en las dos posiciones inversas del nivel permanezca la burbuja en el medio del tubo, esto es, indicando sus dos extremos iguales guarismos de la escala.

La prueba de que tanto esta rectificación como la de la verticali-

dad del eje del círculo azimutal, se han practicado con toda exactitud, consistirá en hacer mover todo el instrumento al derredor de este eje, debiendo señalar la burbuja las mismas lecturas en todo el curso del movimiento.

La tercera rectificación tiene por objeto establecer los dos micrómetros en los extremos de un diámetro del círculo vertical. Si los micrómetros mismos son susceptibles de movimiento, se les comunica éste hasta que en cualquiera posición del círculo sean iguales las lecturas hechas con los dos microscopios. En el caso contrario será preciso subir ó bajar el círculo hasta que su centro se coloque en la línea de los micrómetros. Como tal movimiento sólo puede transmitirse por medio de los tornillos que suben ó bajan los apoyos del eje horizontal del telescopio, y al hacerlo así se destruiría su horizontalidad, lo que debe procurarse es subir ó bajar por igual los dos apoyos, para lo cual se practica esta corrección, teniendo colocado el nivel montante sobre los extremos del eje, á fin de que las indicaciones de la burbuja puedan dar á conocer la igualdad del movimiento de éste.

Es más importante la horizontalidad del eje de rotación del telescopio que la colocación exacta de los micrómetros, por lo cual si para conseguir esta última condición se temiese alterar notablemente la primera, no hay inconveniente en dejar algo erróneos los microscopios; porque su principal objeto es independer los ángulos que se midan del error de excentricidad del círculo, por medio de una doble lectura, y esto notoriamente se consigue aun cuando no se hallen precisamente en los extremos de un diámetro.

La retícula del telescopio consta de dos sistemas de hilos perpendiculares entre sí por construcción. En consecuencia, si uno de estos sistemas se pone exactamente vertical, el otro quedará horizontal y vice versa. Esta rectificación se hace, pues, de dos maneras: si se dirige el telescopio á un objeto distante y se pone en coincidencia con alguno de los hilos horizontales, deberá dicho objeto ser cortado por el hilo durante el movimiento que se comunique al altazimut al derredor de su eje vertical, por medio del tornillo de aproximación correspondiente al círculo azimutal. Si se prefiere hacer uso de los hilos verticales, se practica la misma operación valiéndose de la rotación del telescopio al derredor de su eje horizontal. En lugar de un objeto distante, puede servirse el observador de la retícula de otro instrumento cualquiera usado como colimador, según se dijo en el número 247 del Tomo I.

Réstanos indicar la manera de corregir el error de colimación de la retícula. Esta rectificación se practica también visando un objeto distante ó la retícula de un colimador. Si el telescopio del altazimut es susceptible de invertirse sobre sus apoyos, después de hacer coincidir con el punto lejano ó con el colimador la intersección de los hilos centrales de la retícula, se levanta cuidadosamente de sus apoyos y se invierte. En caso de que en su nueva posición, y vuelto á dirigir á la señal, no quede ésta cortada por el hilo vertical del centro, se corrige la mitad de la desviación con los tornillos de la retícula, y la otra mitad por el movimiento general del instrumento en azimut, con el fin de repetir la prueba, hasta que en las dos posiciones inversas del eje pase el hilo vertical por el punto observado.

Es preferible adoptar otro método de corregir la colimación que no tiene, como el anterior, el inconveniente de ocasionar á veces pequeños movimientos en el instrumento al hacer la inversión, sobre todo cuando el telescopio y el círculo son algo pesados. Consiste éste en invertir el telescopio sin moverlo de sus apoyos, valiéndose de una semi-revolución de los dos círculos vertical y horizontal al derredor de sus respectivos ejes. Después de establecida la coincidencia de la señal con la intersección de los hilos centrales, se lee la indicación del círculo azimutal tomando el término medio de las lecturas de sus micrómetros. En seguida se hace girar el instrumento 180° al derredor de su eje ó columna vertical, fijando el círculo azimutal en la posición en que los micrómetros señalen exactamente $180° + a$, designando por a la primera lectura. Entonces se vuelve á dirigir el telescopio á la señal por medio de su movimiento al derredor del eje horizontal, y si no la corta el hilo del centro, es porque existe el error de colimación, cuyo valor es la mitad de la desviación que se observe, la cual puede destruirse como antes se ha dicho, á saber: por el movimiento de la retícula cuyo hilo central se

colocará á la mitad de la distancia que lo separa aparentemente del objeto. La operación debe repetirse hasta nulificar sensiblemente el error.

La objeción que podría hacerse al método precedente es la de que es preciso confiar en la exactitud de las divisiones, y esto en puntos del limbo diametralmente opuestos. En efecto, si las divisiones correspondientes á las lecturas no distan exactamente 180°, todo su error se combina con el de la colimación, puesto que aquella condición es precisamente la base del método; pero tal error, en caso de que exista, es indudablemente muy pequeño en los instrumentos de precisión. Por otra parte, es posible eliminar el error de la semi-circunferencia valiéndose de dos colimadores opuestos, de la manera siguiente. Se pone en coincidencia el hilo central del altazimut con la intersección de los hilos de un colimador lo mismo que en el primer procedimiento. Para facilitar la inteligencia del método, supongamos que el colimador haya quedado al Norte del altazimut, y que se trata de colocar al Sur del mismo instrumento el otro colimador, de tal manera, que su eje óptico se halle en la prolongación, ó por mejor decir, en la misma dirección que el del primero. Como no podría practicarse esta operación por la interposición del altazimut entre ambos colimadores, se quita el telescopio de sus apoyos, y entonces ya se podrá establecer la coincidencia de la retícula del colimador del Sur con la del que ha quedado fijo en el Norte. Luego que esto se ha conseguido, la dirección de sus dos ejes ópticos es la misma y sus retículas pueden considerarse como dos puntos infinitamente distantes entre sí, y que difieren exactamente 180° en azimut. Si, pues, se restablece el telescopio del altazimut en sus apoyos, y después de bien arreglados los niveles se vuelve á poner en coincidencia con el colimador del Norte, y en esa posición se fija el círculo azimutal, la línea de colimación se habrá establecido en la dirección de los ejes ópticos de los colimadores. En consecuencia, si se lleva en seguida el telescopio hacia el colimador del Sur, valiéndose de su movimiento al derredor del eje horizontal, deberá cortar la intersección de los hilos de éste, en el caso de que sea nulo su error de colimación. Si no se verifica así, la desviación que se observe es doble de este error, y podrá destruirse moviendo la retícula hasta la mitad de ese espacio. Cuando se ha apreciado bien la mitad del espacio ó distancia de una retícula á otra, se hallará que volviendo á establecer la coincidencia por medio del tornillo de aproximación del círculo azimutal, no queda error perceptible al volver á dirigir el instrumento hacia el primer colimador en virtud del movimiento del telescopio al derredor de su eje horizontal.

Corregida la colimación del hilo vertical del centro, puede suceder que su intersección con el horizontal no quede en la posición necesaria para que las visuales dirigidas por ese punto resulten paralelas á la línea de los ceros del círculo vertical, y en tal caso existe una especie de colimación en el sentido vertical. Este error, sin embargo, no tiene importancia alguna en la medida de los ángulos horizontales, y se elimina completamente en la de los verticales observándolos en las dos posiciones del círculo, según se dijo en el número 243 de la Topografía, en donde también expuse el modo de determinar su magnitud, para aplicarlo como corrección, en el caso de observar las distancias zenitales en una sola posición del círculo. Es igualmente posible hacerlo desaparecer moviendo la retícula en la dirección vertical hasta que el punto de intersección coincida con la señal observada, al mismo tiempo que los micrómetros indiquen la distancia zenital verdadera obtenida por la doble observación. La retícula de un colimador puede servir con ese objeto mejor que una señal distante, como veremos al tratar de las observaciones astronómicas.

Por la descripción del altazimut y de sus rectificaciones, habrá tenido ocasión de notar el lector la gran semejanza de este instrumento con el teodolito, del que sólo difiere esencialmente en no ser repetidor. Hay, sin embargo, instrumentos pequeños cuya construcción participa á la vez de la del teodolito y del altazimut. Hace algún tiempo se construyeron para el Gobierno mexicano, en la fábrica de Troughton & Simms, algunos teodolitos, que aunque repetidores y con vernieres en lugar de micrómetros, tienen la misma disposición que el altazimut en cuanto á la numeración del círculo vertical, el movimiento completo del telescopio al derredor de su eje, la coloca-

ción de los niveles, etc. Estos instrumentos, cuyos círculos vertical y horizontal tienen unos $0^m.26$ de diámetro, y que dan una aproximación de $10''$, ofrecen la ventaja de ser muy portátiles, y en manos expertas, bastante exactos para la ejecución de muchas operaciones geodésicas y astronómicas.

48.—En lo que precede he indicado los procedimientos teóricos para nulificar los errores instrumentales; pero en la práctica es casi imposible conseguirlo por completo, y sobre todo, poder confiar en la permanencia de las rectificaciones. Sin hacer referencia á los niveles, cuyo estado naturalmente varía cada vez que se establece el instrumento en una estación, y que, en consecuencia, demanda un continuo examen, todas las demás correcciones están más ó menos sujetas á alteración. Por esta causa, lo que únicamente debe procurarse es reducir al menor valor posible todos los errores por los medios que se han enseñado, y determinar en seguida sus pequeñas magnitudes con el fin de llevarlos en cuenta, como correcciones, al practicar una operación. Así, por ejemplo, al exponer la teoría de los niveles (Tomo I, número 234), vimos que siendo v el valor angular de sus divisiones, o y e las indicaciones de los extremos de la burbuja en la primera posición, y o' y e' las que se obtienen hacia los mismos lados después de invertir el nivel, la inclinación que éste señala es en segundos:

$$x = \frac{1}{4} v [(o + o') - (e + e')] \quad \text{.................} \quad (5)$$

En el altazimut el nivel que es paralelo al círculo vertical da á conocer, por la fórmula precedente, la inclinación del eje ó columna vertical á cuyo derredor se mueve el instrumento. Si convenimos en que o y o' representen las indicaciones del extremo *ocular* de la burbuja y e y e' las del extremo que queda hacia el *objetivo*, el valor de x resultará positivo cuando la columna del instrumento se incline hacia el objeto observado; y en consecuencia, deberá añadirse con su signo á las distancias zenitales que dé el círculo vertical. La graduación de éste está numerada por cuadrantes en el altazimut, por lo cual da distancias zenitales en una posición y alturas en la otra; y así es que designando por b la distancia zenital que indica el instrumento y por a la altura, la distancia zenital verdadera, independiente á la vez del error de colimación en el sentido vertical y de la inclinación del eje será (Topografía número 245):

$$z = 45^\circ + \frac{1}{2}(b-a) + x \text{ .... } (6)$$

Debemos advertir que la cantidad x puede no representar la inclinación absoluta del eje, el cual acaso se desvíe de la vertical en una dirección diferente á la del objeto que se observa; pero como x representa de todas maneras el efecto de esta inclinación en el plano vertical que pasa por el objeto, su valor es el que importa introducir como corrección en la fórmula anterior. Es evidente que el efecto de esta inclinación de la columna no tiene influencia alguna en la medida de los ángulos horizontales, puesto que se verifica en el plano vertical que pasa por el objeto observado.

49.—La misma ecuación (5) servirá para calcular el pequeño ángulo que forma con el horizonte el eje horizontal del telescopio, sustituyendo en ella las indicaciones del nivel montante. En este caso convengamos en representar por o y o' las lecturas del extremo de la burbuja que quedan á la izquierda del observador, y por e y e' las de la derecha; entonces x resultará positivo cuando la extremidad izquierda del eje esté más elevada que la derecha, ó lo que es lo mismo, cuando el zenit del instrumento quede á la derecha del observador respecto del zenit verdadero.

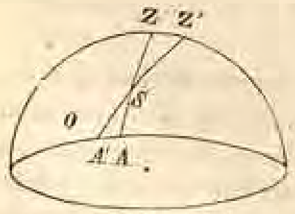


FIG. 16ª

Para distinguir el error del eje horizontal, del que corresponde á la columna vertical del instrumento, designemos por d el primero, aunque calculado por la misma fórmula (5), é investiguemos su influencia en la medida de los ángulos verticales y horizontales. Sea Z (fig. 16ª) el zenit verdadero del observador, Z' el que señala el instrumento en virtud del error de horizontalidad d del eje del telescopio, y S la señal que se observa. Al visar este ob-

jeto, el círculo vertical del instrumento trazará en la esfera celeste el plano inclinado $Z'SA'$, mientras que si no existiera el error, trazaría el plano vertical ZSA. En consecuencia, el primero forma con el horizonte un ángulo $SA'A = 90^\circ - d$, y la distancia zenital que mide el instrumento es $z' = Z'S$, debiendo medir $z = ZS$.

A causa del mismo error, si suponemos en O el cero del círculo azimutal, y su graduación de izquierda á derecha, como generalmente sucede, la lectura que se obtenga será $a' = OA'$, en vez de $a = OA$ que debería corresponder á la visual sin la existencia del error.

Busquemos en primer lugar la corrección c que debe sufrir la distancia zenital observada z' para obtener la verdadera z. En el triángulo $SA'A$, puesto que SA' y SA representan los complementos de z' y z respectivamente, tendremos:

$$\cos. z = \cos. z' \cos. d$$

Mas como he supuesto $z = z' + c$, la ecuación anterior podrá escribirse así:

$$\cos. z' \cos. c - \text{sen.}\, z' \text{sen.}\, c = \cos. z' \cos. d$$

la cual desde luego indica que para $z' = 0$, se tiene $c = d$; luego en el zenit la corrección es de la misma magnitud que el error del eje. Para $z' = 90$, resulta $c = 0$, ó lo que es lo mismo, que la inclinación del eje horizontal no influye en las alturas de los objetos situados en el horizonte. Para hallar la pequeña corrección que corresponde á las distancias zenitales comprendidas entre esos límites, sustituyamos por $\cos. d$ su valor $1 - 2\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} d$, y se hallará fácilmente:

$$2 \cos. z' \text{sen.}^2 \frac{1}{2} c + \text{sen.}\, c\, \text{sen.}\, z' = 2 \cos. z' \text{sen.}^2 \frac{1}{2} d$$

Como solamente en el zenit se tiene $c = d$, y el error del eje es siempre muy pequeño, sustituyamos por $\text{sen.}\, c$ el valor del arco en segundos, omitiendo el término de segundo orden para obtener:

$$c = \frac{2\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} d \cot. z'}{\text{sen.}\, 1''}$$

A causa de la misma pequeñez de d tampoco hay inconveniente en tomar el arco por su seno; y entonces resulta con la exactitud necesaria:

$$c = \frac{1}{2} d^2 \cot. z' \operatorname{sen.} 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

fórmula que permite corregir las distancias zenitales observadas en un plano ligeramente oblicuo respecto de la vertical. Nótese que para objetos situados cerca del horizonte, como lo están generalmente las señales geodésicas, el factor de d^2 es extremadamente pequeño; y por consiguiente, basta nivelar el eje con alguna aproximación para poder prescindir, sin error, de esta corrección, al medir las distancias zenitales que entran como elementos en el cálculo de las diferencias de nivel de los puntos trigonométricos. Para $d = 10'$ y $z' = 80°$, que salen de los límites ordinarios en la práctica de la Geodesia, la corrección sería solamente $c = 0''.15$.

50.—De mucha mayor importancia es la influencia de este error en las lecturas del círculo azimutal. En efecto, el triángulo $S A A'$, en que el lado $A' A = a - a'$ mide el error cometido en el ángulo, se tiene:

$$\tan. (a - a') = \operatorname{sen.} d \cot. z'$$

fórmula que indica la necesidad de nivelar con mucha exactitud el eje de rotación, sobre todo, cuando se tiene que medir ángulos horizontales entre objetos muy elevados respecto del horizonte, ó al menos de altura muy desigual. Como de esa manera siempre es posible hacer que d sea pequeño, podremos simplificar la expresión anterior, pues siendo z' bastante considerable, no hay inconveniente en tomar los arcos por sus líneas trigonométricas para obtener:

$$a = a' + d \cot. z' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

que permite corregir las lecturas azimutales del error que produce la falta de horizontalidad del eje. Para $d = 60''$ y $z' = 80°$ resulta $a - a' = 10''.6$. Con el mismo valor de d, y $z' = 89°$, todavía excede de $1''$ el error $a - a'$; y, en consecuencia, es muy importante reducir el valor de d á unos cuantos segundos y llevarlo en cuenta para hacer las correcciones precedentes; porque de nada serviría una aproximación de $1''$, ó acaso de menos, en las lecturas del círculo azimutal, si se dejase subsistir un error que tal vez podría ser de algunos segundos.

Hay que advertir que al observar desde una estación los ángulos horizontales, el error d determinado con el nivel montante, es variable en cada dirección que se dé al telescopio, á menos que sea perfectamente vertical el eje del instrumento. El valor de d resulta, en efecto, de la combinación de la falta de verticalidad de la columna con la falta de perpendicularidad entre ésta y el eje de rotación del telescopio; y por consiguiente, aunque este último error sea constante en una revolución azimutal del instrumento, es necesariamente desigual el efecto de la inclinación de la columna, en distintas direcciones.

De las consideraciones que preceden se deduce que para sacar todo el partido de que es susceptible un instrumento de precisión, es indispensable nivelarlo muy bien y medir la inclinación del eje horizontal en la posición que toma al visar cada objeto. Entonces siendo a'_1 y a'_2 las lecturas que se obtengan en el círculo azimutal al observar las dos señales de la izquierda y de la derecha respectivamente; z'_1 y z'_2 sus distancias zenitales, y d_1 y d_2 las indicaciones correspondientes del nivel montante, el ángulo verdadero entre ellas será en general:

$$A = a'_2 - a'_1 + d_2 \cot. z'_2 - d_1 \cot. z'_1$$

Es claro que para efectuar las correcciones con suficiente exactitud basta tomar las distancias zenitales con aproximación de $1'$ ó $2'$, lo cual puede hacerse anotando las indicaciones del círculo vertical cuando se visa cada una de las señales.

Debe notarse, sin embargo, que cuando se observa un mismo ángulo en las dos posiciones inversas, esto es, con el limbo vertical á la derecha y luego á la izquierda en virtud de una semirevolución azimutal del instrumento, los errores d se presentarán con signos contrarios, puesto que el apoyo más alto del eje horizontal queda sucesivamente á un lado y otro del observador. Según esto, si la columna está exactamente vertical, los valores de d en la segunda posición serán numéricamente iguales á los de la primera, produciendo por consiguiente en el ángulo una corrección igual y de distinto signo. De aquí se infiere que el promedio de los ángulos obtenidos en las dos posiciones inversas puede considerarse independiente de la falta de horizontalidad del eje, si es muy pequeña la inclinación de la columna.

51.—Investiguemos ahora la influencia del pequeño error de colimación que aun puede quedar después de practicada la corrección como se ha dicho, y comencemos por determinar la magnitud de ese pequeño error, que designaré por c expresado en segundos. Si se sigue el método de invertir el telescopio sobre sus apoyos, sea a la lectura del limbo cuando la señal que se observa ó la retícula del colimador coincide con el hilo vertical del centro. Si no existiera el error, la lectura exacta habría sido:

$$e = a + c$$

Designando por a' la nueva lectura que se tiene cuando después de invertido el eje se restablece la coincidencia, y atendiendo á que c produce un efecto contrario al de la primera posición, resulta:

$$e = a' - c$$

Eliminando á e entre estas dos ecuaciones, se halla:

$$c = \frac{1}{2}(a' - a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

El signo que resulte del cálculo será el que corresponde á la primera posición del instrumento. Supongamos, por ejemplo, ... $a = 24^\circ\,17'\,31''$ y $a' = 24^\circ\,17'\,25''$; con estos datos resulta: $c = -3''.0$ para la primera posición y $c = +3''.0$ para la segunda.

Cuando se haya invertido el telescopio por medio de una semirevolución azimutal, designando siempre por a y a' las dos lecturas

que corresponden á las coincidencias, tendremos que las indicaciones exactas serían:

$$e = a + c$$
$$180^\circ + e = a' - c$$

y que por la eliminación de e producen:

$$c = \frac{1}{2}(a' - a) - 90^\circ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Si a' resulta menor que a es á causa de que en la media vuelta azimutal ha pasado ya el cero de la graduación, y por tanto deben añadirse 360° á la segunda lectura, como en el ejemplo siguiente, en que se halló $a = 253^\circ\,41'\,22''.7$, $a' = 73^\circ\,41'\,18''.3$.

$$\begin{array}{rl} 360^\circ + a' = & 433^\circ\,41'\,18''.3 \\ a = & 253\ \ 41\ \ 22\ .7 \\ \hline 180^\circ + \frac{1}{2}(a' - a) = & 89^\circ\,59'\,57''.8 \\ - & 90 \\ \hline c = & -2''.2 \end{array}$$

Para la segunda posición debería tomarse $c = +2''.2$.

Finalmente, si se usan dos colimadores opuestos, se tiene como en el primer caso $c = \frac{1}{2}(a' - a)$, puesto que las lecturas se hacen en dos puntos de la graduación cuya distancia angular es $2c$. Por todo lo que precede se ve que he supuesto positiva la colimación cuando el hilo central de la retícula se desvía á la izquierda del eje óptico del telescopio, ó lo que es lo mismo, cuando la imagen invertida del objeto que se observa llega á la coincidencia con el hilo antes de llegar al eje óptico al mover el telescopio de izquierda á derecha, orden en que supongo numerada la graduación.

Puesto que c representa la distancia angular de la línea de colimación al eje óptico, es claro que cuando se tenga horizontal el telescopio, el arco del horizonte comprendido entre aquellas dos líneas será precisamente igual á c. Esta pequeña distancia permanece sensiblemente horizontal á cualquiera altura en que se establezca el telescopio, de manera que las distancias zenitales de los objetos que se observen en la intersección de los hilos, serán las mismas que si se hubieran observado en la intersección del hilo horizontal con el eje óptico. Según esto, la colimación del hilo vertical del centro no afecta de un modo perceptible la medida de los ángulos verticales.

52.—No sucede lo mismo en la medida de los ángulos azimutales, puesto que la distancia constante c abraza en la esfera arcos de amplitud creciente al paso que disminuyen las distancias zenitales de los objetos. En efecto, al girar el instrumento horizontalmente con el telescopio inclinado hacia una región de la esfera cuya distancia zenital sea z', describe la línea de colimación una superficie cónica que tiene por base un círculo menor paralelo al horizonte y cuyo radio es el seno de la distancia zenital. Como las amplitudes de los arcos de igual extensión son inversamente proporcionales á sus radios, tendremos que los círculos verticales que pasan por el eje óptico y por la línea de colimación, interceptarán en el horizonte el arco C que resulta de la proporción sen. $z':1::c:C$, de la cual se obtiene:

$$C=\frac{c}{\text{sen.}\, z'}$$

Esta fórmula da á conocer que la influencia del error de colimación es muy grande cerca del zenit, y de menos importancia cerca del horizonte, á causa de que sen. z' llega á su *máximum* en ese plano. Cuando los objetos que se observan tienen poca altura, el valor de C es casi constante, puesto que apenas difieren entre sí los senos de los ángulos muy próximos á 90°.

Tomando en cuenta el efecto de la colimación, vemos que la expresión más general del ángulo formado por dos señales, es:

$$A=a'_2-a'_1+(d_2\cot.z'_2-d_1\cot.z'_1)+\left[\frac{1}{\text{sen.}\,z'_2}-\frac{1}{\text{sen.}\,z'_1}\right]c \quad .....(12)$$

en la que designo con índices numéricos los elementos que se refieren á los dos objetos, siendo a' la lectura angular del círculo azimutal, d la indicación del nivel montante, c el error de colimación y z' la distancia zenital aproximativa. Las lecturas a' se suponen ya corregidas por el error de curso de los micrómetros, si es que existe, las inclinaciones d se calculan por la fórmula (5) y la colimación por la (9) ó la (10), según el caso.

La ecuación (12) indica que cuando se observe el mismo ángulo en las dos posiciones inversas del instrumento, la colimación producirá efectos contrarios y numéricamente iguales, por lo cual el promedio de los dos resultados es independiente de este error. Lo mismo se verifica, según dijimos, respecto de la corrección por el estado del nivel en el caso de ser la columna sensiblemente vertical; y esto se conoce desde luego por el nivel paralelo al círculo vertical, que debe dar la misma lectura en todo el curso de una revolución, ó por el nivel montante que denunciará inclinaciones numéricamente iguales y de signos contrarios en las dos posiciones inversas del altazimut.

53.—Una vez bien comprendida la construcción del altazimut, nada de nuevo hay que añadir á lo que se dijo en la Topografía respecto del modo de medir los ángulos. La única diferencia consiste en que no siendo repetidor este instrumento, permanece fijo el limbo horizontal, y se dirigen las visuales valiéndose del movimiento general de su parte superior, que lleva consigo los micrómetros. Todas las instrucciones dadas allí son aplicables con más razón á la Geodesia, cuyas operaciones deben ofrecer un tipo de precisión, y que, en consecuencia, demandan todo género de precauciones que tiendan á garantizar la exactitud de los resultados.

La reducción al centro de estación, cuando sea preciso aplicarla, se calcula por las mismas fórmulas que expuse en el Tomo I, así como la resolución del problema de los tres vértices, etc., con las modificaciones que se indicarán en el Capítulo relativo á la resolución de los triángulos geodésicos, y que se reducen á hacer las correcciones de los ángulos por el exceso esférico; pero los procedimientos del terreno son absolutamente iguales, y los mismos también los datos que deben tomarse para poder aplicar la resolución correspondiente.

Los partidarios de los instrumentos repetidores atribuyen al teodolito, respecto del altazimut, la ventaja de prestarse á medir un mismo ángulo con distintas partes de la graduación; pero atendiendo á la perfección á que ha llegado el arte de dividir, creo que esta ventaja no es por sí sola bastante grande para compensar la que proporciona la mayor exactitud que se alcanza con la sustitución del micrómetro al vernier, y la condición de estabilidad, que abogan en favor del altazimut. Por otra parte, se mide también con el altazimut el mismo ángulo en diversas partes de su limbo, haciendo uso de un tripié, llamado *repetidor*, cuya meseta es susceptible de movimiento al derredor de un eje vertical. De ese modo, terminada la medida del ángulo en la posición que tenía el altazimut, se comunica un movimiento angular arbitrario á la meseta, á fin de que una nueva parte de la graduación sirva para volver á medir el ángulo. No he tenido ocasión de emplear tripiés de esta clase; pero temo que con ellos se disminuya la firmeza del aparato, que es una de sus condiciones más esenciales: y si se quiere dar mucha importancia á la ventaja de variar el arco del limbo que mide un ángulo, me parecería preferible cambiar la posición del altazimut mismo, lo cual sólo demandaría un nuevo examen de los niveles para volver á establecer la verticalidad y la horizontalidad de los ejes. Esta operación es muy breve teniendo ya corregidos los niveles.

Midiendo ángulos con un altazimut, he seguido un método que, si no tiene la ventaja de que antes se ha hablado, sí permite disminuir los pequeños errores de observación, de graduación y de lectura. Consiste en visar cada señal con cada uno de los 5 hilos verticales de la retícula en sus puntos de intersección con el horizontal del centro. Para evitar confusión al aplicar este procedimiento, designaré con el nombre de posición primera ó directa del instrumento aquella en que el círculo vertical mida distancias zenitales; y con el de posición segunda ó inversa aquella en que mida alturas. La primera corresponde generalmente al caso en que el círculo vertical queda á la derecha del observador. Asentado esto, admitamos que se haya asignado un número á cada hilo de izquierda á derecha, que es el orden que generalmente sigue la numeración del limbo; y de esa manera,

si se hace coincidir con el primer hilo la imagen invertida de una señal, se tiene una indicación menor que si se hace coincidir con el segundo ó con cualquiera de los demás.

Supongamos ahora que al medir un ángulo se vise la señal de la izquierda con cada uno de los hilos en el orden de su numeración, leyendo siempre los dos micrómetros del círculo horizontal, y sean a, b, c, d y e los cinco promedios obtenidos. Llamando m su medio aritmético, tendremos.

$$m = \frac{1}{5}(a+b+c+d+e)$$

y podrá considerarse á m como la indicación correspondiente á un hilo imaginario, que para distinguirlo del tercero ó central, llamaré *hilo medio*. Si los 5 hilos de la retícula fuesen exactamente equidistantes, y no hubiese error alguno de observación ó de lectura, m debería ser igual á c; pero no debiendo contar en general con esa perfección, la indicación m del hilo medio es digna de más confianza que la simple lectura correspondiente al hilo central. Al llevar el telescopio á la segunda señal, hallaremos de una manera semejante:

$$m' = \frac{1}{5}(a'+b'+c'+d'+e')$$

y el ángulo que se busca tendrá por medida $m'-m$, en lugar de $c'-c$ que se hubiera obtenido con el tercer hilo solamente. Se ve que este procedimiento equivale á medir el ángulo en cada uno de los hilos, y á tomar el término medio, pues se tiene:

$$m'-m = \frac{1}{5}[(a'-a)+(b'-b)+(c'-c)+(d'-d)+(e'+e)]$$

Terminada la medida en la primera posición, se pasa á la segunda ó inversa, en la cual los mismos hilos se presentan en orden contrario, esto es: el 5º como 1º, el 4º como 2º, etc. Designando con letras mayúsculas los resultados semejantes obtenidos en la primera posición, tendremos por valor del mismo ángulo:

$$M'-M = \frac{1}{5}[(A'-A)+(B'-B)+(C'-C)+(D'-D)+(E'-E)]$$

Y entonces el resultado definitivo será:

$$R = \frac{1}{2}[(M' + m') - (M + m)]$$

El altazimut á que me he referido no tenía micrómetro en el círculo horizontal, sino tres vernieres distantes 120° uno de otro, de modo que para obtener los cuatro promedios que entran en la ecuación precedente era preciso hacer 60 lecturas. Hay, pues fundamento para creer que el resultado final queda libre de los pequeños errores accidentales de observación, de lectura, de graduación, etc. Aunque penoso si se quiere, es conveniente este método, porque proporciona también la ventaja de poder examinar y discutir por separado el resultado que proviene de cada vernier y de cada hilo. Teniendo el círculo solamente dos vernieres ó micrómetros á distancia de 180°, será 40 el número total de lecturas, puesto que se hacen 20 en cada posición del instrumento.

Cuando se aplique este procedimiento en una sola posición del altazimut y se tema la influencia del error de colimación, es preciso tener presente al corregir los promedios m y m' ó M y M', que estos corresponden á la indicación del hilo medio, el cual puede no coincidir con el central á consecuencia de algún pequeño error en la equidistancia de los hilos. La colimación del hilo medio será, por consiguiente, igual á la del central sumada con la diferencia $c - m$ ó $c' - m'$ de sus indicaciones. El valor de esta diferencia se determina por muchas observaciones de objetos lejanos situados muy cerca del horizonte, ó por las de un colimador establecido también horizontalmente.

54.—En las triangulaciones que se ejecutan con instrumentos repetidores, se toman generalmente varias series de cada ángulo, dependiendo el número de observaciones de cada serie de la mayor ó menor concordancia que ofrezcan sus resultados individuales. Mr. Puissant considera que, en circunstancias favorables, es suficiente hacer 3 series de observaciones de un ángulo, teniendo cada serie unas 20 repeticiones, para alcanzar la precisión necesaria.

Sería de desearse que todos los ángulos de una cadena geodésica

se midiesen un mismo número de veces y en igualdad de circunstancias; pero esto casi nunca puede lograrse. Cuando se toman los ángulos desde una estación que sea vértice común de varios triángulos, es muy frecuente que no todas las señales se distingan con la misma claridad. Sus distancias, sus alturas, la posición del sol respecto del observador, etc., son otras tantas causas que se oponen á la identidad de condiciones, y que por tanto hacen variar el grado de certidumbre en la dirección de las visuales; y aun sucede á veces que alguna ó algunas señales no se perciben á la hora en que se observan las demás. Entonces el ingeniero se ve en la necesidad de proceder á la medida de sus ángulos en circunstancias diferentes, siéndolo también, por consiguiente, el grado de confianza que deposita en los resultados parciales, al cual debe atender cuando se trata de combinar los diversos valores que haya obtenido para el mismo elemento.

El grado relativo de certidumbre puede reducirse á guarismos de un modo más ó menos arbitrario. Así, por ejemplo, si un observador representa con el número 10 la confianza que tiene en la dirección de una visual cuando todas las condiciones de luz, transparencia de la atmósfera, hora del día, etc., le son muy favorables, y con el 1 las circunstancias enteramente contrarias, en las que pueda apenas distinguir vagamente la señal, podrá establecer diez grados de confianza representados por los números 1, 2, 3, ... 10. Entonces al lado de cada observación anotará el guarismo de esta escala, equivalente á la seguridad que le atribuya; y cuando trate de combinar dos ó más resultados individuales para deducir de ellos un promedio general, deberá tomar en cuenta el número que corresponda á cada observación, procurando que el resultado de la combinación se acerque más á los parciales anotados como más dignos de confianza. Para esto notemos que cuando dos observaciones tienen inscritos, por ejemplo, los guarismos 3 y 8, se ha querido indicar que se concede á la primera tanta confianza como á 3 observaciones de la clase inferior representada por el guarismo 1, y se juzga á la segunda equivalente á 8 de la misma clase; así es que el promedio de ambos resultados podrá estimarse con una confianza de $3 + 8$; porque lo consideramos equivalente, en efecto, á 11 observaciones cuyo grado de certidumbre fuese 1. Si designamos, pues, por $a+x_1$, $a+x_2$, $a+x_3$, ... $a+x_n$ los n resultados parciales que se hayan obtenido midiendo una magnitud cualquiera, y por $p_1, p_2, p_3 .... p_n$, los guarismos que miden su certidumbre relativa, el promedio m será digno de un grado de confianza representado por $p_1+p_2+p_3 .... p_n$, y estableceremos la ecuación:

$$(p_1+p_2+p_3+ ...... p_n)m=(a+x_1)p_1+(a+x_2)p_2+(a+x_3)p_3+ ......$$
$$+ ...... (a+x_n)p_n$$

de la cual se obtiene:

$$m=\frac{(a+x_1)p_1+(a+x_2)p_2+(a+x_3)p_3+ .... (a+x_n)p_n}{p_1+p_2+p_3 .... p_n}$$

La cantidad representada por p, que expresa la seguridad relativa de un resultado, se designa generalmente con el nombre de *peso* de ese resultado. Según esto, la fórmula anterior manifiesta que para tomar el promedio se multiplicará cada resultado individual por su peso, y la suma de los productos se dividirá por la de los pesos.

En la ecuación precedente he supuesto que todos los resultados individuales constan de una parte común a y otra variable x, lo cual siempre es cierto; porque basta tomar por a el menor de los resultados. Este artificio tiene por objeto simplificar el cálculo de los promedios, reduciéndolo al de cantidades más pequeñas, pues ejecutando las operaciones indicadas en la fórmula anterior y reduciendo, se halla:

$$m=a+\frac{p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+ .... p_nx_n}{p_1+p_2+p_3 .... p_n} \quad .... (13)$$

Se ve que el valor del promedio se compone también de la parte constante a y del promedio de las variables, obtenido por la aplicación de la regla anterior.

Cuando todos los resultados se juzguen dignos de la misma confianza, haremos $p_1=p_2=p_3$, etc., y el valor de m será:

$$m=a+\frac{x_1+x_2+x_3+ ...... x_n}{n} \quad .... (14)$$

expresión de los términos medios aritméticos comunes.

55.—El medio que he indicado para estimar el peso de cada resultado, aunque más ó menos vago por su misma naturaleza, es acaso el único que más directamente expresa la idea que puede uno formarse de la bondad relativa de una observación aislada, y por arbitrario que parezca, lo es indudablemente menos que la igual apreciación de todos los resultados que se obtengan en condiciones diversas. Voy á indicar otro procedimiento acaso más libre de arbitrariedad, puesto que se funda en la concordancia y número de un conjunto de observaciones, tal como el de los diversos resultados que se obtienen en la medida de una misma línea ó de un mismo ángulo.

En el orden moral como en el físico experimentamos una tendencia irresistible, y por otra parte muy justa, para atribuir mayor grado de probabilidad á un hecho cualquiera, mientras más grande es el número de pruebas que lo atestiguan, y menores son las discordancias de éstas. Así, cuando se nos refiere un acontecimiento que no hemos presenciado, si hay varios testigos que lo afirman y todos ellos están poco discordes en los rasgos principales ó característicos del suceso, nos sentimos inclinados á creerlo cierto, ó al menos lo consideramos como muy probable. Si el número de testigos es sumamente grande á la vez que no hay discrepancia alguna entre ellos respecto de todos los pormenores del hecho, entonces adquirimos una confianza tal en su veracidad, que casi iguala á la certidumbre que tendríamos si lo hubiéramos presenciado. Por el contrario, la duda crece en nuestro ánimo al paso que disminuye el número de testigos, ó que éstos están más discordes en sus respectivos relatos; y esta duda puede llegar á tal grado, que no admitamos en lo absoluto la realidad del acontecimiento. Lo mismo sucede en lo físico: si, por ejemplo, las medidas reiteradas de una línea dan cortísimas diferencias y son en número muy crecido, afirmamos que el resultado final se acerca mucho á la exactitud; y si las diferencias son nulas, adquirimos la certidumbre de que la medida es exacta, por lo menos hasta donde puede serlo con nuestros medios de experimentación. Cuando es pequeño el número de medidas individuales, y presentan, además, fuertes discordancias, aseguramos fundadamente que el resultado es incierto, y no le concedemos confianza alguna.

Hay, pues, cierto enlace entre estos dos elementos, á saber: el número de pruebas y sus discordancias, que puede servir muy bien para medir la bondad de un resultado. Trataré de expresarlo en el lenguaje algebraico: Si $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots\ldots r_n$, son los resultados individuales que se obtienen al medir cierta magnitud, el valor que se adopta como exacto ó al menos como más plausible, es el promedio m de todos ellos, calculado por las fórmulas (13) ó (14). De consiguiente, los residuos $m - r_1, m - r_2, \ldots\ldots\ldots m - r_n$ miden las discordancias entre el valor que se considera como el verdadero y el que da cada resultado aisladamente. De estas restas, unas son positivas y otras negativas, de suerte que su suma algebraica siempre es nula, y por tanto no podremos tomar su medio aritmético; pero si se elevan al cuadrado, se suman y se divide la suma por su número, se obtendrá el cuadrado medio de las discordancias ó errores:

$$e^2 = \frac{(m-r_1)^2 + (m-r_2)^2 + \ldots\ldots\ldots (m-r_n)^2}{n}$$

y si por abreviación representamos por el signo $\Sigma(m-r)^2$ la suma de los términos semejantes, y extraemos la raíz, resulta:

$$e = \sqrt{\frac{\Sigma(m-r)^2}{n}}$$

cantidad que puede tomarse por la discordancia ó error medio que corresponde á cada uno de los n resultados parciales.

El valor de e disminuye cuando crece n ó cuando mengua la suma de los cuadrados de los errores; y puesto que se concede á un resultado una confianza tanto mayor cuanto más pequeño es su error me-

dio, podremos medir su precisión relativa por una cantidad q en razón inversa de e, ó lo que es lo mismo:

$$q = \sqrt{\frac{n}{\Sigma(m-r)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

y aplicando esta fórmula se conseguirá asignar á cada serie de observaciones una precisión relativa, derivada de la concordancia y del número de sus resultados. Tomemos, como ejemplo, las dos series siguientes, que se suponen ser las diversas medidas de una misma línea:

PRIMERA SERIE.		SEGUNDA SERIE.
		1974^m.14
		1974 .16
1974^m.10		1974 .13
1974 .18		1974 .17
1974^{m}14	Promedios	1974^m.15

He supuesto que todos los resultados se juzgaron dignos de igual confianza y por eso se han tomado los promedios por el método común; de lo contrario, se habría aplicado la fórmula (13). Tomando por parte constante $a = 1974^m.10$, dispondremos el cálculo como sigue:

$m-r$	$(m-r)^2$	$(m-r)$	$(m-r)$
		$+0^m.01$	0.0001
		$-0\ .01$	0.0001
$+0^m.04$	0.0016	$+0\ .02$	0.0004
$-0^m.04$	0.0016	$-0\ .02$	0.0004
	$\Sigma(m-r)^2 =$ 0.0032		$\Sigma(m-r)^2 =$ 0.0010
	$q = \sqrt{\frac{2}{0.0032}} = 25.0$		$q = \sqrt{\frac{4}{0.0010}} = 63.2$

Si se quieren combinar ahora los dos promedios atendiendo á su mérito relativo para hallar el resultado final, aplicaremos la fórmula (13), á saber:

$$M = 1974^m.10 + \frac{0.04 \times 25.0 + 0.05 \times 63.2}{88.2} = 1974^m.147$$

Combinando los dos promedios sin atender á su grado de precisión, se habría hallado 1974^m.145. La diferencia de los dos resultados es insignificante en este ejemplo, á causa de la pequeñez de todas las discordancias; pero hay muchos casos en que no es así, y entonces sería muy arbitrario asignar á todas las series el mismo grado de confianza.

En el ejemplo que sigue, se ha hecho la apreciación de la seguridad relativa de cada resultado individual al medir el mismo ángulo.

	Resultados.	Pesos.	Resultados.	Pesos.	Resultados.	Pesos.
	47° 53′ 17″.3	6	47° 53′ 14″.9	4	47° 53′ 17″.9	8
	„ „ 15 .2	2	„ „ 17 .0	7	„ „ 18 .5	10
	„ „ 16 .8	5	„ „ 17 .7	9	„ „ 16 .4	9
			„ „ 16 .1	10		
Promeds.	47° 53′ 16″.8		47° 53′ 16″.6		47° 53′ 17″.6	

Los pesos de los tres promedios serían respectivamente 13, 30 y 27, de modo que de la combinación resultaría:

$$m = 47°\,53'\,16''.0 + \frac{0.8\times 13 + 0.6\times 30 + 1.6\times 27}{70} = 47°\,53'\,17''.02$$

Si se quiere prescindir de los pesos apreciados para calcular la precisión de cada promedio por el número y la concordancia de las observaciones, tendremos:

$m-r$	$[m-r]^2$	$m-r$	$[m-r]^2$	$m-r$	$[m-r]^2$
$-0''.5$	0.25	$+1''.7$	2.89	$-0''.3$	0.09
$+1\ .6$	2.56	$-0\ .4$	0.16	$-0\ .9$	0.81
$0\ .0$	0.00	$-1\ .1$	1.21	$+1\ .2$	1.44
		$+0\ .5$	0.25		
	2.81		4.51		2.34
$q = 1.03$		$q = 0.94$		$q = 1.13$	

$$m = 47°\,53'\,16''.0 + \frac{0.8\times 1.03 + 0.6\times 0.94 + 1.6\times 1.13}{3.10} = 47°\,53'\,17''.03$$

Se ve que aunque el resultado final es casi el mismo, este último

procedimiento asigna mayor mérito á la tercera serie; mientras que la apreciación del observador atribuyó más confianza á la segunda.

La fórmula (15) manifiesta que para valores iguales de $m-r$, las precisiones son proporcionales á la raíz cuadrada del número de observaciones. Así es que cuando las discordancias sean poco más ó menos las mismas, podrá multiplicarse cada promedio por $\sqrt{n}$ para hacer la combinación. Esto es lo que debe practicarse cuando se miden los ángulos con un instrumento repetidor; porque lo que se obtiene es ya un promedio de n repeticiones, cuyas discordancias pueden suponerse comprendidas dentro de los mismos límites, si es que todas las observaciones se han ejecutado en circunstancias semejantes. Tomemos por ejemplo las tres series siguientes obtenidas con un teodolito.

Resultados.	n	$\sqrt{n}$
65° 34′ 42″.7	5	2.24
„ „ 45 .0	10	3.16
„ „ 44 .1	15	3.87
		9.27

$$m = 65°\,34'\,42''.0 + \frac{0.7\times 2.24 + 3.0\times 3.16 + 2.1\times 3.87}{9.27} = 65°34'44''.07$$

56.—Cuando se toma un término medio aritmético por el método común, siempre es sensiblemente nula la suma algebraica $\Sigma(m-r)$ de las discordancias; pero si prescindimos de sus diversos signos para no considerar más que sus valores numéricos, podrá calcularse con más facilidad una discordancia media, que no es otra cosa más que la suma de los valores numéricos de las $m-r$, dividida por su número. Designando por $S(m-r)$ esta suma, la discordancia media y la precisión derivada de ella, serán respectivamente:

$$e = \frac{S(m-r)}{n} \qquad \pi = \frac{n}{S(m-r)} \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

El valor de π podrá emplearse en lugar del de q que suministra la fórmula (15). Así, en el ejemplo relativo á las medidas de la misma línea, las dos series dan:

$$\pi=\frac{2}{0.08}=25.0 \qquad \pi=\frac{4}{0.06}=66.7$$

y el promedio final será, por consiguiente:

$$m=1974^{m}.10+\frac{0.04\times 25.0+0.05\times 66.7}{91.7}=1974^{m}.147$$

y en el primer ejemplo que se refiere á las medidas angulares, se obtiene por las tres series:

$$\pi=\frac{3}{2.1}=1.42 \qquad \pi=\frac{4}{3.7}=1.08 \qquad \pi=\frac{3}{2.4}=1.25$$

$$m=47°53'16''.0+\frac{0.8\times 1.42+0.6\times 1.08+1.6\times 1.25}{3.75}=47°53'17''.01$$

En las expresiones (15) y (16) he procurado formular de una manera sencilla las indicaciones del buen sentido para combinar diversas observaciones más ó menos discordes, y creo que el método expuesto es propio para llenar todas las exigencias de la práctica. Sin embargo, la teoría matemática de las probabilidades conduce á las siguientes fórmulas para calcular el mérito relativo de las observaciones. Según que se haga uso de la suma de los cuadrados de los residuos, ó bien de los residuos mismos con abstracción de sus signos, el error medio de una sola observación es:

$$E=\sqrt{\frac{\Sigma(m-r)^2}{n-1}} \qquad E=1.2533\,\frac{S(m-r)}{n}$$

y entonces se tiene:

Error medio del promedio......... $e=\dfrac{E}{\sqrt{n}}$

Error probable de una observación. $R=0.6745\sqrt{\dfrac{\Sigma(m-r)^2}{n-1}}=0.8453\dfrac{S(m-r)}{\sqrt{n(n-1)}}$

Error probable del promedio...... $r=\dfrac{R}{\sqrt{n}}$

Precisión de una observación ...... $P=\dfrac{0.4769}{R}$

Precisión del promedio............ $p=P\sqrt{n}$

En cuanto á los *pesos*, se consideran proporcionales á los cuadrados de las precisiones, ó sea inversamente proporcionales á los cuadrados de los errores medios de las observaciones.

57.—Sería dilatado y de poca utilidad hacer el desarrollo de estas últimas fórmulas, por exigir la exposición previa de los principios en que se funda el cálculo de las probabilidades. Sólo indicaré el sentido en que debe tomarse el error probable. Entre los errores que pueden influir en el resultado de una observación, es preciso distinguir los constantes de los accidentales. Los primeros son aquellos que en igualdad de circunstancias adquieren la misma magnitud, y también por lo regular el mismo signo; ó que al menos están sujetos á leyes regulares y conocidas. Los errores accidentales no están sujetos en la apariencia á leyes fijas, y obran de una manera variable aun en igualdad de circunstancias. A los errores constantes pertenecen los que pueden provenir de una teoría inexacta, de la omisión de algún elemento importante en la observación ó en el cálculo, del uso de un instrumento incorrecto ó defectuoso, etc., y todos ellos pueden convertirse en correcciones luego que se conoce su magnitud y su influencia. Entre los errores accidentales deben clasificarse los que se originan de la imperfección de nuestros sentidos, que necesariamente tienen un límite de percepción; los que son producidos por causas exteriores que no es fácil prever ni tomar en cuenta, como los pequeños movimientos que experimentan las diversas partes de un instrumento por la acción de la elasticidad de su materia, de los cambios de temperatura, de la dirección en que obra la gravedad, etc., etc.

A medida que se ensanchan los límites de nuestros conocimientos es natural que vaya disminuyendo el número de los errores accidentales, en atención á que van comprendiéndose sus causas ó las leyes que los rigen; pero aunque en la actualidad no se pueda juzgar con acierto acerca del modo de obrar de cada uno de ellos en particular, si se conocen experimentalmente algunas leyes generales á que está sujeto su conjunto, como son las siguientes: 1º Los errores accidentales de igual magnitud se producen por exceso con la misma frecuencia que por defecto, al menos en una serie numerosa de observaciones. 2ª Para cada clase de observaciones existe cierto límite del que nunca exceden los errores accidentales. 3ª La frecuencia con que se producen no es la misma para todos los valores de que sea susceptible el error, sino que, por el contrario, son más frecuentes los pequeños que los grandes.

Estas tres leyes generales, especialmente la última, sirven de base para el cálculo de las probabilidades en sus investigaciones respecto de los errores accidentales, partiendo de la condición de que la frecuencia, ó sea la probabilidad de un error, es una función dependiente de su magnitud. De esta manera se llega al desarrollo de las fórmulas que antes se han expuesto, y cuyo objeto es la comparación de diversas series de observaciones; comparación que se hace por la magnitud de sus errores medios, por la de sus precisiones relativas, ó por la de sus errores probables. Si todos los errores de que sea susceptible una observación se suponen arreglados en el orden de sus magnitudes, el que ocupa el medio de la serie es el que se designa con el nombre de *error probable*. La probabilidad de este error se dice que es $\frac{1}{2}$, lo cual significa que hay tanta probabilidad de que el error efectivo sea mayor, como la hay de que sea menor que el llamado probable. Se comprende, según esto, que la comparación de dos ó más series de observaciones puede reducirse á la de sus respectivos errores probables, en atención á que éstos ocupan el mismo lugar entre los errores posibles de cada serie.

Para que el error probable tenga realmente la significación que se ha explicado, es indispensable que antes de calcularlo se hayan destruido todos los errores constantes de que sea susceptible el resultado de una observación. Por esta causa, para comparar por este método dos ó más resultados, no deben omitirse las correcciones instrumentales, y las que demande una teoría inexacta, aplicando en general todos aquellos procedimientos que hagan variar las circunstancias de una observación ó que tiendan á eliminar las causas de error constante.

58.—Esta es la ocasión de indicar otro error que suele influir en las observaciones angulares, y que debe llevarse en cuenta especialmente cuando se emplee un instrumento de precisión cuyas lecturas

se puedan aproximar hasta los segundos. Si los gruesos de las señales geodésicas se ven bajo un ángulo apreciable, suele suceder que por la posición del sol respecto de ellas, una sola de sus partes se presenta iluminada al observador, el cual en este caso dirige su visual hacia la mitad de la parte iluminada, que es la que distingue. Sucederá entonces, por lo regular, que la visual no pasa por el centro de la señal, y se producirá un pequeño error angular en la indicación del instrumento, llamado *error de fase*. Veamos el modo de determinarlo, á fin de corregir la lectura del círculo azimutal.

Supongamos que sea rectangular la sección de la señal, y $m\,n$ (fig. 17ª) su cara iluminada. El observador en C al medir el ángulo entre un punto A y el centro O de la señal, visa próximamente hacia el medio D de $m\,n$, dividiendo en dos partes sensiblemente iguales al ángulo $m\,C\,n$, bajo el cual distingue la parte alumbrada $m\,n$. El error de fase que comete es, por consiguiente, el pequeño ángulo $x = D\,C\,O$. Designando por r la distancia $O\,D$, tendremos en el triángulo $O\,D\,C$:

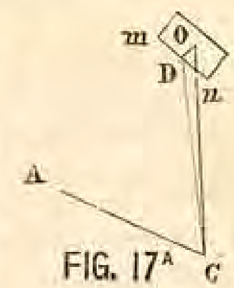


FIG. 17ª

$$\text{sen.}\, x = \frac{r\,\text{sen.}\, D\,O\,C}{D\,C}$$

Como los lados geodésicos son inmensamente grandes respecto de las dimensiones de las señales, podrá tomarse sin error perceptible el lado $O\,C = k$, por $D\,C$. Llamando O el ángulo $D\,O\,C$, y expresando en segundos la pequeña corrección x, resultará:

$$x = \frac{r\,\text{sen.}\, O}{k\,\text{sen.}\, 1''} \quad \text{.........................} \quad (17)$$

El lado k se obtiene por una resolución aproximativa de los triángulos, y el ángulo O se mide con suficiente exactitud al estacionar en la misma señal.

Cuando se hace uso de señales cilíndricas ó cónicas, tendrán circular su sección, como lo indica la figura 18ª Si $S\,O$ representa la dirección de los rayos del sol, resulta que el semicírculo $H\,F\,D\,G$

representará la parte iluminada, la cual ve el observador bajo el ángulo FCG, y al dirigir su visual dividiendo en partes iguales ese pequeño espacio, observa el punto D en lugar del centro O, y comete por tanto el error $x = DCO$. Designemos por s el ángulo $DCG = DCF$, y entonces se tendrá: $FCO = s + x$; $OCG = s - x$; y los triángulos FCO, OCG, el primero de los cuales es rectángulo, darán respectivamente, llamando r el radio de la señal y k el lado OC, que es sensiblemente igual á CF y á CG:

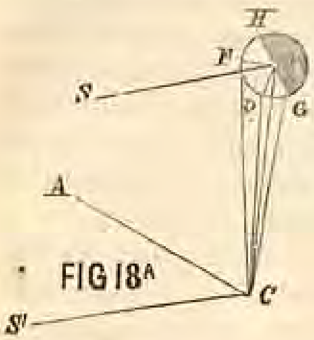


FIG 18ᴬ

$$\text{sen.}(s+x) = \frac{r}{k} \qquad\qquad \text{sen.}(s-x) = \frac{r}{k}\,\text{sen. } O$$

Como los ángulos $s + x$ y $s - x$ son en todos casos extremadamente pequeños, pueden tomarse en lugar de sus senos, y expresados en segundos serán:

$$(s+x)\,\text{sen. } 1'' = \frac{r}{k} \qquad\qquad (s-x)\,\text{sen. } 1'' = \frac{r}{k}\,\text{sen. } O$$

Restando una de otra estas ecuaciones, se obtiene:

$$2x\,\text{sen. } 1'' = \frac{r}{k}(1 - \text{sen.} O)$$

El ángulo $O = COG$ puede expresarse en función del ángulo $S'CO = U$ formado en C por la dirección del sol con la de la señal. Para esto notemos que en virtud del paralelismo de SO y $S'C$, se tiene: $SOC = 180° - U$; pero también $SOC = 90° - O$; luego resultará: $O = U - 90°$, ó bien sen. $O = -$ cos. U. Sustituyendo en la fórmula precedente y recordando que $1 + \cos U = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} U$, se hallará en último resultado:

$$x = \frac{r \cos.^2 \frac{1}{2} U}{k\,\text{sen. } 1''} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (18)$$

Dirigiendo una visual al sol y otra á la señal, se tendrá el ángulo U entre los dos objetos; pero como el azimut del sol varía continuamente, deberá medirse ese ángulo al principio y al fin de la serie de observaciones angulares, con el objeto de adoptar el término medio por valor de U. Es claro que no se necesita mucha precisión en este dato, y así es que al visar el sol se procurará únicamente que su disco quede dividido en dos partes casi iguales por el hilo vertical del centro.

La corrección x será aditiva al ángulo ACD, siempre que la señal A y el sol se hallen hacia el mismo lado respecto del observador, y substractiva en el caso contrario, como se comprende desde luego por la figura.

Después de practicadas esta y todas las demás correcciones, de que sucesivamente me he ocupado, es cuando deben compararse los resultados de las medidas angulares, cuyas discordancias serán, en tal caso, debidas únicamente á los errores fortuitos ó accidentales.

Los errores de observación se determinan comparando la suma de los tres ángulos de cada triángulo con la que teóricamente debían producir, como se indicó en la Topografía; pero como no son planos los triángulos geodésicos, la suma de sus tres ángulos, en lugar de ser de 180°, será igual á $180° + e$, siendo e el *exceso esférico* que aprenderemos á calcular en el Capítulo siguiente. En consecuencia, si designamos por A, B y C los ángulos observados, la suma de sus correcciones será:

$$\varepsilon = 180° + e - (A + B + C)$$

la cual debe distribuirse por partes iguales entre los tres ángulos.

Para terminar lo relativo á las medidas angulares, sólo falta añadir que al ocupar cada estación deben tomarse las distancias zenitales de todos los vértices visibles desde ella, á fin de obtener el elemento necesario para determinar sus diferencias de nivel por el método trigonométrico expuesto en el número 257 y siguientes del primer Tomo.

CAPITULO VI.

CÁLCULO DE LOS TRIÁNGULOS.

59.—Se ha demostrado en el Capítulo II que los triángulos geodésicos pueden considerarse como trazados en la superficie de una esfera, y por tanto les serán directamente aplicables los métodos de resolución que enseña la Trigonometría esférica. Sin embargo, la circunstancia de tener siempre lados de muy poca amplitud, conduce en ciertos casos á modificaciones y simplificaciones de los procedimientos ordinarios, las que me propongo desarrollar en este Capítulo.

Por tres métodos diferentes puede resolverse un triángulo geodésico. El primero consiste en aplicarle inmediatamente las fórmulas usuales de la Trigonometría esférica, más ó menos modificadas. El segundo, conocido con el nombre de método de Delambre, sustituye al triángulo esférico el formado por las cuerdas correspondientes á los lados de aquel, lo cual equivale á suponer inscrito, en la superficie curva del elipsoide, un poliedro de caras planas y triangulares. Este poliedro no sirve más que de auxiliar ó intermedio para la ejecución de los cálculos, y se pasa en seguida á reponer las cosas en su estado verdadero, reduciendo de nuevo los resultados á la superficie del elipsoide. El tercer método está fundado en un teorema muy notable, demostrado por Legendre, que permite la sustitución de un triángulo rectilíneo al triángulo esférico, sin más modificación que la de hacer ligeras correcciones á los ángulos de este último. Por

su extremada sencillez, el método de Legendre es el único que se aplica hoy; mas daré á conocer también los dos primeros, porque se han aplicado á varios trabajos geodésicos de mucha importancia.

60.—**Primer método de resolución.**—La medida directa de la base, ó el cálculo de los triángulos anteriores al que se considera, hace que en cualquiera de ellos se conozca un lado y los tres ángulos, por lo cual la fórmula que debe emplearse es:

$$\text{sen.}\, c = \text{sen.}\, b \frac{\text{sen.}\, C}{\text{sen.}\, B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Como la base, ó en general el lado conocido b, lo está en unidades lineales, deberemos comenzar por reducirlo á segundos por la fórmula:

$$b = \frac{k}{R' \,\text{sen.}\, 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en la que k expresa la extensión lineal de b, y R' el radio de la esfera osculatriz en el punto cuya latitud es φ (número 27). Teniendo ya la base convertida en arco, se toma su seno para aplicar la ecuación (1). Del cálculo resulta el lado c también en arco; pero luego se determina su extensión k' en metros, por la relación:

$$k' = c R' \,\text{sen.}\, 1'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Como el valor de R' varía con la latitud, no deberá ser el mismo para el lado c que para b; pero se puede adoptar para cada triángulo un valor medio de R', tal como el que corresponde al término medio de las latitudes de sus tres vértices. Tomemos por ejemplo los siguientes datos, en que supongo los ángulos ya corregidos por los pequeños errores de observación:

$$k = 39512^{m}41 \qquad \begin{aligned} A &= 64^\circ\, 16'\, 49''.26 \\ B &= 47\;\; 53\;\; 15\;.03 \\ C &= 67\;\; 50\;\; 00\;.17 \end{aligned}$$

siendo la latitud media del triángulo, $\varphi = 19^\circ\, 51'\, 40''$.

k..........	4.5967335	sen. b.....	7.7932113	c..........	3.2039899
R..........	— 6.8035192	sen. C....	9.9666534	R'.........	6.8035192
sen. 1''.....	— 4.6855749	sen. B...	—9.8703042	sen. 1''.....	4.6855749
b..........	3.1076394	sen. c......	7.8895605	k'..........	4.6930840
$b = 00^\circ\, 21'\, 21''.266$		$c = 00^\circ\, 26'\, 39''.521$		$k' = 49326^{m}.92$	

61.—En lugar de proceder de esta manera, y atendiendo á que los arcos b y c son de muy poca amplitud, podríamos desarrollar sus senos por la ecuación:

$$\text{sen.}\,x = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots\dots\dots = x\left(1 - \frac{1}{6}x^2\right)$$

siendo suficientes esos dos términos de la serie. Aplicándola al arco b, y teniendo presente que b en partes del radio es igual á $\frac{k}{R'}$, se tendrá:

$$\text{sen.}\,k = k\left(1 - \frac{1}{6}\,\frac{k^2}{R'^2}\right)$$

ó bien tomando los logaritmos, resulta fácilmente:

$$\log.\,\text{sen.}\,k = \log.\,k - \frac{Mk^2}{6R'^2} \dots\dots\dots \quad (4)$$

La segunda potencia de R' hace tan pequeño el último término, que no se produce error perceptible introduciendo en él un valor medio de R', como el que conviene á la latitud media de 45°, ó mejor á la latitud media del país en que se trabaja. Para la República podría adoptarse $\varphi = 23°\,30'$ por latitud media, y entonces se obtiene:

$$\log.\,\text{sen.}\,k = \log.\,k - (5.25234)\,k^2$$

Con este valor logarítmico puede ya procederse al cálculo de la ecuación (1), que dará el log. sen. k', y para pasar de éste al de k', emplearemos la serie:

$$x = \text{sen.}\,x + \frac{1}{6}\,\text{sen.}^3 x - \dots\dots$$

que aplicada al lado en cuestión, será:

$$k' = \text{sen.}\,k'\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{\text{sen.}^2 k'}{R'^2}\right)$$

y de aquí se obtiene:

$$\log.\,k = \log.\,\text{sen.}\,k' + \frac{M\,\text{sen.}^2 k'}{6R'^2} \dots\dots\dots \quad (5)$$

Calculando el coeficiente del último término para la latitud media de nuestro país, se encontrará:

$$\log.\,k' = \log.\,\text{sen.}\,k' + (5.25234)\,\text{sen.}^2 k'$$

A fin de que se comprenda mejor la marcha del cálculo, lo aplicaré al mismo ejemplo anterior:

k^2	9.19347		
Const	5.25234	k	4.5967335
	4.44581	Corrección	−0.0000028
		sen. k	4.5967307
		sen. C	9.9666534
sen.$^2k'$	9.38616	sen. B	−9.8703042
Const	5.25234	sen. k'	4.6930799
	4.63850	Corrección	+0.0000044
		k'	4.6930843

$$k' = 49326''.95$$

Nótese que aunque sen. k y sen. b pertenecen al mismo arco, que es el número de segundos que abraza la base, no son iguales sus logaritmos; porque el primero está referido á una esfera cuyo radio es R', y, por consiguiente, está expresado en metros; mientras que el segundo se refiere á la unidad trigonométrica, que, como se sabe, se supone dividida en diez millones de partes.

62.—Puede todavía resolverse el triángulo por medio de las series, de este modo: desarrollando el sen. b hasta el término de tercer orden, tendremos en la ecuación (1):

$$\text{sen.}\,c = \left(b - \frac{1}{6}\,b^3\right)\frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B}$$

Pero como también se tiene: $c = \text{sen.}\,c + \frac{1}{6}\,\text{sen.}^3 c$, resulta por la sustitución:

$$c = \left(b - \frac{1}{6}\,b^3\right)\frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B} + \frac{1}{6}\left(b - \frac{1}{6}\,b^3\right)^3\frac{\text{sen.}^3\,C}{\text{sen.}^3\,B}$$

Haciendo las operaciones indicadas con omisión de los términos de orden superior al tercero, se obtiene:

$$c = b\,\frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B} + \frac{1}{6}\,b^3\left(\frac{\text{sen.}^3 C}{\text{sen.}^3 B} - \frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B}\right)$$

y poniendo por b y c sus valores $\frac{k}{R'}$ y $\frac{k'}{R'}$, se halla por último:

$$k' = k\,\frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B} + \frac{k^3}{6\,R'^2}\left(\frac{\text{sen.}^3 C}{\text{sen.}^3 B} - \frac{\text{sen.}\,C}{\text{sen.}\,B}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

En atención á la pequeñez del último término puede emplearse un valor medio ó constante de R'. El primer término representa la resolución del triángulo considerado como rectilíneo; de manera que el siguiente debe verse como la corrección que proviene de la curvatura de los lados, ó de la esfericidad supuesta al elemento terrestre en que está trazado el triángulo. Calculemos por este método el mismo ejemplo precedente.

k......... 4.5967335			k^3......... 3.79020
sen. C.... 9.9666534			sen. C..... 9.96665
sen. B... −9.8703042	$6\,R'^2$ .... −4.38544		.... −4.38544
4.6930827	........cubo........	4.07925	sen. B..... 9.87030
		9.69381	9.50111

Primer término.................. = 49326^m.773
Segundo „ .... = + 0 .494
Tercer „ .... = − 0 .317
k' = 49326^m.95

63.—Segundo método de resolución.—En este procedimiento se reduce el triángulo esférico al que forman las cuerdas de sus lados. Veamos primero cómo se reduce la base k á su cuerda q. Designando como antes por b la amplitud de la base, tendremos:

$$q = 2\,R'\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,b = 2\,R'\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,\frac{k}{R'}$$

Y desarrollando el seno del pequeño arco $\frac{1}{2}\,b$, resulta:

$$q = 2\,R'\left(\frac{1}{2}\,\frac{k}{R'} - \frac{1}{48}\,\frac{k^3}{R'^3}\right)$$

cuya reducción da por último:

$$q = k - \frac{1}{24}\,\frac{k^3}{R'^2}$$

lo cual indica que para obtener la cuerda basta restar del lado la 24ª parte de su cubo dividido por el cuadrado del radio. En éste, como en todos los casos, en que entra como divisor de una línea geodésica la segunda potencia de R', no es preciso usar más que un valor aproximativo de esta cantidad. Si se quiere, puede determinarse desde luego el logaritmo de q, pues la ecuación anterior da:

$$\log.\,q = \log.\,k - \frac{M}{24\,R'^2}\,k^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

que para la latitud media de este país, es:

$$\log.\,q = \log.\,k - (4.65028)\,k^2$$

De este modo tenemos ya conocida la base del triángulo rectilíneo formado por las cuerdas. Para deducir sus ángulos, sea $A\,B\,C$ (fig. 19ª) el triángulo geodésico y O el centro de la esfera osculatriz. Si desde A como centro trazamos otra esfera cuyo radio sea la unidad, sus intersecciones con $B\,A\,O$, $C\,A\,O$ y con el plano $m\,A\,n$ de las cuerdas, determinará un triángulo esférico $m\,n\,p$, cuyo ángulo p es igual á A, y cuyo lado $m\,n$ mide el ángulo de las cuerdas $m\,A\,n = A'$.

FIG 19

Tirando, además, la tangente $A\,D$ al lado b, se tiene:

$$m p = O\,A\,C = 90^\circ - D\,A\,C = 90^\circ - \frac{1}{2}\,b$$

y de la misma manera hallaríamos: $n\,p = 90^\circ - \frac{1}{2}\,c$.

Con los valores precedentes, el triángulo mnp suministra la ecuación:

$$\cos. mn = \cos. A' = \text{sen.} \frac{1}{2} b \,\text{sen.} \frac{1}{2} c + \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c \cos. A$$

y puesto que b y c son lados geodésicos expresados en arco, desarrollaremos los senos y cosenos de sus mitades hasta los términos de segundo orden, de lo que resulta:

$$\cos. A' = \cos. A + \frac{1}{4} bc - \frac{1}{8} (b^2 + c^2) \cos. A$$

Por la forma de esta ecuación se comprende que A y A' difieren muy poco; designando por x su pequeña diferencia tendremos........ $A' = A - x$, y en el desarrollo del coseno de $A - x$ no habrá inconveniente en tomar el arco x por su seno y la unidad por su coseno para obtener:

$$\cos. A' = \cos. A + x \,\text{sen.} A$$

Igualando esta ecuación con la precedente hallaremos que el valor de x es:

$$x = \frac{\frac{1}{8}[2bc - (b^2 + c^2) \cos. A]}{\text{sen.} A}$$

Para hacer más fácilmente calculable por logaritmos este valor, multipliquemos el primer término de su numerador por la unidad bajo la forma de $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A + \cos.^2 \frac{1}{2} A$, y sustituyamos $\cos.^2 \frac{1}{2} A - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} A$ por cos. A, así como $2 \,\text{sen.} \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A$ por $\text{sen.} A$, de todo lo cual resultará sucesivamente:

$$x = \frac{\frac{1}{8}[(b^2 + 2bc + c^2)\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A - (b^2 - 2bc + c^2)\cos.^2 \frac{1}{2} A]}{2 \,\text{sen.} \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A}$$

$$= \frac{(b+c)^2 \text{sen.}^2 \frac{1}{2} A - (b-c)^2 \cos.^2 \frac{1}{2} A}{16 \,\text{sen.} \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A}$$

$$= \left(\frac{b+c}{4}\right)^2 \tan. \frac{1}{2} A - \left(\frac{b-c}{4}\right)^2 \cot. \frac{1}{2} A$$

Los arcos b, c y x están hasta ahora expresados en partes del radio trigonométrico, y así es que para que la reducción x resulte en

segundos, es necesario introducir los lados b y c también en segundos, con lo cual se tiene por último:

$$x = \left(\frac{b+c}{4}\right)^2 \tan. \frac{1}{2} A \,\text{sen.} 1'' - \left(\frac{b-c}{4}\right)^2 \cot. \frac{1}{2} A \,\text{sen.} 1'' \quad ...(8)$$

64.—El cálculo de esta fórmula demanda una resolución aproximativa del triángulo geodésico, la cual se hace considerándolo como rectilíneo, esto es, reduciendo á 180° la suma de los ángulos observados, por medio de la adición ó la substracción á cada uno de ellos, de la tercera parte de la diferencia que se encuentre respecto de 180°. La base k en metros se reduce á segundos por la ecuación (2) para obtener el arco equivalente b, lo mismo que los otros lados calculados aproximadamente, que darán los valores de a y c. En seguida se calcula la ecuación precedente para determinar la corrección x de cada ángulo, con lo que resultan los del triángulo formado por las cuerdas. Finalmente, se reduce la base k á su cuerda por la fórmula (7), y de esta manera se tiene ya lo bastante para calcular exactamente los lados del triángulo plano, ó sea las cuerdas de los lados geodésicos. Para reducir después las cuerdas á sus arcos, ó lo que es lo mismo, para obtener las líneas geodésicas, la propia ecuación (7) da:

$$\log. k' = \log. q' + \frac{M}{24 R^2} q'^2 \quad .... (9)$$

pues k' y q' difieren tan poco, que puede tomarse una por otra en la pequeña corrección logarítmica.

Todo el método se comprenderá mejor aplicándolo al mismo triángulo que hemos calculado antes. Para el cálculo aproximativo tomaré los ángulos tales como resultaron de la observación, á saber:

$$\begin{aligned} A &= 64°\,16'\,51''.25 \\ B &= 47\;\;53\;\;17\;.03 \\ C &= 67\;\;50\;\;\;2\;.15 \\ \hline & \qquad\quad\;\; 10''.43 \end{aligned}$$

k..........	4.59673				
R′sen. 1″.	−1.48909				
b..........	3.10764				
sen. B......	−9.87030				
				$a=1558''.2$	$\frac{1}{2}A=32°\ 8'\ 25''$
	3.23734	....	3.23734	$b=1281\ .3$	$\frac{1}{2}B=23\ 56\ 38$
sen. A......	9.95469	sen. C......	9.96665	$c=1599\ .6$	$\frac{1}{2}C=33\ 55\ \ 1$
a......	3.19203	c.......	3.20399		

Procedamos ahora al cálculo de las reducciones de los ángulos:

$\frac{1}{2}(b+c)$..........	2.8584	$\frac{1}{2}(b-c)$.......	1.9009		$-\ 1''.580$
"	2.8574	"	1.9009		$+\ 0\ .049$
tan. $\frac{1}{2}A$..........	9.7982	cot. $\frac{1}{2}A$.......	0.2018	$x=$	$-\ 1''.53$
sen. 1″..........	4.6856	....	4.6856		$A=64°\ 16'\ 51''.25$
	0.1926		8.6892		$A'=64°\ 16'\ 49''.72$

$\frac{1}{2}(a+c)$..........	2.8973	$\frac{1}{2}(a-c)$.......	1.0128		$-\ 1''.341$
"	2.8973	"	1.0128		$+\ 0\ .001$
tan. $\frac{1}{2}B$..........	9.6474	cot. $\frac{1}{2}B$.......	0.3525	$x=$	$-\ 1''.34$
sen. 1″..........	4.6856	....	4.6856		$B=47°\ 53'\ 17''.03$
	0.1276		7.0637		$B'=47°\ 53'\ 15''.69$

$\frac{1}{2}(a+b)$..........	2.8512	$\frac{1}{2}(a-b)$.......	1.8401		$-\ 1''.643$
"	2.8512	"	1.8401		$+\ 0\ .034$
tan. $\frac{1}{2}C$..........	9.8276	cot. $\frac{1}{2}C$.......	0.1724	$x=$	$-\ 1''.61$
sen. 1″..........	4.6856	....	4.6856		$C=67°\ 50'\ \ 2''.15$
	0.2156		8.5382		$C'=67°\ 50'\ 00''.54$

La suma de los tres ángulos de las cuerdas excede 5″.95 de 180°. Este exceso proviene de los errores de observación, por lo cual restaremos 1″.983 de cada ángulo, y entonces los corregidos para aplicar la resolución serán:

$$
\begin{aligned}
A' &= 64°\ 16'\ 47''.74\\
B' &= 47\ \ 53\ \ 13\ .71\\
C' &= 67\ \ 49\ \ 58\ .55\\
\hline
&\ 180°\ 00'\ 00''.00
\end{aligned}
$$

Resolvamos ahora este triángulo de las cuerdas, comenzando por reducir la base k por la fórmula (7):

		Const.	4.6503	....	4.6503	....	4.6503
k......	4.5967335	k^2..........	9.1935	q'^2...	9.3622	q''^2..	9.3862
Correc...	−0.0000007	....	3.8438		4.0125		4.0365
q......	4.5967328						
sen. B'...	−9.8703017						
	4.7264311	....	4.7264311				
sen. A'...	9.9546887	sen. C'...	9.9666520				
q'......	4.6811198	q''.....	4.6930831				
	+0.0000010	Correc...	+0.0000011				
k'........	4.6811208	k''......	4.6930842				
	$k'=47986^m.69$		$k''=49326^m.94$				

Tal es el método de Delambre; aunque sus cálculos preparatorios sólo demandan el uso de logaritmos de cuatro ó cinco cifras decimales, es, sin embargo, en su conjunto, más laborioso que cualquiera de las variedades que he expuesto del primer procedimiento.

65.—**Tercer método de resolución.**—El teorema de Legendre que sirve de fundamento á este método, puede enunciarse así, dividiéndolo en dos proposiciones:

1ª—*Si se tienen un triángulo esférico de lados muy poco curvos, y un triángulo rectilíneo cuyos lados sean respectivamente iguales en extensión á los del esférico, los ángulos de uno y otro diferirán una misma cantidad.*

2ª—*Esta diferencia constante es igual á la tercera parte del exceso esférico, esto es, á la tercera parte del exceso que sobre 180° tiene la suma de los tres ángulos del triángulo esférico.*

Para demostrar la primera, sean A, B, C los ángulos del triángulo esférico; A', B', C' los del rectilíneo, y a, b, c los lados comunes á ambos. Supondré, además, por lo pronto y para mayor sencillez, que el primero pertenece á una esfera que tiene la unidad por radio. El triángulo rectilíneo da la ecuación:

$$\cos. A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \text{.....................} \quad (M)$$

Y puesto que $\text{sen.}^2 A' = 1 - \cos.^2 A'$, se deduce la siguiente:

$$\text{sen.}^2 A' = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

que desarrollada y reducida adquiere esta otra forma:

$$\text{sen.}^2 A' = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2} \quad \ldots\ldots\ldots (N)$$

El triángulo esférico proporciona la siguiente ecuación:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen}. b\, \text{sen}. c}$$

Como por el supuesto son de poca curvatura los lados de este triángulo, sustituyamos los desarrollos de sus senos y cosenos, llevando la aproximación hasta los términos de cuarto orden, y se tendrá:

$$\cos. A = \frac{1 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{24}a^4 - (1 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{24}b^4)(1 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{24}c^4)}{(b - \frac{1}{6}b^3)(c - \frac{1}{6}c^3)}$$

Efectuando las multiplicaciones siempre hasta los términos de cuarto orden, resulta:

$$\cos. A = \frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) - \frac{1}{24}(b^4+c^4-a^4) - \frac{1}{4}b^2c^2}{bc[1 - \frac{1}{6}(b^2+c^2)]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) - \frac{1}{24}(b^4+c^4-a^4+6b^2c^2)}{bc}\,[1 + \tfrac{1}{6}(b^2+c^2)]$$

Para ejecutar la multiplicación del quebrado por el binomio que he trasladado al numerador, nótese que, como nos propusimos no apreciar más allá de los términos de cuarto orden, la segunda parte del binomio por la segunda del quebrado dará términos de orden superior al cuarto, y por tanto, despreciables; así es que sólo deberá multiplicarse por la primera parte del quebrado, y resultará:

$$\cos. A = \frac{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) + \frac{1}{12}(b^4+c^4+2b^2c^2-a^2c^2-a^2b^2) - \frac{1}{24}(b^4+c^4-a^4+6b^2c^2)}{bc}$$

y haciendo las reducciones, se obtiene:

$$\cos. A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{24bc}$$

La primera parte de este valor es idéntica á la ecuación (M), y el numerador de la segunda parte es el mismo de la relación (N); por lo cual se tendrá sustituyendo:

$$\cos. A = \cos. A' - \frac{1}{6}\, bc\, \text{sen.}^2 A'$$

La forma de esta función indica que los ángulos A y A' difieren muy poco, puesto que la diferencia de sus cosenos está representada por un producto de fracciones, de las que b y c son siempre muy pequeñas respecto del radio. De esto se deduce que si designamos por x la pequeña diferencia entre A y A', estamos autorizados para tomar en el desarrollo de $\cos. (A' + x)$, la unidad por $\cos. x$ y el arco x por su seno. Haciéndolo así, en efecto, resultará:

$$\cos. A = \cos. (A' + x) = \cos. A' - x\, \text{sen}. A'$$

é igualando este valor con el precedente, se obtiene:

$$x = \frac{1}{6}\, bc\, \text{sen}. A'$$

Si llamamos ahora s la superficie del triángulo rectilíneo, se tendrá:

$$s = \frac{1}{2}\, bc\, \text{sen}. A'$$

por lo que el valor de x es:

$$x = A - A' = \frac{1}{3}\, s$$

Hasta aquí se ha calculado en el supuesto de que el triángulo esférico estaba trazado sobre una esfera cuyo radio fuese la unidad; si llamamos S la superficie de otro triángulo semejante á aquel, pero trazado sobre una esfera de radio R', tendremos:

$$s = \frac{S}{R'^2}$$

y sustituyendo en el valor de x, se tendrá finalmente:

$$A - A' = \frac{S}{3R'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots (O)$$

De igual manera hallaríamos:

$$\left.\begin{array}{l} B-B'=\dfrac{S}{3R'^2} \\ \\ C-C'=\dfrac{S}{3R'^2} \end{array}\right\} \text{.....................} (P)$$

de donde se deduce que $A-A'=B-B'=C-C'$, lo cual demuestra la primera proposición.

66.—Veamos ahora cómo esta diferencia constante es la tercera parte del exceso esférico. Designándolo por ϵ, se tiene según su definición:

$$A+B+C=180^\circ+\epsilon$$

Sumando las ecuaciones (*O*) y (*P*), y teniendo presente que A' B' y C' pertenecen á un triángulo rectilíneo, resulta:

$$A+B+C=180^\circ+\frac{S}{R'^2}$$

de donde se infiere que

$$\frac{S}{R'^2}=3x=\epsilon$$

ó bien que

$$x=\frac{1}{3}\epsilon$$

lo cual demuestra la segunda parte del teorema de Legendre.

El pequeño arco x tomado por su seno, está, por consiguiente, expresado en partes del radio; para que exprese segundos, es preciso multiplicarlo por sen. 1″, y despejando, se obtiene:

$$\epsilon=3x=\frac{S}{R'^2 \text{sen. } 1''} \text{......................} (10)$$

ecuación que nos da el valor del exceso esférico. En razón de la pequeñez de ϵ, es evidente que para calcularlo será indiferente tomar por S la superficie del triángulo rectilíneo ó la del esférico que difieren muy poco, y aun en muchos casos es bastante emplear un valor aproximativo de ese elemento, tal como el que resultaría de medir gráficamente la base y la altura del triángulo representado en un croquis, con tal que no fuese muy pequeña la escala de la construc-

ción. Por otra parte, aun antes de ocuparse de la resolución de un triángulo geodésico, siempre se conoce uno de sus lados y sus tres ángulos, por lo que se tendrá:

$$S=\frac{1}{2}b^2\frac{\text{sen. } A \text{ sen. } C}{\text{sen. } B}$$

Apliquemos el cálculo de la fórmula (10) al triángulo que se ha considerado en los ejemplos anteriores.

0.5	9.69897	
b^2	9.19347	
sen. A	9.95469	
sen. C	9.96665	
sen. B	—9.87030	
S	8.94348	
R′²sen. 1″	—8.29261	
ϵ	0.65087	$\epsilon=4''.48$ $\quad x=1''.493$

67.—La consecuencia inmediata del teorema de Legendre es ésta. Como la resolución de los triángulos geodésicos tiene por objeto hallar la magnitud de los lados, si se resta de cada uno de los ángulos el tercio del exceso esférico que corresponde al triángulo á que pertenecen, obtenemos un triángulo plano de lados iguales á los del esférico; y, por consiguiente, la resolución de éste queda reducida á la simple aplicación de las reglas de la trigonometría plana. El método de Legendre presenta, además, otra gran ventaja, y es la de no ser indispensable el cálculo del exceso esférico más que cuando se desea saber á cuánto ascienden los errores de observación; porque cuando no se tiene tal interés, tanto éstos como el exceso esférico se distribuyen por partes iguales entre los tres ángulos, sin ocuparse del valor absoluto de las dos causas que hacen diferir de 180° la suma de los ángulos. En el triángulo que nos ha servido de ejemplo, la suma de los tres ángulos observados da 10″.43 de más sobre 180°, cantidad que proviene del exceso esférico y de los errores de observación. Restando de ella el exceso esférico, que se ha hallado ser de 4″.48, quedan 5″.95 de errores de observación. Para reducir el triángulo al equivalente rectilíneo, tenemos que restar 1″.4933 de cada ángulo, y como los errores de observación también deben distribuirse por igual, en atención á que es preciso admitir que provienen de causas semejantes en cada ángulo, tendremos que quitarles, además, 1″.9833, lo cual equivale á restarles, de una sola vez, 3″.477, tercera parte de la diferencia total 10″.43. Esta ventaja no existe en los otros métodos que he dado á conocer; porque para aplicarlos es preciso conocer el exceso esférico á fin de corregir el triángulo por los errores de observación.

Calculemos nuestro triángulo por el procedimiento de Legendre.

Angulos observados.		Angulos corregidos.
$A=64°\ 16'\ 51''.25$		$A=64°\ 16'\ 47''.77$
$B=47\ \ 53\ \ 17\ .03$		$B=47\ \ 53\ \ 13\ .55$
$C=67\ \ 50\ \ \ 2\ .15$		$C=67\ \ 49\ \ 58\ .68$
$180°\ 00'\ 10''.43$	Suma	$180°\ 00'\ 00''.00$

k	4.5967335		
sen. B	−9.8703014		
	4.7264321		4.7264321
sen. A	9.9546087	sen. C	9.9666522
k'	4.6811208	k''	4.6930843
	$k'=47986^{m}.69$		$k''=49326^{m}.95$

Se ve, pues, que el procedimiento es absolutamente el mismo que si se tratara de un triángulo topográfico.

68.—Aunque para la resolución de los triángulos no sea indispensable el cálculo del exceso esférico según lo que se ha dicho, sí es muy conveniente, para formarse idea del monto del error en las medidas angulares, y necesario en algunos casos que indicaré después. La fórmula (10) que da su valor es bastante sencilla; pero cuando no se desea una rigurosa exactitud, puede procederse así: sea s la superficie que debe tener un triángulo para que su exceso esférico sea de 1″, condición que equivale á $s=R'^2 \operatorname{sen.} 1''$, de la cual se deduce, eliminando á $R'^2 \operatorname{sen.} 1''$ entre ésta y la ecuación (10):

$$e=\frac{S}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Como en la expresión de s entra el radio R', sus valores varían lentamente con la latitud. Expresando á s en miriaras, se encuentran los resultados siguientes para las latitudes de nuestro país:

LAT.	s
15°	$196^{m}.03$
21	196 .20
27	196 .40
33	196 .64

y para su latitud media $s=196^{m}.3$, que puede adoptarse como constante para toda la República, obteniéndose entonces con la precisión necesaria:

$$e=\frac{S}{196.3}$$

e en seg
S en miriareas
pª lo que los lados del A en Km

La superficie S del triángulo podrá medirse en un cróquis, tomando la base y la altura en kilómetros, á fin de que S resulte también en miriaras como s. Por ejemplo en nuestro triángulo se halla $S=878$ miriaras, por lo cual su exceso esférico será:

$$e=\frac{878.0}{196.3}=4''.47$$

valor casi idéntico al encontrado por el cálculo de la fórmula (10).

69.—La exposición de los tres métodos principales para resolver los triángulos geodésicos, espero que habrá dado á conocer la inmensa superioridad que sobre los otros dos tiene el de Legendre. Es, en efecto, el único que se sigue hoy, y debe notarse que para demostrar el teorema que le sirve de fundamento, hemos llevado la aproximación hasta los términos de cuarto orden, circunstancia que desde luego manifiesta que el procedimiento es exacto aun respecto de los mayores triángulos que es posible formar sobre la tierra.

El modo de guiar los cálculos de una cadena trigonométrica con el objeto de evitar la acumulación de pequeños errores, se ha explicado ya con suficiente extensión en el Capítulo VI de la Topografía, y, por lo mismo, juzgo inútil repetirlo aquí. Es raro, sin embargo, que una triangulación geodésica se extienda en todos sentidos ó cubra del todo un país, aun cuando el objeto sea el de servir de apoyo á grandes operaciones topográficas; pues por lo regular sólo se establecen cadenas paralelas de Norte á Sur y de Oriente á Poniente ligadas entre sí para que formen un conjunto bien enlazado. El calculador debe proceder de manera que se procure comprobaciones en aquellos lados que sean comunes á dos cadenas contiguas, atendiendo siempre á las condiciones geométricas de la figura. (1)

La fórmula que he desarrollado (Tomo I, número 92) para hacer concordar dos bases, ó en general, los cálculos que se refieren á un mismo lado, se aplica también á la Geodesia con el mismo objeto. Igualmente es aplicable á una triangulación geodésica el procedimiento que expuse para corregir los cálculos preliminares y los que hayan partido de una base errónea (Tomo I, números 93 y 94).

También importa advertir que siempre que se ofrezca combinar los ángulos de una cadena geodésica, deben corregirse por la tercera parte del exceso esférico del triángulo á que pertenezcan; pues hemos visto que esta es la condición indispensable, según el teorema de Legendre, para ejecutar los cálculos como si se tratase de triángulos planos. Así, para reducir á la línea recta una base que se haya medido en dos ó más segmentos que formen entre sí ángulos muy obtusos (Tomo I, número 27), para determinar la posición de un punto por medio de la observación de los ángulos entre tres ó más vértices (Tomo I, números 72 y 101), etc., es preciso calcular el exceso esférico del triángulo de que forme parte cada uno de los ángulos que han de entrar en la combinación, y antes de hacerla, restarles la tercera parte de esa cantidad.

(1) Las personas que deseen más amplia instrucción respecto del mejor modo de satisfacer simultáneamente las diversas condiciones geométricas de una figura, pueden consultar la obra de Gauss, titulada: "*Suplementum theoriæ combinationis, etc.*," Gottingen, 1828. Galloway, en las "*Memoirs of the Astronomical Society for* 1844", ha presentado aplicaciones muy interesantes de esta materia á la triangulación de Inglaterra. En la publicación que anualmente se hace en los Estados Unidos con el título de "*Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey,*" en el volumen correspondiente á 1854, consta detalladamente esa teoría con numerosas aplicaciones. Por desgracia la extensión de la materia no permite su exposición en una obra elemental.

CAPITULO VII.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS DE LOS VÉRTICES.

70.—El conocimiento de las coordenadas geográficas de las estaciones trigonométricas suministra los medios de asignar á la cadena la posición que realmente ocupa sobre el globo. La determinación de la latitud y de la longitud de un punto, así como la del azimut de una línea, constituyen las aplicaciones más importantes de la Astronomía á la Geodesia; pero se comprende fácilmente que no es necesaria la medida directa de esos elementos para cada uno de los vértices; porque conocida la posición geográfica de uno solo y el azimut de un lado, es posible situar las demás estaciones y orientar la cadena, por el enlace íntimo que existe entre todas sus partes. Sin embargo, como es interesante conocer la posición geográfica de cada uno de los vértices trigonométricos para poderlos fijar en la carta independientemente unos de otros, y sería muy dilatada y casi impracticable la medida directa de todas ellas por procedimientos astronómicos, vamos á exponer el método que debe seguirse para calcular las posiciones, conociendo la de un punto por lo menos y el azimut de un lado, datos que suponemos obtenidos por observaciones astronómicas directas, y de las cuales me ocuparé en la última parte de este libro.

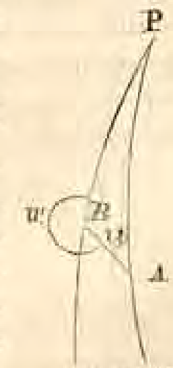
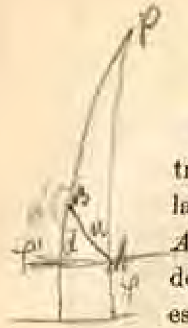


FIG 20A



Diferencias de latitud.—Sea $BA = k$ (fig. 20ª) un lado de la triangulación, P el polo de la tierra y PA, PB los meridianos de las estaciones A y B. Supongamos conocida la longitud L del punto A y su latitud φ, cuyo complemento llamado *colatitud*, es el arco PA de su meridiano. También suponemos conocido el azimut de B, que es $u = PAB$, admitiendo como en la Topografía que los azimutes se cuentan desde 0° hasta 360° partiendo del Norte hacia el Oeste. Con estos datos vamos á determinar la longitud L' y la latitud φ' de B, así como el azimut inverso u' que es el de A tal como se observaría en B.

Llamando θ la amplitud del lado k, y suponiendo por ahora que el triángulo PAB pertenece á una esfera cuyo radio es la unidad, se tiene:

$$\cos. PB = \text{sen.}\,\varphi \cos.\,\theta + \cos.\,\varphi\,\text{sen.}\,\theta \cos.\,u$$

Si designamos por d la diferencia de latitud $\varphi' - \varphi$, de los puntos B y A, tendremos también:

$$\cos. PB = \cos.(90° - \varphi') = \cos.[90° - (\varphi + d)] = \text{sen.}(\varphi + d)$$

por lo que igualando, se obtiene:

$$\text{sen.}(\varphi + d) = \text{sen.}\,\varphi \cos.\,\theta + \cos.\,\varphi\,\text{sen.}\,\theta \cos.\,u$$

La amplitud θ, por pertenecer á una línea geodésica, y por ser d la diferencia de latitud de sus extremos, son arcos muy pequeños; así es que podremos sustituir las series de sus senos y cosenos hasta la tercera potencia al desarrollar la ecuación anterior, que en consecuencia dará:

$$\text{sen.}\,\varphi - \frac{1}{2} d^2 \text{sen.}\,\varphi + d \cos.\,\varphi - \frac{1}{6} d^3 \cos.\,\varphi = \text{sen.}\,\varphi - \frac{1}{2} \theta^2 \text{sen.}\,\varphi +$$
$$+ \theta \cos.\,\varphi \cos.\,u - \frac{1}{6} \theta^3 \cos.\,\varphi \cos.\,u$$

Aunque esta ecuación es de tercer grado, como d y θ son muy pequeños, vamos á resolverla por aproximaciones sucesivas, despejando primero á la primera potencia de d, para obtener:

$$d = \theta \cos.\,u - \frac{1}{2} (\theta^2 - d^2) \tan.\,\varphi - \frac{1}{6} (\theta^3 \cos.\,u - d^3)$$

Desechando los términos de segundo y tercer orden, tendremos por primera aproximación:

$$d = \theta \cos.\,u$$

Sustituyendo este valor aproximativo en el término de segundo orden y desechando el de tercero, resulta por segunda aproximación:

$$d = \theta \cos.\,u - \frac{1}{2} \theta^2 \text{sen.}^2 u \tan.\,\varphi$$

Finalmente, introduciendo este valor más exacto en los términos de segundo y tercer orden sin apreciar más que hasta la tercera potencia de θ, se obtiene:

$$d = \theta \cos.\,u - \frac{1}{2} \theta^2 \text{sen.}^2 u \tan.\,\varphi - \frac{1}{2} \theta^3 \cos.\,u\,\text{sen.}^2 u \tan.^2 \varphi - \frac{1}{6} \theta^3 \cos.\,u\,\text{sen.}^2 u$$

ó bien:

$$d = \theta \cos.\,u - \frac{1}{2} \theta^2 \text{sen.}^2 u \tan.\,\varphi - \frac{1}{6} \theta^3 \cos.\,u\,\text{sen.}^2 u (1 + 3 \tan.^2 \varphi)$$

Para pasar de la esfera que tiene la unidad por radio á la osculatriz al elipsoide cuyo radio es R', sabemos que $\theta = \frac{k}{R'}$, y se tendrá sustituyendo:

$$d = \frac{k \cos.\,u}{R'} - \frac{k^2 \text{sen.}^2 u \tan.\,\varphi}{2 R'^2} - \frac{k^3 \cos.\,u\,\text{sen.}^2 u}{6 R'^3} (1 + 3 \tan.^2 \varphi)$$

Esta fórmula daría la diferencia de latitud sobre una esfera; pero como este arco debe contarse en el meridiano, cuyo radio de curvatura es ρ, para que convenga al elipsoide terrestre tendremos que multiplicar por $\frac{R'}{\rho}$, según lo que se demostró en el número 28; y expresando por último en segundos el arco d, resulta:

$$\varphi' - \varphi = d = \frac{k \cos.\,u}{\rho\,\text{sen.}\,1''} - \frac{k^2 \text{sen.}^2 u \tan.\,\varphi}{2 R' \rho\,\text{sen.}\,1''} - \frac{k^3 \cos.\,u\,\text{sen.}^2 u}{6 R'^2 \rho\,\text{sen.}\,1''} (1 + 3 \tan.^2 \varphi) \ldots\ldots (1)$$

Esta ecuación suministra la diferencia de paralelos con cuanta exactitud se necesita aun para lados geodésicos muy grandes; pero el último término tiene un valor casi insensible para las líneas geodésicas comunes, especialmente en las bajas latitudes. Suponiendo $k = 100000^m$, $u = 45°$ y $\varphi = 30°$, el tercer término da un valor que no llega á $0''.1$; y así es que podrá desecharse en la mayor parte de los casos, bastando sólo con la segunda aproximación, á saber:

$$\varphi' = \varphi + \frac{k \cos. u}{\rho \operatorname{sen.} 1''} - \frac{k^2 \operatorname{sen.}^2 u \tan. \varphi}{2 R' \rho \operatorname{sen.} 1''}$$

También se puede tomar la normal N por R' en el segundo término que es siempre pequeño, y haciendo:

$$A = \frac{1}{\rho \operatorname{sen.} 1''} \qquad B = \frac{0.5 \tan. \varphi}{N \rho \operatorname{sen.} 1''}$$

tendremos en último resultado:

$$\varphi' = \varphi + A k \cos. u - B k^2 \operatorname{sen.}^2 u \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En la Tabla que va en una de las páginas siguientes constan los logaritmos de A y B, que he calculado para las latitudes de la República, y presenta también sus diferencias por 1′, á fin de facilitar las interpolaciones para cualquiera latitud intermedia, por ser este elemento el argumento de la Tabla.

Al aplicar la fórmula debe atenderse al signo de $\cos. u$, según el valor que tenga el azimut. El término $A k \cos. u$ será positivo cuando u corresponda á los cuadrantes primero y cuarto, ó lo que es lo mismo, cuando su valor esté comprendido entre 0° y 90°, ó entre 270° y 360°; y negativo en los otros dos cuadrantes, lo que, por otra parte, puede verse en la figura haciendo variar la posición del punto B. El último término no varía de signo, al menos en nuestras latitudes septentrionales.

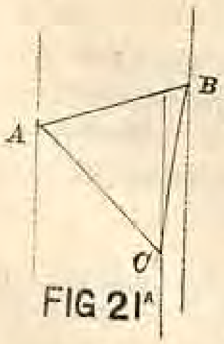


FIG 21ª

Ejemplo.—En el triángulo que ha servido de ejercicio para los diversos métodos de resolución, supongamos que la latitud de A (fig. 21ª) es: $\varphi = 19° 53' 42''.3$; y que para el azimut de B se encontró............. $u = 289° 40' 22''.2$, habiendo dado el cálculo para el lado $A B$,

$k = 49326^m.95$. Tomando en la Tabla de los logaritmos de los factores A y B que entran en la fórmula, sus valores para la latitud φ, se hallará: log. $A = 8.5121862$ y log. $B = 0.9649$. Para calcular la latitud φ' del punto B, se tiene:

A.....	8.512186	B..........	0.9649	Primer término......	+ 9′ 00″.07
k......	4.693084	k^2..........	9.3862	Segundo „	− 1 .99
cos. u...	9.527177+	sen.$^2 u$......	9.9477	$d =$	+ 8′ 58″.07
	2.732447+		0.2988	$\varphi =$	19° 53 42 .30
	+540″.07		−1″.99	$\varphi' =$	20° 2′ 40″.37

Como segundo ejemplo, calculemos la latitud de C, tercer vértice de nuestro triángulo. Para deducir el azimut del lado $A C$, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Az. } A B &= 289° 40' 22''.2 \\ \text{Angulo } A &= -64 \; 16 \; 49 \;.3 \\ \text{Az. } A C &= 225° 23' 32''.9 = u \end{aligned}$$

El ángulo A del triángulo está ya corregido por los errores de observación, lo cual ha demandado el cálculo previo del exceso esférico que corresponde al triángulo. Este es uno de los casos en que es indispensable determinarlo, á fin de no incluir en él el error que proviene puramente de las observaciones.

Los logaritmos de A y B son los mismos que antes, porque se refieren á la latitud del mismo punto de partida. El cálculo será, en consecuencia:

A......	8.512186	B..........	0.9649	Primer término......	− 15′ 2″.42
k......	4.596733	k^2..........	9.1935	Segundo „	− 0 .73
cos. u....	9.846490−	sen.$^2 u$......	9.7049	$d =$	− 15′ 3″.15
	2.955409−		9.8633	$\varphi =$	19° 53 42 .30
	−902″.42		−0″.73	$\varphi' =$	19° 38′ 39″.15

Es claro que en este último ejemplo se ha tomado por k la longitud y por u el azimut del lado $A C$.

De una manera idéntica se prosiguen los cálculos para todos los demás vértices, teniendo cuidado de deducir los azimutes de los lados combinando el del lado que se tome por punto de partida con los ángulos de la cadena, después de corregidos por los errores de observación, con el objeto de que no contengan más que el exceso esférico.

71.—**Diferencias de longitud.**—Llamando D la diferencia de meridianos $L' - L = APB$ (fig. 20ª), el triángulo da:

$$\cos.\varphi' : \text{sen.}\, u :: \text{sen.}\, \theta : \text{sen.}\, D$$

de donde resulta:

$$\text{sen.}\, D = \frac{\text{sen.}\, \theta\, \text{sen.}\, u}{\cos.\varphi'}$$

Atendiendo á la pequeñez de D y θ, podremos obtener directamente el ángulo D por la fórmula $D = \text{sen.}\, D + \frac{1}{6}\,\text{sen.}^3 D$; ó introduciendo el desarrollo de sen. θ también hasta el término de tercer orden, se obtiene:

$$D = \frac{\theta\,\text{sen.}\, u}{\cos.\varphi'} - \frac{1}{6}\,\theta^3 \left(\frac{\text{sen.}\, u}{\cos.\varphi'} - \frac{\text{sen.}^3 u}{\cos.^3 \varphi'}\right)$$

Sustituyendo por θ su valor $\frac{k}{R'}$, á fin de pasar de la esfera cuyo radio es la unidad á la que tiene R' por radio, hallaremos:

$$D = \frac{k\,\text{sen.}\, u}{R' \cos.\varphi'} - \frac{k^3}{6\,R'^3} \left(\frac{\text{sen.}\, u}{\cos.\varphi'} - \frac{\text{sen.}^3 u}{\cos.^3 \varphi'}\right) \text{ .... (3)}$$

El último término de esta fórmula tiene un valor tan inapreciable á causa del cubo del radio que entra en su denominador, que siempre puede desecharse sin error sensible. Además de esto, se emplea generalmente la normal N en lugar de R', considerando que á causa de la gran distancia del polo P á los puntos A y B, el ángulo que forman los dos meridianos es sensiblemente el mismo que formarían en una esfera de radio N.

Para que el valor de D exprese segundos, será preciso dividirlo por sen. 1″, y haciendo por abreviación:

$$C = \frac{1}{N\,\text{sen.}\, 1''}$$

podremos calcular la diferencia de meridianos por la fórmula:

$$D = \frac{C\,k\,\text{sen.}\, u}{\cos.\varphi'}$$

ó bién:

$$L' = L + \frac{C\,k\,\text{sen.}\, u}{\cos.\varphi'} \text{ .... (4)}$$

Los logaritmos de C constan también en la tabla que pondré á continuación.

El signo de D será el mismo de sen u, de modo que la diferencia de longitud será positiva cuando el valor del azimut esté comprendido entre 0° y 180°, ó sea en el primero y segundo cuadrantes. Se ve que este modo de contar los azimutes concuerda perfectamente con la convención establecida, de considerar como positivas las longitudes occidentales y negativas las orientales.

Calculemos la longitud del vértice B de nuestro triángulo $A\,B\,C$ (fig. 21ª), suponiendo que la del punto A, contada desde el meridiano de México, sea $L = +0°\,23'\,37''.4$, y recordando que se tenía $u = 280°\,40'\,22''.2$.

C..............	8.509614	
k..............	4.693084	
sen. u..........	9.973880—	$L = +\ 0°\ 23'\ 37''.40$
cos. φ'..........	—9.972883	$D = -\ \ 26\ 38\ .51$
D.........	3.203715—	$L' = -\ 0°\ \ 3'\ \ 1''.11$

El signo de L' asigna al vertice B una posición oriental respecto del meridiano de México. Para el azimut del lado $A\,C$ hallamos antes $u = 225°\,23'\,32''.9$, y por tanto la longitud de C será:

C..............	8.509614	
k..............	4.596733	
sen. u..........	9.852440—	$L = +\ 0°\ 23'\ 37''.40$
cos. φ'..........	—9.973958	$D = -\ \ 16\ \ 5\ \ 67$
D.........	2.984829—	$L' = +\ 0°\ \ 7'\ 31''.73$

LOGARITMOS DE LOS FACTORES A, B Y C

PARA EL CÁLCULO DE LAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS.

Latitud.	Log. A.	Dif. por 1'.	Log. B.	Dif. por 1'.	Log. C.	Dif. por 1'.
15°00'	8.5123984	6.4	0.8347	5.0	8.5096844	2.1
15 30	. 3792	6.6	.8496	4.8	. 6780	2.2
16 00	. 3594	6.8	.8641	4.7	. 6714	2.3
16 30	. 3390	6.9	.8781	4.6	. 6646	2.3
17 00	. 3182	7.2	.8919	4.4	. 6577	2.4
17 30	. 2967	7.3	.9052	4.3	. 6505	2.4
18 00	. 2747	7.6	.9182	4.2	. 6432	2.5
18 30	. 2520	7.7	.9309	4.1	. 6356	2.6
19 00	. 2288	7.9	.9434	4.0	. 6279	2.6
19 30	. 2052	8.0	.9555	4.0	. 6200	2.7
20 00	. 1812	8.3	.9674	3.9	. 6120	2.8
20 30	. 1563	8.4	.9790	3.8	. 6037	2.8
21 00	8.5121311	8.5	0.9904	3.7	8.5095953	2.8
21 30	. 1056	8.7	1.0016	3.7	. 5868	2.9
22 00	. 0795	8.8	.0126	3.6	. 5781	2.9
22 30	. 0530	9.1	.0234	3.5	. 5693	3.0
23 00	8.5120258	9.2	.0340	3.5	. 5602	3.1
23 30	8.5119982	9.3	.0444	3.4	. 5510	3.1
24 00	. 9702	9.5	.0546	3.4	. 5417	3.2
24 30	. 9418	9.6	.0647	3.3	. 5322	3.2
25 00	. 9129	9.8	.0746	3.3	. 5226	3.3
25 30	. 8835	9.9	.0844	3.2	. 5128	3.3
26 00	. 8538	10.1	.0941	3.2	. 5029	3.4
26 30	. 8236	10.1	.1036	3.1	. 4928	3.4
27 00	8.5117933	10.3	1.1130	3.1	8.5094827	3.4
27 30	. 7624	10.5	.1222	3.0	. 4724	3.5
28 00	. 7309	10.6	.1314	3.0	. 4619	3.5
28 30	. 6991	10.7	.1404	3.0	. 4513	3.6
29 00	. 6670	10.8	.1494	2.9	. 4406	3.6
29 30	. 6346	10.9	.1582	2.9	. 4298	3.6
30 00	. 6019	11.0	.1670	2.9	. 4189	3.7
30 30	. 5689	11.1	.1757	2.9	. 4079	3.7
31 00	. 5356	11.2	.1842	2.8	. 3968	3.7
31 30	. 5019	11.4	.1927	2.8	. 3856	3.8
32 00	. 4678	11.4	.2012	2.8	. 3742	3.8
32 30	. 4335	11.6	.2095	2.8	. 3628	3.9
33 00	8.5113987		1.2178		8.5093512	

Si se quisieran expresar en tiempo las longitudes de estos puntos, se multiplicarían por $\frac{4}{60}$ las expresadas en arco, según la regla del número 25, y obtendríamos que la de A es $+ 1^m.34^s.49$, la de B $- 0^m12^s.07$ y la de $C + 0^m30^s.12$.

72.—**Azimutes inversos**.—Para determinar los azimutes de todos los lados de una cadena, se combinan los ángulos con el azimut conocido del primer lado, que es lo que se ha hecho para calcular el azimut de $A\,C$ en nuestro triángulo; pero si se desea el azimut de $B\,C$, por ejemplo, sería necesario combinar el ángulo B con el de $B\,A$, el cual no es otra cosa más que el azimut inverso de $A\,B$. Vimos que en la Topografía se reduce comunmente esta deducción á tomar ángulos suplementarios, á causa de la suposición del paralelismo de todos los meridianos; pero en la Geodesia no es admisible esta hipótesis, y la deducción de los azimutes inversos no es tan sencilla, porque hay que llevar en cuenta la *convergencia de los meridianos.*

En la figura 20ª he llamado u el azimut de $A\,B$, que es el ángulo $P\,A\,B$, Si los meridianos de A y B fuesen paralelos, el azimut inverso sería $u' = 180° + u$; pero puesto que convergen hacia el polo P, deberá ser u' un poco mayor que $180° + u$, y designando por c el efecto de la convergencia, tendremos:

$$u' = 180° + u + c$$

Para calcular el pequeño ángulo c apliquemos al triángulo $P\,A\,B$ la fórmula trigonométrica:

$$\tan.\ \frac{1}{2}\,(A+B) = \cot.\ \frac{1}{2}\,C\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)}$$

siendo en nuestro caso $A = u$; $B = 360° - u' = 180° - (u + c)$; y $C = D$, diferencia de meridianos. De aquí se deduce que

$$\frac{1}{2}\,(A+B) = 90° - \frac{1}{2}\,c$$

Además, los valores de los lados son: $a = 90° - \varphi'$; $b = 90° - \varphi$; de donde resulta:

$$\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$$

y

$$\frac{1}{2}(a+b) = 90° - \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$$

Haciendo, pues, la sustitución, se tendrá:

$$\cot.\frac{1}{2}c = \cot.\frac{1}{2}D\,\frac{\cos.\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}$$

ó bien:

$$\tan.\frac{1}{2}c = \tan.\frac{1}{2}D\,\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos.\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}$$

Como los ángulos D y c son siempre muy pequeños, es suficientemente exacto tomar los arcos por sus tangentes, y se obtendrá en segundos:

$$c = D\,\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos.\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} \quad \text{.....................} \quad (5)$$

La diferencia de latitud de los extremos de una línea geodésica es por lo general tan poco considerable, que el coseno de su mitad se confunde sensiblemente con la unidad, por lo cual se suprime comunmente el divisor de la fórmula precedente para adoptar la más sencilla $c = D\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$. Con este valor, el de u' será:

$$u' = 180° + u + D\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$$

Calculemos en nuestro triángulo el azimut de $B\,A$, ó sea el de A tomado en el horizonte de B, recordando que el de $A\,B$ era......... $u = 289°\,40'\,22''.2$. Se hallará que la latitud media de A y B es $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = 19°\,58'\,11''.3$.

D..................	3.20372–	$180° + u - 360° =$	$190°\,40'\,22''.2$
sen. $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$...	9.53342	$c = -$	$9\;\;5\,.93$
c............	2.73714–	$u'' =$	$109°\,31'\,16''.3$
$c = -$	$545''.93$		

Siempre que u sea mayor que 180°, como sucede en este caso, deben restarse 360° de $180° + u$, ó bien tomar por fórmula general del azimut inverso: $u' = u \pm 180° + c$. Se adopta el signo superior cuando u sea menor que 180°, y el inferior cuando sea mayor. En cuanto al signo de la convergencia c es el mismo de D, al menos en nuestras latitudes septentrionales, que se suponen siempre positivas.

Si á u' le agregamos el ángulo B del triángulo, resultará el azimut de $B\,C$. Los ángulos que entren en la combinación deben corregirse antes por el pequeño error de las observaciones, para lo cual se necesita calcular el exceso esférico, según se ha dicho. En nuestro ejemplo, el ángulo B corregido es de $47°\,53'\,15''.0$; y así hallaremos que el azimut de $B\,C$ es de $157°\,24'\,31''.3$.

Como segundo ejercicio calculemos el azimut inverso de $A\,C$, siendo el directo $u = 225°\,23'\,32''.9$ y

$$\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') = 19°\,46'\,40''.$$

D..................	2.89483–		
sen. $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$...	9.52939	$u - 180° =$	$45°\,23'\,32''.9$
		$c = -$	$5\;26\,.7$
c..................	2.51422–	$u' =$	$45°\,18'\;\;6''.2$
$c = -$	$326''.75$		

De una manera análoga se procede en cada triángulo, y para evitar un error al hacer las combinaciones, es conveniente servirse de un croquis de la triangulación.

El modo de cerciorarse de que no ha habido equivocación en los cálculos, consiste en determinar la latitud y la longitud de un mismo punto por medio de distintos lados, pues es claro que deberán concordar sensiblemente los resultados. Por último ejercicio, y para presentar un ejemplo del modo de arreglar todos los cálculos que se refieren á un mismo vértice, determinaremos la posición de C valiéndonos de los datos calculados para el punto B. Se tiene.......... $B\,C = k = 47986^{m}.69$; $u = 157°\,24'\,31''.3$; y $\varphi = 20°\,2'\,40''.37$.

A	8.512179	B	0.9684	C	8.509611
k	4.681121	k^2	9.3622	k	4.681121
cos. u	9.965328−	sen.$^2 u$	9.1690	sen. u	9.584507
				cos. φ'	−9.973958
	3.158628−		9.4996		
	−1440″.88		−0″.32	D	2.801281
				sen. $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$.	9.530798
	−24′ 00″.88			c	2.332079
	− 0 .32				
$d=$	−24′ 1″.2	$D=$	+ 10′ 32″.82	$c=$	+ 3′ 34″.82
$\varphi=$	20° 2 40 .37	$L=$	−0° 3 1 .11	$180°+u=$	337° 24′ 31″.3
$\varphi'=$	19°38′39″.17	$L'=$	+0° 7′ 31″.71	$u'=$	337° 28′ 6″.12

Todos estos resultados concuerdan bien con los que se han obtenido antes por medio de los datos primitivos referentes al punto A.

CAPITULO VIII.

CONSTRUCCIÓN DE LAS CARTAS GEOGRÁFICAS.

73.—La superficie de la tierra no es *desarrollable*, ó susceptible de extenderse de modo que coincida con un plano en todos sus puntos, como lo son, por ejemplo, la superficie de un cono, que extendida en plano produce un sector, y la de un cilindro, que desarrollada origina un cuadrilátero. De aquí resulta que para representar sobre el papel la carta geográfica de un continente, de una nación, etc., es preciso recurrir á ciertas construcciones geométricas convencionales llamadas *proyecciones*.

Estas pueden clasificarse, en general, en dos grupos: el uno comprende las proyecciones *por desarrollo*, y el otro las proyecciones *perspectivas*. Las primeras consisten en sustituir á la superficie del globo otra superficie desarrollable; en hacer en ella la configuración de los objetos de la tierra por medio de ciertas consideraciones geométricas; y en desarrollarla, por último, para que aparezca en plano la forma así obtenida. Las proyecciones perspectivas se obtienen suponiendo que desde un punto cualquiera se dirigen visuales á todos los objetos que deben figurar en la carta; cortando en seguida todas estas visuales por medio de un plano; y señalando en este el lugar preciso en que es cortado por cada una de ellas. De este modo resulta una imagen más ó menos fiel de la situación relativa de los objetos.

Casi en todas las construcciones de cartas geográficas se supone esférica la tierra; porque el ligero error que trae consigo esta hipótesis, es generalmente inferior al que producen las deformaciones inevitables que provienen de la proyección misma, sea cual fuere el sistema que se adopte. Indicaré, sin embargo, las modificaciones que deben hacerse á las proyecciones de la tierra supuesta esférica para restituirle la forma elipsoidal, cuando la escala de la construcción sea bastante grande para que se hagan perceptibles las diferencias originadas por la esfericidad hipotética.

Las proyecciones perspectivas se adoptan por lo regular para las cartas de vastas regiones, como todo un continente; y con especialidad para la construcción del *Mapa-Mundi*, que es la representación de la tierra entera, dividida en dos hemisferios. Para las cartas de superficies menos extensas se emplean de preferencia las proyecciones por desarrollo, de las que voy á ocuparme únicamente á causa de la mayor frecuencia de su uso, remitiendo al lector que desee instruirse en la construcción de las perspectivas, á los tratados de Geodesia de Mr. Francœur y de Mr. Salneuve, ó al Manual de Construcción y dibujo de cartas geográficas de Mr. Perrot. (Colección de Manuales de Roret).

74.—**Proyecciones cónicas.**— Sean bb' y cc' (fig. 22ª) los paralelos de las latitudes extremas del país cuya carta se va á construir, y AA' el paralelo medio. Si consideramos una superficie cónica AVA' originada por la tangente en A, esta superficie envolverá á la tierra tocándola en todos los puntos del paralelo AA', y se acercará á la del globo lo suficiente, en una zona bc de algunos grados, para que no resulte gran error al

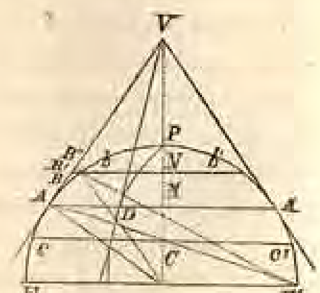


FIG. 22ª

configurar en la zona cónica correspondiente los detalles de la esférica. Desarrollando después la primera, tendremos una representación bastante fiel de lo que contiene la segunda. Fácilmente se comprende que sería muy complicado, y además innecesario, hacer la

proyección de cada uno de los puntos del terreno; pero si consiguiésemos proyectar únicamente los meridianos y los paralelos terrestres que pasen por ciertos lugares no muy distantes entre sí, todos los demás objetos se podrán representar en seguida por medio de sus posiciones geográficas, que aprendimos á calcular en el Capítulo precedente, y que, como se recordará, se refieren á meridianos y paralelos. No me ocuparé, pues, por ahora, más que de las proyecciones de los meridianos y los paralelos, que supondré equidistantes en el terreno por proyectar, de grado en grado, por ejemplo.

Según esto, si suponemos prolongado el plano de un meridiano cualquiera PD, su intersección con la superficie del cono tangente será una de sus generatrices VD, la cual tomaremos por proyección de aquel plano, y de igual manera obtendremos las de los demás, que estarán equidistantes entre sí, puesto que admitimos que lo están los meridianos que representan. Antes de indicar el modo de proyectar los paralelos, demos una idea de la manera de desarrollar el cono. Con un radio proporcional á VA, cuyo valor daré después, trácese un arco de círculo $A'a$ (fig. 23ª) que representará el paralelo medio sin alteración en cuanto á su tamaño, porque es común tanto al globo terrestre como al cono tangente. Tomando, pues, $A'a$ proporcional á la extensión lineal del arco del paralelo medio en la tierra, y dividiéndolo en tantas partes iguales como grados de longitud abraza el país que se va á representar, se tendrán otros tantos puntos comunes al paralelo medio y á las

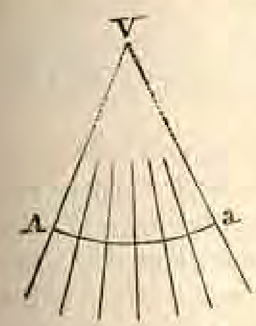


FIG. 23ª

proyecciones de los meridianos cuyos planos forman entre sí ángulos de un grado, ó lo que es lo mismo, distantes un grado en longitud. Como estas proyecciones deben pasar también por el vértice del cono, puesto que son generatrices suyas, para obtenerlas no se necesitará más que trazar radios desde el centro V á cada uno de los puntos de división del paralelo medio $A'a$.

Para calcular el radio VA de la proyección, tenemos que en el triángulo rectángulo VAC (fig. 22ª) llamando φ la latitud del paralelo en que el cono es tangente á la esfera, el ángulo $AVC = ACE$ es por consiguiente φ, y resulta:

$$VA = \gamma = R \cot. \varphi \text{ ....} (1)$$

Puede tomarse por R el radio medio de la tierra para disminuir el error que proviene de la supuesta esfericidad del globo terrestre.

75.—Veamos ahora la manera de proyectar los paralelos. Si suponemos prolongado el plano del paralelo $b\,b'$ quedará cortada la superficie cónica según un círculo que tiene BN por radio, y que puede tomarse por proyección del paralelo. Entonces el arco Ab del meridiano se proyectará en AB.

Puede hacerse también la proyección suponiendo que la cuerda $E'b$ gira al derredor del eje de la tierra, manteniendo siempre su extremo E' en el ecuador y el punto b sobre el paralelo. Describirá así una superficie cónica cuya intersección con el cono tangente será un círculo, y el arco Ab se proyectará en AB'.

Otra manera de proyectar los paralelos consiste en imaginarse que el radio Cb gira al derredor del eje apoyándose siempre en la circunferencia del paralelo, con lo que también engendra un cono que proyecta el arco AB en AB''.

Vamos á examinar cada uno de estos tres métodos. Desde luego cualquiera de ellos proyecta el paralelo de contacto AA' en su verdadero tamaño; pero no sucede lo mismo con los demás, ni con los arcos de meridiano, tales como Ab, comprendidos entre ellos. Designando siempre por φ la latitud del paralelo medio, que es el del contacto, por φ' la de otro cualquiera $b\,b'$, y por k el tamaño de la proyección del arco $Ab = \varphi' - \varphi$, tendremos en el primer método:

$$AB = k = \frac{MN}{\cos. \varphi} = \frac{NC - MC}{\cos. \varphi}$$

Siendo $NC = R \text{sen.}\, \varphi'$ y $MC = R \text{sen.}\, \varphi$, resulta:

$$k = \frac{R(\text{sen.}\, \varphi' - \text{sen.}\, \varphi)}{\cos. \varphi}$$

y por último:

$$k = 2R \frac{\cos. \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)}{\cos. \varphi} \text{sen.} \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) \text{ ....} (P)$$

En el segundo método k será igual á AB', y en el triángulo $AB'E'$ los valores de los ángulos son:

$$A = 90° - \frac{1}{2}\varphi \qquad B' = 90° - \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) \qquad E' = \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$$

Tenemos, además, $k = AE' \frac{\text{sen.}\, E'}{\text{sen.}\, B'}$; y como la cuerda es

$$AE' = 2R \cos. \frac{1}{2}\varphi$$

resultará sustituyendo:

$$k = 2R \frac{\cos. \frac{1}{2} n}{\cos. (\frac{1}{2}\varphi' - \varphi)} \text{sen.} \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) \text{ ....} (Q)$$

Finalmente, para el tercer método en que $k = AB''$, el triángulo rectángulo $AB''C$ da:

$$k = R \tan. (\varphi' - \varphi) \text{ ....} (R)$$

Si, para comparar los valores obtenidos en los tres casos, hacemos $\varphi' - \varphi = \delta$, podremos escribirlos así:

$$\left.\begin{aligned} k &= 2R \frac{\cos. (+\frac{1}{2}\delta)}{\cos. \varphi} \text{sen.} \frac{1}{2}\delta \\ k &= 2R \frac{\cos. \frac{1}{2}\varphi}{\cos. \frac{1}{2}(\varphi - \delta)} \text{sen.} \frac{1}{2}\delta \\ k &= R \tan. \delta \end{aligned}\right\} \text{ ....} (2)$$

Expresando á δ en partes del radio, la verdadera extensión del arco AB es $R\delta$. Además, la relación $2R \text{sen.}\, \frac{1}{2}\delta$ es siempre un poco menor que $R\delta$, por lo cual, si δ es positiva, esto es, si φ' es mayor que φ, el factor de $2R \text{sen.}\, \frac{1}{2}\delta$ en la primera fórmula es menor que la unidad; y por consiguiente la proyección k será más pequeña que el arco $AB = R\delta$. Lo mismo sucede en el segundo método, aunque el error es menos considerable puesto que los cosenos de ángulos pequeños varían con lentitud, y se ve que en la fórmula entran $\cos. \frac{1}{2}\varphi$

y $\cos. \frac{1}{2}(\varphi - \delta)$. El tercer método da la proyección más grande que el arco, porque el incremento de las tangentes es mayor que el de los ángulos; pero en este caso el error, ó por mejor decir, la diferencia entre el arco y su proyección, es en general más pequeña que en los otros dos procedimientos, á causa de que la fórmula no contiene otro factor que contribuya á aumentarla.

Si φ' es menor que φ, δ es negativa; y entonces las tres fórmulas darán, en general, proyecciones numéricamente mayores que los arcos del meridiano que representan; pero los incrementos serán, por lo regular, menores y más uniformes usando la última.

Comparando ahora los tres métodos bajo el aspecto del error que ocasionan en la extensión de los arcos del paralelo, veremos que todos ellos aumentan el tamaño de los grados, puesto que el radio de la sección del cono es siempre mayor que Nb, radio del paralelo; pero el tercer procedimiento es el que produce menos error; porque de las tres proyecciones de b, el punto B'' es el más inmediato al eje del cono, y por consiguiente, la sección que pasa por ese punto tiene un radio que es el que más se acerca á Nb.

76.—De estas consideraciones se deduce que la proyección de los paralelos, hecha desde el centro de la esfera, es la que altera menos las extensiones de los arcos del meridiano y de los paralelos, y por tanto, la que origina menor deformación en las posiciones relativas de los objetos situados en la superficie de la tierra.

Presentemos un ejemplo numérico de los cálculos, suponiendo que la latitud del paralelo medio es $\varphi = 23° 30'$, la de otro $\varphi' = 29° 00'$ y la escala con que se va á construir la proyección, de $\frac{1}{1000000}$. El radio medio de la tierra es $R = 6366738^{m}$.

$\varphi' =$	$29° 00'$			$\frac{R}{1000000}$...... 0.80392
$\varphi =$	23 30			arco 1°........ 8.24188
	———			5°.5............ 0.74036
$\varphi' + \varphi =$	52 30	$\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi) =$	$26° 15'$	———
$\varphi' - \varphi = +$	5 30	$\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = +$	2 45	$R\delta$........ 9.78616
$\varphi - \delta =$	18 00	$\frac{1}{2}(\varphi - \delta) =$	9 00	$R\delta = 0^{m}.6112$

$\frac{R}{1000000}$........	0,80392	....	0.80392	....	0.80392
2................	0.30103	....	0.30103	$\tan. \delta$......	8.98358+
$\cos. \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)$.	9.95273	$\cos. \frac{1}{2}\varphi$	9.99080		———
$\operatorname{sen}. \frac{1}{2}\delta$.........	8.68104+	....	8.68104+	k......	9.78550+
$\cos. \varphi$............	−9.96240	$\cos. \frac{1}{2}(\varphi - \delta)$	−9.99462		
	———		———		
k..........	9.77632	k........	9.78217+		
	$k = 0^{m}.5975$		$k = 0^{m}.6056$		$k = 0^{m}.6131$

Comparando cada resultado con el valor $R\delta$ del arco, vemos que el primer método produce $0^{m}.0137$ de error, el segundo $0^{m}.0056$ ambos por defecto, y el tercero sólo $0.^{m}0019$ por exceso. Si suponemos $\varphi = 18° 00'$ á fin de que δ sea numéricamente la misma que en el caso anterior, se obtendrán los resultados:

$$k = -0^{m}.6230 \qquad k = -0^{m}.6178 \qquad k = -0^{m}.6131$$

cuyos errores son respectivamente $0^{m}.0108$, $0^{m}.0056$ y $0^{m}.0019$. Se ve, pues, que á pesar de ser la escala bastante grande para una carta geográfica, y δ de 5°.5, no llega á $0.^{m}002$ el error que produce el tercer método.

77.—Sea cual fuere el sistema de proyección que se adopte, al desarrollar la superficie cónica resultan circulares los paralelos; y como el radio con que debe trazarse el paralelo medio, es $\gamma = R \cot. \varphi'$, el radio de la proyección de otro paralelo cualquiera de latitud φ', será:

$$\gamma' = R \cot. \varphi - k = \gamma - k \text{ .... } (3)$$

puesto que esta ecuación expresa la distancia de la proyección B, B' ó B'' al vértice del cono.

Falta ahora conocer el ángulo que forman, en el vértice del cono ya desarrollado, las generatrices que representan las proyecciones de los meridianos. Designando por $2L$ el número de grados de longitud que abraza el país cuya carta se va á construir, tendremos que en el paralelo medio cuyo radio es $AM = R \cos. \varphi$, la extensión de $2L$ grados es:

$$S = \frac{\pi}{90°} L R \cos. \varphi$$

Pero como el paralelo medio queda representado en la proyección de su verdadero tamaño, aunque trazado con otro radio que es $\gamma = R \cot.\varphi$, si designamos por $2\,V$ el ángulo formado por las proyecciones de los meridianos extremos, se tendrá este otro valor:

$$S = \frac{\pi}{90^\circ}\, V R \cot.\varphi$$

de donde eliminando á S se obtiene:

$$V = L \operatorname{sen}.\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (4)$$

Con estos datos, veamos el modo de construir la proyección. Al explicar la manera de hacer el desarrollo de la superficie cónica, se dijo cómo podía trazarse el paralelo medio, y nada sería más fácil que trazar los demás de igual manera, puesto que se conocen sus radios $\gamma' = \gamma - k$; pero este método gráfico raras veces puede aplicarse, porque la escala casi nunca será tan pequeña que permita describir arcos de círculo desde un punto V (fig. 23ª), que está tanto más distante cuanto menor sea la latitud de los paralelos. Voy á indicar otro procedimiento.

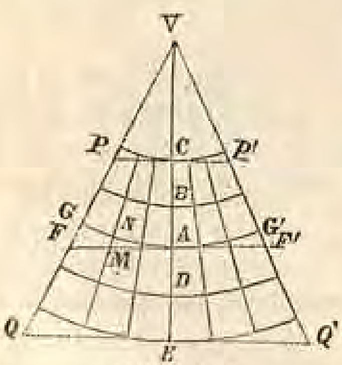


FIG. 24ª

Siendo $\frac{1}{r}$ la escala que se haya adoptado, los valores de γ, deben dividirse por r, ó mejor, al hacer los cálculos, se dividirá por r el radio R de la tierra, con el cual todos los demás valores resultarán ya reducidos á la escala. En el punto A (fig. 24ª), que supongo ser el centro del papel, trácense las dos rectas CE y FF' pendiculares entre sí. La primera representa la proyección del meridiano medio ó central, y la segunda es una tangente á la del paralelo medio, que va á servirnos para trazar esta curva.

Tómese una distancia AF, cuyo valor, como lo indica la figura,

se calcula por medio de la ecuación: $X = VA \tan.AVF = \gamma \tan.V$, la cual, atendiendo á la expresión (4) dará para AF:

$$X = \gamma \tan.(L \operatorname{sen}.\varphi)$$

y en el punto F así determinado, fórmese por medio de una tabla de cuerdas el ángulo $AFV = 90^\circ - V = 90^\circ - L \operatorname{sen}.\varphi$. La misma construcción se hará hacia la parte oriental del meridiano medio para trazar por F' la proyección del otro meridiano extremo. En general, todo lo que se diga respecto de la región occidental debe aplicarse á la oriental, por ser la construcción simétrica de uno y otro lado de CE, de suerte que cada línea tendrá su correspondiente, que se establece con los mismos valores numéricos.

Para situar el punto G del paralelo medio, llamando Y la distancia FG, se tiene:

$$Y = VF - \gamma = \frac{\gamma}{\cos.V} - \gamma = \frac{\gamma(1-\cos.V)}{\cos.V} = \frac{2\gamma \operatorname{sen}.^2 \frac{1}{2} V}{\cos.V}$$

ó si se quiere, introduciendo el valor de X, resulta:

$$Y = X \tan.\frac{1}{2} V$$

Los demás puntos del mismo paralelo, de grado en grado de longitud, por ejemplo, se establecen haciendo sucesivamente $L = 1^\circ$, 2°, 3°, etc., en la fórmula (4), y se tendrán los correspondientes de V formados por las proyecciones de los meridianos distantes 1° en longitud, con el meridiano medio. En seguida se calcula la $X = AM$ y la $Y = MN$ para cada punto N, por las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{l} X = \gamma \tan.V \\ Y = \gamma \tan.V \tan.\frac{1}{2} V \end{array}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (5)$$

formando antes en M el ángulo $90^\circ - V$. De este modo se obtienen tantos puntos como se quiera, los cuales unidos después por rectas, formarán una línea poligonal que se confunde con el arco de círculo, con tanto menos error cuanto más pequeño es L. Creo que $L = 1^\circ$ es en todos casos lo suficiente para que la serie de puntos establecidos presenten la apariencia de un arco perfecto. Si la escala de la construcción es excepcionalmente grande, puede reducirse la equidistancia en longitud L de los meridianos á $30'$, á $15'$, etc., que es lo conveniente cuando la carta comprende una extensión comparativamente pequeña.

Cualquiera otro paralelo de latitud φ' se establece tomando sobre los meridianos las distancias $A\,B$, $A\,C$, $A\,D$, $A\,E$, etc., iguales á los valores de k dados por aquella de las ecuaciones (2) que corresponda al método de proyección que se haya adoptado, y que comunmente es el tercero.

78.—Si se teme que la construcción de los ángulos complementarios de V en los extremos de las X produzca algún error por ser muy grande la escala de la carta, es preferible proceder de esta otra manera. Llamemos como antes φ la latitud media, φ' la del paralelo C más septentrional y φ'' la del meridional E. Después de establecido el punto A en el centro de la carta y el meridiano medio $C\,E$, tómense las distancias $A\,C$ y $A\,E$, que no son otra cosa más que los valores de k correspondientes á φ' y φ''. En los puntos C y F levántense las perpendiculares $P\,P'$ y $Q\,Q'$, sobre las que se tomarán:

$$C\,P=(\gamma-k)\,\tan.\,V$$
$$E\,Q=(\gamma-k')\,\tan.\,V$$

y uniendo los puntos P y Q se obtendrá la proyección de uno de los meridianos extremos. Lo mismo se hace para cada uno de los demás empleando el valor de V correspondiente. Finalmente, uno de los paralelos extremos E se traza como ya se ha dicho, y los otros por medio de los valores de k que correspondan á sus latitudes.

Se podría emplear también el valor de γ, radio de la proyección del paralelo medio, en la ecuación de este círculo referido á su centro V, la cual da:

$$x=\pm\sqrt{(\gamma+y)(\gamma-y)}$$

Atribuyendo á y diversos valores comprendidos entre γ y γ cos. V, el primero de los cuales corresponde al punto A y el segundo al extremo G, se tendrían cuantos puntos intermedios se quisiesen.

79.—Demos ahora un método general para construir por puntos

los meridianos y los paralelos. Sea A (fig. 25ª) el centro de la carta, y tomemos por ejes de coordenadas las líneas $A\,V$ y $A\,F$. Llamando x é y las coordenadas en un punto M cuya longitud sea L y cuya latitud sea φ, tendremos:

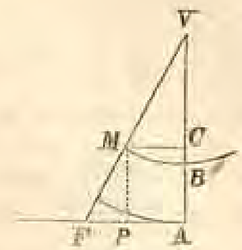


FIG.25

$$A\,B=k \qquad A\,V\,M=V=L\,\text{sen.}\,\varphi$$
$$\gamma=R\cot.\,\varphi \qquad M\,V=\gamma-k$$

y entonces los valores de $A\,P=C\,M=x$ y de $M\,P=y$, serán:

$$x=(\gamma-k)\,\text{sen.}\,V$$

$$y=k+B\,C=k+2(\gamma-k)\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,V$$

Introduciendo el valor de x en el de y con el fin de evitar el cuadrado de sen $\frac{1}{2}$ V, las coordenadas son:

$$\left.\begin{aligned} x&=(\gamma-k)\,\text{sen.}\,V \\ y&=k+x\tan.\,\tfrac{1}{2}\,V \end{aligned}\right\} \quad \text{..............................} \quad (6)$$

Las cantidades que entran en estas fórmulas dependen de la longitud y de la latitud de M, por lo cual este punto representa la proyección de la intersección del meridiano de longitud L con el paralelo de latitud φ'. Así es que para el mismo valor de φ', haciendo variar á L de grado en grado se tendrán puntos del mismo paralelo. Adoptando en seguida otros valores de φ' y haciendo variar de nuevo á L, resultarán otros paralelos divididos también de grado en grado. En consecuencia sólo faltará unir por líneas rectas los puntos de igual latitud para obtener los paralelos, y los de igual longitud para trazar los meridianos.

Para una carta de México, que está próximamente comprendido entre los paralelos de 15° y 33°, tomaremos $\varphi=23°\ 30'$ por latitud media, y propongámonos calcular las coordenadas de la intersección del meridiano de 1° con el paralelo de 18°, suponiendo que la escala adoptada sea de $\frac{1}{1000000}$.

$\varphi' = 18°\ 00'$	$L=1°$.... 0.00000	
$\varphi = 23\ \ 30$	sen. φ..... 9.60070	
$\delta = -5°\ 30'$	V...... 9.60070	$V=0°.3987=0°23'\ 55''.3$
$\frac{a}{1000000}$ 0.80392	.... 0.80392	$\gamma=\ 14^m.642$
tan. δ..... 8.98358−	cot. φ.... 0.36170	$k=-\ 0\ .6131$
k..... 9.78750−	γ....... 1.16562	$\gamma-k=\ 15^m.255$
$\gamma-k$...... 1.18341		
sen. V.... 7.84252		
x..... 9.02593		$y=-0.6131+0^m.00037=-0^m.6127$
tan. $\frac{1}{2}V$.. 7.54170		$x=0^m1061$
6.56763	.... $0^m.00037$	

A causa de la pequeñez de las latitudes, se ve en este ejemplo que el radio de la proyección de un paralelo excede de 15 metros, y en consecuencia, sería casi siempre imposible trazar el arco por movimiento continuo, á no ser que fuese sumamente pequeña la escala de la carta.

Si L hubiera sido de $-1°$ se habrían hallado los mismos valores numéricos para x é y, aunque x de distinto signo; porque como se ha dicho, cada cálculo da las coordenadas de los puntos de intersección del paralelo de latitud φ' con los meridianos de $+L$ y de $-L$ grados de longitud. Parece inútil advertir que para facilitar y hacer con más exactitud la construcción de la proyección, es conveniente trazar cuidadosamente una cuadrícula arreglada á la escala, y tomar en sus lados las coordenadas de cada punto, lo mismo que se ha enseñado en la Topografía.

Las proyecciones cónicas, según se ve en la figura 24ª, se componen de un conjunto de cuadriláteros mixtilíneos, que se consideran equivalentes á los esféricos formados en la tierra por los meridianos

y los paralelos. En cada uno de ellos deben configurarse todos los objetos contenidos en el cuadrilátero terrestre correspondiente, situando por sus coordenadas los puntos principales, ya sea por una simple operación gráfica, puesto que se conoce la posición de cada intersección de meridianos y paralelos, ó ya calculando sus coordenadas por las fórmulas (6), aunque casi siempre basta el primer procedimiento. Todos los demás detalles referidos á los puntos trigonométricos se configuran como se explicó en la Topografía.

80.—La principal ventaja de las proyecciones cónicas consiste en que todos los meridianos y los paralelos ó sus elementos se cortan en ángulo recto, como se verifica en la tierra; pero con excepción del paralelo medio, todas las demás líneas resultan ligeramente alteradas en sus dimensiones. En una esfera los grados de longitud, contados en diversos paralelos, tienen extensiones proporcionales á los cosenos de sus latitudes, puesto que los radios de estos círculos son de la forma R cos. φ; mientras que en la proyección sus variaciones son proporcionales á las de $\gamma-k$. La cantidad γ se considera como constante, y el valor de k varía con cada uno de los sistemas de proyección; pero en general asigna á los grados de paralelo un decrecimento que sigue una ley diversa que en la tierra. Estas alteraciones, lo mismo que las de los grados de latitud, ó sea de meridiano, y que ya he considerado, crecen ó se hacen más sensibles á medida que aumentan las diferencias de latitud; y por estos inconvenientes la proyección cónica se aplica de preferencia á la construcción de las cartas de aquellos países que se extienden más en el sentido de la longitud que de Norte á Sur. Un país que sólo abrace 8° ó 10° de latitud, por ejemplo, quedará muy bien representado en una carta cónica; porque en una zona de 4° ó 5° al Norte y al Sur del paralelo medio, la superficie del cono tangente se aleja tan poco de la tierra, que casi serán imperceptibles las deformaciones que origine la proyección.

De los tres medios que he dado á conocer para proyectar los paralelos, vimos que el segundo, que supone la proyección hecha desde el extremo del diámetro ecuatorial, da generalmente distancias un poco menores que los arcos del meridiano correspondientes; mientras que el tercer método, que las supone hechas desde el centro de la esfera, las produce algo mayores. Según esto, se comprende fácilmente que sería posible determinar en el plano del ecuador un punto tal, que proyectando desde él un arco del meridiano sobre la superficie cónica, la proyección resultase igual en extensión al arco mismo, ó en general, que guardase con éste una relación dada.(1) No desarrollo los cálculos, porque son largos y no ofrecen interés práctico; basta solamente concebir la posibilidad de determinar ese punto proyectante de cada paralelo para tener hasta cierto punto el fundamento de una modificación de la proyección cónica, que se ha tenido hasta ahora por arbitraria; pero que en rigor deja de serlo resolviendo el problema desde el punto de vista en que lo he considerado.

Esta modificación consiste en dar á los grados del meridiano sus verdaderas extensiones en la proyección. Si la tierra se supone esférica, las extensiones serán las mismas para iguales diferencias de latitud, y se calcularán por la fórmula siguiente en que δ expresa grados.

$$m = \text{arco } 1^\circ \times R\delta = (8.2418774)\, R\delta$$

Entonces se empleará m en lugar de k en las ecuaciones (3) ó (6), que sirven para calcular los radios de las proyecciones de los paralelos ó las coordenadas de sus intersecciones con los meridianos. Si se hace la construcción por el método del número 74, deberá dividirse el meridiano medio en partes iguales á m reducidas á la escala,

(1) Designando por x la distancia del centro de la esfera al punto en cuestión, he hallado que la relación que liga las cantidades k, φ, φ' y x está representada en la ecuación siguiente:

$$k = R\,\frac{R \operatorname{sen.} \delta + x(\operatorname{sen.} \varphi' - \operatorname{sen.} \varphi)}{R \cos. \delta + x \cos. \varphi}$$

Por ella se ve que los tres métodos que he considerado son casos particulares de la fórmula, que corresponden á $x = \infty$, á $x = R$ y á $x = 0$.

Si se desea que k adquiera un valor dado m, despejaremos á x con esa condición, y resultará:

$$x = R\,\frac{R \operatorname{sen.} \delta - m \cos. \delta}{m \cos. \varphi - R(\operatorname{sen.} \varphi' - \operatorname{sen.} \varphi)}$$

La cantidad δ es la diferencia de latitud $\varphi' - \varphi$ de los extremos del arco cuya extensión es k ó m.

y por los puntos de división se trazarán los paralelos como se dijo allí.

Cuando la escala de la construcción se presta á ello, si se quiere restituir á la tierra su verdadera forma, consideremos que desde el momento en que el meridiano se supone elíptico, la generatriz del cono tangente ya no es perpendicular al radio central, sino á la normal que corresponde á la latitud φ del contacto. Así, pues, la distancia de este paralelo al vértice del cono, ó lo que es lo mismo, el radio de su proyección, ya no se calculará por la fórmula (1), sino por la siguiente:

$$\gamma = N \cot. \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Los valores de m tampoco serán iguales entre sí, y deberán calcularse por la ecuación (19) del Capítulo I. La Tabla III, que termina el mismo Capítulo, los da para $\delta = 1^\circ$. Estas cantidades son las que deben sustituir á k en la construcción ó en el cálculo de las coordenadas.

Con esta modificación quedan destruídos los errores de las distancias de Norte á Sur, y la proyección consta de trapecios mixtilíneos de alturas iguales si se supone la tierra esférica, ó crecientes si se lleva en cuenta su elipticidad.

81.—Otra modificación que se ha hecho á la proyección cónica consiste en dar su verdadero tamaño á los grados de todos los paralelos; porque en el sistema que hasta ahora se ha explicado sólo el paralelo medio no sufre alteración por ser el del contacto. Basta para esto determinar los ángulos que he designado por V, no sólo para el paralelo medio, sino para todos los demás, con la condición de que el arco desarrollado tenga igual extensión á la que abraza en la tierra. Siendo, como antes, γ el radio de la proyección del paralelo medio, calculado por la fórmula (7), y m la extensión del arco del meridiano $\varphi' - \varphi$, el radio de la proyección del paralelo cuya latitud es φ' será $\gamma - m$. La extensión del arco de este paralelo que comprende $2L$ grados de longitud, tiene por expresión:

$$S = \frac{\pi}{90^\circ}\, L N \cos. \varphi'$$

y en la proyección cuyo radio es $\gamma - m$, será:

$$S = \frac{\pi}{90^\circ} V(\gamma - m)$$

de donde se obtiene por la eliminación de S:

$$V = L\,\frac{N\cos.\varphi'}{\gamma - m}$$

que representa el ángulo formado en el vértice del cono por los dos meridianos que á la latitud φ' abrazan L grados de longitud.

Se ve, pues, que adoptando esta modificación es preciso calcular el valor de V para cada paralelo, introduciendo la normal que corresponde á su latitud y el valor de m contado desde el paralelo medio. Hasta cierto punto esto equivale á suponer un cono tangente á la tierra en cada paralelo, y por esa razón á veces se denomina *policónica* esta proyección modificada, aunque con más generalidad se llama proyección *francesa;* porque para la construcción de la carta de Francia emplearon ese sistema los geógrafos de aquella nación.

Como los valores de V van variando de una latitud á otra, aun para los mismos valores de L, resulta que los meridianos no quedan ya rectilíneos, sino ligeramente curvos; pero la construcción no por eso es más difícil, pues fijando por sus coordenadas las intersecciones de meridianos y paralelos, se unen por pequeñas rectas todos los puntos de igual longitud en los diversos paralelos, y se obtienen así líneas poligonales con apariencia de curvas perfectas, las cuales representan las proyecciones de los meridianos. La figura 26ª manifiesta la proyección para una carta de la República construída de esa manera.

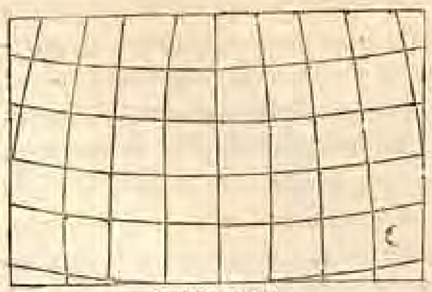


FIG. 26A

Este sistema se usa mucho en el día, porque no produce deforma-

ción sensible en la carta. Para facilitar sus aplicaciones, reunamos todas las fórmulas que sirven para calcular las coordenadas de los puntos de intersección de los meridianos y los paralelos, ó si se quiere, las coordenadas de un punto cuya latitud sea φ' y cuya longitud sea L.

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= N_0 \cot.\varphi \\ V &= L\,\frac{N\cos.\varphi'}{\gamma - m} \\ x &= (\gamma - m)\,\mathrm{sen.}\,V \\ y &= m + x\tan.\tfrac{1}{2}V \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

En ellas N_0 designa la normal que corresponde á la latitud media φ, y N la correspondiente á cualquiera otra latitud φ'.

Por estas fórmulas calculé las tablas que corren impresas y sirvieron al Sr. García Cubas para dibujar la carta de la República que publicó hace algunos años. Para facilitarle el trabajo tomé por unidad la sexta parte de la distancia, contada en el meridiano, entre los paralelos de 15° y de 33°, á fin de referir los valores de x é y al tamaño que quisiera darse al dibujo. (Véase la memoria que acompaña á la carta general de la República.)

82.—**Proyecciones cilíndricas.**—Si se supone nula la cantidad designada por φ, que según se recordará, representaba la látitud del paralelo de contacto de la superficie cónica con la de la tierra, el radio de la proyección, suministrado por la fórmula (1) ó la primera de las (8) darán $\gamma = \infty$, lo cual indica que el cono se convierte en un cilindro. Este resultado se comprende desde luego, puesto que la condición $\varphi = 0$ expresa que el contacto tiene lugar en el ecuador, y en consecuencia las generatrices de la superficie circunscrita á la tierra, debiendo ser perpendiculares á los radios ecuatoriales, serán paralelos al eje polar del globo y determinarán una superficie cilíndrica de base circular. Desarrollando esta superficie, quedarán representadas las proyecciones de los meridianos por líneas rectas paralelas y equidistantes; y las de los paralelos al ecuador por líneas perpendiculares á estas últimas, á distancias variables entre sí, según el sistema de proyección que se adopte. El dibujo ofrecerá, pues, un conjunto de rectángulos de bases iguales y alturas desiguales.

Las tres maneras de proyectar los paralelos, que están representadas en las fórmulas (2), dan respectivamente, atendiendo á que en este caso se tiene $\delta = \varphi'$:

$$k = R \operatorname{sen.} \varphi'$$
$$k = 2 R \tan. \frac{1}{2} \varphi'$$
$$k = R \tan. \varphi'$$

Por estas expresiones se ve que los tres métodos alteran poco las dimensiones de los arcos del meridiano cuando es pequeña la latitud; pero que sucede lo contrario cuando φ' se acerca á valer $90°$, en cuyo caso el primer método da proyecciones demasiado pequeñas, el segundo demasiado grandes, aunque no tanto como el tercero, que para $\varphi' = 90°$, produce $k = \infty$. De aquí se deduce que la proyección cilíndrica sólo puede servir para configurar con alguna aproximación una estrecha zona á un lado y otro del ecuador. Por lo general, se aplica este sistema á la construcción de las cartas celestes para representar las constelaciones ecuatoriales y zodiacales.

A pesar de los inconvenientes que ofrece la proyección cilíndrica en cuanto á la deformación que produce en las altas latitudes, es la más usada por los marinos para la construcción de sus cartas. La razón de esta preferencia proviene de que quedando representados los meridianos por líneas rectas y paralelas, el derrotero de un navío se podrá representar también por una línea recta. En efecto, la dirección en que se navega se determina por medio de la brújula, moviendo el timón de manera que aquel instrumento indique cierto azimut calculado de antemano y dependiente de las posiciones del punto de partida y del término del viaje; por consiguiente, la senda de la embarcación forma una curva llamada *loxodromia*, caracterizada por la propiedad de formar un mismo ángulo con todos los meridianos. Si, pues, las proyecciones de estos planos son líneas rectas, la de la loxodromia será también una recta trazada con el azimut deducido de las indicaciones de la brújula.

83.—En una esfera los grados de longitud contados sobre distintos paralelos tienen extensiones proporcionales á los cosenos de sus latitudes, puesto que su expresión es: $p = \text{arco } 1° \times R \cos. \varphi$. La extensión de un grado del meridiano es: $m = \text{arco } 1° \times R$, y por tanto la relación de estas extensiones será: $\frac{p}{m} = \cos. \varphi$. En la proyección cilíndrica el paralelismo de los meridianos hace invariables los grados de longitud, sea cual fuere la latitud del paralelo en que se cuenten; mas para conservar la relación $\frac{p}{m} = \cos. \varphi$ en que p es constante, el geógrafo inglés Mercator tuvo la idea de hacer variar los arcos del meridiano en razón inversa de los cosenos de las latitudes. Así, pues, dividiendo el valor de m por $\cos. \varphi$ se obtienen los grados crecientes de latitud para construir la proyección cilíndrica de Mercator representada en la fig. 27ª, y en la cual la relación de los grados de latitud, con los de longitud, es la misma que en una esfera. La modificación de Mercator se adopta comunmente para las cartas marinas y para los *planisferios* que representan toda la tierra, con excepción de los países muy inmediatos á los polos; pero además de las deformaciones, tiene el inconveniente de demandar una escala diferente para apreciar las distancias en cada zona.

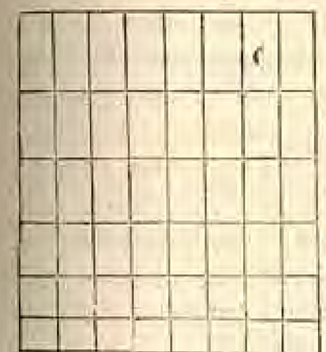


FIG.27

Otra modificación de la proyección cilíndrica consiste en suponer iguales los grados de los meridianos y de los paralelos con la extensión que tienen los primeros á la latitud media del país que se desea representar. Entonces la proyección consta de una serie de cuadrados iguales como las cuadrículas que sirven para construir los planos topográficos; pero este sistema sólo puede aplicarse sin error notable para formar las cartas de países muy poco extensos, que no excedan, por ejemplo, de 2° ó 3° de longitud y latitud.

84.—Consideremos ahora un sistema de proyección muy fácil de construir y muy conveniente, á mi juicio, en las bajas latitudes, sobre todo para la representación de países más extensos de Norte á Sur que de Oriente á Poniente. Para esto, concibamos un cilindro tangente á la tierra en el meridiano medio del país que va á representarse, y supongamos prolongados los planos de los meridianos y los paralelos. Los primeros determinarán en el cilindro intersecciones elípticas cuyos ejes menores serán iguales al diámetro polar, y los segundos secciones terminadas por generatrices de la superficie cilíndrica. Luego que ésta se desarrolla, el meridiano medio quedará representado por una línea recta de una extensión igual á la que realmente tiene en la tierra; los demás meridianos por curvas que se construyen fácilmente, puesto que puede determinarse la distancia de cualquiera de sus puntos al meridiano medio; y por último, los paralelos por rectas perpendiculares á esta última línea.

Sea $A\,O\,M\,E$ (fig. 28ª) el plano de un paralelo de latitud φ, y $A\,B$ la generatriz correspondiente del cilindro, intersección de su superficie con la del paralelo prolongado. Para proyectar un arco $A\,b$ que abrace L grados de este círculo, podrá emplearse cualquiera de los métodos que se han expuesto al hablar de las proyecciones cónicas, tomando un punto de $A\,M$, que es la intersección del paralelo con el meridiano principal al cual es tangente el cilindro, y trazando desde él una línea á la extremidad b del arco. Así, por ejemplo, si se elige el centro C del paralelo mismo para hacer la proyección, el arco $A\,b$ quedará proyectado en $A\,B$. Designando por N la normal terrestre á la latitud φ, el radio del paralelo es $N\cos\varphi$, y la proyección $A\,B$ tendrá por valor:

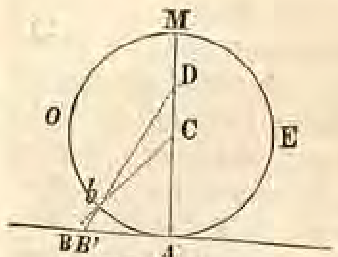


FIG. 28A

$$k = N\cos.\varphi\tan.L$$

puesto que L es el ángulo $A\,C\,b$ ó sea la longitud geográfica del punto b contada desde el meridiano medio $A\,M$.

Adoptando este sistema, las proyecciones de los arcos de cada pa-

ralelo serán proporcionales á sus tangentes; de manera que cuando el país comprenda varios grados de longitud, los grados de los paralelos tendrán en la carta mayor extensión que en la tierra, de donde resultarán deformaciones en las partes extremas del dibujo. Puede, sin embargo, escogerse en el plano del paralelo un punto D para proyectar cada arco, de tal modo que la proyección $A\,B'$ tenga una magnitud dada p. Basta para esto determinar en el triángulo rectángulo $A\,D\,B'$ el valor de $x = C\,D$ estableciendo la condición:

$$p = (N\cos.\varphi + x)\tan.D$$

En el triángulo $C\,D\,b$ se tiene, además:

$$x\,\mathrm{sen.}\,D = N\cos.\varphi\,\mathrm{sen.}\,(L - D)$$

Desarrollando esta ecuación y dividiéndola por cos. D, suministra esta otra:

$$\tan.D = \frac{N\cos.\varphi\,\mathrm{sen.}\,L}{N\cos.\varphi\cos.L + x}$$

valor que sustituído en el de p produce el siguiente de x:

$$x = N\cos.\varphi\,\frac{N\cos.\varphi\,\mathrm{sen.}\,L - p\cos.L}{p - N\cos.\varphi\,\mathrm{sen.}\,L}$$

Si se quiere que la proyección p sea precisamente igual al arco correspondiente $A\,b$ del paralelo, sustituiremos su valor, que tomando por unidad el arco de 1° y expresando á L en grados, es $p = L\,N\cos.\varphi$. Por la sustitución resultará, pues:

$$x = N\cos.\varphi\,\frac{\tan.L - L}{L - \mathrm{sen.}\,L}\cos.L$$

Se comprende que en manera alguna es necesario determinar el valor de x que corresponde á cada arco de longitud L, y el cálculo anterior sólo tiene por objeto demostrar la posibilidad de hacer la proyección de esa manera sin alterar las dimensiones de los arcos, ó si se quiere, el de indicar el fundamento de una modificación que se hace á la proyección cilíndrica tangente al meridiano. Esta consiste en dar sus verdaderas dimensiones á los grados de los paralelos, haciendo la construcción con la mayor facilidad de la manera que voy á exponer.

Hacia el centro del papel trácese una línea que represente el meridiano medio ó principal. Con arreglo á la escala divídase esta línea en partes proporcionales á las extensiones de los grados del meridiano correspondientes á las latitudes que abraza el país. Estos valores son los que constan en la Tabla del número 23 para las latitudes de la República. Por los puntos de división levántense perpendiculares al meridiano medio, las cuales representan las proyecciones de los paralelos; y sobre cada uno tómense distancias iguales á los grados de longitud, según sea la latitud del paralelo en que se cuenten, y que para la República constan igualmente en la Tabla citada. Finalmente, únanse los puntos de cada paralelo que correspondan á la misma longitud, y se obtendrán así las proyecciones de los demás meridianos.

La figura 29ª presenta la proyección para una carta de México construída según este sistema. Por ella se ve que en una zona de algunos grados al Oriente y al Poniente del meridiano central, casi no se produce deformación alguna, y que ésta sólo comienza á notarse hacia los extremos más distantes en longitud, á causa de que los meridianos van siendo más y más oblicuos respecto de los paralelos, haciendo crecer, por consiguiente, los grados de latitud.

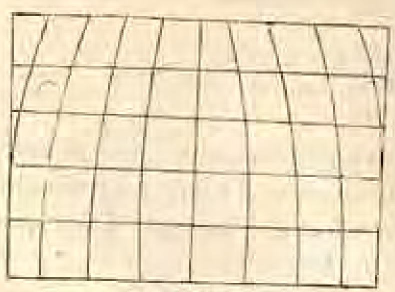


FIG. 29 A

A la facilidad con que puede construirse la proyección cilíndrica tangente al meridiano, puede agregarse otra ventaja que ofrece en las bajas latitudes, cual es la de hacer poco convergentes los meridianos, y ocasionar, en consecuencia, menos deformación hacia el Este y el Oeste, que la que produce cuando se aplica á la representación de países de latitudes considerables. En efecto, el decremento de los grados de paralelo, es próximamente proporcional al coseno de la latitud, puesto que los radios de estos círculos son de la forma $N \cos. \varphi$; y como los cosenos de los ángulos pequeños no decrecen con mucha rapidez, resulta que las proyecciones de los meridianos laterales tienen respecto de los paralelos una oblicuidad menor que en las altas latitudes. Por las razones expuestas, me parece que este sistema de proyección es muy propio para construir las cartas de nuestros Estados del litoral que se extienden en latitud más que en longitud, y aun para la de toda la República, que quedaría bastante bien representada.

CAPITULO IX.

TRAZO DE LÍNEAS EXTENSAS.

85.—Ahora que he terminado la exposición de las principales operaciones que demanda una triangulación geodésica, me propongo dar á conocer en este Capítulo y en el siguiente algunas aplicaciones importantes, que aunque basadas en operaciones más bien astronómicas que geodésicas, tienen, sin embargo, bastantes puntos de contacto con los procedimientos de la Geodesia para que me sea permitida su exposición antes que la de los astronómicos que les sirven de fundamento. Comencemos por el trazo de las líneas geográficas.

En la demarcación de los límites territoriales entre dos naciones ó Estados vecinos, se ofrece frecuentemente el establecimiento de grandes líneas geodésicas. Por lo regular, se estipula de antemano cuáles deben ser los extremos de esas líneas, ya sea que se definan por sus posiciones geográficas, ó ya por ser puntos notables bajo cualquier otro aspecto. En el primer caso, es preciso comenzar por señalar en el terreno los puntos que corresponden á las posiciones geográficas asignadas; y en el segundo determinar las de los extremos dados.

Debe advertirse desde luego que si entre los puntos así establecidos se ejecuta una triangulación geodésica, con los elementos que

ésta suministre podrán determinarse la magnitud y la dirección de las líneas que los unen; y, por consiguiente, demarcarse éstas sobre el terreno, operando de una manera semejante á la que se ha indicado para el trazo de pequeñas líneas topográficas (Tomo I, número 113). Este método no es, sin embargo, el más fácil de aplicar; porque una triangulación geodésica, además de mucho tiempo de trabajo, exige generalmente un numeroso personal, crecidos gastos y otros elementos de que no siempre es posible disponer. Por estas razones, voy á exponer otro procedimiento comparativamente sencillo, y cuya exactitud casi no depende más que de la precisión con que se determinen las posiciones geográficas de los extremos de la línea.

Si los puntos están dados sobre el terreno, deben determinarse sus latitudes y la diferencia de sus longitudes por medio de los procedimientos astronómicos que se enseñarán en la parte tercera de este libro, ejecutando en los mismos puntos las observaciones necesarias; mas si sólo lo están por sus posiciones geográficas, es preciso comenzar, según se dijo antes, por buscar los puntos que correspondan á las posiciones dadas. A este fin se establece el observador en un lugar inmediato al que desea señalar, lo cual siempre es fácil, bien sea por la simple apreciación que puede hacer en una carta geográfica, ó lo que es preferible, por medio de algunas observaciones aproximativas que ejecute.

Admitamos que de este modo se haya colocado en un punto muy próximo al que tiene que demarcar en el terreno, cuya posición dada supondré que es φ' en latitud y L' en longitud. Entonces el observador deberá determinar con toda precisión la latitud φ y la longitud L de su estación provisional, así como la dirección del meridiano astronómico que pasa por ella. Con estos datos tiene lo necesario para calcular la magnitud y la dirección de la línea que une su observatorio con el punto que desea hallar. En efecto, puesto que conoce las diferencias $\varphi' - \varphi$ y $L' - L$ podrá aplicar las fórmulas (2) y (4) del Capítulo VII para obtener por su combinación el azimut u y la extensión k de esa distancia. Como por el supuesto se ha colocado cerca del punto incógnito, podrá omitirse sin inconveniente, el último y pequeño término de la primera de las fórmulas mencionadas, para tomar:

$$\varphi' - \varphi = A k \cos. u \qquad (L' - L)\cos. \varphi' = C k \,\text{sen.}\, u$$

El cociente de estas da el azimut, á saber:

$$\tan. u = \frac{A(L' - L)}{C(\varphi' - \varphi)} \cos. \varphi'$$

y en seguida cualquiera de ellas la distancia

$$k = \frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u} = \frac{(L' - L)\cos. \varphi'}{C \,\text{sen.}\, u}$$

Ejemplo.—Supongamos que se tiene necesidad de señalar en el terreno el punto de la Baja California que corresponde á la intersección del paralelo de 27° 00′ de latitud con el meridiano de 13° 52′ 51″ al Oeste de México, y que el observador ha determinado para un punto cercano la posición: $\varphi = 27° 2' 17''.4$ y $L = 13° 51' 3''.0$. Tomando en la Tabla del número 71 los logaritmos de A y C para la latitud φ, tendremos:

$\varphi' =$	27° 00′ 00″.0	$L' =$	13° 52′ 51″.0
$\varphi =$	27 2 17 .4	$L =$	13 51 3 .0
$\varphi' - \varphi =$	−137′.4	$L' - L =$	+108″.8
A	8.51179		
$L' - L$.........	2.03342		
cos. φ'........	9.94988	$\varphi' - \varphi$.......	2.13799−
C..............	−8.50948	A..............	−8.51179
$\varphi' - \varphi$.......	−2.13799−	cos. u..........	−9.91257−
tan. u..........	9.84762−	k.........	3.71362
$u =$	144° 51′ 4″	$k =$	5171^{m}.6

Obtenidos estos resultados, se trazará una línea que forme con el meridiano de la estación un ángulo de 35° 8′ 56″ del Sur al Oeste, y se medirá en esa dirección la distancia k, cuyo término señala el punto que se busca. Si la medida directa presenta algún inconve-

niente, puede establecerse la línea por uno ó dos pequeños triángulos. Para el trazo material, véase el número 113 del primer Tomo.

86.—Demarcadas de este modo las dos extremidades de una línea geodésica, veamos cómo se determina su magnitud y su dirección. Designemos por φ y φ', L y L' las latitudes y las longitudes de esos puntos, haciendo para abreviar:

$$x = k \,\text{sen.}\, u$$
$$y = k \cos. u$$

las fórmulas (2) y (4) del Capítulo VII, darán:

$$A y - B x^2 = \varphi' - \varphi$$
$$C x = (L' - L)\cos. \varphi'$$

Despejando de esta última el valor de x, de la otra el de y, y dividiendo uno por otro los valores de x é y, se obtendrán sin dificultad las siguientes ecuaciones, que calculadas por su orden, contienen toda la resolución del problema:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(L' - L)\cos. \varphi'}{C} \\ y &= \frac{\varphi' - \varphi}{A} + \frac{B}{A} x^2 \\ \tan. u &= \frac{x}{y} \\ k &= \frac{x}{\text{sen.}\, u} = \frac{y}{\cos. u} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Se recordará que u representa el azimut de la línea en el punto cuya latitud es φ. Para que $\varphi' - \varphi$ sea siempre positiva, convendremos en tomar por φ la menor de las dos latitudes. Es también importante calcular los valores de A, B y C para la latitud media

$\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$, especialmente si la línea es algo extensa, puesto que estas cantidades varían algo con la latitud, y podría producir algún error el considerarlas como constantes é iguales á las que correspondieran á un extremo de la distancia.

Para aplicar estas fórmulas, tomemos como ejemplo los elementos que sirvieron para trazar una de las líneas divisorias entre las Repúblicas de México y de los Estados Unidos, en virtud del tratado de 1848. Según él, la línea limítrofe debe partir de un punto de nuestras costas occidentales (California) situado á una legua marina (5564^m.6) al Sur del punto más austral del puerto de San Diego, y terminar en el punto de confluencia de los ríos Gila y Colorado. Para establecer el punto inicial, las comisiones Mexicana y Americana midieron la legua marina en el meridiano que pasa por la parte más meridional de aquel puerto, y situaron sus campos astronómicos á inmediaciones del punto, con el fin de determinar sus coordenadas geográficas. Después de terminadas las observaciones por el Sr. Salazar Ilarregui, como astrónomo mexicano, y por Mr. W. H. Emory, astrónomo americano, las refirieron al punto inicial de la línea limítrofe por medio de algunos triángulos pequeños, obteniendo por resultado para este último:

$$\varphi = 32^\circ\, 31'\, 59''.6$$
$$L = 117^\circ\ \ 5\ \ 16\ .5 \text{ al Oeste de Greenwich.}$$

Una serie de operaciones análogas se ejecutó después para determinar el punto de unión de los ríos Gila y Colorado, y para fijar su posición geográfica, que se encontró ser:

$$\varphi' = 32^\circ\, 43'\, 32''.2$$
$$L' = 114\ \ 32\ \ 51\ .6 \text{ al Oeste de Greenwich.}$$

Calculemos con estos datos la longitud y la dirección de la línea, tomando de la Tabla del número 71 los valores de A, B y C para la latitud media 32° 38′.

$$\begin{array}{rl} \varphi' = & 32^\circ\, 43'\, 32''.2 \\ \varphi = & 32\ \ 31\ \ 59\ .6 \\ \hline \varphi' - \varphi = & +\ \ 11'\, 32''.6 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} L' = & 114^\circ\, 32'\, 51''.6 \\ L = & 117\ \ \ 5\ 16\ .5 \\ \hline L' - L = & -2^\circ\, 32'\, 24''.9 \end{array}$$

$L'-L$......	3.9611790	$\varphi'-\varphi$.....	2.8404825	x^2...........	0.7535
cos. φ'.....	9.9249350	A......	−8.5114242..........	....	−8.5114
C......	−8.5093597		4.3290583	B...........	1.2117
x.....	5.3767543−		21333^m.3		3.4538
y.....	−4.3833934		2843 .2		
tan. u......	0.9933609−		$y = 24176^m.5$		
$u = 275^\circ\, 47'\, 52''.7$		x.....	5.3767543−		
		sen. u......	−9.9977725−		
		k.....	5.3789818.............		$k = 239321^m$

Se ve por estos resultados que la línea de California tiene más de 57 leguas mexicanas de largo, y que su azimut en el punto inicial es de 275° 47′ 52″.7, ó si se quiere, de 84° 12′ 7″.3 del Norte al Este. El azimut en el Gila se obtendrá por la fórmula (6) del Capítulo VII, á saber:

$L'-L$..............	3.96118−		
sen. $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$....	9.73175	$u - 180^\circ =$	$95^\circ\, 47'\, 52''.7$
cos. $\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)$.....	−0.00000	$c =$	$-\ \ 1\ \ 22\ \ 11\ .0$
c............	3.69293−	$u' =$	$94^\circ\, 25'\, 41''.7$
$c = -4931''.0$			

De esta manera pudo trazarse la línea partiendo de uno y otro extremo.

Si se tuviese algún interés en calcular la amplitud angular de la línea geodésica, la fórmula (30) del Capítulo I, aplicada á este caso, daría: $\theta = 2^\circ\, 8'\, 53''.3$.

87.—Como los únicos datos que se requieren para el trazo de una línea son las posiciones geográficas de sus extremos, se ve que el método expuesto es aplicable á un arco cualquiera, con tal que pertenezca á una sección vertical del elipsoide; pero si se trata de demarcar un arco perteneciente, por ejemplo, á un paralelo ó á cualquiera otra sección oblicua, es preciso establecerlo por puntos, apoyándose en una línea geodésica no muy distante de él. Supongamos que se quiera trazar un arco $B\,A\,B'$ (fig. 30ª) de un paralelo cuya latitud es φ. Lo primero que debe hacerse es determinar uno de sus puntos A, y para esto se observará la latitud de un lugar inmediato A' con el objeto de moverse en el meridiano de este punto lo que sea necesario para señalar en el terreno el punto A que tiene φ por latitud.

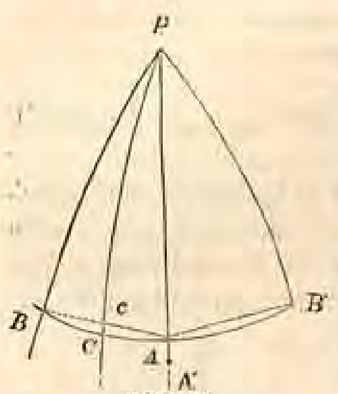


FIG. 30.

Sea λ la observada de A', y ρ el radio de curvatura del meridiano que corresponde á esa latitud; se tendrá entonces que $\varphi - \lambda$ representa la distancia angular de A' á A expresada en segundos, y $\frac{\varphi-\lambda}{A}$ la distancia itineraria en metros, siendo $A = \frac{1}{\rho \text{ sen. } 1''}$ cuyos logaritmos constan en la Tabla del número 71. Midiendo esa distancia en el meridiano, se situará el punto que se desea del paralelo. La línea se medirá hacia el Sur cuando resulte λ mayor que φ; y si la diferencia $\varphi - \lambda$ fuese muy considerable, deberán repetirse las observaciones de latitud en el punto así establecido, aplicando una nueva corrección si es necesario.

Una vez que se haya situado el punto A de latitud φ, sea $L'-L$ la diferencia de meridianos $A\,B\,P$ del arco $A\,C\,B$ que se quiere demarcar. Con estos elementos se pueden calcular los de la línea geodésica $A\,c\,B$, que por la apariencia que tiene en la figura designaré, para abreviar, con el nombre de cuerda del paralelo, aunque no es sino otro arco perteneciente á una sección vertical.

La magnitud y la dirección de esta cuerda se determinan por medio de las ecuaciones (1), con la única diferencia de hacer $\varphi' - \varphi = 0$,

puesto que los extremos A y B tienen la misma latitud. En consecuencia, la fórmulas aplicables á este caso serán:

$$x = \frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C}$$

$$y = \frac{B}{A}\,x^2$$

$$\tan.\,u = \frac{x}{y}$$

$$k = \frac{x}{\text{sen.}\,u}$$

Debe notarse que siendo comunmente pequeña la diferencia $L'-L$ de meridianos, el azimut u de la cuerda difiere poco de 90°; y si hacemos $u = 90° - \omega$, el pequeño ángulo ω se obtendrá por la relación

$$\tan.\,\omega = \frac{y}{x} = \frac{B(L'-L)\cos.\varphi}{A\,C}$$

Si en ella se entroducen los valores $A = \frac{1}{\rho\,\text{sen.}\,1''}$, $B = \frac{0.5\tan.\varphi}{N\rho\,\text{sen.}\,1''}$, y $C = \frac{1}{N\,\text{sen.}\,1''}$, y además, se toma el arco ω por su tangente, resulta en segundos:

$$\omega = \frac{1}{2}(L'-L)\,\text{sen.}\,\varphi$$

En virtud de esta simplificación, las fórmulas que determinan la dirección y la magnitud de la línea, son:

$$\left.\begin{aligned} u &= 90° - \frac{1}{2}(L'-L)\,\text{sen.}\,\varphi \\ k &= \frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C\,\text{sen.}\,u} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

El arco del paralelo que á la latitud φ abraza la longitud $L'-L$, tendrá por extensión lineal:

$$p = \frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C}$$

de donde se deduce: $p = k\,\text{sen.}\,u$.

Veamos ahora cómo pueden situarse cuantos puntos intermedios del paralelo se deseen entre A y B. Sea $Ac=f$ una distancia cualquiera medida en la cuerda, y calculemos la pequeña parte $Cc=g$ del meridiano de c, comprendida entre la cuerda y el arco. Basta para esto recordar que si se designa por λ la diferencia de latitud entre A y c, ó lo que es lo mismo, entre C y c, se tiene:

$$\lambda = A f \cos. u - B f^2 \operatorname{sen.}^2 u$$

y como el arco λ se convierte en medidas lineales dividiéndolo por A, hallaremos que $\frac{\lambda}{A}$ es la distancia g, y en consecuencia tendrá por valor:

$$g = f \cos. u - \frac{B}{A} f^2 \operatorname{sen.}^2 u$$

Atribuyendo, pues, á f diversos valores, se obtendrán por esta ecuación las distancias g de los puntos correspondientes de la línea geodésica al paralelo, las cuales medidas hacia el Sur en los meridianos respectivos darán otros tantos puntos del paralelo. Sin embargo, como por lo general es conveniente trazar esta curva por puntos equidistantes entre sí, llamando n una fracción cualquiera que exprese la relación entre la distancia $Ac=f$ y la cuerda total $AcB=k$, se tiene $f=nk$, valor que introducido en la fórmula anterior, produce:

$$g = nk \cos. u - \frac{B}{A} n^2 k^2 \operatorname{sen.}^2 u = ny - \frac{B}{A} n^2 x^2$$

y atendiendo al valor de y que consta arriba, se obtiene:

$$g = ny - n^2 y = n(1-n) y$$

de donde resulta por último:

$$g = n(1-n) \frac{B}{A} k^2 \operatorname{sen.}^2 u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

88.—De esta manera, calculando una sola vez la parte $\frac{B}{A} k^2 \operatorname{sen.}^2 u$, común á todas las ordenadas ó valores de g, con sólo variar la fracción n se obtendrán los coeficientes $n(1-n)$ que suministran con la mayor facilidad los elementos para situar muchos puntos del

paralelo. Si, por ejemplo, se desea que el arco total ACB quede dividido en 10 partes iguales, se hará sucesivamente n igual á 0.1, 0.2, 0.3, ... 0.9, lo cual equivale evidentemente á demarcar 9 puntos equidistantes entre los extremos A y B.

No ofrece mayor dificultad la aplicación de la fórmula cuando se desea que los espacios comprendidos entre esos puntos tengan una extensión dada. Sea, en efecto, q esta equidistancia, ó la extensión de los arcos parciales del paralelo; como la extensión total de este es:

$$p = \frac{(L'-L)\cos. \varphi}{C}$$

y está en nuestro arbitrio disponer del ángulo $L'-L$ que mide la diferencia de longitudes de los extremos de la línea geodésica auxiliar, si se desea establecer $m-1$ puntos intermedios, pondremos la condición $mq=p$, de donde resulta:

$$L'-L = \frac{Cmq}{\cos. \varphi}$$

y después de determinadas la dirección y la magnitud de la cuerda auxiliar por las fórmulas (2) con este valor de $L'-L$, se aplicará á la (3) para calcular las ordenadas, haciendo sucesivamente en ella á n igual á $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$ .... $\frac{m-1}{m}$, para obtener los $m-1$ puntos intermedios, ó sea $m+1$ incluyendo los extremos.

Tampoco hay dificultad alguna cuando se quiere que todos los puntos que se fijen del paralelo resulten á intervalos iguales en longitud geográfica, por ejemplo de 5′ en 5′; porque siendo Δ la diferencia constante de meridianos, se determinará el ángulo $L'-L$ con la condición de que abrace m veces la cantidad Δ, esto es:

$$L'-L = m\Delta$$

lo que evidentemente reduce este problema al anterior.

89.—Se ha dicho que en el término de cada distancia f contada desde el punto de partida A, se mide en el meridiano el valor de g

correspondiente; pero para no verse en la necesidad de trazar astronómicamente el meridiano de cada punto c de la línea, determinemos el azimut de $c\,A$, del cual deduciremos en seguida el ángulo $A\,c\,C$, á fin de que formando este ángulo con la línea geodésica, se pueda medir desde luego la distancia g en la dirección conveniente. Como he designado por u el azimut $P\,A\,B$ de la cuerda, llamando Δ la diferencia de meridianos $A\,P\,C$ entre los puntos A y c, el azimut inverso en c será:

$$u' = 180° + u + \Delta \operatorname{sen.} \varphi$$

En esta ecuación he empleado φ en lugar de la latitud media de C y c, en atención á la extremada pequeñez de la diferencia de las latitudes de esos puntos, la cual sólo es de algunos segundos. Por la misma razón tomo la fórmula siguiente para expresar la relación que existe entre Δ y f:

$$\Delta = \frac{C f \operatorname{sen.} u}{\cos. \varphi} = \frac{C n k \operatorname{sen.} u}{\cos. \varphi}$$

é introduciendo el valor de k suministrado por las ecuaciones (2) se obtiene:

$$\Delta = n(L' - L)$$

lo cual demuestra que las diferencias parciales de meridianos guardan con la total la misma relación que las distancias correspondientes f y k. Sustituyendo en u' el valor de Δ, y el de u que dan las ecuaciones (2), resulta:

$$u' - 180° = 90° + \left(n - \frac{1}{2}\right)(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi$$

y como $u' - 180°$ es igual al ángulo $A\,c\,C$ formado por la dirección de la línea geodésica con la de la ordenada g, si lo designamos por v se tendrá finalmente:

$$v = 90° + \left(n - \frac{1}{2}\right)(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi \quad \text{.............} \quad (4)$$

90.—Las fórmulas (2), (3) y (4) contienen todo el cálculo nece-

sario para el trazo de un arco del paralelo; y debe notarse que sólo el de k demanda el uso de logaritmos de siete cifras decimales, pues por la pequeñez de los otros elementos se tiene siempre la exactitud necesaria con logaritmos de cuatro ó cinco cifras. El coeficiente $n(1-n)$ que entra en los valores de g llega á su *maximum* cuando $n = \frac{1}{2}$, y adquiere valores iguales para puntos equidistantes del centro de la línea geodésica, circunstancia que ofrece la ventaja de reducir á la mitad el número de cálculos respecto del de puntos que se quieran fijar en el paralelo. Una cosa análoga sucede en los valores de v, cuyo último término da resultados iguales y de signos contrarios para puntos equidistantes del medio de la cuerda. Conviene, por último, advertir que con los mismos valores puede demarcarse un arco igual del paralelo en la parte opuesta del meridiano, como sería $A\,B'$ en la figura; de suerte que por medio de cálculos sumamente sencillos se traza un arco de una amplitud igual á $2(L' - L)$.

Respecto de la demarcación material, lo más importante es determinar astronómicamente con la mayor exactitud el meridiano del punto de partida A, y con la misma precision formar el ángulo azimutal u. Las distancias $f = n\,k$ se miden después sobre la línea, bien sea directamente, ó bien por medio de una triangulación topográfica, pues un pequeño error en ellas no produce notable error en el paralelo, como fácilmente se concibe por la inspección de la expresión de las ordenadas g. Finalmente, los ángulos v suministran las direcciones en que deben medirse estas ordenadas, que son siempre pequeñas.

Reunamos todas las fórmulas para hacer algunas aplicaciones.

$$\left.\begin{array}{ll} u = 90° - \frac{1}{2}(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi & k = \dfrac{(L' - L) \cos. \varphi}{C \operatorname{sen.} u} \\ n = \dfrac{f}{k} \quad g = n(1-n) \dfrac{B}{A} k^2 \operatorname{sen.}^2 u & v = 90° + \left(n - \frac{1}{2}\right)(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi \end{array}\right\} (5)$$

Según el tratado que celebró el gobierno de México con el de los Estados Unidos, una de las líneas limítrofes entre las dos Repúblicas es un arco del paralelo 31° 47′ de latitud, que partiendo del punto en que corta al río Bravo, tenga cien millas inglesas de extensión. Calculemos los elementos necesarios para trazar este arco.

Como una milla inglesa tiene 1609ᵐ.315, las 100 millas equivaldrán á 160931ᵐ.5, y siendo en este caso la extensión del arco el dato fundamental, calcularemos su amplitud $L'-L$ tomando de la Tabla III del número 23 el valor de 1°, que á la latitud de 31° 47′ se hallará ser de 94702ᵐ.6. Entonces por una simple proporción, tendremos:

$$L'-L=\frac{160931^{m}.5\times 3600''}{94702^{m}.6}=1^{\circ}\,47'\,57''.6$$

La dirección y la magnitud de la línea geodésica auxiliar serán, pues:

$\frac{1}{2}$	9.69897		
$L'-L$..........	3.78658	....	3.7865811
sen. φ..............	9.72157	cos. φ.............	9.9294424
	3.20712	C............	−8.5093791
		sen. u............	−9.9999688
	−26′ 51″.1	k...........	5.2066576
	90° 00 00 .0		
	$u=89^{\circ}\,33'\;8''.9$		$k=160937^{m}.6$

Supongamos ahora que se quisiesen puntos del paralelo á distancia de 10 millas uno de otro. Como esta es la décima parte de la total, haremos sucesivamente $n=0.1$, $n=0.2$, ... $n=0.5$, pues la otra mitad del arco tendrá las mismas ordenadas.

	$n=0.1$	$n=0.2$	$n=0.3$	$n=0.4$	$n=0.5$
B......	1.1975				
k^2......	0.4133				
sen.$^2 u$......	9.9999				
A......	−8.5115				
	3.0992	3.0992	3.0992	3.0992	3.0992
$n(1-n)$......	8.9542	9.2041	9.3222	9.3802	9.3979
g......	2.0534	2.3033	2.4214	2.4794	2.4973
$g=$	113ᵐ.1	201ᵐ.0	263ᵐ.9	301ᵐ.6	314ᵐ.1

El cálculo de los ángulos de dirección de las ordenadas, será:

	$n=0.1$	$n=0.2$	$n=0.3$	$n=0.4$
$L'-L$......	3.78658			
sen. φ.......	9.72157			
	3.50815	3.50815	3.50815	3.50815
$n-\frac{1}{2}$.......	9.60206−	9.47712−	9.30103−	9.00000−
	3.11021−	2.98527−	2.80918−	2.50815−
	−21′ 28″.9	−16′ 6″.7	−10′ 44″.4	−5′ 22″.2

Estos pequeños ángulos son los que deben sumarse con 90° para obtener las direcciones de las primeras ordenadas; y variándoles el signo suministrarán las de las últimas. De este modo pueden tabularse en la forma siguiente todos los elementos necesarios para fijar los 9 puntos intermedios del paralelo, con la equidistancia de 10 millas ó 16093ᵐ.2

ELEMENTOS PARA TRAZAR 100 MILLAS DEL PARALELO DE 31° 47′ DE LATITUD.

$k=160938^{m}$. $u=89^{\circ}\,33'\,8''.9$

n	$n(1-n)$	f	g	u
0.1	0.09	16094ᵐ	113ᵐ.1	89° 38′ 31″.1
0.2	0.16	32187	201 .0	89 43 53 .3
0.3	0.21	48281	263 .9	89 49 15 .6
0.4	0.24	64375	301 .6	89 54 37 .8
0.5	0.25	80469	314 .1	90 00 00 .0
0.6	0.24	96563	301 .6	90 5 22 .2
0.7	0.21	112656	263 .9	90 10 44 .4
0.8	0.16	128750	201 .0	90 16 6 .7
0.9	0.09	144844	113 .1	90 21 28 .9

91.—Puede suceder que se ofrezca trazar un paralelo sin que sea posible fijar de antemano ni la extensión total del arco ni la diferencia de meridianos de sus extremos. Esta circunstancia no ofrece, sin embargo, inconveniente alguno; porque no es indispensable que la cuerda auxiliar termine precisamente en las extremidades del arco, y por consiguiente, pueden adoptarse una amplitud ó una extensión arbitrarias, y con ellas hacer los trazos hasta donde se quiera. Los cálculos se harían de esta manera para el paralelo de 27° por ejemplo, suponiendo que la operación se efectuase en la Baja California, hasta llegar á ambos mares. Como á la latitud de 27° tiene $99243^m.0$ el grado de paralelo, diez puntos que se demarcasen en él abrazan una extensión de 100 kilómetros, y en consecuencia, poco más de 1°. Tomando la amplitud correspondiente á esa extensión para calcular los elementos del trazo, se hallaría:

$$L'-L = \frac{3600'' \times 100^k}{99^k.243} = 3627''.5$$

y aplicando las fórmulas con este dato, se obtendría: $k = 100001^m$ y $u = 89°\,46'\,16''.6$.

Las abscisas f expresadas en kilómetros, las ordenadas g expresadas en metros y los ángulos de dirección v de estas últimas, serían las que constan en la tabla siguiente:

ELEMENTOS PARA LA DEMARCACIÓN DEL PARALELO DE 27°.

$k = 100001^m$. $u = 89°\,46'\,16''.6$.

n	f	g	v
0.1	10^k	$35^m.9$	89° 49' 1''.3
0.2	20	63 .9	89 51 46 .0
0 3	30	83 .8	89 54 30 .6
0'4	40	95 .8	89 57 15 .3
0'5	50	99 .8	90 00 00 .0
0'6	60	95 .8	90 2 44 .7
0'7	70	83 .8	90 5 29 .4
0'8	80	63 .9	90 8 14 .0
0'9	90	35 .9	90 10 58 .7
.			

Partiendo de un punto central, es evidente que con estos datos podría trazarse un arco de algo más de 1°, tanto hacia el Este como hacia el Oeste, aun suponiendo que la Península abrazase en esa zona más de 2°; pero si no fuese así, se señalarían los puntos que permitiese su anchura, y si se desease dejar señalados los extremos del paralelo en las playas, se calcularían los valores de n correspondientes á las distancias f de las costas al punto de partida, por la relación $n = \frac{f}{k}$, y con estas se determinarían las últimas ordenadas. Supongamos, por ejemplo, que se llegase á la costa después de haber demarcado el noveno punto, y que la distancia al lugar en que se comenzó el trazo fuese de 97600^m. Se tendrá: $n = 0.976$, y con este valor resulta la última ordenada $g = 9^m.4$, y su ángulo de dirección $v = 90°\,13'\,3''.9$.

92.—Por las explicaciones y ejemplos que preceden se habrá comprendido que el ingeniero es dueño de escoger el valor de la amplitud $L'-L$ de una manera casi arbitraria, aunque procurando que no sea muy considerable á fin de que las distancias y las ordenadas no resulten demasiado grandes; y como el arco cuya amplitud es $L'-L$ tiene una extensión $p = \frac{(L'-L)\cos.\varphi}{C}$, y esta es igual á $k\,\text{sen.}\,u$, podemos deducir que hasta cierto punto tiene el operador la libertad de elegir el valor del azimut de su cuerda ó línea auxiliar. El azimut nunca deberá diferir mucho de 90° hacia el Oeste ó de 270° hacia el Este, si quieren evitarse los inconvenientes á que acabo de referirme; y sería mejor proceder siempre de manera que fuese pequeña la diferencia $L'-L$, aun cuando se tratase de trazar un arco muy extenso. La razón de conveniencia es esta: la línea geodésica establecida en la dirección u, puede resultar con pequeñas desviaciones, no obstante la precaución de señalar con el mayor cuidado aquellos de sus puntos solamente que sean indispensables para continuar su trazo, los cuales deberán situarse en las eminencias que vayan limitando el horizonte; y es claro que el efecto de cualquiera desviación aumentará con la magnitud de la línea. Bajo este aspecto, es sin duda preferible demarcar por partes el paralelo, escogiendo valores pequeños para $L'-L$, ó bien azimutes que se acerquen mucho á 90° para determinar las amplitudes correspondientes. Suponiendo, por ejemplo, que se deseara trazar un arco de $1° 30'$ próximamente, podría hacerse la operación en tres partes, tomando para cada una $L' - L = 30'$; pues al paso que no habría que temer mucho el efecto de las desviaciones, las ordenadas resultarían muy pequeñas, y después de fijar el último punto de cada arco parcial, podrían hacerse en él algunas observaciones de latitud para comprobar el trazo. Me parece, sin embargo, que una línea geodésica establecida por puntos á grandes distancias con un buen teodolito, debe resultar muy exacta, si se tiene cuidado de llevar en cuenta los errores de los niveles, de la colimación, etc., cuyos efectos en los ángulos azimutales se han explicado en el Capítulo V.

93.—El mayor valor que puede darse al azimut es el de 90°, y entonces la línea geodésica será el arco $A B$ (fig. 31ª) del primer vertical de A. Este arco aparece en la figura como una tangente al paralelo, y por abreviación lo llamaré así, sin olvidar lo que realmente es. Las ordenadas tales como B C, se contarán hacia el Norte partiendo de la tangente, con un ángulo de dirección A B C.

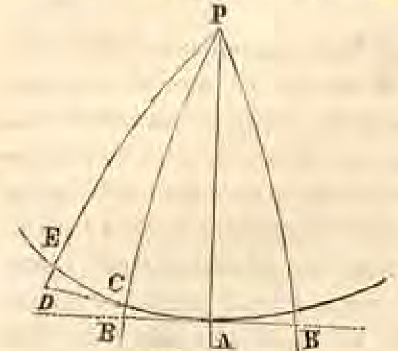


FIG. 31ª

A fin de calcular los elementos necesarios para el trazo, tenemos que, puesto que el azimut es de 90°, designando como antes por $L' - L$ la amplitud del arco ó sea el ángulo A P B, la posición geográfica del punto B se obtendrá por las fórmulas:

$$\varphi' - \varphi = - B k^2 \qquad L' - L = \frac{C k}{\cos. \varphi}$$

El signo de $\varphi' - \varphi$ indica desde luego que la latitud φ' de B es menor que la de A; pero como ya se sabe que el pequeño arco B C ha de contarse hacia el Norte, designándolo por G expresado en metros, tendremos que las coordenadas de C serán:

$$k = \frac{(L' - L) \cos. \varphi}{C} \qquad G = \frac{B}{A} k^2$$

Para cualquier otro punto intermedio, llamando f su abscisa, g su ordenada y Δ la longitud correspondiente respecto de A, se tiene:

$$f = \frac{\Delta \cos. \varphi}{C} \qquad g = \frac{B}{A} f^2$$

Pero suponiendo, como en el caso de la cuerda, que se quisiesen establecer puntos equidistantes del paralelo, designaré por n la relación $\frac{f}{k}$ de una abscisa cualquiera á la total. Sustituyendo, pues, por f su valor $n k$, resulta que las fórmulas necesarias son:

$$k = \frac{(L' - L) \cos. \varphi}{C} \qquad g = \frac{B}{A} n^2 k^2 = G n^2$$

Como se ve, las ordenadas crecen como los cuadrados de las distancias al punto de partida A, y de aquí se deduce que muy cerca de este punto casi se confunde el primer vertical, ó sea la tangente, con el arco del paralelo; pero que se separan rápidamente en seguida.

Si se designa por v el ángulo de dirección de las ordenadas, tendremos: $v' = 360° - u'$, y como el azimut inverso tiene por expresión: $u' = 270° + \Delta \operatorname{sen.} \varphi$, siendo $\Delta = n(L' - L)$, se hallará:

$$v = 90° - n(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi$$

También puede expresarse v en función de k, pues sustituyendo por $L' - L$ su valor, resulta:

$$v = 90° - C n k \tan. \varphi$$

En resumen, las fórmulas que deben calcularse para trazar un arco de paralelo por medio de su tangente, son:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{(L' - L) \cos. \varphi}{C} \\ G &= \frac{B}{A} k^2 \\ g &= G n^2 \\ v &= 90° - C n k \tan. \varphi = 90° - n(L' - L) \operatorname{sen.} \varphi \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \ (6)$$

94.—Antes de aplicarlas hagamos notar que el valor de k es verdaderamente la extensión p del arco de paralelo cuya amplitud es $L' - L$; y como si esta es muy grande podría resultar algo errónea la distancia k, busquemos un valor más exacto. Con este fin, designando por θ la amplitud de $A\,B$, el triángulo rectángulo $A\,P\,B$ da:

$$\tan.\,\theta = \tan.\,(L' - L)\cos.\,\varphi$$

Como por otra parte, se tiene $\theta = \tan.\,\theta - \frac{1}{3}\tan.^3\,\theta$ etc., hallaremos:

$$\theta = \tan.(L' - L)\cos.\,\varphi - \frac{1}{3}\tan.^3(L' - L)\cos.^3\varphi$$

Se tiene también $\tan.(L' - L) = (L' - L) + \frac{1}{3}(L' - L)^3$, y sustituyendo en la ecuación anterior hasta los términos de tercer orden, resulta en segundos:

$$\theta = (L' - L)\cos.\,\varphi + \frac{1}{3}\left[(L' - L)\cos.\,\varphi\right]^3\tan.^2\varphi\,\mathrm{sen.}^2 1''$$

y como $k = \frac{\theta}{C}$, se hallará, por último:

$$k = \frac{(L' - L)\cos.\,\varphi}{C} + (8.8940)\;\frac{\left[(L' - L)\cos.\,\varphi\right]^3\tan.^2\varphi}{C} \quad \ldots\ldots(7)$$

que es el valor que debe adoptarse cuando $L' - L$ exceda por ejemplo, de 1°, pues en otros casos es muy pequeño el último término.

Calculemos por este procedimiento los elementos para trazar las 100 millas del paralelo de 31° 47′, que forma parte de las líneas limítrofes entre México y los Estados Unidos, recordando que su amplitud es: $L' - L = 1°\,41'\,57''.6$.

$L'-L$...... 3.7865811	Const.... 8.8940	B..... 1.1975	
cos. φ........ 9.9294424	tan.² φ... 9.5843	k^2..... 0.4133	$L'-L$...... 3.78658
3.7160235...cubo.....	1.1481	A...−8.5115	sen. φ....... 9.72157
C.... −8.5093791...........	−8.5094	G..... 3.0993	3.50815
5.2066444	1.1170		−53′ 42″.2
		G=1256ᵐ.9	90 00 00 .0
1ᵉʳ térmº = 160932ᵐ.7			v = 89° 6′ 17″.8
1º id. = + 13 .1			
k = 160945ᵐ.8			

Este cálculo suministra las coordenadas extremas y el ángulo de dirección de la última ordenada; pero si quieren establecerse, por ejemplo, otros nueve puntos intermedios del paralelo, se multiplicará sucesivamente por 0.1, 0.2, ... 0.9 el valor de $(L' - L)$ sen. φ; y por 0.01, 0.04, ... 0.81, cuadrados de los coeficientes anteriores, el valor de G, y de esa manera se obtendrán los elementos que siguen:

ELEMENTOS PARA TRAZAR 100 MILLAS DEL PARALELO DE 31° 47′.

$k = 160946^m$. $\qquad$ $v = 90°\,00'\,00''$.

n	n^2	f	g	v
0.1	0.01	16093	12ᵐ.6	89° 54′ 37″.8
0.2	0.04	32186	50 .3	89 49 15 .6
0.3	0.09	48281	113 .1	89 43 53 .3
0.4	0.16	64373	201 .1	89 38 31 .1
0.5	0.25	80468	314 .3	89 33 8 .9
0.6	0.36	96563	452 .5	89 27 46 .7
0.7	0.49	112657	615 .9	89 22 24 .5
0.8	0.64	128754	804 .5	89 17 2 .2
0.9	0.81	144847	1018 .1	89 11 40 .0
1.0	1.00	160946	1256 .9	89 6 17 .8

La Comisión americana de límites adoptó el método de la tangente para trazar este arco. No sé con certeza qué procedimiento de cálculo aplicó Mr. Emory para determinar sus elementos; pero los que da para el punto establecido á 60 millas del de partida, son los siguientes, que comparo con los que suministran las fórmulas anteriores.

	Según mis fórmulas.	Según Mr. Emory.
Latitud del extremo de la ordenada. $(\varphi' = \varphi - Bf^2)$	31°46′45″.3	31°46′45″.3
Ordenada extrema (g)........................	452ᵐ.5	452ᵐ.4
Angulo de dirección de la ordenada v..............	89°27′46″.7	89°27′47″.0

Se ve que todos estos elementos concuerdan muy bien con los del astrónomo americano.

95.—Dije antes que nunca será prudente trazar un arco extenso por medio de una sola línea auxiliar; y esta regla es de más importancia en el caso de seguir el método de la tangente, en atención á que las ordenadas van siendo más y más grandes á medida que crece la abscisa. Lo mejor será trazar algunos miriámetros con la primera tangente AB (fig. 31ª), y después, desde el último punto C, trazar otra tangente CD para demarcar un nuevo arco, prosiguiendo así hacia un lado y otro del meridiano que pasa por el primer punto A de partida. También de este modo se evita la necesidad de calcular la distancia k por la fórmula (7), pues cuando los arcos no pasan de 1°, se obtiene la exactitud suficiente por la primera de las (6).

Para ejercicio del lector pongo á continuación los elementos necesarios para demarcar, de miriámetro en miriámetro, diez puntos del paralelo 27° á un lado y otro del meridiano, ó sea para trazar un arco de $20^{\text{mirs.}}$, que abrazará una amplitud de 2° 00′ 55″.

ELEMENTOS PARA LA DEMARCACIÓN DEL PARALELO DE 27°.

$k = 100002^{\text{m}}$. $u = 90° 00' 00''$.

n	f	g	v
0.1	10^{s}	$4^{\text{m}}.0$	89° 57′ 15″.3
0.2	20	16 .0	89 54 30 .7
0.3	30	35 .9	89 51 46 .0
0.4	40	63 .9	89 49 1 .3
0.5	50	99 .8	89 46 16 .7
0.6	60	143 .7	89 43 32 .0
0.7	70	195 .6	89 40 47 .3
0.8	80	255 .5	89 38 2 .6
0.9	90	323 .4	89 35 18 .0
1.0	100	399 .2	89 32 33 .3

Este arco podría trazarse cómodamente por medio de dos tangen-

tes á cada lado del meridiano, cada una de las cuales tendría unos 50 kilómetros, y entonces la mayor ordenada no llegaría á 100 metros.

Al medir las coordenadas es preciso tomar en cuenta la altura de la localidad sobre el nivel del mar, pues los resultados del cálculo dan esas cantidades reducidas á la superficie del Océano. Por consiguiente, siendo a la altura, la abscisa que debe medirse en el terreno, es:

$$F = f + f\frac{a}{R'}$$

ó bien, su corrección será $F - f = f\frac{a}{R'}$, según lo demostrado en el número 39. En estas ecuaciones no hay inconveniente en tomar la normal N que corresponda á la latitud del lugar, en vez del radio R' de la esfera osculatriz. De este modo los puntos del paralelo se obtendrán con la equidistancia que se desea, contada en la superficie del mar.

CAPITULO X.

LEVANTAMIENTO DE CARTAS GEOGRÁFICAS POR PROCEDIMIENTOS ASTRONÓMICOS.

96.—Indiqué en el Capítulo anterior las dificultades que presenta una triangulación geodésica regular de cierta extensión, tanto por el tiempo que demanda, cuanto por su costo. A causa de estas circunstancias, solamente se han emprendido trabajos geodésicos en grande escala en países comparativamente pequeños, muy poblados, y en los cuales las necesidades de la administración han exigido operaciones exactas para la formación de sus cartas geográficas. Nuestro país, colocado en condiciones diamentralmente opuestas, no tendrá en muchos años iguales exigencias; y por tanto, la esperanza de que vaya formándose su Geografía no debe cifrarse en la ejecución de grandes trabajos geodésicos que, por decirlo así, son los que vienen á perfeccionar una Geografía ya bastante avanzada; sino en la práctica de operaciones que suministren las bases de esa dilatada elaboración, describiendo á la vez á grandes rasgos los caracteres más prominentes de nuestro vasto territorio.

Los procedimientos astronómicos son los que llenan estas condiciones, ofreciendo al mismo tiempo, respecto de los geodésicos, la ventaja de ser más económicos, en atención á que, en general, demandan menos personal; la de una ejecución comparativamente más rápida y, en consecuencia, la de ser más á propósito para los países que por su escasa población, extenso territorio y pocos recursos, no

presentan toda la comodidad indispensable para una operación geodésica. Otra superioridad que tienen los métodos astronómicos sobre los geodésicos, consiste en que basta ejecutar ciertas observaciones en un punto cualquiera para que quede éste fijado por su posición geográfica, sin necesidad de enlazarlo con otros puntos ya dados de posición, como se necesita en las triangulaciones. Para formar una cadena trigonométrica, además de la operación larga y difícil de medir una ó más bases, y de tener que elegir los vértices que reunan determinados requisitos, es del todo indispensable la condición de visibilidad, quiere decir, la de que cada punto sea visible desde todos los que lo rodean; circunstancia que no se necesita en las operaciones astronómicas, á causa de la independencia absoluta con que por su medio puede fijarse la posición de un lugar.

En cambio de estas ventajas, los procedimientos astronómicos nunca pueden presentar un enlace tan íntimo como los geodésicos, y en consecuencia, si los primeros suministran, por lo general, con más exactitud las posiciones geográficas, los segundos dan más precisión en las distancias, y una vez ejecutadas las operaciones preliminares de la triangulación, no demandan tanto trabajo como los astronómicos, cuyas observaciones son constantemente las mismas para cada punto.

Atendiendo á todas estas consideraciones, y combinando las ventajas especiales de ambos métodos, procuraré indicar un modo muy conveniente de practicar con rapidez las operaciones indispensables para la formación de una carta geográfica con la exactitud bastante para cubrir por mucho tiempo las necesidades de nuestro país. Fundado este procedimiento en trabajos astronómicos, sus resultados no sólo servirán de apoyo inmediato á las demás operaciones, sino que suministrarán bases permanentes y seguras utilizables en los futuros perfeccionamientos de nuestra Geografía.

97.—Supongamos para mayor claridad que en una extensión de terreno de 20 á 25 leguas de diámetro, se escoge un lugar central desde el cual se descubra la mayor parte de los puntos que deban figurar en la carta, como poblaciones, haciendas, montañas notables, etc., y que al derredor de ese lugar y en las eminencias que limiten el horizonte se elijan otros cinco ó seis puntos que presenten las mismas condiciones que el primero. Si en cada una de esas estaciones se practican las observaciones astronómicas necesarias para determinar su posición geográfica, se obtendrá un número considerable de bases formadas por los observatorios de dos en dos, á las cuales podrán referirse por medio de ángulos horizontales las posiciones de todos los demás puntos. Cada estación servirá en seguida de punto central para proseguir la operación, enlazándolo con nuevos puntos elegidos como se ha dicho, y continuando de una manera idéntica en toda la extensión del territorio cuya carta se desea formar.

Como las extremidades de esas grandes bases se han determinado astronómicamente, no hay dificultad para calcular sus magnitudes y sus direcciones, aplicando las primeras fórmulas del Capítulo precedente, á saber:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(L'-L)\cos.\varphi'}{C} \\ y &= \frac{\varphi'-\varphi}{A} + \frac{B}{A}x^2 \\ \tan.u &= \frac{x}{y} \\ k &= \frac{x}{\text{sen.}\,u} = \frac{y}{\cos.\,u} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

en las cuales φ, L y φ', L' representan respectivamente la latitud y la longitud de los extremos de la línea, siendo u su azimut y k su extensión lineal. Los valores de A, B y C se toman de la Tabla del número 71 para la latitud media $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$, según se dijo en otra parte. Habiendo ya hecho alguna aplicación de estas fórmulas, no juzgo necesario presentar en su totalidad nuevos cálculos numéricos, y sólo consignaré aquí los siguientes datos y la resolución que de ellos se deduce, á fin de que sirvan de ejercicio para el lector.

Ejemplo.—Las posiciones de los cerros de Ixtapalapa y de Chiconautla en el Valle de México, son:

Chiconautla.................... $\varphi' = 19^\circ\ 39'\ 11''.9$ .... $L' = -41^s.10$

Ixtapalapa..................... $\varphi = 19\ \ 20\ \ 41\ .7$ .... $L = -11\ .88$

Las longitudes están expresadas en tiempo y referidas al meridiano de la Escuela de Ingenieros. Se hallará: $\varphi'-\varphi = 1110''.2$ y $L'-L = -438''.3$, elementos de los cuales resulta que el azimut de la línea *Ixtapalapa–Chiconautla* es: $u = 339^\circ\ 29'\ 45''.4$ y su extensión: $k = 36448^m.3$.

El azimut en el Chiconautla sería:

$$u' = u - 180^\circ + (L'-L)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\varphi+\varphi') = 159^\circ\ 27'\ 19''.1$$

Se comprende que por medio de observaciones angulares ejecutadas en las extremidades de una línea como ésta, que tiene casi nueve leguas de largo, será fácil situar todos los puntos comprendidos dentro de un radio igual, por lo menos, á la mitad ó á las dos terceras partes de esa distancia. Las torres de las ciudades, pueblos, haciendas, etc., las cimas de las montañas y todos los demás objetos que se juzguen dignos de figurar en las cartas, quedarán así referidos á una base conocida por su extensión y su azimut, y en consecuencia, el cálculo trigonométrico podrá suministrar los mismos elementos para cada uno de estos objetos. Es claro que algunos de los puntos fijados de esa manera podrán servir á su vez de estaciones, ya sea para detallar más la carta, ya para proseguir las operaciones formando una triangulación más ó menos regular.

98.—La exactitud con que se determine la línea fundamental depende de la que tengan los datos ó elementos observados $L'-L$ y $\varphi'-\varphi$; y como siempre hay que contar con los pequeños errores, inevitables en todo género de medidas directas, es muy importante investigar cuál es la influencia de esos errores, y en qué circunstancia se reduce á la menor posible. Con este fin notemos, según lo indican las fórmulas precedentes, que los valores de u y de k dependen inmediatamente de los de x é y; y por consiguiente, estudiando la influencia que en estos tienen los errores de observación, será fácil hallar la que tendrán en la resolución final del problema; pero como en esta clase de investigaciones es más breve servirse de fórmulas aproximativas, prescindiremos del segundo término del valor de y, que por su pequeñez influye muy poco en el resultado, y adoptaremos:

$$x = \frac{(L' - L)\cos.\varphi'}{C} \qquad y = \frac{\varphi' - \varphi}{A} \qquad \tan.u = \frac{x}{y} \qquad k = \frac{x}{\text{sen.}\,u}$$

Diferenciando las dos primeras con relación á los elementos observados, se tiene:

$$\mathrm{d}x = \frac{\cos.\varphi'}{C}\,\mathrm{d}(L' - L) \qquad \mathrm{d}y = \frac{1}{A}\,\mathrm{d}(\varphi' - \varphi)$$

y supondremos que $\mathrm{d}(L' - L)$ y $\mathrm{d}(\varphi' - \varphi)$ representan los pequeños errores de observación.

Si se diferencia ahora el valor de u, resulta:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\cos.^2 u} = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{k^2\cos.^2 u}$$

de donde se obtiene sin dificultad:

$$\mathrm{d}u = \frac{\cos.u\,\mathrm{d}x - \text{sen.}\,u\,\mathrm{d}y}{k}$$

Finalmente, el valor de k produce:

$$\mathrm{d}k = \frac{\mathrm{d}x - k\cos.u\,\mathrm{d}u}{\text{sen.}\,u}$$

y sustituyendo el valor de $\mathrm{d}u$ se halla:

$$\mathrm{d}k = \text{sen.}\,u\,\mathrm{d}x + \cos.u\,\mathrm{d}y$$

Introduciendo en esta expresión los valores de $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}y$ se encuentra por último:

$$\mathrm{d}k = \frac{\cos.\varphi'\,\text{sen.}\,u}{C}\,\mathrm{d}(L' - L) + \frac{\cos.u}{A}\,\mathrm{d}(\varphi' - \varphi)$$

ecuación que representa el error originado en la distancia en virtud de los existentes en los datos. De las cantidades que constituyen los coeficientes de los errores, sólo es dueño el observador de elegir el valor de u, porque todas las otras dependen de la latitud en que opera; y adoptando valores medios de A, C y φ', se tendrá:

$$\mathrm{d}k = 28.4\,\text{sen.}\,u\,\mathrm{d}(L' - L) + 30.8\cos.u\,\mathrm{d}(\varphi' - \varphi)$$

Esta expresión manifiesta que la influencia de un pequeño error en la diferencia de longitudes observada, varía en proporción del seno del azimut; y por consiguiente se nulifica cuando u es igual á 0° ó á 180°, quiere decir, cuando las dos estaciones están bajo el mismo meridiano. El error que origina el que tenga la diferencia de latitudes disminuye, por el contrario, cuando crece el azimut, y se reduce á cero en el caso de ser u de 90° ó de 270°, ó lo que es lo mismo, cuando la línea esté dirigida de Oriente á Poniente.

En el supuesto de que tenga libertad el observador para escoger sus estaciones, debe procurar que la dirección de la línea se acerque al límite más favorable para disminuir el efecto de aquel de los elementos observados que crea poder obtener con menor precisión; y en este particular conviene advertir desde luego que la determinación de la diferencia de latitudes es una operación que, en general, se presta á mayor exactitud que la medida de la diferencia de longitudes. Esta última se hace siempre por medio de observaciones de tiempo, para obtener las horas que se cuentan en las dos estaciones en un mismo instante físico; y como cada segundo de tiempo equivale á 15 de arco, resulta que una incertidumbre de $0^s.1$ en la diferencia de horas produce $1''.5$ de duda en el valor de $L' - L$, sin que, en general, sea posible reducir los límites de aquella incertidumbre. La diferencia de latitud, por el contrario, puede obtenerse con mucha precisión y en poco tiempo; creo que observando los mismos astros en las dos estaciones, haciendo uso de los mismos métodos y, si es posible, de los mismos instrumentos, es fácil obtener en muy pocos días el valor de $\varphi' - \varphi$ con un error que no exceda de $0''.2$ aun cuando las latitudes absolutas φ y φ' resulten con un error algo más considerable, lo cual no es un inconveniente para el cálculo de la línea geodésica, puesto que en las fórmulas sólo figura el coseno de la latitud, y bastan las latitudes aproximativas para tomar exactamente de la Tabla (número 71) los valores de A, B y C. Según estas consideraciones, siempre será preferible escoger las estaciones de Norte á Sur con muy poca diferencia, á fin de que no haya que temer mucho el efecto del pequeño error que pueda haber en $L' - L$.

Si las dos estaciones se eligen precisamente en el mismo meridiano, el error de la distancia se reduce á $d\,k = 30.8\, d\,(\varphi' - \varphi)$, y atribuyendo al error $d\,(\varphi' - \varphi)$ el valor de $0''.2$, el error de la línea será de unos 6^m, el cual no se puede suponer muy considerable en este género de observaciones, y sobre todo, para una carta geográfica que se construye generalmente en pequeña escala. Un error de esta magnitud no representará más que una pequeñísima fracción de una línea de 40 ó 50 kilómetros; y como con una gran base se pueden situar los puntos distantes por medio de visuales comparativamente cortas, resultarían las posiciones con errores realmente inapreciables en la carta.

99.—La dificultad de obtener con cierto grado de precisión las diferencias de longitud, me sugirió la idea de sustituir á este elemento la medida directa del azimut de la línea, que es una operación incomparablemente más sencilla. En un opúsculo que con el título de "Colección de Tablas geodésicas" publiqué hace algún tiempo, indiqué este procedimiento, que repetiré aquí por juzgarlo de bastante utilidad.

Si se determina la diferencia de las latitudes de dos puntos, y en uno de ellos se observa astronómicamente el azimut del otro, tendremos que en la fórmula:

$$\varphi' - \varphi = A\,k \cos. u - B\,k^2 \operatorname{sen.}^2 u$$

todo será conocido, con excepción de k. Como el último término es siempre muy pequeño, no se altera sensiblemente su valor cuando se sustituye por k una cantidad aproximativa, y en concecuencia, podrá determinarse un valor exacto de la distancia por aproximaciones su-

cesivas. Suponiendo nulo el último término se obtendrá por primera aproximación:

$$k = \frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u}$$

é introduciendo esta cantidad en el mismo término, resultará por valor prácticamente exacto:

$$k = \frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u} + \frac{B}{A}\left(\frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u}\right)^2 \operatorname{sen.} u \tan. u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Obtenida la distancia se calcula la diferencia de longitud de las dos estaciones, así como el azimut inverso, por las fórmulas:

$$L' - L = \frac{C\,k \operatorname{sen.} u}{\cos. \varphi'}$$

$$u' = u \pm 180° + (L' - L) \operatorname{sen.} \frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$$

y de esta manera se reunen todos los elementos necesarios para situar nuevos puntos respecto de esta base.

Ejemplo.—Tomando las latitudes de los cerros de Chiconautla y de Ixtapalapa, supongamos que en el primero de estos puntos se hubiera medido directamente el azimut del otro, siendo $u = 159° 27' 19''$ el resultado de la observación. Adoptando los valores de A, B y C que correesponden á la latitud media 19° 30′, tendríamos:

$\varphi' - \varphi$	3.0454012—	B	0.9555
A	—8.5122052	sen. u	9.5452
cos. u	—9.9714607—	tan. u	9.5738—
	4.5617353	cuad	9.1235
	36453^m.2		9.1980—
	—4 .9	A....	—8.5122
	k = 36448^m.3		0.6858—

Este resultado es idéntico al que se obtuvo por el otro método. La misma distancia se hallaría suponiendo que la observación azimutal se hubiese ejecutado en el Ixtapalapa y que se hubiera obtenido $u = 339° 29' 45''.4$, como lo manifiesta el cálculo siguiente:

$\varphi' - \varphi$	3.0454012	B	0.9555
A	−8.5122052	sen. u..	9.5444−
cos. u	−9.9715762	tan. u	9.5728−
	4.5616198	......cuad............	9.1232
			9.1959
	$36443^m.5$	A.........	−8.5122
	+4 .8	....	0.6837
	$k = 36448^m.3$		

Siendo en este método $\varphi' - \varphi$ y u los datos necesarios para la resolución, investiguemos en qué condiciones se reduce á su *minimum* la influencia de los errores que puedan contener. Diferenciando con este objeto la fórmula aproximativa $k = \frac{\varphi' - \varphi}{A \cos. u}$, se halla después de abreviar:

$$dk = \frac{1}{A \cos. u} d(\varphi' - \varphi) + \frac{(\varphi' - \varphi) \tan. u}{A \cos. u} du$$

Esta expresión manifiesta que el efecto del error que tenga la diferencia de latitudes es el menor posible cuando las estaciones estén en el mismo meridiano, y que en las mismas circunstancias se nulifica la influencia del error del azimut observado; por consiguiente, debe procurarse que la línea quede casi establecida de Norte á Sur. Conviene notar, sin embargo, que para que exprese segundos el valor de du, es preciso multiplicarlo por sen. 1'', y así es que su coeficiente será muy pequeño siempre que el azimut mismo no sea considerable. Como también un valor pequeño de u no altera mucho el coeficiente de $d(\varphi' - \varphi)$, se infiere que aunque la línea esté bastante inclinada respecto del meridiano, puede obtenerse muy buen resultado si se logra reducir á los menores valores posibles los errores de los elementos observados u y $\varphi' - \varphi$.

Se ve que, en último resultado, se obtienen tanto por el primer método como por el segundo, la magnitud y la orientación de la lí-

nea que une las dos estaciones, así como las posiciones geográficas de éstas. Con estos elementos, y las medidas angulares practicadas en ambas extremidades para situar nuevos puntos, se determinan las distancias de esos objetos, sus azimutes y sus coordenadas geográficas. Los puntos mejor situados respecto de la línea sirven en seguida para enlazar otros, prosiguiendo así la operación, y procurando, siempre que se pueda, hacer observaciones astronómicas, con el fin de determinar nuevas bases que sirvan de comprobación, si es que la carta abraza una extensión considerable.

Todo lo que antecede demuestra la facilidad con que pueden medirse astronómicamente una ó más grandes bases para formar con rapidez la Geografía de vastas regiones, con un grado de exactitud muy suficiente para las necesidades de nuestro país, al cual, por consiguiente, puede prestar servicios de mucha importancia un ingeniero medianamente diestro en el manejo de los instrumentos astronómicos. Las dificultades que, según he indicado, presenta la práctica de grandes operaciones geodésicas, me indujeron á exponer en este Capítulo los principales procedimimientos con que aquéllas pueden sustituirse, y espero que su lectura será bastante para demostrar que el porvenir de la Geografía de México depende por ahora de la ejecución de trabajos puramente astronómicos.

PARTE SEGUNDA.

DETERMINACION DE LA FORMA Y MAGNITUD DE LA TIERRA

CAPITULO I.

NOCIONES HISTÓRICAS.

100.—Las primeras apreciaciones relativas á la figura de la tierra es probable que se deban á los pueblos que desde la más remota antigüedad se ocuparon del arte de la navegación; porque el orden en que se van mirando desaparecer los objetos al alejarse de las playas, aquel en que van descubriéndose al acercarse á ellas, y la apariencia circular del horizonte que limita la vista en todas direcciones, son muy á propósito para inspirar las primeras nociones acerca de la forma general de su superficie. Acaso los fenicios hayan sido por esta razón los más instruidos en este particular, pues parece que más de 1000 años antes de Jesucristo habían hecho ya largos viajes en el Mediterráneo.

La historia ha conservado, sin embargo, las ideas que se formaron de la tierra algunos hombres célebres de los antiguos pueblos; y así se dice que Heráclito suponía que era una llanura inmensa, Leucipo creía que era un cilindro, Anaximandro la consideraba como una columna, Demócrito le atribuía la figura de un disco, y Cleantes, creyéndola cóncava, le daba la forma de una barca.

También los primeros conocimientos de la Astronomía, ciencia que cultivaron las naciones más antiguas, debieron contribuir á que se formasen ideas más ó menos exactas respecto de la tierra. Las observaciones más sencillas, como son las del orto, de la culminación y del ocaso de los astros, las diversas apariencias del cielo en distintas localidades, el fenómeno de los eclipses del sol y de la luna, cuyas causas parece que comprendieron algunos de los primeros astrónomos, es probable que hayan producido el mismo resultado. Entre los astrónomos más antiguos se cuenta á Thales de Mileto, quien, según Herodoto, llegó á predecir un eclipse solar hacia el año 585 antes de la éra cristiana. Este filósofo atribuía á la tierra la forma esférica y la suponía flotando en las aguas. El filósofo Parménides, según dice Aristóteles, fué el primero en enseñar que la tierra era redonda. El mismo Aristóteles y Arquímedes enseñaban que el mar era esférico, y según Diógenes Laercio, los egipcios tenían los mismos conocimientos desde 400 años antes de J. C.

Entre las naciones más antiguas se hallan también ideas muy avanzadas acerca del movimiento del globo terrestre, aunque probablemente poco generalizadas. Parece que los egipcios tuvieron la primera idea de la rotación de la tierra al derredor de un eje, y que Aristarco la comunicó á los griegos. Orfeo y Pitágoras, según Diódoro, aprendieron de los egipcios la pluralidad de los mundos y la esparcieron en la Grecia. Plutarco dice que Filolao de Crotona, discípulo de Pitágoras, enseñaba 450 años antes de J. C. el movimiento diurno de la tierra, y el de traslación en un círculo al derredor del sol. Lo mismo enseñaba Nicetas de Siracusa, y posteriormente Aristarco de Samos.

Respecto de la magnitud de la tierra, las apreciaciones más antiguas se deben á los caldeos, quienes cinco siglos antes de la era cristiana, decían que un hombre andando continuamente á pie le daría la vuelta en el mismo tiempo que el sol. Esta apreciación me parece muy notable, porque revela un conocimiento bastante exacto del tamaño del globo terrestre. En efecto, siendo su circunferencia de po-

co más de 9000 leguas, resulta que un hombre tendría que andar cosa de 25 cada día para darle la vuelta en un año.

Los geómetras del tiempo de Aristóteles le atribuían 400,000 estadios de circunferencia; y como el estadio equivalía, según parece, á unos 180 metros, esta apreciación es demasiado fuerte, pues casi duplica el valor del radio terrestre. Sin embargo, Aristóteles combatiendo la creencia de Xenofanes de que la tierra era inmensa, dice que por poco que se camine hacia el Norte ó hacia el Sur, se altera el horizonte; porque las estrellas meridionales que se veían en Chipre y en Egipto, no se veían ya en los países septentrionales y vice versa.

Ninguno de los apuntes históricos que he tenido ocasión de consultar indica los procedimientos por cuyo medio se hicieron las anteriores apreciaciones de la magnitud de la tierra. La medida más antigua de que se hace mención es la de Eratóstenes, que vivió cerca de tres siglos antes de la Era cristiana. El método que siguió este filósofo, si bien le dió resultados inexactos por falta de buenos medios de acción, es perfectamente racional, y el que se aplica hasta el día con la perfección que han podido darle el adelanto de las teorías y la exactitud de los instrumentos modernos. El principio en que se funda es el siguiente: si en dos puntos A y B (fig. 32ª) de la superficie de la tierra, se miden simultánea ó sucesivamente las distancias zenitales ZAS y $Z'BS'$ de un mismo astro, puesto que las direcciones AS y BS', en que este se observa, pueden suponerse paralelas á causa de su gran distancia á la tierra, tendremos que ZAS es igual á ZDS'. Por otra parte el triángulo BCD da la ecuación: $ZDS'=DBC+BCD$; y sustituyendo por ZDS' el ángulo equivalente, se obtiene:

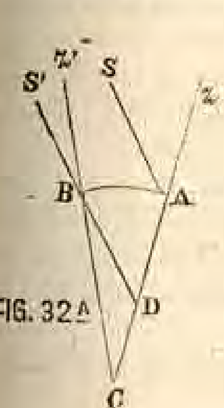


FIG. 32ª

$$BCA=ZAS-Z'BS'$$

lo cual indica que el ángulo de las verticales es igual á la diferencia de las distancias zenitales de un astro, medidas en el plano formado por las mismas verticales. Según este principio, si se mide en unidades lineales el arco *A B*, que expresa la distancia entre los dos puntos de observación, se tendrán los dos valores lineal y angular de *A B;* y una simple proporción suministrará la extensión de toda la circunferencia.

Eratóstenes observó que el día del solsticio de estío estaba el sol exactamente vertical sobre la ciudad de Siena en el Alto-Egipto, lo cual dedujo de que á medio día iluminaba hasta el fondo un pozo muy profundo que allí se había construído. En la misma fecha colocó en Alejandría una semi-esfera hueca, con la parte cóncava hacia arriba, provista de una varilla ó estilo vertical cuya longitud era igual al radio de la esfera. Al llegar el sol al meridiano midió el arco interceptado por la sombra del estilo, y halló que era de 7° 12′, el cual representaba evidentemente la distancia del sol al zenit de Alejandría; y como el mismo día pasaba ese astro por el zenit de Siena, dedujo Eratóstenes que las verticales de las dos ciudades formaban un ángulo de 7° 12′, y en consecuencia, que la distancia que las separaba correspondía á ese arco. Midió en seguida la distancia itineraria, según se cree, por el número de vueltas de las ruedas de su carro, y obtuvo 5000 estadios, de cuyos datos calculó que á toda la circunferencia de la tierra correspondían 250000 estadios.

Según Cleomedes, que refiere la medida anterior, Posidonio, contemporáneo de Pompeyo el Grande, hizo otra apreciación observando que en Rodas la estrella *Canopus* tocaba sólo el horizonte en su paso por el meridiano; mientras que en Alejandría culminaba á 7° 30′ de altura. Estimando también en 5000 estadios la distancia entre los dos puntos, le resultaron 240000 para toda la circunferencia.

Desde la época de estas operaciones transcurrieron más de diez siglos en que no se sabe que se haya ejecutado una nueva medida de este género. Hacia el siglo VI de la Era cristiana, los árabes emancipados del yugo romano, fundaron su poderoso imperio de Bagdad, conquistando toda la Siria, parte del África y de la Europa. El Califa Almamoun, hijo del famoso Harum-al-Raschid, y que ascendió

al trono en 814, era un príncipe muy dedicado al estudio de la Astronomía, y mandó ejecutar la medida de un grado del meridiano terrestre, enviando una comisión de astrónomos á las llanuras de Fingar á orillas del Mar Rojo, con orden de que partiendo de un punto fijo, midiesen hacia el Norte y hacia el Sur las distancias necesarias hasta que obtuviesen 1° de variación en la altura meridiana de una estrella. Una de las medidas dió 56, la otra 56⅔ millas de 4000 cúbitos ó codos; pero no se sabe con exactitud la relación de las medidas árabes de aquella época con las nuestras, y así es que diversos autores han estimado el grado de los árabes desde 47000 hasta 62000 toesas. (1)

Después de esta operación transcurrieron siete siglos para que se volviese á ejecutar otra medida del grado terrestre. En 1550 Juan Fernel, médico y astrónomo francés, midió también por el número de vueltas de las ruedas de su carruaje, una distancia desde Paris hacia el Norte, observando en ambas extremidades las alturas meridianas del sol. La comparación de éstas con la distancia recorrida dió 56746 toesas por valor del grado del meridiano terrestre, resultado que no se aleja mucho de los obtenidos por las medidas modernas.

La operación de este género que se practicó después se debe á Snell, quien publicó sus resultados en la obra titulada "*Eratosthenes Batavus, de Terræ ambitus vera quantitate.*" En esta operación dió su autor un gran paso hacia la perfección, sustituyendo por la primera vez con una cadena de triángulos la medida material de la distancia itineraria, método que con toda la exactitud á que se presta la ciencia moderna, es el que se sigue hasta hoy. El valor que Snell halló para el grado terrestre es el de 55100 toesas, demasiado pequeño á causa de que la medida angular no correspondió en precisión á la lineal; pero rectificada posteriormente la primera, se ha hallado que aquel valor debió ser de 57033 toesas, que concuerda bien con los resultados recientes.

En 1634, el P. Riccioli, de la Compañía de Jesús, midió una dis-

(1) La toesa francesa equivale á $1^{m}94904$.

tancia entre Módena y Bolonia, que comparó después con la amplitud correspondiente para obtener el valor del grado, que le resultó de 61500 toesas próximamente, á consecuencia de la poca precisión de sus operaciones. Parece que este geómetra, en lugar de medir astronómicamente el elemento angular, lo dedujo de la observación de las distancias zenitales recíprocas de las extremidades de su línea, pues es fácil cerciorarse de que la suma de éstas es suplementaria del ángulo de las verticales.

De 1633 á 1635 Ricardo Norwood midió el arco comprendido entre la ciudad de York y la Torre de Londres, haciendo uso de una cadena metálica; y por observaciones del sol halló que la diferencia de latitud entre los dos puntos era de $2° 28'$, de lo que dedujo que el grado tenía por valor 57423 toesas.

En 1669 hizo Picard una triangulación entre Sourdon, cerca de Amiens, y Malvoisine en las inmediaciones de París, y comparada la distancia total con su amplitud regular, halló 57060 toesas por valor de un grado. La parte astronómica fué repetida por Maupertuis y Clairaut en 1739, y en virtud de las rectificaciones que le hicieron, resulta el grado de 57183 toesas.

101.—Tal era el estado de la cuestión hacia la época en que Newton estableció su célebre teoría de la gravitación universal. Hasta este tiempo creo que nadie había dudado de la perfecta esfericidad del globo terrestre, aunque parece extraño que las discordancias halladas en el valor del grado no hubiesen inducido á los geómetras á formar otras hipótesis, sobre todo en una época en que se hicieron tantas respecto de todos los ramos de las ciencias físicas. Después de mucho tiempo de trabajo y de meditación, Copérnico había restablecido desde 1543 el sistema de Pitágoras relativo al doble movimiento de rotación y de traslación de la tierra, y aunque combatido por Tycho-Brahe á principios del siglo XVII, fué adoptado por Galileo, y según toda probabilidad por la mayor parte de los astrónomos de la época; pero la ignorancia y el fanatismo religioso vieron en el nuevo sistema un ataque al texto de las Escrituras, y en consecuencia, lo condenaron como herético, llevando la exageración hasta el grado de obligar á Galileo en

1634 á que hiciese una pública abjuración de sus doctrinas astronómicas. [1]

El gran principio de la gravitación universal, las teorías de Huygens sobre la fuerza centrífuga y la del movimiento de la tierra que cada día se iba robusteciendo no obstante la prohibición de que era objeto, vinieron á modificar las ideas generalmente recibidas acerca de la figura del globo terrestre, y á dirigir la atención de los geómetras hacia nuevas investigaciones. Combinando Newton la pesantez con la fuerza centrífuga que adquiere un cuerpo girando al derredor de un punto, hizo ver en su obra titulada "*De principia*," publicada en 1687, que la tierra no debía ser esférica sino esferoidal; y suponiendo que en el origen de los tiempos hubiera tenido un estado de fluidez homogénea, demostró que la forma que debió adquirir por la rotación es la de un esferoide cuyos radios polar y ecuatorial estuviesen en la relación de 229 á 230, ó cuyo aplanamiento fuese de $\frac{1}{230}$. Fundándose en los mismos principios, presentó como consecuencia necesaria de la atracción ejercida por el sol y la luna sobre la prominencia ecuatorial del globo, el fenómeno de la precesión de los equinoccios, que descubierto por Hiparco 18 siglos antes, había sido reconocido por todos los astrónomos, aunque sin explicación satisfactoria.

Las propias teorías sirvieron á Newton para explicar un hecho reciente, que había llamado mucho la atención de los geómetras: en 1671 el astrónomo Richer fué enviado á Cayena con el fin de practicar algunas observaciones, y con este objeto arregló un péndulo en París antes de su partida; pero al llegar á Cayena vió que atrasaba más de 2 minutos cada día. Este hecho, que casi constituía una prueba experimental de la rotación del globo, se explicaba perfectamente por la diminución de la pesantez hacia el ecuador originada por la

[1] El ilustre anciano se vió obligado por la Inquisicion á firmar la siguiente retractación: "*Yo Galileo, á los 70 años de mi edad, constituido preso, arrodillado y teniendo ante mi vista los Santos Evangelios que toco con mis manos, con una fe y un corazón sincero, abjuro, maldigo, detesto el error y la heregía del movimiento de la tierra, etc.*" Se refiere que al levantarse, no pudiendo por más tiempo traicionar sus convicciones adquiridas por tantos años de estudio, exclamó: "*¡E pur si muove!*" (¡Y, sin embargo, se mueve!)

mayor distancia al centro de atracción, por la existencia de la fuerza centrífuga, ó por ambas causas á la vez.

Como era de esperarse, las ideas de Newton encontraron una fuerte oposición, y se suscitó entre los geómetras una controversia sostenida por argumentos más ó menos ingeniosos, conforme al espíritu de la época, más bien que por medio de pruebas obtenidas por la experimentación directa. Quizá las creencias religiosas más que las científicas contribuyeron á mantener la discusión; porque es claro que aceptando la existencia de la fuerza centrífuga para explicar el hecho del decremento de la pesantez, se tenía que admitir la rotación diurna del globo, condenada entonces por la Iglesia.

Este estado guardaban las cosas cuando Cassini ejecutaba la medida del meridiano de Francia; trabajo que, emprendido en 1684 bajo la protección de Colbert, ministro de Luis XIV, vino á terminarse hasta 1718, habiendo sufrido una interrupción á la muerte del mismo Colbert. Los astrónomos y los geómetras esperaban ansiosos el resultado de esta medida, porque era el que debía poner término á la cuestión de la forma de la tierra. En efecto, si el globo era realmente aplanado hacia los polos, los grados del meridiano deberían tener extensiones crecientes á medida que aumentase la latitud; mientras que siendo esférico, estos grados deberían ser exactamente los mismos en cualquiera latitud; y como la operación de Cassini, ejecutada con un esmero desconocido hasta entonces, abrazaba varios grados cuyas extensiones se podrían determinar individualmente, se creyó con fundamento que sería segura la resolución experimental al terminarse la medida.

Sin embargo, el resultado de ésta, lejos de resolver el problema, vino á complicarlo, desconcertando completamente á todos los que habían tomado parte en tan acalorada discusión. El arco comprendido hacia el Sur de Paris, entre esta ciudad y Collioure dió 57097 toesas para el grado; mientras que el comprendido hacia el Norte, entre Paris y Dunquerque, le asignó 56960, indicando, por consiguiente, una forma del todo opuesta á la calculada por Newton; pues el decremento de los grados á medida que aumentaba la latitud, sólo podía convenir á un esferoide prolongado hacia los polos.

Un resultado tan contrario al que se deducía de las doctrinas de Huygens y de Newton, hizo crecer naturalmente la oposición que se les hacía; pero el gran geómetra inglés no cejó en sus teorías. Newton es cierto que tenía en su contra el resultado de la medida de Cassini; pero también tenía en su favor el decremento de la gravedad en el ecuador, que entretanto se había comprobado con numerosas experiencias. En ese tiempo también se había ya puesto fuera de duda la rotación del planeta Júpiter, y aun se conocía su fuerte aplanamiento polar; natural era que apoyándose en este nuevo hecho, el vasto ingenio de Newton no viese una prueba decisiva en una operación geométrica sujeta á errores que, por pequeños que fuesen, bastarían quizá para conducir á una conclusión contraria á la verdad; puesto que admitiendo él mismo que la forma de la tierra debía diferir muy poco de la esférica, la desigualdad de los grados, por ser muy pequeña, podría confundirse fácilmente con los errores inevitables de las observaciones geodésicas y astronómicas.

La fuerza de estas razones decidió á la Academia de Ciencias de Paris á promover una nueva experimentación, eligiendo para medir arcos del meridiano, dos lugares muy distantes en latitud, á fin de hacer más perceptible de esa manera cualquiera diferencia que se encontrase en las extensiones de los grados correspondientes. Acogido favorablemente el pensamiento por Maurepas, ministro de Luis XV, se organizó la memorable expedición de Bouguer, Lacondamine y Godin al ecuador, y la de Maupertuis, Clairaut, Lemonnier y Outhier á Laponia, cuyas operaciones dieron definitivamente la victoria á Newton.

102.—La primera de estas comisiones, auxiliada en sus trabajos por los astrónomos españoles D. Jorge Juan y D. Antonio de Ulloa, midió cerca de Quito un arco de más de 3°, obteniendo la extensión de 56748 toesas para el grado ecuatorial. La segunda halló en Laponia que un grado tenía 57422, ó sea 674 toesas más que el del ecuador. Entretanto se repitió la medida del meridiano de Francia, descubriéndose en esta segunda operación algunos errores que fueron la causa de la conclusión á que había llegado Cassini.

Los arcos de América, Francia y Suecia indicaron, como he dicho, un incremento en la extensión de los grados, desde el ecuador hacia los polos; pero los tres valores no concordaron en la asignación de las magnitudes relativas de los diámetros ecuatorial y polar. La comparación del arco americano con el sueco da $\frac{1}{213}$ por aplanamiento, mientras que comparado con el francés produce $\frac{1}{314}$. La exactitud con que se practicaron estas operaciones no permite quizá atribuir la discordancia á errores puramente de observación; y por otra parte, el arco de Laponia que se volvió á medir de 1801 á 1803 por Swamberg con algún aumento de amplitud, aunque está más de acuerdo con el resto de las medidas practicadas posteriormente, no produce, sin embargo, exactamente el mismo aplanamiento que el que da el arco de Francia comparado con el de América.

Tanto por estas discordancias, como porque una vez impreso el primer movimiento hacia la experimentación directa, los geómetras de todos los países quisieron contribuir con sus trabajos á la resolución completa de un problema tan interesante, casi en todas las naciones se emprendieron con este fin operaciones geodésicas y astronómicas. Haré una rápida mención de las principales. Desde 1750 los PP. jesuitas Boscovich y Lemaire midieron un arco de Roma á Rimini. En 1752 Lacaille midió otro en el Cabo de Buena-Esperanza; Liesganig en 1762 en las inmediaciones de Viena; y el P. jesuita Beccaria en la Lombardía, hacia la misma época. En 1764 los astrónomos Mason y Dixon midieron en Pensilvania un arco casi de grado y medio de amplitud; y en 1786 el general Roy prolongó el meridiano de Francia al través de la Inglaterra. En el año de 1791 y los siguientes repitió la medida del meridiano de Francia el célebre Delambre en compañía de Mechain, el cual prolongaron más tarde (1806) Biot y Arago hasta las islas Baleares. Este arco en su totalidad abraza más de 12°, y con su ayuda se calculó la extensión del cuadrante del meridiano, que, como se sabe, es la distancia que se tomó por tipo para establecer el sistema decimal francés de pesas y medidas.

Además de estas operaciones, se han medido, especialmente en

Francia é Inglaterra, arcos de paralelos al ecuador; y otras veces se han combinado las extensiones de arcos del meridiano con arcos de paralelo. Todos los resultados, sin excepción, indican un aplanamiento polar; pero por lo general no concuerdan exactamente con el valor de éste. Las discordancias son á la verdad muy pequeñas; pero no han podido desaparecer, no obstante la precisión de los instrumentos que se han empleado en las operaciones y el límite casi insensible á que han podido reducirse los errores de observación.

103.—Antes de hacer mención de las principales operaciones geodésicas que se han practicado en este siglo también con el fin de determinar la figura de la tierra, indiquemos otros procedimientos que igualmente se han aplicado al mismo objeto. Todos ellos están fundados, de una manera más ó menos directa, en el principio de la atracción. En 1740 presentó Maclaurin á la Academia de Ciencias una memoria referente á este asunto, en la cual demuestra que si la tierra hubiera sido al principio formada por un fluido homogéneo, el aplanamiento que ha debido tomar sería igual á los $\frac{5}{4}$ de la relación entre la fuerza centrífuga y la pesantez en el ecuador. Como esta relación se estima en $\frac{1}{289}$, se deduce del teorema de Maclaurin: $a=\frac{5}{1156}=\frac{1}{231}$, que es casi el mismo resultado de Newton.

En 1743 publicó Clairaut una obra con el título de "*Figura de la tierra,*" en la cual aplica las condiciones de que depende el equilibrio de una masa fluida para descubrir la forma que esta debe tomar, ya sea en la hipótesis de que el fluido, siendo homogéneo, tenga por núcleo una materia de diversa densidad, ya suponiendo heterogénea toda la masa. En ambas circunstancias, con todas las diversas combinaciones de que son susceptibles, resulta que la forma es la de un elipsoide; que la extensión de los grados crece como los cuadrados de los senos de las latitudes, y que el aplanamiento polar es igual á los $\frac{5}{2}$ de la relación que existe entre la fuerza centrífuga y la gravedad en el ecuador, menos el incremento de pesantez del ecuador al polo. Siendo este incremento de $\frac{1}{192}$ próximamente en el globo terrestre, resulta según el último teorema: $a=\frac{5\times 1}{2\times 289}-\frac{1}{192}=\frac{1}{290}$.

Laplace en su "*Mecánica celeste*" indicó también un medio de hallar el aplanamiento ó compresión polar, demostrando que la prominencia ecuatorial de la tierra debería producir alguna alteración en el movimiento de la luna. Hallada, en efecto, por la observación la pequeña irregularidad del movimiento de nuestro satélite, la cual asciende á unos 8″, se ha podido tomar como elemento para determinar la prominencia que la origina, resultando del cálculo $\alpha = \frac{1}{301}$ con muy poca diferencia.

También se ha procurado determinar la forma de la tierra por medio de numerosas observaciones del péndulo. El fundamento de este método se comprenderá fácilmente recordando que el tiempo que dura la oscilación de un péndulo depende tanto de su longitud como de la intensidad con que obra la pesantez en el lugar de la experiencia; y como la acción de esta fuerza crece del ecuador á los polos á consecuencia de la forma aplanada del globo terrestre, resulta que midiendo en dos ó más lugares las longitudes de los péndulos que oscilen en determinado tiempo, por ejemplo, en un segundo, la comparación de esas longitudes podrá servir para hallar el valor de la compresión polar.

Muy numerosas han sido las observaciones del péndulo. Hice ya mención de las experiencias de Richer, que dieron á conocer por la primera vez la variación de la gravedad. Además de éstas, hizo Deshayes otras varias en las Antillas y en algunos puntos de las costas Sur-Americanas. Croyère observó el péndulo en Arcángel; Campbell, Lacondamine, Godin y Bouguer en las inmediaciones del ecuador; Maupertuis en Suecia; Lacaille en el cabo de Buena-Esperanza; Legentil en varios lugares de Asia; Malaspina en las costas de América; y por último, muchos observadores modernos como Kater, Ross, Parry, Hall, Brisbane, Sabine, Warren, Goldinghan, Foster, Freycinet, Duperrey, Biot, Arago, Rumker, Fallows, Baily, etc., han medido la longitud del péndulo en diversos puntos del globo.

104.—Además de muchas observaciones del péndulo, se han ejecutado en el siglo actual varias operaciones geodésicas de la mayor exactitud, entre las cuales superan por su extensión á cuanto se había hecho anteriormente, las medidas practicadas en la India por los geógrafos ingleses Lambton y Everest, y en Rusia por Hansteen,

Selander, Struve y Tenner. El arco de la India se midió de 1802 á 1843, y comprende más de 21°. El arco ruso se comenzó á medir en 1820; hasta 1851 iban medidos más de 25°, y en 1857 inició Struve su prolongación al través del territorio turco, la cual acaso se ha llevado á efecto.

Todas estas operaciones indican la existencia de la compresión polar; pero subsisten aún pequeñas discordancias respecto de su valor, no obstante la magnitud de las medidas modernas y la suma precisión con que se han practicado. La falta de armonía entre los resultados que se obtienen comparando diversos arcos, se ha explicado de varias maneras. Una de las causas del error, acaso la más influente, es la atracción que ejercen las montañas, la cual combinándose con la atracción general de la tierra, produce ligeras desviaciones en la dirección de la gravedad; y como esta dirección es la que sirve para medir astronómicamente las amplitudes de los arcos, resulta que todo el efecto de una atracción anormal entra como error en el elemento angular ó astronómico. En el día parece bien comprobado que algunas montañas hacen desviar más de 5″ la dirección de una plomada, y este pequeño ángulo originaría un error equivalente á más de 150ᵐ en el elemento lineal; puesto que cada segundo contado en el meridiano excede de 30ᵐ. Por otra parte, la tierra puede no ser exactamente un sólido de revolución, ó aun cuando lo sea en su conjunto, es posible que tenga irregularidades locales, ya sea en cuanto á la forma, ya en cuanto á la densidad de las substancias que la constituyen.

En vista de la imposibilidad de coordinar con entera precisión los resultados de todas las medidas practicadas hasta hoy, lo que han hecho muchos geómetras, especialmente Walbek, Schmidt, Bessel, Airy y últimamente (1868) Fischer, es investigar cuál es la figura que se aviene mejor con el conjunto de las operaciones dignas de más confianza. El resultado general de estas discusiones manifiesta que, sin error de importancia, se puede considerar á la tierra como un elipsoide de revolución al derredor de su eje polar. Con el fin de que se comprenda hasta qué grado de exactitud ha podido alcanzarse en la apreciación de los elementos que caracterizan al elipsoide, pongo á la vista los valores que han obtenido algunos geómetras.

	Radio ecuatorial.	Radio polar.	Aplanamiento.
Walbek	6376746^m	6355785	$\frac{1}{304.2}$
Schmidt	6376959	6355523	$\frac{1}{297.5}$
Bessel	6377397	6356079	$\frac{1}{299.2}$
Fischer	6378328	6356230	$\frac{1}{288.6}$

Esta comparación demuestra que es relativamente muy pequeña la incertidumbre que aún queda en las dimensiones del globo terrestre; y que cualquiera de los valores precedentes debe proporcionar cuanta exactitud práctica demanden la mayor parte de las aplicaciones usuales. En la Parte Primera de esta obra adopté los elementos de Bessel, que son los que se emplean más generalmente.

Se han hecho también diversas discusiones de las medidas del péndulo, aplicando diferentes procedimientos de cálculo. Los resultados son, por lo general, más acordes entre sí que los de las medidas geodésicas, aunque dan por aplanamiento una cantidad notablemente mayor que estas últimas. La compresión que se deduce de las experiencias del péndulo puede extimarse en $\frac{1}{288}$, variando entre los límites $\frac{1}{285}$ y $\frac{1}{291}$.

105.—En 1859 publicó Schubert en San Petersburgo una memoria con el título de "*Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre.*" La novedad de las consecuencias que deduce este astrónomo me obligan á dar una idea de su método de discusión y de sus resultados. En todas las investigaciones anteriores se han admitido las tres hipótesis siguientes: 1ª Los meridianos son elípticos. 2ª El diámetro polar es también el eje de rotación de la tierra. 3ª Todos los meridianos terrestres son iguales. Aunque en todo rigor ninguna de ellas esté suficientemente comprobada, Schubert es de opinión que las dos primeras son sumamente probables; pero no así la última, que, por el contrario, parece falsa. En consecuencia, aceptando

nada más las dos primeras, se vale de los dos grandes arcos de la India y de Rusia para calcular el semi-eje menor de la tierra, que es común á todos los meridianos. En seguida, por medio de los arcos más notables calcula los radios ecuatoriales que les corresponden, y hallando diversos resultados, deduce que el ecuador no es exactamente circular, sino ligeramente elíptico. Para determinar esta elipse bastan tres de sus radios y los ángulos que forman entre sí, ó sean sus diferencias de longitud; y así es que calculando los tres radios por medio de otros tantos arcos bien elegidos, encuentra el escritor los siguientes elementos para la elipse ecuatorial:

Semi-eje mayor del ecuador	6378554	metros.
Semieje menor del ecuador	6377837	„
Elipticidad ó aplanamiento del ecuador	$\frac{1}{3896}$	
En cuanto al radio polar de la tierra, resulta de	6356721	„

Los meridianos que cortan al ecuador según los ejes mayor ó menor de éste, serán, en consecuencia, el mayor y el menor meridianos de la tierra respectivamente, cuyas elipticidades estima Schubert de este modo:

Compresión polar del mayor meridiano .... $\frac{1}{292.1}$

Compresión polar del menor meridiano .... $\frac{1}{302.0}$

El menor de estos meridianos pasa al Este de la Siberia, y en este hemisferio por Terranova y cerca de las costas orientales de América. El mayor por la Europa oriental, no muy lejos del gran arco medido en Rusia. Convendría ciertamente que en todos esos países se hiciesen nuevas operaciones geodésicas con el fin de averiguar hasta qué punto son ciertas las consecuencias de la discusión de Schubert.

Se ve, pues, que según este geómetra, aparece la tierra como un esferoide de tres ejes. A un resultado semejante ha llegado el capitán inglés Mr. Clarke en una publicación hecha en 1866. Comparando las medidas geodésicas de Europa, incluyendo el arco ruso, con las del Cabo, del Perú y con el gran arco de la India, halla:

Semi-eje mayor del ecuador	6378294^m
Semi-eje menor del ecuador	6376350
Semi-eje polar de la tierra	6356068

En cuanto á los meridianos máximo y mínimo, fija al primero la longitud de 15° 34′ al Este de Greenwich, posición que es casi la de Mesina; y al segundo la longitud de 74° 26′ al Oeste, la cual corresponde con poca diferencia á la de New-York en el hemisferio americano, y á la de Irkoutsk (Siberia), y de Singapore en el hemisferio asiático. Todos estos resultados manifiestan que, aun aceptando las conclusiones de Schubert y Clarke, es sumamente pequeña la diferencia que existe entre la forma que asignan á la tierra estos geómetras y la más sencilla de un elipsoide de revolución. Por consiguiente, puede tenerse por cierto que, sean cuales fueren los progresos futuros que se alcancen en cuanto á la asignación de la figura real de nuestro planeta, es indudable que en la mayor parte de las aplicaciones será suficientemente exacto suponerlo un elipsoide de revolución al derredor de su eje polar.

CAPITULO II.

INVESTIGACIÓN DE LA FORMA DE LA TIERRA POR MEDIO DEL PRINCIPIO DE LA GRAVITACIÓN.

106.—Por extensa que sea esta materia, y por numerosas que hayan sido las aplicaciones á que ha dado origen el fecundo principio de la gravitación universal para determinar la figura de la tierra, creo indispensable presentar una breve exposición de los principales procedimientos, para dar una idea de las investigaciones teóricas y de los métodos de experimentación directa que se han aplicado á aquel objeto.

Los principios de la Mecánica, aplicados á los fluidos y combinados con las propiedades características de éstos, han dado á conocer las condiciones que deben reunirse para que subsista el equilibrio en una masa fluida. Desde luego la presión que sufre un punto cualquiera de la masa en una dirección determinada, debiendo transmitirse en todos sentidos, es necesario que sea destruída por la resultante de las demás presiones que se ejerzan en el mismo punto. Si se designan por x, y, z las coordenadas de un punto de la masa fluida, referidas á tres planos rectangulares, y llamamos F la fuerza que produce la presión en ese punto, podremos descomponer ó resolver la fuerza F en otras tres X, Y, Z, dirigidas en el sentido de cada uno de los ejes, y siendo ρ la densidad del fluido, la primera condición matemática del equilibrio requiere que sea una diferencial exacta la expresión $\rho(X\,d\,x + Y\,d\,y + Z\,d\,z)$, cuya integral representa la presión total que se ejerce en la unidad de superficie. [1]

Una vez satisfecha la condición anterior, si se desea hallar la forma de la masa fluida, es necesario atender á que si en su superficie externa se ejerciera una presión, no pudiendo el fluido oponer resistencia alguna en atención á la perfecta movilidad de sus moléculas, se destruiría el equilibrio; luego en el supuesto de que este exista, es preciso admitir que es nula la presión en la superficie. Así es que siendo x, y, z las coordenadas de un punto de la superficie externa de la masa, deberán satisfacer la ecuación:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = O \quad \text{.......................} (1)$$

y la integral de ésta dará la ecuación de la superficie, ó sea la forma general de la masa fluida.

Admitamos en el globo terrestre un estado primitivo de fluidez, é investiguemos la forma que debió tomar en virtud de la rotación al derredor de su eje, y de la atracción que sufren sus moléculas en virtud de la gravedad, suponiendo que el centro de atracción coincide con el de la masa, ó lo que es lo mismo, que esa fuerza se ejerce en la dirección del radio. Dos fuerzas obrarán entonces en cada partícula de la tierra: la gravedad, que las atrae en razón inversa de los cuadrados de las distancias, y la fuerza centrífuga que tiende á alejarlas del eje de rotación. Para encontrar las componentes X, Y, Z, de estas fuerzas en las direcciones de los tres ejes, sean $CN = x$, $NP = y$, $PM = z$, (fig. 33ª) las coordenadas del punto M referidas á los ejes CA, CB y CD, que pasan por el centro C de atracción, y de los cuales el último supondré que es el eje de rotación.

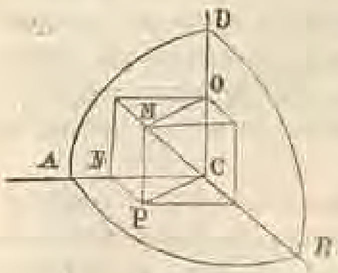


FIG. 33ª

[1] Puede verse el desarrollo de todas éstas consideraciones en cualquier tratado elemental de Mecánica analítica, y sobre todo en la excelente memoria publicada en la "*Enciclopedia Metropolitana*" con el título de "*Figure of the earth,*" por Mr. G. B. Airy, actual director del Observatorio de Greenwich.

Designando por g la fuerza de atracción á la unidad de distancia, será $\frac{g}{r^2}$ á la distancia $CM = r$. Las tres componentes de esta fuerza serán respectivamente $\frac{gx}{r^3}$, $\frac{gy}{r^3}$ y $\frac{gz}{r^3}$, puesto que $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ y $\frac{z}{r}$ son los cosenos de los ángulos que forma su dirección con los ejes.

La fuerza centrífuga ejerce su acción en el plano MO, perpendicular al eje de rotación, y si designamos por f su intensidad á la unidad de distancia, será $f.MO = f.PC$ á la distancia $MO = PC$, puesto que es proporcional á las distancias al eje de rotación. Su componente en la dirección de CD es, por consiguiente, nula, y en las de los otros ejes, serán: fx y fy, por ser $\frac{x}{PC}$ ó $\frac{y}{PC}$ los cosenos de los ángulos que con ellos forma la línea PC.

Teniendo presente que la gravedad tiende á disminuir, y la fuerza centrífuga á aumentar las coordenadas de M, tendremos que las componentes totales X, Y, Z, son:

$$X = -g\frac{x}{r^3} + fx$$

$$Y = -g\frac{y}{r^3} + fy$$

$$Z = -g\frac{z}{r^3}$$

Sustituyendo estos valores en la condición (1), se obtendrá:

$$-\frac{g}{r^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) + f(x\,dx + y\,dy) = O$$

Para ejecutar la integración notemos que la distancia r está ligada con las coordenadas por la relación $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, de la que se obtiene:

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

Tenemos también $x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}\,d.(x^2 + y^2)$, y, en consecuencia, resultará por la sustitución:

$$-\frac{g\,dr}{r^2} + \frac{1}{2}f.d(x^2 + y^2) = O$$

Integrando, y designando por C la constante, resulta:

$$\frac{g}{r}+\frac{1}{2}f(x^2+y^2)=C$$

Para determinar la constante, llamenos a el radio ecuatorial, y atendiendo á que entonces $x^2+y^2=a^2$, tendremos:

$$C=\frac{g}{a}+\frac{1}{2}fa^2$$

por lo cual la ecuación general de la superficie del globo, será:

$$\frac{g}{r}+\frac{1}{2}f(x^2+y^2)=\frac{g}{a}+\frac{1}{2}fa^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

La fuerza centrífuga en el ecuador es fa, y como sin la existencia de ésta sería $\frac{g}{a^2}$ la atracción, se deduce que la resultante de ambas fuerzas, ó la gravedad que realmente tiene lugar en el ecuador, es: $\frac{g}{a^2}-fa$. Si designamos por p la relación entre la fuerza centrífuga y la pesantez ecuatoriales, tendremos:

$$p=\frac{fa}{\frac{g}{a^2}-fa}$$

de lo que resulta:

$$f=\frac{pg}{(1+p)a^3}$$

Con este valor la ecuación (2) tendrá la forma:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{p}{2(1+p)a}-\frac{p(x^2+y^2)}{2(1+p)a^3}$$

que se convierte con facilidad en la siguiente:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\cdot\frac{2+3p}{2+2p}-\frac{p(x^2+y^2)}{2(1+p)a^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Esta ecuación daría el valor de un radio cualquiera r asignando determinados valores á las coordenadas, puesto que se tiene la rela-

ción: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Así, por ejemplo, para $x=0$, $y=0$, $z=b$, se tendrá para el radio polar ó semi-eje de rotación:

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\cdot\frac{2+3p}{2+2p}$$

ó bien:

$$b=a\frac{2+2p}{2+3p}$$

Se ve desde luego, por la forma de esta expresión, que el eje polar es menor que el ecuatorial, lo cual indica la figura aplanada de la tierra. El valor de la compresión sería:

$$\alpha=\frac{a-b}{a}=1-\frac{2+2p}{2+3p}=\frac{p}{2+3p}$$

La relación de la fuerza centrífuga á la pesantez en el ecuador es $p=\frac{1}{289}$, y así sustituyendo se hallará: $\alpha=\frac{1}{581}$.

107.—El valor de este aplanamiento es notablemente menor que el que se ha obtenido por las observaciones del péndulo y por las medidas geodésicas; pero también no es estricta la hipótesis que sirvió de base para el cálculo precedente, cual es la de que la dirección de la pesantez coincida con la del radio central. A la verdad, para asignar la verdadera dirección de la gravedad sería necesario conocer la forma de la tierra, que es el elemento final del problema; y aunque creo que tal vez podría resolverse por aproximaciones sucesivas partiendo de la figura que va resultando de cada resolución, los geómetras que se han ocupado en este asunto siguen un método sintético más breve, como es el demostrar que el elipsoide satisface las condiciones matemáticas del equilibrio. Por otra parte, los elementos relativos á la densidad y demás circunstancias del interior de nuestro planeta, no siendo exactamente conocidas, tienen que suplirse con hipótesis más ó menos fundadas; pero que, por la misma razón, dan resultados algo diferentes de los que han podido obtenerse hasta hoy por la experimentación directa.

Lo expuesto basta para el objeto de dar una idea de este género de investigaciones, que no creo necesario desarrollar en su totalidad, limitándome á remitir al lector que desee ejercitarse en ellas á la obra de Mr. Airy de que antes hice mención.

108.—Expliquemos ahora brevemente el fundamento y la práctica de las observaciones del péndulo, que, como dije en otra parte, constituyen otro de los métodos que se aplican también á la determinación de la forma de la tierra. Se sabe que el tiempo que dura la oscilación del péndulo *simple*, cuya longitud sea l, tiene por expresión:

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{..............................} \quad (4)$$

la cual indica que la duración de las oscilaciones de un mismo péndulo es inversamente proporcional á la raíz de la intensidad g de la pesantez. De aquí se deduce que si se transporta el péndulo á dos ó más estaciones, y en cada una de ellas se cuentan los números n y n' de oscilaciones que hace en un mismo tiempo T, tendremos que las duraciones de una sola oscilación serán:

$$\frac{T}{n}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \frac{T}{n'}=\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

de donde resulta:

$$\frac{g}{g'}=\frac{n^2}{n'^2}$$

Esta ecuación manifiesta que las intensidades de la gravedad en dos lugares del globo son proporcionales á los cuadrados de los números de oscilaciones del péndulo en un mismo espacio de tiempo, como una hora, un minuto, etc. Según esto, basta contar esos números sirviéndose, para medir el tiempo, de un buen reloj arreglado por medio de observaciones astronómicas, para obtener la relación $\frac{g}{g'}$, que, según veremos después, puede servir de elemento para determinar la compresión de la tierra.

La relación de las gravedades puede hallarse también calculando la longitud del péndulo simple que en cada estación oscila en el mismo tiempo, por ejemplo, en un segundo de tiempo medio. Para esto es necesario medir cuidadosamente la longitud l de un péndulo

simple cualquiera, que haga su oscilación en el tiempo t en un lugar determinado, pues llamando x la longitud del péndulo incógnito, se tienen las ecuaciones:

$$t^2=\pi^2\frac{l}{g} \qquad 1=\pi^2\frac{x}{g}$$

de cuya combinación resulta:

$$x=\frac{l}{t^2}$$

Supongamos que se hubiera observado en México que un péndulo simple de $2^m.231$ de largo hace 40 oscilaciones en un minuto de tiempo medio. La duración de cada oscilación sería, por consiguiente: $t=1^s.5$; y para la longitud del péndulo que oscilaría en 1^s tendríamos:

$$x=\frac{2^m.231}{2\ .25}=0^m.9916$$

Conociendo de esta manera los péndulos que marcan segundos en dos lugares, se tiene la ecuación:

$$1^s=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}$$

que indica que la relación de las intensidades de la pesantez es igual á la de las longitudes de los péndulos que oscilan en el mismo tiempo.

109.—La concepción del péndulo simple es puramente un artificio matemático irrealizable en la práctica, puesto que se supone ser formado por un punto material, colocado en la extremidad de un hilo inflexible é inextensible, y que oscila en el vacío en un arco infinitamente pequeño. Sin embargo, la Mecánica tiene medios para determinar el péndulo simple que oscilaría en el mismo tiempo que un péndulo real cualquiera; y por tanto, todas las consecuencias que hemos deducido de la ecuación (4) son ciertas, luego que por medio del cálculo se haya encontrado la longitud del péndulo ideal que corresponde á aquel de que se haga uso en las experiencias.

Cuando las experiencias se hacen á cierta altura n sobre el nivel del mar, es preciso hacer otra pequeña corrección al valor de la pesantez á fin de reducir el tiempo de la oscilación á lo que sería al nivel del Océano, pues de otra manera no podrían ser comparables los resultados obtenidos en estaciones diversamente elevadas. Sea g' la gravedad en el lugar cuya altura es n, y g la que corresponde á la misma latitud al nivel del mar; como estas fuerzas son inversamente proporcionales á los cuadrados de las distancias, llamando R el radio terrestre, se tiene:

$$g'(R+n)^2 = gR^2$$

Habiendo suministrado la observación el valor de t', se tendrá como antes:

$$t = t'\sqrt{\frac{g'}{g}}$$

ó introduciendo el valor de g' y desarrollando hasta el primer orden de n en atención á su pequeñez respecto del radio, hallaremos:

$$t = t'\left(\frac{R}{R+n}\right) = t'\left(1-\frac{n}{R}\right)$$

Tales son las principales correcciones que hay que hacer á la duración observada de una oscilación, para obtener la que correspondería al péndulo ideal llamado simple. Reuniéndolas en una sola expresión se tendrá:

$$t = t'\frac{\left(1-\frac{1}{2}c\tau\right)\left(1-\frac{0.00065\,b}{0.760\,P(1+a\tau)}\right)\left(1-\frac{n}{R}\right)}{1+m\theta^2} \quad \ldots\ldots (5)$$

110.—Veamos ahora el modo de determinar la longitud l del péndulo que sirve para hacer las observaciones. Siendo éste más ó menos compuesto de formas geométricas, la distancia de su centro de oscilación al de suspensión, se calcula por las fórmulas que con ese objeto dan los tratados de Mecánica, á los cuales remitimos al lector, no siendo de este lugar el desarrollo de esas teorías. En las mismas obras, ó en las que tratan de algunos péndulos de construcción es-

pecial, como el de Kater y otros, pueden también verse los detalles necesarios para servirse de esos aparatos. No pudiendo aquí ocuparme de todos ellos, sólo haré una rápida descripción del de Borda, por ser uno de los más sencillos, y en consecuencia, el que se puede construir con más facilidad. Este instrumento se compone de una pequeña esfera de platina, cuyo peso es próximamente de 500 gramos, suspendida en la extremidad de un hilo metálico muy delgado. Este hilo está directamente unido á un casco esférico de latón, cuyo radio interior es precisamente igual al de la esfera de platina, de manera que ésta se aloja en aquél y se le adhiere poniendo en el primero una ligera capa de grasa. El objeto de independer la esfera del hilo es el de poder variar la colocación de la misma esfera, á fin de eliminar las pequeñas desigualdades de densidad que pudieran existir en ella. Se procura también que el hilo no sea de hierro, para evitar la influencia de alguna acción magnética.

El hilo se une en su parte superior á una pieza de suspensión que tiene la forma de un cuchillo, descansando por el filo en dos láminas de acero ó de ágata fijas con solidez en un muro. De este modo es muy pequeño el rozamiento, y se da, además, á la pieza de suspensión una figura y un peso tales que pueda oscilar casi en el mismo tiempo que el péndulo, á fin de que no modifique sensiblemente las oscilaciones de éste. En la parte inferior se traza un pequeño arco graduado, con un radio igual á la longitud del péndulo, con el objeto de anotar la amplitud 2θ de la oscilación.

Para hacer uso de este ó de cualquier otro péndulo, no es indispensable contar todas las oscilaciones que hace en un tiempo dado, sino simplemente anotar las horas del péndulo ó reloj astronómico en que coinciden las oscilaciones de éste con las del de la experiencia. A este fin, debe tenerse presente que cada vez que coinciden las oscilaciones de ambos instrumentos hacia un mismo lado, á la derecha, por ejemplo, uno de ellos ha hecho dos oscilaciones más que el otro, de suerte que la diferencia de las horas de las coincidencias corresponde á n oscilaciones del péndulo astronómico y á $n \pm 2$ del de la experiencia. Es claro que deben tomarse las horas, minutos y segundos que señala el primer instrumento en cada coincidencia, y que la diferencia debe corregirse proporcionalmente á su adelanto ó atraso en 24^h de tiempo medio. Entonces puede calcularse el número de oscilaciones que hace el péndulo de la experiencia en 24^h ó en 86400^s, por la ecuación:

$$N = \frac{86400 (n \pm 2)}{n};$$

y, por consiguiente, se determinará con facilidad la duración t' de cada una.

Para hallar la longitud l se mide exactamente la distancia de la parte inferior de la esfera al cuchillo de suspensión, anotando la temperatura para reducirla á 0°, ó sea para corregirla por la dilatación del hilo. Siendo Δ el resultado y r el radio de la esfera, $\Delta - r$ será la distancia del centro de ésta al eje de suspensión; pero como el centro de oscilación queda un poco más bajo que el de figura, se tiene:

$$l = \Delta - r + \frac{0.4 r^2}{\Delta - r}$$

por distancia del cuchillo al centro de oscilación.

Bouguer y Lacondamine hicieron uso en el ecuador de un péndulo más sencillo aún que el de Borda, pues consistía simplemente en una hebra de pita unida á una pieza de suspensión, y en cuya extremidad inferior se fijaba un peso pequeño y de figura regular. Sin embargo, creo que la elasticidad de esa substancia y sus propiedades higrométricas pueden originar errores de importancia en la determinación del valor de l, que es necesario determinar con la mayor precisión, y que, en mi concepto, constituye la parte más delicada de las observaciones del péndulo.

Obtenida la longitud l y el tiempo t de la oscilación correspondiente al péndulo simple, puede ya calcularse el que oscilaría en 1^s por la fórmula $x = \frac{l}{t^2}$, que antes se ha establecido.

111.—La aplicación de las longitudes del péndulo de segundos á la determinación de la forma de la tierra está fundada en uno de los teoremas de Clairaut, de cuyas teorías se deduce que sea cual fuere la estructura interior de nuestro planeta, las intensidades de la pesantez deben crecer como los cuadrados de los senos de las latitudes. Como por otra parte, las longitudes de los péndulos que oscilan en el mismo tiempo son directamente proporcionales á las intensidades de la gravedad, según lo indica la expresión (4), se infiere que varían del ecuador al polo en la misma relación que éstas. De acuerdo con este principio, si se designa por A la longitud del péndulo simple de segundos en el ecuador, y por B una constante, indeterminada por lo pronto, tendremos que en una latitud cualquiera φ, la longitud del péndulo que oscila en un segundo, será de la forma:

$$l = A + B \operatorname{sen.}^2 \varphi \ldots \ldots \quad (6)$$

Si, pues, como se ha explicado, se mide directamente el péndulo de segundos en el ecuador, y en seguida á otra latitud φ, no quedará más incógnita que B en la ecuación precedente, y por consiguiente, podrá determinarse. Además, como para $\varphi = 90°$, se tendría $l = A + B$, resulta que B es el incremento del péndulo del ecuador al polo, el cual medirá el incremento correspondiente de la pesantez; y entonces la fórmula de Clairaut suministrará el aplanamiento polar de la tierra, á saber:

$$a = \frac{5}{2} p - \frac{B}{A}$$

representando p, como antes, la relación de la fuerza centrífuga y la gravedad en el ecuador.

El método de cálculo que habitualmente se sigue no es, sin embargo, el que he indicado para explicar con más sencillez la resolución general del problema, sino que con el fin de eliminar hasta donde es posible los pequeños errores de observación, que influirían mucho en la determinación del aplanamiento, se combinan diversas observaciones ejecutadas en distintas latitudes, y se calculan así los valores más plausibles de las constantes A y B. Siendo $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ las longitudes del péndulo simple de segundos, medidas en lugares que tienen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_n$ por latitudes, podrán combinarse las n ecuaciones de condición siguientes, entre las constantes indeterminadas A y B:

$$l_1 = A + B\,\text{sen.}^2\varphi_1$$
$$l_2 = A + B\,\text{sen.}^2\varphi_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_n = A + B\,\text{sen.}^2\varphi_n$$

La mejor combinación es la de los mínimos cuadrados, que suministra los valores más probables de las incógnitas, formando las ecuaciones normales por la regla que consta en la nota del número 34. Aplicada á este caso y haciendo:

$$(l) = l_1 + l_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots l_n$$
$$(l\,\text{sen.}^2\varphi) = l_1\text{sen.}^2\varphi_1 + l_2\text{sen.}^2\varphi_2 + \ldots\ldots\ldots l_n\text{sen.}^2\varphi_n$$
$$(\text{sen.}^2\varphi) = \text{sen.}^2\varphi_1 + \text{sen.}^2\varphi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{sen.}^2\varphi_n$$
$$(\text{sen.}^4\varphi) = \text{sen.}^4\varphi_1 + \text{sen.}^4\varphi_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\text{sen.}^4\varphi_n$$

las normales entre A y B serán:

$$(l) - nA - B(\text{sen.}^2\varphi) = 0$$
$$(l\,\text{sen.}^2\varphi) - A(\text{sen.}^2\varphi) - B(\text{sen.}^4\varphi) = 0$$

cuya resolución proporciona los valores de las dos incógnitas que satisfacen mejor el conjunto de las ecuaciones de condición.

Para presentar una aplicación numérica tomemos algunas de las medidas del péndulo de segundos hechas en América por el capitán Sabine.

Lugares.	Latitudes.	l.	Ecuaciones de condición.
St. Thomas.........	0° 25'	0^m.99111	$0.99111 = A + 0.0001\,B$
Jamaica..............	17 56	0 .99147	$0.99147 = A + 0.0948\,B$
Nueva York.........	40 43	0 .99315	$0.99315 = A + 0.4255\,B$
Groenlandia.........	74 32	0 .99575	$0.99575 = A + 0.9289\,B$

Los coeficientes de B son los valores numéricos de los cuadrados de los senos de las latitudes. Calculando los de las ecuaciones normales, tendremos que éstas serán:

$$3.97148 - 4.0000\,A - 1.4493\,B = 0$$
$$1.44164 - 1.4493\,A - 1.0529\,B = 0$$

Dividiendo cada ecuación por el coeficiente que en ella tiene A, hallaremos:

$$0.99287 - A - 0.3623\,B = 0$$
$$0.99471 - A - 0.7265\,B = 0$$

Estas dan por adición y substracción:

$$A = 0.99379 - 0.5444\,B$$
$$0.00184 = 0.3642\,B$$

Por la última se obtiene: $B = 0^m.00505$, valor que sustituído en la otra, produce: $A = 0^m.99104$.

Según este ejemplo, la longitud del péndulo simple de segundos en cualquiera latitud φ, será:

$$l = 0^m.99104 + 0^m.00505\,\text{sen.}^2\varphi$$

Con estos datos calculemos ahora el aplanamiento por la fórmula de Clairaut, recordando que la relación entre la fuerza centrífuga y la gravedad ecuatoriales, es: $p = \frac{1}{289} = 0^m.00346$.

$$\alpha = \frac{5}{2} \times 0.00346 - \frac{0.00505}{0.99104} = 0.00355 = \frac{1}{282} \text{ próximamente.}$$

Mr. Airy, por medio de una combinación análoga de 49 de las mejores observaciones del péndulo, hechas á diversas latitudes en ambos hemisferios, halla: $A = 0^m.99101$ y $B = 0^m.00509$. De estos elementos resulta que la compresión polar, es: $\alpha = 0.00351 = \frac{1}{285}$.

CAPITULO III.

APLICACIÓN DE LAS OPERACIONES GEODÉSICAS Á LA MEDIDA DE ARCOS TERRESTRES.

112.—Si se ejecuta una triangulación de Norte á Sur, se observá directamente el azimut de un lado por lo menos, y se determina la posición geográfica de alguno de los vértices, hemos visto en la Parte Primera de este libro que se pueden calcular los mismos elementos para todo el resto de la cadena, después de hecha la resolución de los triángulos. Los datos así obtenidos sirven después para calcular el arco del meridiano que abraza la triangulación, suponiéndolo trazado por cualquiera de las estaciones. Sean A y U (fig. 34ª) los vértices extremos de la cadena, y propongámonos determinar el arco del meridiano que pasa por A. Si se supone prolongado el lado $B\,C$ hasta M, podremos calcular la distancia meridiana $A\,M$, puesto que en el triángulo $A\,M\,B$ se conoce el lado $A\,B$, el ángulo B y el ángulo $B\,A\,M$, que no es otra cosa más que el azimut de $A\,B$. Además de $A\,M$, la resolución dará los elementos restantes, á saber: $B\,M$ y el ángulo M. En seguida, en el triángulo $C\,D\,M$ se conoce la línea $C\,D$ por ser lado trigonométrico, $C\,M = B\,M - B\,C$, y el ángulo...................... $M\,C\,D = 180° - B\,C\,D$; la resolución dará, pues, $D\,M$ y los ángu-

FIG. 34ª

los D y M, con lo cual en el triángulo siguiente $M\,D\,N$, formado por la prolongación de $D\,E$ hasta el meridiano, se tendrá conocida la base $D\,M$ y los ángulos adyacentes para determinar $M\,N$ y los demás elementos. Una resolución semejante dará á conocer después la distancia $N\,P$ y así sucesivamente, pues todo el método consiste en ir combinando los elementos conocidos de la cadena con los que resultan de la prolongación de algunos lados, ó bien con las partes del meridiano determinadas por su intersección con los lados trigonométricos. Es claro que construyendo un croquis de la figura, se pueden tomar diversas líneas para hacer las combinaciones, cuyos diversos resultados se comprobarán unos á otros. El arco total $A\,P$ será, en consecuencia, igual á la suma de sus partes $A\,M$, $M\,N$, $N\,P$, etc., ó si se desea, puede bajarse una perpendicular $U\,R$ al meridiano desde la última estación U, y entonces se calcula también la distancia meridiana $P\,R = P\,U \cos.\, R\,P\,U$, para obtener $A\,R$ por arco total.

En todas estas operaciones los ángulos observados de la cadena y los deducidos al hacer las combinaciones, pertenecen á triángulos esféricos, por lo cual, para resolverlos por el método de Legendre, es preciso restarles la tercera parte del exceso esférico. Así, por ejemplo, en el primer triángulo $A\,B\,M$ con el lado $A\,B$ y los ángulos A y B se calcula la superficie para determinar en seguida el exceso esférico e (números 66 y 68); y entonces se tiene el ángulo esférico M por la ecuación:

$$M = 180° + e - (A + B)$$

Los ángulos planos serán $A' = A - \frac{1}{3}e$ y $B' = B - \frac{1}{3}e$, por lo cual el ángulo plano deducido es:

$$M' = 180° - (A' + B')$$

El anterior procedimiento para calcular la extensión de un arco del meridiano se debe también á Legendre. Antes de dar á conocer otros más analíticos, indicaremos que si se han determinado astronómicamente las latitudes de los vértices extremos A y U, como de esta última es fácil deducir la de P ó la de R sin error de importancia, tendremos conocida la amplitud del arco, que es igual á la diferencia de latitudes de A y R, y su extensión lineal por la resolución precedente. Estos dos elementos sirven, según se ha dicho, para calcular la extensión de un grado del meridiano, pues siendo φ y φ' las latitudes extremas y m la extensión total $AM+MN+NP+$ etc., se tendrá por valor del arco de 1°, expresando á $\varphi-\varphi'$ en segundos: $s=\frac{3600\,m}{\varphi-\varphi'}$, y diremos que el grado tiene s metros á la latitud media $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$.

113.—La extensión de un arco del meridiano puede también determinarse proyectando sobre él cada uno de los lados trigonométricos AC, CE, etc., por medio de perpendiculares Cc, Ee, etc., que se suponen bajadas desde los vértices. Conociendo, en efecto, la longitud y el azimut de cada línea, se tiene lo necesario para calcular las proyecciones por la fórmula $y=k\cos.u$, de que se hace uso en la Topografía. Es evidente que la suma de las proyecciones daría la extensión del arco; pero este método envuelve el pequeño error de suponer plana la superficie de la tierra, ó lo que es lo mismo, paralelas todas las perpendiculares al meridiano, siendo así que por pertenecer á círculos máximos de la esfera, deben converger hacia los puntos *Este* y *Oeste* del horizonte, que son los dos polos del meridiano.

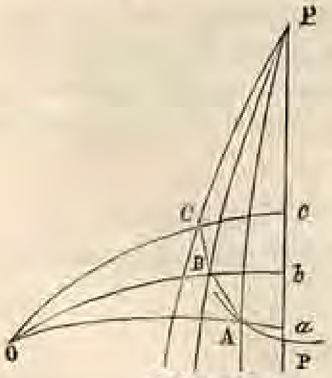


FIG. 35ª A.M

Para tomar en cuenta esta circunstancia, el método de proyección se aplica de la manera siguiente: Sea AB (fig. 35ª) uno de los lados de la cadena, y PM el meridiano sobre el cual se van á proyectar los lados consecutivos con el objeto de hallar el arco total. Si por cada uno de los vértices A, B, C, etc., se trazan arcos perpendiculares al meridiano, todos ellos irán á concurrir al punto O, el cual será el polo de PM; y los piés de estos arcos determinarán las proyecciones ab, bc, etc., de los lados respectivos. Designando por L la longitud geográfica de PM y por L' la de PA

tendremos que $L'-L$ representará la diferencia de longitud de la estación A respecto de aquel meridiano. Con este elemento y con el azimut $u=PAB$ del lado trigonométrico, determinemos el ángulo $BAO=\omega$. Siendo φ la latitud de A, el triángulo PAa, rectángulo en a, da la relación:

$$\text{sen.}\,\varphi=\cot.(L'-L)\cot.PAa$$

Pero como $PAa=180°-(\omega+u)$, se tiene despejando:

$$-\cot.(\omega+u)=\text{sen.}\,\varphi\tan.(L'-L)$$

El ángulo $\omega+u$ difiere muy poco de 90°, y así es que poniendo: $\omega+u=90°+x$, la ecuación precedente dará:

$$\tan.x=\tan.(L'-L)\,\text{sen.}\,\varphi$$

y atendiendo á la pequeñez de x y de $L'-L$, se tendrá tomando los arcos en segundos por las tangentes: $x=(L'-L)\,\text{sen.}\,\varphi$. En consecuencia el valor de ω es:

$$\omega=90°+(L'-L)\,\text{sen.}\,\varphi-u \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

En el triángulo PBb, designando por φ' la latitud de B, por L'' su longitud, y por λ la amplitud del pequeño arco Bb, se tiene:

$$\text{sen.}\,\lambda=\cos.\varphi'\,\text{sen.}\,(L''-L)$$

y como la longitud de cualquiera de los vértices de la cadena nunca es considerable respecto de la del meridiano sobre el cual se proyecta, podrá tomarse:

$$\lambda=(L''-L)\cos.\varphi' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

Ahora, en el triángulo ABO, llamando θ la amplitud del lado AB, tendremos:

$$\text{sen.}\,O=\frac{\text{sen.}\,\theta\,\text{sen.}\,\omega}{\cos.\lambda}$$

ó bien atendiendo á la pequeñez de θ y O:

$$O=\frac{\theta\,\text{sen.}\,\omega}{\cos.\lambda}$$

El ángulo O puede suponerse perteneciente á una esfera cuyo radio sea igual á la normal N del punto A, puesto que es formado por los primeros verticales del meridiano $P\,M$; y además como su medida es el arco $a\,b = y$, se tendrá: $O = \frac{y}{N}$. También si se representa por R_u el radio de curvatura de la sección de que forma parte $A\,B = k$, se halla: $\theta = \frac{k}{R_u}$, y sustituyendo estos valores en el de O, resulta:

$$y = \frac{N\,k\,\text{sen.}\,\omega}{R_u \cos.\lambda}$$

Refiriéndonos al número 16, veremos que R_u sólo difiere de N una cantidad del orden del cuadrado de la excentricidad de los meridianos terrestres, por lo cual no hay inconveniente en suponer su relación igual á la unidad para adoptar la fórmula más sencilla:

$$y = \frac{k\,\text{sen.}\,\omega}{\cos.\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) presentan los cálculos necesarios para hallar la proyección meridiana y de cada uno de los lados de la cadena, conociendo su azimut, su extensión y las coordenadas de sus extremos, elementos todos que se obtienen por medio de las operaciones trigonométricas que se han expuesto en la Parte Primera.

Cuando se calcula la extensión de un arco de meridiano con el objeto de compararla con su amplitud, es necesario, según he dicho, determinar astronómicamente las latitudes de las estaciones extremas; pero como al hacer la proyección por el método que antecede, la latitud γ del pie a del arco perpendicular al meridiano, es un poco diferente de la de A, puesto que $A\,a$ difiere del paralelo $A\,p$ de este vértice, es preciso calcular la pequeña diferencia de latitud $p\,a = x$. Para esto, en el triángulo rectángulo $P\,a\,A$ se tiene:

$$\tan.\gamma = \frac{\tan.\varphi}{\cos.(L' - L)}$$

y como $x = \gamma - \varphi$, hallaremos:

$$\tan.x = \frac{\tan.\gamma - \tan.\varphi}{1 + \tan.\gamma \tan.\varphi}$$

sustituyendo el valor de $\tan.\gamma$, y tomando en el denominador de

$\tan.x$ la unidad por el coseno del pequeño ángulo $L' - L$, resultará:

$$\tan.x = \frac{2\,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}(L' - L)\tan.\varphi}{\sec.^2 \varphi}$$

Multiplicando ambos miembros por $\cos.^2 \varphi$, y tomando los arcos x y $(L' - L)$ en segundos por sus líneas trigonométricas, se halla en último resultado:

$$\gamma = \varphi + \frac{1}{4}(L' - L)^2 \,\text{sen.}\,2\varphi\ \text{sen.}\,1'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

fórmula por cuyo medio se determinan las latitudes de los pies de los arcos proyectantes que pasan por los vértices extremos. La diferencia de estas latitudes representa la amplitud del arco del meridiano, formado por la suma de las proyecciones de los lados trigonométricos.

114. El método que me parece más conveniente para proyectar una serie de lados, y que no necesita corrección alguna de las latitudes extremas, consiste en calcular las distancias meridianas comprendidas entre cada dos vértices. Supongamos trazados los paralelos $A\,a$, $B\,b$, $C\,c$, etc., (fig. 36ª) de cada estación trigonométrica; es claro que las distancias $a\,b$, $b\,c$, etc., no son otra cosa más que las diferencias de latitud de A y B, de B y C, etc., reducidas á medidas lineales, reducción que se practica dividiendo por el coeficiente A la fórmula (2) del núm. 70. Luego designando por m la parte del meridiano comprendida entre las latitudes φ y φ', se tendrá:

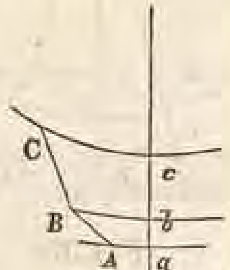


FIG. 36A

$$m = \frac{\varphi' - \varphi}{A} = k\cos.u - \frac{B}{A}k^2\,\text{sen.}^2 u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

y la suma de las m dará el arco total que abraza la triangulación, en cuyos vértices extremos supongo que se ha determinado directamente la latitud con el fin de hallar la amplitud del mismo arco.

Conviene tomar de la Tabla del número 71 los valores de A y B para la latitud media $\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$.

Debe notarse que los tres procedimientos que he expuesto para calcular la extensión de un arco, deben dar resultados sensiblemente independientes del valor de los elementos que caracterizan al elipsoide terrestre; pues si bien en el último figuran las cantidades A y B, que dependen del radio ecuatorial a y de la excentricidad e^2, es en un término muy pequeño, en el que, por consiguiente, bastaría emplear valores aproximativos, sin que por eso se alterase el resultado de una manera apreciable. Se comprende que de esa manera es posible hallar con exactitud la extensión de un arco del meridiano para compararlo en seguida con su amplitud astronómica y determinar así los elementos del elipsoide, como se verá en el Capítulo siguiente.

115.—De una manera análoga se procede para calcular la extensión de un arco de paralelo. Sean A, B, etc., (fig. 37ª) los vértices de una triangulación dirigida de Oriente á Poniente, y $P\,P'$ el paralelo de latitud λ cuya extensión se desea determinar. Designando por φ, L, y φ', L' las latitudes y las longitudes de A y B respectivamente, por N la normal de A, por N_λ la del paralelo y por u el azimut de $A\,B=k$, se tienen las dos ecuaciones:

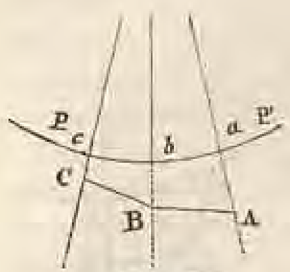


FIG. 37ª

$$p=(L'-L)\,N_\lambda \cos.\lambda \operatorname{sen.}1''$$

$$L'-L=\frac{k \operatorname{sen.}u}{N\cos.\varphi' \operatorname{sen.}1''}$$

la primera de las cuales expresa la extensión del arco del paralelo de latitud λ, que abraza una amplitud $L'-L$ (número 14); y la segunda suministra esta amplitud en función de k y u (número 71). Eliminando entre ellas á $L'-L$, resultará:

$$p=\frac{N_\lambda \cos.\lambda}{N\cos.\varphi'}\,k \operatorname{sen.}u \;\text{......................}\; (6)$$

fórmula que sirve para calcular la parte del paralelo correspondiente á cada lado trigonométrico, comprendida entre los meridianos de sus vértices. En consecuencia, la suma de las p dará todo el arco limitado por los meridianos extremos, y si se determina astronómicamente la diferencia de longitud de éstos, podrán compararse la amplitud y la extensión totales para calcular la que corresponde á 1°.

Aunque en la ecuación (6) entran las normales correspondientes á las latitudes λ y φ, que dependen del radio ecuatorial y de la excentricidad de la tierra, no por eso sería inexacto el valor de p si no se conocieran con precisión esos elementos; porque en la relación de las normales se elimina el radio del ecuador, y el término que depende de la excentricidad, queda multiplicando á una cantidad muy pequeña. En efecto, puesto que se tiene:

$$N_\lambda=\frac{a}{(1-e^2\operatorname{sen.}^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} \qquad N=\frac{a}{(1-e^2\operatorname{sen.}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

la relación de las normales será:

$$\frac{N_\lambda}{N}=\frac{(1-e^2\operatorname{sen.}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{(1-e^2\operatorname{sen.}^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}=(1-e^2\operatorname{sen.}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,(1-e^2\operatorname{sen.}^2\lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

Desarrollando hasta los términos en e^2, y haciendo las multiplicaciones sin apreciar las potencias superiores de e, por ser sumamente pequeñas, resulta:

$$\frac{N_\lambda}{N}=(1-\tfrac{1}{2}e^2\operatorname{sen.}^2\varphi)(1+\tfrac{1}{2}e^2\operatorname{sen.}^2\lambda)=1+\tfrac{1}{2}e^2(\operatorname{sen.}^2\lambda-\operatorname{sen.}^2\varphi)$$

y como las latitudes φ de los puntos trigonométricos nunca difieren mucho de la del paralelo, se infiere que es siempre muy pequeño el factor de e^2. Además, si la triangulación se ejecuta de manera que corte al paralelo, las latitudes de algunos vértices serán mayores y las de otros menores que la de éste, y entonces se tendrá la ventaja de que varíe el signo del multiplicador de e^2, de modo que el conjunto de los valores de p será sensiblemente independiente de la excentricidad.

CAPITULO IV.

DETERMINACIÓN DE LA FIGURA Y DIMENSIONES DE LA TIERRA POR LAS MEDIDAS GEODÉSICAS.

116.—En el Capítulo I de la Geodesia práctica constan las expresiones analíticas de las principales líneas del elipsoide, y se ve que todas ellas dependen de los elementos característicos a y e de este sólido. La valuación numérica de esas expresiones demanda en consecuencia, el conocimiento de los elementos; mas si por un procedimiento cualquiera se obtienen directamente los valores de las mismas líneas, es claro que igualándolos con la expresión ó fórmula que los representa, se formarán ecuaciones de condición en las que figuren a y e como constantes indeterminadas, y cuya resolución dará por consiguiente, los valores de éstas.

Tal es el principio en que está fundada la determinación de la forma de la tierra por los procedimientos geodésicos. En el Capítulo precedente vimos, en efecto, que por medio de una cadena de triángulos es posible medir un arco terrestre con mucha exactitud, sin necesidad de conocer previamente el radio ecuatorial y la elipticidad del globo. Si, pues, m y m' representan, por ejemplo, las extensiones de dos arcos pequeños del meridiano, medidas geodésicamente, siendo φ y φ' las latitudes de sus medios, se tendrán (número 12) las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} m &= a(1-e^2)\left(1+\tfrac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\varphi+\tfrac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\varphi+\ldots\ldots\right)\mathrm{d}\,\varphi \\ m' &= a(1-e^2)\left(1+\tfrac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\varphi'+\tfrac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\varphi'+\ldots\ldots\right)\mathrm{d}\,\varphi' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

en las que d φ y d φ' expresan las diferencias de latitud de los extremos de los arcos. En estas ecuaciones todo será conocido, con excepción de las constantes a y e, y, por tanto, será fácil determinar su valor.

Eliminando la cantidad $a(1-e^2)$, se obtiene:

$$\frac{3}{2}(m'\,\text{sen.}^2\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi - m\,\text{sen.}^2\varphi'\,\mathrm{d}\,\varphi')e^2 +$$
$$+\frac{15}{8}(m'\,\text{sen.}^4\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi - m\,\text{sen.}^4\varphi'\,\mathrm{d}\,\varphi')e^4 = m\,\mathrm{d}\,\varphi' - m'\,\mathrm{d}\,\varphi$$

Esta ecuación puede resolverse por aproximaciones sucesivas, introduciendo por valor de e^4 el que resulta de la primera aproximación; pero atendiendo á la pequeñez de e, basta generalmente adoptar el valor obtenido en la hipótesis de que sea nula su cuarta potencia, esto es:

$$e^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{m\,\mathrm{d}\,\varphi' - m'\,\mathrm{d}\,\varphi}{m'\,\text{sen.}^2\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi - m\,\text{sen.}^2\varphi'\,\mathrm{d}\,\varphi'}$$

Cuando los dos arcos que se comparan tienen la misma amplitud, como sucede al hacer uso de las extensiones de 1°, se simplifica mucho el cálculo de esta fórmula, pues haciendo d φ = d φ', resulta:

$$e^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{m-m'}{m'\,\text{sen.}^2\varphi - m\,\text{sen.}^2\varphi'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Obtenido así el valor de e, cualquiera de las ecuaciones primitivas suministra el del radio del ecuador, á saber:

$$a = \frac{m}{(1-e^2)(1+\frac{3}{2}e^2\,\text{sen.}^2\varphi+\frac{15}{8}e^4\,\text{sen.}^4\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi} \ldots\ldots\ldots (3)$$

ecuación en la que d φ representa la amplitud del arco m expresada en partes del radio; pero se multiplicará por sen. 1″ si se quiere introducir en segundos. El aplanamiento polar se obtendrá recordando (número 3) que con cortísima diferencia es igual á $\frac{1}{2}e^2$.

117.—Pongamos á la vista algunos de los principales resultados de las medidas geodésicas, á fin de aplicar las fórmulas precedentes.

PAISES.	OBSERVADORES.	Latitudes medias.	Extensiones de un grado.
Ecuador..............	Bouguer, Lacondamine..	00° 00′ 00″	110614^m
La India..............	Lambton, Everest.........	16 8 22	110653
Cabo de Buena Esp^a	La Caille....................	33 18 30	111165
Francia..	Delambre, Biot, Arago...	45 4 18	111116
Inglaterra.............	Roy, Kater.........	52 35 45	111241
Rusia..................	Struve......................	58 17 37	111362
Laponia..............	Swamberg..................	66 20 10	111488

La expresión (2) indica que para disminuir el efecto de algún pequeño error que tengan las extensiones m y m' de los arcos, conviene que su denominador sea el mayor posible, ó en otros términos, que deben escogerse dos arcos medidos en latitudes muy diferentes. Conforme á esto, combinemos el grado de Rusia con el del Ecuador y como en tal caso se tiene $\varphi' = 0$, la ecuación toma la forma......... $e^2 = \frac{2(m-m')}{3m' \operatorname{sen.}^2 \varphi}$.

$m = 111362^m$ $\quad$ φ 58° 17′ 37″ $\quad$ $\frac{2}{3}$...... 9.82391

$m' = 110614$ $\quad$ φ' 00 00 00 $\quad$ $m - m'$...... 2.87390

m'...... -5.04381

$m - m' = 748$ $\quad$ sen.$^2\varphi$...... -9.85960

$e^2 = 0.006229$...... e^2...... 7.79440

El aplanamiento resulta, en consecuencia: $\alpha = 0.003115 = \frac{1}{321}$.

Con este valor de e^2 calculemos el radio ecuatorial valiéndonos del arco m'. Puesto que $\varphi' = 0$, y $d\varphi = 3600''$, la ecuación (3) dará: $a = \frac{m'}{3600(1-e^2)\operatorname{sen.} 1''}$.

3600.................. -3.5563025

$1 - e^2$............... -9.9972863

sen. 1″............... -4.6855749

m'.................... 5.0438101

a...................... 6.8046464 $\quad$ $a = 6377439^m$

118.—De la misma manera podrían hacerse otras muchas combinaciones cuyos resultados no concuerdan idénticamente, ya sea por la influencia de los pequeños errores de observación, ya por ligeras irregularidades que existan realmente en el globo terrestre, según dije en el Capítulo I. Con el objeto de eliminar hasta donde es posible estas causas de discordancia, ó para determinar la forma general que resulta de un conjunto de medidas, se combinan muchas de ellas á la vez, estableciendo al efecto ecuaciones de condición, cuya resolución suministra los valores de a y e^2 independientes hasta cierto punto de los errores ó irregularidades locales.

Si en las ecuaciones primitivas (1), por ejemplo, se ejecutan las multiplicaciones hasta los términos en e^4, y si hacemos para abreviar:

$$A = 1 - \frac{3}{2}\operatorname{sen.}^2\varphi \qquad B = \frac{3}{2}\operatorname{sen.}^2\varphi - \frac{15}{8}\operatorname{sen.}^4\varphi$$

cualquiera de ellas adquirirá la forma:

$$m = a(1 - Ae^2 - Be^4)\,d\varphi$$

bajo la cual podrían combinarse varios arcos para la determinación de las constantes. Sin embargo, en el estado actual de la Geodesia creo que sería preferible comparar los arcos medidos directamente con los calculados, haciendo uso de valores aproximativos de a y e^2, y determinar así las correcciones que éstos necesiten. Siendo, en efecto, a y e^2 los valores aproximativos de las constantes, δa y δe^2 las correcciones que les corresponden, y calculando con aquellos cada arco del meridiano por la última fórmula, se hallará un resultado μ, generalmente distinto del obtenido por la medida, esto es:

$$\mu = a(1 - Ae^2 - Be^4)\,d\varphi \text{ .... } \quad (4)$$

y para hacerlo concordar con m, introduciremos las correcciones, á saber:

$$m = (a + \delta a)[1 - A(e^2 + \delta e^2) - Be^4]\,d\varphi$$

El último término de esta ecuación se ha supuesto exacto á causa de su extremada pequeñez. Haciendo la multiplicación, omitiendo el producto δa, δe^2 por ser de segundo orden, y restando del resultado el valor de μ, obtendremos la ecuación de condición que sigue, entre las correcciones de los elementos supuestos.

$$m-\mu=\delta a(1-A e^2-B e^4)\,\mathrm{d}\varphi-A a\,\mathrm{d}\varphi.\delta e^2$$

Abreviando el coeficiente de δa con ayuda del valor de μ, y teniendo presente que $a\,\mathrm{d}\,\varphi$ representa la extensión de un arco de amplitud $\mathrm{d}\,\varphi$, contada en un círculo cuyo radio es a, extensión muy poco diferente de μ, la ecuación de condición podrá ponerse bajo la forma:

$$\frac{\mu}{a}\cdot\delta a-A\mu.\delta e^2-(m-\mu)=0 \text{ .... } (5)$$

Con el fin de presentar un ejemplo numérico sin alargar demasiado los cálculos, tomemos solamente tres de los arcos que constan en la Tabla anterior, y elijamos el del Ecuador, el de la India y el de Rusia. Calculados todos ellos por la fórmula (4) haciendo uso de sus latitudes respectivas y de los valores aproximativos $a=6377400^{\mathrm{m}}$ y $e^2=0.0066$, se obtienen los resultados siguientes:

Grado del Ecuador.... $A=+1.0000$ ...... $B=0.0000$...... $\mu=110572^{\mathrm{m}}$
Grado de la India...... $A=+0.8841$ ...... $B=0.1047$...... $\mu=110657$
Grado de Rusia......... $A=-0.0857$ ...... $B=0.1035$...... $\mu=111369$

y formando las ecuaciones de condición (5), hallaremos:

$$\begin{aligned}0.01733\,\delta a-111307\,\delta e^2-42&=0\\0.01735\,\delta a-97832\,\delta e^2+4&=0\\0.01746\,\delta a+9544\,\delta e^2+7&=0\end{aligned}$$

Combinando estas ecuaciones por el método de los mínimos cuadrados, resultarán las dos normales:

$$\begin{aligned}+0.00090665\,\delta a-\qquad 3747\,\delta e^2-0.53624&=0\\-\qquad 3747\,\delta a+22052436409\,\delta e^2+4350374&=0\end{aligned}$$

cuya resolución suministra: $\delta a=-417^{\mathrm{m}}$, y $\delta e^2=-0.000264$. En

consecuencia, los valores correctos de las constantes, según esta combinación, serían:

$$a+\delta a=6376983^{\mathrm{m}} \qquad\qquad e^2+\delta e^2=0.006336$$

la última de las cuales correspondería á un aplanamiento de $\frac{1}{315}$ próximamente.

De esta ó de una manera análoga se han combinado la mayor parte de las principales operaciones geodésicas para determinar el elipsoide que conviene mejor al conjunto de los resultados de las medidas. En el número 104 dimos ya á conocer las cantidades obtenidas por diversos calculadores, y entre ellos Bessel, cuyos elementos son los que se han adoptado en este libro.

Es preciso advertir que para combinar arcos de amplitud considerable no sería exacto establecer las ecuaciones de condición partiendo de las series aproximadas (1), sino de la fórmula integral (21) del número 13, que suministra la extensión de un arco de g grados de amplitud, comprendido entre las latitudes φ y $\varphi-g$. Los coeficientes A, B, etc., de esa fórmula son funciones de las potencias pares de e, que sustituidas hasta los términos en e^4, pueden darle la forma $m=a(1-Me^2-Ne^4)$, semejante á la que he aplicado al ejemplo anterior, y, por consiguiente, susceptible de sujetarse al mismo procedimiento.

119.—La determinación de las constantes puede hacerse también comparando las medidas de dos arcos de paralelo, pues siendo φ y φ' sus latitudes, $\mathrm{d}\,L$ y $\mathrm{d}\,L'$ sus amplitudes y N y N' las normales correspondientes, tienen por expresiones:

$$\left.\begin{aligned}p&=\frac{a\cos.\varphi\,\mathrm{d}\,L}{(1-e^2\mathrm{sen.}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}=a\cos.\varphi(1+\tfrac{1}{2}e^2\mathrm{sen.}^2\varphi+\tfrac{3}{8}e^4\mathrm{sen.}^4\varphi+......)\,\mathrm{d}\,L\\p'&=\frac{a\cos.\varphi'\,\mathrm{d}\,L'}{(1-e^2\mathrm{sen.}^2\varphi')^{\frac{1}{2}}}=a\cos.\varphi'(1+\tfrac{1}{2}e^2\mathrm{sen.}^2\varphi'+\tfrac{3}{8}e^4\mathrm{sen.}^4\varphi'+....)\,\mathrm{d}\,L'\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

de las cuales resulta por la eliminación de a y omitiendo los términos en e^4:

$$e^2=\frac{2(p\cos.\varphi'\,\mathrm{d}\,L'-p'\cos.\varphi\,\mathrm{d}\,L)}{p'\cos.\varphi\,\mathrm{sen.}^2\varphi\,\mathrm{d}\,L-p\cos.\varphi'\,\mathrm{sen.}^2\varphi'\,\mathrm{d}\,L'}$$

Si las amplitudes son las mismas, como sucede cuando se comparan arcos de 1°, resulta la fórmula más sencilla:

$$e^2 = \frac{2(p\cos.\varphi' - p'\cos.\varphi)}{p'\cos.\varphi\,\text{sen.}^2\varphi - p\cos.\varphi'\,\text{sen.}^2\varphi'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (7)$$

Comparando más de dos arcos de paralelo pueden formarse ecuaciones de condición partiendo de las expresiones (6), y procediendo como antes se ha hecho respecto de los arcos de meridiano. Si se designa por q la extensión calculada con los elementos aproximativos a y e^2, tendremos, pues:

$$q = a\cos.\varphi\left(1 + \frac{1}{2}e^2\text{sen.}^2\varphi + \frac{3}{8}e^4\text{sen.}^4\varphi\right) d\,L$$

y la ecuación de condición correspondiente á cada arco será de la forma:

$$\frac{q}{a}\,\delta a + \frac{1}{2}\,q\,\text{sen.}^2\varphi\,.\,\delta e^2 - (p - q) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (8)$$

De la misma manera puede compararse uno ó más arcos de meridiano con otro ú otros de paralelo, por medio de las expresiones (1) y (6), ó bien combinando las ecuaciones de condición (5) y (8). Sin embargo, son comparativamente muy cortas en número las medidas de arcos de paralelo que se han ejecutado hasta hoy, por la dificultad de determinar exactamente sus amplitudes, ó sea la diferencia de longitud geográfica de sus extremos. Acaso en lo futuro no será así, porque el uso reciente de la telegrafía electro-magnética, como medio de determinar las longitudes geográficas, se presta casi al mismo grado de precisión que las medidas de las latitudes, y, en consecuencia, desaparecerá la principal causa de error que afecta á las amplitudes de los arcos. En mi concepto, la comparación de diversos paralelos, ó mejor la de varias partes del mismo paralelo, es la que puede dar á conocer con más facilidad si la tierra es realmente un sólido de revolución, pues es claro que siéndolo, amplitudes iguales deben corresponder á extensiones iguales en la misma latitud.

Cuando en un país se practican grandes operaciones geodésicas, por ejemplo, para levantar exactamente su carta geográfica, y se hacen también las correspondientes observaciones astronómicas, se pueden comparar las triangulaciones hechas de Norte á Sur con las de Oriente á Poniente, y de esa manera se determinan las constantes a y e^2, que en tal caso, deben considerarse como las pertenecientes á un elipsoide osculador á la superficie de la tierra en aquel país.

Sucede con frecuencia que las posiciones geográficas calculadas geodésicamente para puntos algo distantes por medio de las triangulaciones, no resultan idénticas á las observadas astronómicamente, cuando se hace uso de los elementos a y e^2 determinados para la tierra en general. Estas discordancias, que se atribuyen á las irregularidades locales, desaparecen necesariamente si se determinan las constantes que convienen á cada país, estableciendo ecuaciones de condición entre δa, δe^2 y las diferencias geodésicas y astronómicas de posición. Sea en, efecto, P la diferencia de latitud de dos puntos distantes calculada por la fórmula (2) del número 70. Siendo n el número de lados de la triangulación que hay entre las dos estaciones, se tiene: $P = p_1 + p_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots p_n$. Si designamos por P' la misma diferencia obtenida astronómicamente, $P' - P$ será el efecto del error de los elementos, y podremos establecer la condición:

$$P' - P = \delta p_1 + \delta p_2 + \ldots\ldots\ldots \delta p_n$$

Para determinar las correcciones de las diferencias parciales, tomemos la fórmula aproximativa:

$$p = A\,k\cos.u = \frac{k(1 - e^2\text{sen.}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\cos.u}{a(1 - e^2)\,\text{sen.}\,1''}$$

que diferenciada respecto de a y e^2, produce sin dificultad:

$$\delta p = -\frac{p}{a}\,\delta a + p\left(\frac{1}{1 - e^2} - \frac{3}{2}\,\frac{\text{sen.}^2\varphi}{r^2}\right).\,\delta e^2$$

De la misma forma serán las correcciones de p_1, p_2, etc., y tomando por $\frac{\text{sen.}^2 \varphi}{r^2}$ para toda la cadena, el valor medio de esa cantidad, será constante el coeficiente de las p. Representando por m aquel valor, y sustituyendo, se tendrá la ecuación de condición:

$$(P'-P)+\frac{P}{a}.\delta a-P\left(\frac{1}{1-e^2}-\frac{3}{2}m\right).\delta e^2=0$$

Siendo igualmente Q y Q' las diferencias geodésica y astronómica de longitud, y aplicando á la fórmula (4) del número 71 un método de cálculo semejante, se hallará:

$$(Q'-Q)+\frac{Q}{a}.\delta a+\frac{1}{2}Qm.\delta e^2=0$$

Por medio de estas ecuaciones se determinarán fácilmente las correcciones δa y δe^2, que por la hipótesis, necesitan los elementos del elipsoide; pero debe tenerse presente que este procedimiento supone mucha precisión en las triangulaciones, en los azimutes y en toda la parte astronómica, puesto que las discordancias se atribuyen únicamente á alguna irregularidad local del globo terrestre.

PARTE TERCERA.

ELEMENTOS DE ASTRONOMÍA PRÁCTICA

CAPITULO I.

DEFINICIONES Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.

120.—Se ha dicho que la posición de un punto de la superficie de la tierra se fija por medio de sus dos coordenadas geográficas, latitud y longitud, y que la dirección de una linea se determina por su azimut, que es el ángulo que forma con el meridiano que pasa por uno de sus extremos. La medida directa de estos tres elementos geográficos constituye la aplicación más usual de los principios astronómicos, y es la que me propongo exponer en la última parte de la Geodesia, ya sea como complemento necesario de esta ciencia, ya como un medio sencillo y eficaz de obtener desde luego buenos datos para la construcción de grandes cartas geográficas, según se ha indicado en el Capitulo X de la Parte Primera.

En 1867, con el título de "*Nuevos Métodos Astronómicos*," hice una publicación destinada á facilitar las aplicaciones de la Astronomía; pero el carácter esencialmente práctico de esa obra no me permitió ocuparme en ciertos detalles elementales con los que supuse ya familiarizado al lector, como son el uso de las Efemérides ó Tablas astronómicas, el manejo de los instrumentos, las diversas maneras de medir el tiempo, los efectos de la refracción y de la paralaje, etc. En todos estos principios me ocuparé ahora, á fin de que sirvan de introducción para la lectura de aquel libro, procurando á la vez consignar aquí lo más esencial de la práctica de la ciencia astronómica, y cuidando de referirme frecuentemente á los "Nuevos Métodos," con el objeto de indicar al lector que lo desee, la parte de ese tratado en que puede encontrar más detalles de cada aplicación.

Recordemos brevemente ahora algunos principios fundamentales de la Astronomía. El movimiento de la tierra al derredor de su eje, que se efectúa con perfecta uniformidad, de Occidente á Oriente en el espacio de 24^h, produce la apariencia de un movimiento inverso de los cuerpos celestes al derredor del mismo eje, de modo que el observador cree ver que gira de Oriente á Poniente cada uno de los astros ó la inmensa esfera en que todos parecen colocados. El lenguaje común está de acuerdo con estas apariencias, en lo cual no hay inconveniente alguno con tal que se le conceda su verdadero significado, y así decimos por brevedad, que una estrella sale, se eleva, pasa por el meridiano, etc., para expresar la situación que en un momento dado ocupa respecto de nuestro horizonte.

Para determinar la posición de un astro en la bóveda aparente del cielo se recurre á un sistema de coordenadas angulares, análogas á las que fijan la situación de un punto sobre la superficie de la tierra.

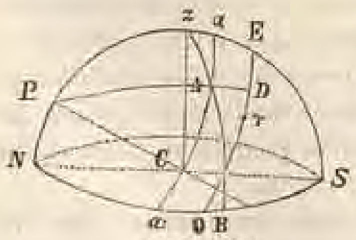


FIG. 38A

Las coordenadas esféricas más usuales son la *ascensión recta* y la *declinación*, que se refieren á dos planos perpendiculares entre sí. Sea $N\,O\,S$ (fig. 38ª) el horizonte del observador, á quien suponemos en el centro C de este círculo. Su línea vertical prolongada cortará la esfera celeste en el zenit Z, y su meridiano será el plano $N\,P\,Z\,S$ perpendicular al horizonte. El círculo máximo $E\,O$ perpendicular al eje del mundo, y, en consecuencia, distante 90° del polo P, es el ecuador celeste, y puede suponerse que representa la intersección de la esfera con el plano del ecuador terrestre prolongado. Todos los círculos máximos perpendiculares al ecuador, tales como $P\,A\,D$, se llaman *círculos horarios*; y todos los menores como $a\,A\,a'$ paralelos al ecuador, se designan con el nombre de *círculos de declinación*. Un astro que ocupe el punto A de la esfera, puede fijarse evidentemente de posición conociendo los de sus círculos horario y de declinación. La del primero se determina por su distancia angular $\Upsilon\,D$ á un punto fijo Υ del ecuador, y la del segundo por su separación angular $D\,A$ de este plano. Por punto fijo del ecuador se ha escogido una de sus intersecciones con el plano de la eclíptica, y es el que representa el equinoccio de primavera.

El arco $\Upsilon\,D$ es la ascensión recta, y el $D\,A$ la declinación del astro A. Según esto, definiremos la ascensión recta de un astro diciendo que es el arco del ecuador contado desde el punto equinoccial de primavera hasta el pie del plano horario que pasa por el astro. La declinación será la distancia angular de un astro al ecuador contada en su círculo horario. Las ascensiones rectas se cuentan desde 0° hasta 360° de Occidente á Oriente, y por lo común se expresan en tiempo desde 0^h hasta 24^h. Para que se comprenda bien esta manera de contar las ascensiones rectas, supongamos que se tenga un cronómetro ó un péndulo que señale exactamente 24^h en el espacio de tiempo que dura la revolución completa de la esfera celeste, y que en el instante en que el punto equinoccial pase por el meridiano en E, marque 0^h con toda precisión. Es claro que al pasar por el mismo plano cualquier otro punto D, ó al coincidir con aquel el círculo horario $P\,A\,D$, señalará el péndulo cierta hora T, que mide el tiempo transcurrido desde el tránsito de Υ, y por tanto una cantidad de tiempo que guardará con el espacio total de 24^h la misma relación que el ángulo $\Upsilon\,D$ con toda la circunferencia. El tiempo que dura la revolución completa de la bóveda celeste, ó sea el que transcurre entre dos tránsitos consecutivos de un mismo punto por el meridiano, se llama *día sideral*, que se cuenta desde el instante en que pasa ó culmina el punto equinoccial; y de aquí se deduce que la ascensión recta $\Upsilon\,D$ de un astro A, expresada en tiempo, no es otra cosa más que la hora sideral T de su paso por el meridiano.

Las declinaciones se cuentan desde 0° hasta 90° partiendo del ecuador tanto hacia el Norte como hacia el Sur, y para distinguir las boreales de las australes se consideran positivas las primeras y negativas las segundas, acompañándolas del signo correspondiente. No podrá dejar de notarse la grande analogía que ofrece la coordenada celeste llamada declinación con la terrestre llamada latitud. Ambas, en efecto, se cuentan desde el ecuador en círculos perpendiculares á este plano, y con los mismos signos en iguales direcciones. Se deduce de aquí que la latitud EZ del observador puede decirse que es la declinación de su zenit, así como se dice que es igual á la altura NP del polo respecto de su horizonte. También se infiere de lo anterior que un astro que tenga por declinación una cantidad igual á la latitud de un lugar, pasará por el zenit de ese lugar en su tránsito por el meridiano; y que, en general, un astro culminará al Norte ó al Sur del zenit, según que su declinación sea mayor ó menor que la latitud del lugar.

121.—La posición de un astro puede determinarse también en un instante cualquiera por medio de la observación directa, midiendo simultáneamente otras dos coordenadas referidas al horizonte y al meridiano del observador. Estas son el *azimut*, que es el ángulo NZA, ó el arco del horizonte NB, que le sirve de medida, formado por el meridiano ZPN con el plano vertical ZAB que pasa por el astro; y su distancia *zenital* ZA, que es la distancia angular del astro al zenit del observador. Así es que si con un altazimut, por ejemplo, se visa un astro, y se leen las indicaciones de sus dos círculos horizontal y vertical, conociendo de antemano la que señala el primero cuando el telescopio coincide con el meridiano, se obtendrán á la vez las dos coordenadas azimut y distancia zenital.

Este sistema de coordenadas varía á la verdad no sólo de un punto á otro de la tierra, puesto que depende del lugar que en ella ocupa el observador, sino que también cambia de un instante á otro á causa del movimiento aparente del astro ó de la esfera celeste. Por esta razón es indispensable al determinar las posiciones de esa manera, anotar otros dos datos que son: la hora exacta de la observación y la latitud del observador. Con estos dos elementos adicionales es fá-

cil calcular la ascensión recta y la declinación del astro, pues en el triángulo ZPA se conocerá por la observación el ángulo en Z, que es el azimut; el lado ZA, ó la distancia zenital; y el lado ZP, igual á la *colatitud*, ó sea al complemento de la latitud EZ. Se podrá calcular, en consecuencia, el tercer lado PA, que es la *distancia polar* del astro, complemento de su declinación, y el ángulo ZPA llamado *ángulo horario* del astro. Este último elemento combinado con la hora de la observación suministra la ascensión recta, pues la figura da la ecuación $\Upsilon D = \Upsilon E - DE$. Como el arco ΥE expresado en tiempo, representa la hora T de la observación, porque indica el tiempo transcurrido desde el paso del origen Υ por el meridiano, si designamos por α la ascensión recta que se busca y por h el ángulo horario, tendremos por la ecuación anterior:

$$\alpha = T - h \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

122.—El triángulo ZPA formado en un instante cualquiera por el zenit, el polo y el lugar que ocupa el astro, se llama *triángulo astronómico*, y hace un papel tan importante en los problemas de la Astronomía práctica, que puede decirse que su resolución forma el objeto de todas las aplicaciones usuales de esta ciencia. Es, por consiguiente, del mayor interés considerar desde ahora cada uno de sus elementos, á fin de evitar continuas repeticiones.

De los tres lados que lo forman, el arco ZP depende únicamente de la posición del observador, de manera que este lado es constante para cada punto de la tierra, é igual á $90° - \varphi$, designando siempre φ la latitud $EZ = PN$. El lado PA depende de la declinación del astro, puesto que representa la distancia polar de éste, igual á $90° - \delta$, llamando δ la declinación. El tercer lado ZA cambia á cada instante por el movimiento ascensional de los astros, y varía desde 90°, que es su valor cuando se observa una estrella en el horizonte, hasta el valor mínimo que adquiere en la culminación del astro, quiere decir, en el momento de su tránsito superior por el meridiano. Este lado se designará siempre por z.

El ángulo en P hemos dicho que se llama horario, y lo designaremos en general por h. El ángulo en Z es el azimut del astro, que llamaremos a. El tercero $Z\,A\,P$ se denomina ángulo *paraláctico*, y es formado por el plano vertical que pasa por la estrella con el de su círculo horario. Este ángulo se representará por q.

Se comprenderá fácilmente que la posición del observador, la del astro y la hora de la observación contribuyen independientemente á modificar la forma del triángulo astronómico. Por lo general el lado z es el que se obtiene por la observación directa, aunque regularmente acompañado de otro dato á causa de su variabilidad. De los ángulos, el horario h y el azimut a son los que con más frecuencia se miden, el primero en tiempo con un instrumento cronométrico, y el segundo en arco con uno angular.

Respecto del signo, y del valor numérico de los elementos, la distancia zenital z se considera siempre positiva, sea cual fuere la región del cielo en que se observe un astro. La colatitud $90° - \varphi$, cuando se refiere al polo Norte, es menor ó mayor que $90°$ según que sea boreal ó austral la latitud, aunque en este último caso puede siempre tomarse menor si se refiere al polo Sur. La distancia polar $90° - \delta$ también es menor ó mayor que un cuadrante según que sea positiva ó negativa la declinacion, al menos cuando se refiera al polo boreal, como sucede generalmente.

Relativamente á los ángulos, contaremos el azimut desde $0°$ hasta $180°$ tanto del Norte al Oeste como del Norte al Este, considerándolo positivo en el primer caso y negativo en el segundo. Lo mismo diremos del ángulo horario, el cual, teniendo por expresión: $h = T - \alpha$ será positivo ó negativo según que T sea mayor ó menor que α; y como T representa la hora *actual* de la observación, esto es, la ascensión recta del punto ó puntos que se hallan en ese instante en el meridiano, por lo cual se designa algunas veces por *ascensión recta del meridiano*, resulta que h será negativo al Oriente ó antes de la culminación del astro, y positivo al Poniente después que ha pasado por el meridiano. En uno y en otro caso se cuenta desde $0°$ hasta $180°$ en arco, ó desde 0^h hasta 12^h en tiempo, esto es, desde el paso superior por el meridiano hasta el inferior. En cuanto al ángulo paraláctico, se le considera con el mismo signo que el horario y el azimut, esto es, negativo al Este y positivo al Oeste. Todas estas

indicaciones son necesarias para asignar los signos convenientes á las líneas trigonométricas de los diversos elementos del triángulo astronómico, así como para conocer el valor numérico de cualesquiera de ellos cuando, por medio del cálculo, se obtenga el valor y el signo de alguna de sus líneas trigonométricas.

123.—Demos una idea general de las principales resoluciones de que es susceptible el triángulo astronómico, y que corresponden á otras tantas aplicaciones de las más usuales. Conocida la latitud φ del observador, la declinación δ del astro y su distancia zenital z, se calcula su ángulo horario por la fórmula:

$$\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,h = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(m-c)\,\text{sen.}\,(m-d)}{\text{sen.}\,d\,\text{sen.}\,c}}$$

en la cual c representa la colatitud $90° - \varphi$, y d la distancia polar $90 - \delta$, siendo m el semiperímetro, ó $m = \frac{1}{2}(c + d + z)$. Encuentro más cómodo dar otra forma á la ecuación, introduciendo φ y δ en vez de sus complementos. A este fin, sustituyendo los valores de c y d en el de m, se halla:

$$m - c = \frac{1}{2}(z + \varphi - \delta)$$

$$m - d = \frac{1}{2}(z - \varphi + \delta)$$

y designando por a el primer ángulo y por b el segundo, tendremos las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\,z + \frac{1}{2}\,(\varphi - \delta) \\ b &= \frac{1}{2}\,z - \frac{1}{2}\,(\varphi - \delta) \\ \text{sen.}\,\frac{1}{2}\,h &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,b}{\cos.\,\varphi\,\cos.\,\delta}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Obtenido de esta manera el ángulo horario, convirtiéndolo en tiempo y tomando de las Efemérides la ascensión recta α del astro, la ecuación (1) da: $T = a + h$, que suministra la hora exacta de la observación. Así, pues, esta resolución sirve para determinar el error de un cronómetro, quiere decir, su adelanto ó su atraso respecto de la hora real, pues es claro que si se anota la indicación de este instrumento en el instante preciso en que se observa la distancia zenital del astro, la diferencia de esa indicación respecto de la calculada T da á conocer la corrección que aquella necesita. La determinación exacta del tiempo sirve de base á todas las demás aplicaciones de la Astronomía, de modo que desde este punto de vista constituye uno de los problemas más usuales.

124.—Se presenta también con bastante frecuencia la resolución del problema inverso, á saber, hallar la distancia zenital de un astro en un instante dado. En tal caso, se conocen φ, δ y $h = T - a$; y se tendrá la ecuación fundamental, después de convertir á h en arco:

$$\cos. z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\,\varphi\cos.\,\delta\cos.\,h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

la cual se calcula fácilmente por logaritmos valiéndose de un ángulo auxiliar M, determinado por la primera de las fórmulas siguientes, y cuyo valor se introduce en la segunda:

$$\left.\begin{aligned} \tan.\,M &= \frac{\tan.\,\delta}{\cos.\,h} \\ \cos.\,z &= \frac{\text{sen.}\,\delta}{\text{sen.}\,M}\cos.\,(M - \varphi) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

125.—Otro de los problemas más comunes es el de hallar el azimut que tiene una estrella á una hora dada T. Entonces se conoce $h = T - a$, así como φ y δ. El triángulo dará la ecuación:

$$\text{sen.}\,\delta = \text{sen.}\,\varphi\cos.\,z + \cos.\,\varphi\,\text{sen.}\,z\cos.\,a$$

Sustituyendo en ella el valor (A) de cos. z, y el siguiente de sen. z, que se obtiene por el mismo triángulo,

$$\text{sen.}\,z = \frac{\text{sen.}\,h\cos.\,\delta}{\text{sen.}\,a}$$

resulta sin dificultad:

$$\tan.\,a = \frac{\text{sen.}\,h}{\cos.\,\varphi\tan.\,\delta - \text{sen.}\,\varphi\cos.\,h}$$

Llamando M un ángulo subsidiario, se podrá calcular esta ecuación por logaritmos bajo la forma:

$$\left.\begin{aligned} \tan.\,M &= \frac{\tan.\,\delta}{\cos.\,h} \\ \tan.\,a &= \frac{\tan.\,h\cos.\,M}{\text{sen.}\,(M - \varphi)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Con los mismos datos φ, δ y h puede también determinarse el azimut á la vez que el ángulo paraláctico por las fórmulas de Napier, que aplicadas á nuestro triángulo, serán:

$$\left.\begin{aligned} \tan.\,\tfrac{1}{2}(a + q) &= \cot.\,\tfrac{1}{2}\,h\,\frac{\cos.\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)}{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta)} \\ \tan.\,\tfrac{1}{2}(a - q) &= \cot.\,\tfrac{1}{2}\,h\,\frac{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)}{\cos.\,\tfrac{1}{2}(\varphi + \delta)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (5)$$

Por uno ú otro método, si á la hora dada T se mide el ángulo entre la estrella y una señal terrestre, podrá deducirse el azimut de ésta por medio de la combinación del ángulo observado con el azimut a de la estrella en ese instante.

126.—La determinación de la latitud constituye otra de las aplicaciones más importantes. Conociendo, en efecto, la hora exacta á la cual se mide la distancia zenital de una estrella, se tienen los datos: $h = T - a$, z y δ. Las fórmulas (3) darán, pues,

$$\left.\begin{aligned} \tan.\,M &= \frac{\tan.\,\delta}{\cos.\,h} \\ \cos.\,(M - \varphi) &= \frac{\text{sen.}\,M}{\text{sen.}\,\delta}\cos.\,z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

la primera de las cuales suministra el ángulo M, la segunda $M - \varphi$ y de cuya combinación resulta, por consiguiente, el valor de φ.

127.—Para dar una idea del modo de determinar las longitudes geográficas, supongamos que se mida la distancia zenital de un astro que, como la luna, varíe rápidamente de ascensión recta, y sea δ su declinación en el instante T en que se observe, y φ la latitud del lugar. Con los elementos φ, δ y z podremos calcular su ángulo horario h por las fórmulas (2), y entonces la relación (1) dará su ascensión recta á la hora T de la observación. Si en seguida por medio de las Tablas astronómicas se calcula la hora T' de otro lugar de la tierra, por ejemplo, de Greenwich, á la cual tenía la luna la ascensión recta observada $\alpha = T - h$, la diferencia de horas $T' - T$ expresará en tiempo, la longitud de la estación; porque esta coordenada no es otra cosa más que la diferencia de horas que se cuentan en dos lugares de la tierra en un mismo instante físico, como es aquel en que un astro adquiere una posición determinada.

Tales son, en resumen, las aplicaciones prácticas más frecuentes de la Astronomía; y aunque las resoluciones de estos problemas están muy lejos de ofrecer la extremada sencillez con que las he presentado, siempre considero ventajoso formarse desde el principio una idea general de su objeto, porque de esa manera se fijará más la atención en los detalles correspondientes á cada una de las operaciones. Estos detalles, la preparación de los datos, sus diversas correcciones, el uso de la Efemérides y las modificaciones de que, en determinadas circunstancias, es susceptible el formulario mismo que antes he expuesto, formarán el principal objeto de los Capítulos siguientes.

CAPITULO II.

DE LA MEDIDA DEL TIEMPO.

128.—Hemos dado á conocer el día sideral, que es el espacio de tiempo que transcurre entre dos pasos sucesivos de una estrella por el meridiano, y dijimos también que se cuenta desde el instante del tránsito del punto equinoccial, origen de las ascensiones rectas. Esta unidad de tiempo se divide en 24 horas siderales; cada una de estas en 60 minutos; cada minuto en 60 segundos, etc. En la Astronomía se hace un uso continuo del tiempo sideral; pero también se emplea con mucha frecuencia el solar y, por consiguiente, importa establecer la relación exacta que existe entre estas dos especies de tiempo. Antes de hacerlo, sin embargo, recordemos que el día solar puede ser de tiempo *verdadero* y de tiempo *medio*. El primero es determinado por dos tránsitos sucesivos del sol verdadero por el meridiano; y el segundo por los de un astro ficticio, llamado *sol medio*, que se supone recorrer una órbita circular con un movimiento uniforme, é igual en magnitud á la velocidad media de sol verdadero. Se sabe, en efecto, que este último astro recorre aparentemente una órbita elíptica, aunque poco excéntrica, con una velocidad algo variable, lo cual da por resultado una pequeña desigualdad en la duración de los días solares verdaderos; y como esas diferencias serían difíciles de imitar en las máquinas que sirven para medir el tiempo, tales como los péndulos y los cronómetros, los astrónomos han recurrido al artificio del tiempo medio, como más á propósito para ser medido con aparatos cuya construcción está fundada en la uniformidad del movimiento. La adopción del tiempo medio no puede originar, por otra parte, error alguno respecto de la realidad de las cosas, con tal que en cualquier instante se pueda determinar la diferencia que existe entre una y otra especie de tiempo; porque esta diferencia vendrá á ser una corrección aplicable á las indicaciones de los instrumentos arreglados al movimiento del sol medio ó ficticio.

La diferencia de la hora media á la hora verdadera se llama *ecuación del tiempo*. Si, pues, se representa la primera por M y la segunda por V, tendremos en general: $M - V = E$

$$M = V + E \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

siendo E la ecuación del tiempo. Esta cantidad, que apenas excede de un cuarto de hora cuando adquiere su valor máximo, es positiva ó negativa en diversas épocas del año, según que el movimiento irregular del sol verdadero lo hace atrasar ó adelantar respecto del sol medio, dotado hipotéticamente de un movimiento uniforme. El valor de E es positivo actualmente desde el 25 de Diciembre hasta el 15 de Abril siguiente, así como desde el 15 de Junio hasta el 31 de Agosto. En todo el resto del año es negativo. En las Efemérides consta su valor para cada día del año, y puede interpolarse, en consecuencia, para un instante cualquiera.

129.—Veamos ahora la manera de calcular la duración del día medio y su relación con el sideral. Como el año trópico, que es el tiempo que transcurre entre dos equinoccios de primavera, tiene una duración de 365.242215 días, se deduce que en ella recorre aparentemente el sol toda su órbita; y que suponiendo uniforme su movimiento, hallaríamos el correspondiente á cada día por la ecuación:

$$x = \frac{360^\circ}{365^d.242215} = \frac{1296000''}{365^d.242215} = 59'\,8''.33$$

Este valor será, por consiguiente, el movimiento diario que se atribuye al sol medio en su órbita, la cual se supone ser el ecuador, de suerte que si un día cualquiera se admite que este astro ocupe la posición p grados de la órbita en el momento de su tránsito por el me-

ridiano de un lugar, al día siguiente al llegar á este plano ocupará la posición $p + 59'\,8''.33$. Se concibe entonces que la tierra en su movimiento de rotación ha tenido que girar $360^\circ\,59'\,8''.33$ para que el meridiano del lugar que se considera haya vuelto á ponerse en la dirección del sol medio. Como, además, el intervalo entre estos dos tránsitos, que es el que constituye el día medio, se divide también en 24^h, resulta que cada media hora corresponderá á un arco de......... $\frac{360^\circ\,59'\,8''.33}{24}$, ó igual á $15^\circ\,2'\,27''.847$.

Desprovistas las estrellas de un movimiento semejante, sólo tiene que girar la tierra 360° para que un meridiano vuelva á coincidir con una estrella fija, lo cual asigna á cada hora sideral un arco de 15° solamente. De aquí se deduce que el tiempo que invierte la tierra en recorrer el arco de $59'\,8''.33$ representa el exceso del día medio respecto del sideral; exceso que puede valuarse tanto en tiempo medio como en tiempo sideral. Para lo primero tendremos que si el arco de $15^\circ\,2'\,27''.847$ corresponde á una hora media, $59'\,8''.33$ corresponderá á $3^m 55^s.90944$ de la misma especie de tiempo; y para lo segundo, si 15° corresponden á una hora sideral, el arco de $59'8''.33$ corresponderá á $3^m 56^s.55533$ de tiempo sideral. Estas duraciones se designan generalmente con el nombre de *aceleración* de las estrellas fijas, porque expresan efectivamente la cantidad de tiempo en que las estrellas parecen anticipar diariamente su tránsito por el meridiano respecto del sol.

De la aceleración $3^m 55^s.90944$ en tiempo medio, y $3^m 56^s.55533$ en tiempo sideral, puede deducirse la relación que existe entre ambas especies de tiempo; pues designando en general por m una duración cualquiera expresada en tiempo solar medio, y por s su equivalente en tiempo sideral, tendremos:

$$\frac{m}{s} = \frac{235^s.90944}{236^s.55533}$$

de donde resultan las dos relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} m = 0.9972696\, s \\ s = 1.0027379\, m \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

por cuyo medio es fácil convertir intervalos de tiempo sideral en tiempo medio y vice versa. Sin embargo, como estas reducciones son muy frecuentes, y sería molesto recurrir siempre al cálculo directo, se han formado las Tablas que constan en las páginas siguientes, y cuyo uso abrevia notablemente la operación. La primera de estas Tablas tiene por argumento el tiempo medio en horas, minutos y segundos, y al lado de cada cantidad la corrección aditiva para convertir los intervalos correspondientes en tiempo sideral. La segunda, por el contrario, tiene el tiempo sideral por argumento y las correcciones sustractivas que les corresponden.

Ejemplo.—Sea $7^h\,19^m\,24^s.57$ una duración de tiempo medio que se desea convertir en sideral. Por la primera Tabla se tendrá:

Por 7^h	....	$1^m\ 8^s.995$
„ 19^m	....	3.121
„ 24^s	....	0.066
„ 0.5	....	0.001
„ 0.07	....	0.001
Por $7^h\,19^m\,24^s.57$	....................Reducción $= +$	$1^m\ 12^s.184$
	Duración media $=$	$7\ \ 19\ \ 24.57$
	Duración sideral $=$	$7^h\ 20^m\ 36^s.75$

Reduzcamos ahora por la segunda Tabla el intervalo $7^h\,20^m\,36^s.75$ de tiempo sideral á tiempo medio.

Por 7^h	....	$1^m\ 8^s.807$
„ 20^m	....	3.277
„ 36^s	....	0.098
„ 0.7	....	0.002
„ 0.05	....	0.000
Por $7^h\,20^m\,36^s.75$	....................Reducción $= -$	$1^m\ 12^s.184$
	Duración sideral $=$	$7\ \ 20\ \ 36.75$
	Duración media $=$	$7^h\ 19^m\ 24^s.57$

Aunque en las Tablas no constan entre los argumentos las frac-

ciones de segundo, se toman las correcciones correspondientes á cada cifra suponiendo que expresa segundos enteros, y se escriben hacia la derecha en el lugar que les corresponde.

130.—Los cálculos precedentes sirven para convertir los *intervalos*, expresados en una especie de tiempo, en los equivalentes expresados en la otra; pero para reducir una hora absoluta de tiempo medio á la sideral que debe contarse en ese instante, ó vice versa, se hace uso de la fórmula $T = \alpha + h$, que contiene la relación entre la hora sideral, la ascensión recta de un astro y su ángulo horario. Aplicada al sol medio, siendo A su ascensión recta y H su ángulo horario, tendremos, pues:

$$T = H + A$$

y como el ángulo horario del sol medio al Occidente del meridiano no es otra cosa más que la hora media que se cuenta en ese instante, se ve que esta fórmula da desde luego la reducción de una hora á la otra. Si el sol se halla al Oriente del meridiano, H representa el tiempo que le falta para llegar á este plano, y por tanto la hora media es en ese momento $H' = 24^h - H$. Introduciendo este valor de H, y teniendo presente que el ángulo horario en tal caso es negativo, la ecuación será: $T = A + H' - 24^h$. Este resultado indica que subsiste la fórmula primitiva, pues la adición ó la substracción de 24^h no tiene más objeto que el de evitar las horas negativas, ó bien el de no excederse en la fecha del día á que corresponden los datos. Por regla general: siempre que una combinación de horas produzca más de 24^h, debe restarse esa cantidad; y por el contrario, agregarse para no tener horas negativas.

De las consideraciones precedentes se deduce que en todos casos debe tomarse $T = H + A$ por relación entre las horas media y sideral; pero conviene notar que como la ascensión recta A del sol siempre expresa tiempo sideral, mientras que H expresa tiempo medio, resulta que si tomamos por A la hora sideral que se cuenta en el momento del tránsito del sol, no podrá subsistir la ecuación entre una duración media y las dos siderales A y T, á menos que se reduzca H á esta última especie de tiempo por la adición de la cantidad que le corresponda, tomada en las primeras de las Tablas de reducción. Esto equivale evidentemente á tomar en cuenta el cambio de la ascensión recta del sol en el tiempo H, en proporción de su aumento diario de $3^m\ 56^s.55$, ó lo que es lo mismo, á tomar por A en la fórmula, tal como la hemos escrito, la ascensión recta del sol en el instante H. Si, pues se toma la que corresponde al momento de su culminación, el valor de T deberá ser:

$$T = H + A + \text{acel.}(H) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

representado por acel. (H) la corrección que da la Tabla por el intervalo H, ó sea la parte proporcional de la aceleración.

Calculemos, por ejemplo, la hora sideral que se contaba en México el día 16 de Enero de 1870 á las 9^h de la mañana. En tiempo astronómico, la fecha y hora que corresponden á ese instante son: 15 de Enero y 21^h; y como el 15 al pasar el sol por el meridiano de México tenía por ascensión recta $A = 19^h 40^m 1^s.32$, según las Efemérides, dispondremos el cálculo como sigue:

$$\begin{array}{rrrr} H = & 21^h & 00^m & 00^s.00 \\ A = & 19 & 40 & 1\ .32 \\ \text{acel.}(H) = & & 3 & 26\ .99 \\ \hline T = & 16^h & 43^m & 28^s.31 \end{array}$$

La suma de A y acel. (H) representa la ascensión recta del sol á la hora H, y en este caso sería de $19^h\ 43^m\ 28^s.31$.

131.—Si conociendo la hora sideral T quisiera hallarse la hora media correspondiente, la ecuación primitiva daría $H = T - A$; pero si por A se toma la ascensión recta del sol en el momento de su tránsito, la diferencia $T - A$, sería el ángulo horario H en tiempo sideral, por indicar esta clase de tiempo T y A. Para obtener, pues, el valor de H en tiempo medio, es preciso restarle la reducción que da la Tabla segunda por el intervalo $(T - A)$. Representándola por red. $(T - A)$, tendremos, en consecuencia:

$$H = T - A - \text{red.}(T - A) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Para aplicar esta fórmula calculemos la hora media de México el día 15 de Enero de 1870 cuando la sideral era $T = 16^h\ 43^m\ 28^s.31$.

$$\begin{array}{rrrr} T = & 16^h & 43^m & 28^s.31 \\ A = & 19 & 40 & 1\ .32 \\ \hline T - A = & 21 & 3 & 26\ .99 \\ \text{red.}(T - A) = & - & 3 & 26\ .99 \\ \hline H = & 21^h & 00^m & 00^s.00 \end{array}$$

En este ejemplo fué preciso añadir 24^h á T para poder efectuar la substracción de la ascensión recta A.

132.—En las fórmulas (3) y (4) se ha tomado por A la ascensión recta del sol medio á la hora de su culminación. Este elemento lo suministran las Efemérides para todos los días del año, y está calculado para el instante del paso del sol por el meridiano del lugar para el cual se han formado las mismas Tablas, y que se denomina *primer meridiano ó meridiano principal*. Las Efemérides inglesas que tienen por título "*Nautical Almanac*" y las americanas que llevan el mismo nombre, están referidas al de Greenwich, como primer meridiano. Las francesas llamadas "*Connaissance des temps*" se refieren al meridiano de Paris; las españolas al de San Fernando, etc.

No obstante que el origen del día solar medio es el instante en que se supone que el centro del sol medio pasa por el meridiano de un lugar, en las Efemérides se llama ese momento *medio día medio*, así como también se denomina *medio día verdadero* el instante en que culmina el sol real. Sin duda estas denominaciones están derivadas del lenguaje común de los usos civiles, en los cuales se toma generalmente por *día* el espacio de tiempo que permanece el sol sobre el horizonte; y aunque astronómicamente impropias, están, sin embargo, admitidas. Así, pues, las Tablas astronómicas dan la ascensión recta del sol medio para el medio día medio del primer meridiano, y comunmente bajo el título de "*Tiempo sideral á medio día medio;*" porque es, en efecto, la hora sideral que se cuenta al pasar el sol medio por el meridiano. Lo primero que, según esto, debe hacerse para aplicar las fórmulas (3) y (4), es interpolar el valor de A para el

TABLA

Para reducir intervalos de tiempo medio á intervalos equivalentes de tiempo sideral.

Argumento: *el tiempo medio.*

Horas.	Reducción.	Minutos.	Reducción.	Minutos.	Reducción.	Segunds.	Reducción.	Segunds.	Reducción.
1^h	$+0^m 9^s.856$	1^m	$+0^s.164$	31^m	$+5^s.092$	1^s	$+0^s.003$	31^s	$+0^s.085$
2	0 19 .713	2	0.329	32	5.257	2	.005	32	.088
3	0 29 .569	3	0.493	33	5.421	3	.008	33	.090
4	0 39 .426	4	0.657	34	5.585	4	.011	34	.093
5	0 49 .282	5	0.821	35	5.750	5	0.014	35	0.096
6	0 59 .139	6	0.986	36	5.914	6	.016	36	.099
7	1 8 .995	7	1.150	37	6.078	7	.019	37	.101
8	1 18 .852	8	1.314	38	6.242	8	.022	38	.104
9	1 28 .708	9	1.478	39	6.407	9	.025	39	.107
10	1 38 .565	10	1.643	40	6.571	10	0.027	40	0.109
11	1 48 .421	11	1.807	41	6.735	11	.030	41	.112
12	1 58 .278	12	1.971	42	6.899	12	.033	42	.115
13	2 8 .134	13	2.136	43	7.064	13	.036	43	.118
14	2 17 .991	14	2.300	44	7.228	14	.038	44	.120
15	2 27 .847	15	2.464	45	7.392	15	0.041	45	0.123
16	2 37 .704	16	2.628	46	7.557	16	.044	46	.126
17	2 47 .560	17	2.793	47	7.721	17	.046	47	.129
18	2 57 .416	18	2.957	48	7.885	18	.049	48	.131
19	3 7 .273	19	3.121	49	8.049	19	.052	49	.134
20	3 17 .129	20	3.285	50	8.214	20	0.055	50	0.137
21	3 26 .986	21	3.450	51	8.378	21	.057	51	.140
22	3 36 .842	22	3.614	52	8.542	22	.060	52	.142
23	3 46 .699	23	3.778	53	8.707	23	.063	53	.145
24	3 56 .555	24	3.943	54	8.871	24	.066	54	.148
		25	4.107	55	9.035	25	0.068	55	0.151
		26	4.271	56	9.199	26	.071	56	.153
		27	4.435	57	9.364	27	.074	57	.156
		28	4.600	58	9.528	28	.077	58	.159
		29	4.764	59	9.692	29	.079	59	.161
		30	+4.928	60	+9.856	30	+0.082	60	+0.164

meridiano del lugar en que se desea calcular la hora media por la sideral, ó vice versa. Como el sol medio se supone uniforme en su movimiento, la interpolación se reduce á hallar la parte proporcional que, por la variación diurna $3^m 56^s.555$, corresponde al lugar cuya longitud respecto del meridiano de las Efemérides sea L. En efecto, en un lugar que tenga L por longitud expresada en tiempo, se verificará el paso del sol L horas después que en el primer meridiano; ó bien L horas antes si la longitud es negativa, quiere decir,

TABLA

Para reducir intervalos de tiempo sideral á intervalos equivalentes de tiempo medio.

Argumento: *el tiempo sideral.*

Horas.	Reducción.	Minutos.	Reducción.	Minutos.	Reducción.	Segunds.	Reducción.	Segunds.	Reducción.
1^h	$-0^m 9^s.830$	1^m	$-0^s.164$	31^m	$-5^s.079$	1^s	$-0^s.003$	31^s	$-0^s.085$
2	0 19 .659	2	0.328	32	5.242	2	.005	32	.087
3	0 29 .489	3	0.492	33	5.406	3	.008	33	.090
4	0 39 .318	4	0.655	34	5.570	4	.011	34	.093
5	0 49 .148	5	0.819	35	5.734	5	0.014	35	0.096
6	0 58 .977	6	0.983	36	5.898	6	.016	36	.098
7	1 8 .807	7	1.147	37	6.062	7	.019	37	.101
8	1 18 .637	8	1.311	38	6.225	8	.022	38	.104
9	1 28 .466	9	1.474	39	6.389	9	.025	39	.107
10	1 38 .296	10	1.638	40	6.553	10	0.027	40	0.109
11	1 48 .125	11	1.802	41	6.717	11	.030	41	.112
12	1 57 .955	12	1.966	42	6.881	12	.033	42	.115
13	2 7 .784	13	2.130	43	7.045	13	.036	43	.117
14	2 17 .614	14	2.294	44	7.208	14	.038	44	.120
15	2 27 .443	15	2.457	45	7.372	15	0.041	45	0.123
16	2 37 .273	16	2.621	46	7.536	16	.044	46	.126
17	2 47 .103	17	2.785	47	7.700	17	.046	47	.128
18	2 56 .932	18	2.949	48	7.864	18	.049	48	.131
19	3 6 .762	19	3.113	49	8.028	19	.052	49	.134
20	3 16 .591	20	3.277	50	8.191	20	0.055	50	0.137
21	3 26 .421	21	3.440	51	8.355	21	.057	51	.139
22	3 36 .250	22	3.604	52	8.519	22	.060	52	.142
23	3 46 .080	23	3.768	53	8.683	23	.063	53	.145
24	3 55 .909	24	3.932	54	8.847	24	.066	54	.147
		25	4.096	55	9.010	25	0.068	55	0.150
		26	4.260	56	9.174	26	.071	56	.153
		27	4.423	57	9.338	27	.074	57	.156
		28	4.587	58	9.502	28	.076	58	.158
		29	4.751	59	9.666	29	.079	59	.161
		30	−4.915	60	−9.830	30	−0.082	60	−0.164

si el lugar de que se trata está al Oriente del meridiano que se haya tomado por primero ó principal. Siendo, pues, A' la ascensión recta del sol medio que consta en las Efemérides, y L la longitud del lugar, se tendrá en general:

$$A = A' + 236^s.56 \frac{L}{24^h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

dando á L el signo que le convenga según la posición del lugar respecto del primer meridiano. Aunque este cálculo es extremadamente sencillo, y una vez hecho se obtiene para cada lugar una corrección constante, se puede ejecutar también por medio de la primera de nuestras Tablas, puesto que lo que se desea en último resultado es hallar la aceleración correspondiente al tiempo ó intervalo L. Determinemos, por ejemplo, la reducción de las ascensiones rectas del sol medio calculadas para Greenwich al medio día de México, siendo la longitud de esta ciudad $L = 6^h 36^m 28^s.6$ al Oeste de aquel meridiano.

Por 6^h	59^s 139
" 36^m	5. 914
" 28^s	0. 077
" 0. 6..	0. 002
Por $6^h\ 36^m\ 28^s.6$ ....corrección $= +$	$1^m\ 5^s.132$

La cantidad $1^m 5^s.13$ es, por consiguiente, el aumento constante que debe hacerse á las ascensiones rectas del sol á medio día de Greenwich para reducirlas al medio día de México. El 15 de Enero de 1870, por ejemplo, el Almanaque Náutico da $A' = 19^h 38^m 56^s.19$, por lo cual he tomado $A = 19^h 40^m 1^s.32$ para México al aplicar las fórmulas precedentes.

133.—Las relaciones que se han expuesto entre las diversas especies de tiempo se prestan á muchas combinaciones para resolver varios problemas que se ofrecen con frecuencia. Así, por ejemplo, si se da la hora solar verdadera y se desea hallar la sideral, se determinará primero la hora media correspondiente con ayuda de la ecuación del tiempo por la fórmula (1), y en seguida ésta se convertirá en sideral por la relación (3). Presentemos algunos ejemplos usuales de esta clase de combinaciones.

Ejemplo 1º—¿Qué hora media se contó en México el 5 de Diciembre de 1870 en el instante en que la estrella *α Tauri*, cuya ascensión recta es $\alpha = 4^h 28^m 31^s.19$, tuvo $1^h 17^m 23^s.65$ por ángulo horario al Este del meridiano?

El Almanaque Náutico americano indica que en esa fecha á me-

dio día de Greenwich, la ascensión recta del sol medio fué............ $A' = 16^h 56^m 19^s.92$. Tendremos, pues:

$$
\begin{array}{rrrr}
\alpha = & 4^h & 28^m & 31^s.19 \\
h = - & 1 & 17 & 23\ .65 \\
\hline
T = & 3 & 11 & 7\ .54 \\
A = - & 16 & 57 & 25\ .05 \\
\hline
T - A = & 10 & 13 & 42\ .49 \\
\text{red.}\,(T - A) = & - & 1 & 40\ .54 \\
\hline
H = & 10^h & 12^m & 1^s.95
\end{array}
$$

Ejemplo 2º—¿A qué hora media pasó ese día la misma estrella por el meridiano de México?

Este problema puede considerarse como un caso particular del precedente, pues en el momento del tránsito de un astro, su ángulo horario es nulo, y por consiguiente, se tendrá $T = \alpha$, con lo cual la fórmula (4) se convierte en la siguiente:

$$\text{Hora media del paso.........} H = \alpha - A - \text{red.}\,(\alpha - A) \text{........} \quad (6)$$

Aplicándola á la estrella *α Tauri*, se halla:

$$
\begin{array}{rrrr}
\alpha = & 4^h & 28^m & 31^s.19 \\
A = - & 16 & 57 & 25\ .05 \\
\hline
\alpha - A = & 11 & 31 & 6\ .14 \\
\text{red.}\,(\alpha - A) = & - & 1 & 53\ .22 \\
\hline
H = & 11^h & 29^m & 12^s.92
\end{array}
$$

Ejemplo 3º—¿Cuál sería la ascensión recta de un astro observado el mismo día al Oeste del meridiano de México, y que tuviese $3^h 25^m 40^s.37$ por ángulo horario, á la hora media $H = 9^h 55^m 49^s.21$?

$$
\begin{array}{rrrr}
H = & 9^h & 55^m & 49^s.21 \\
A = & 16 & 57 & 25\ .05 \\
\text{acel.}\,(H) = & + & 1 & 37\ .88 \\
\hline
T = & 2 & 54 & 52\ .14 \\
h = - & 3 & 25 & 40\ .37 \\
\hline
\alpha = & 23^h & 29^m & 11^s.77
\end{array}
$$

Ejemplo 4º—¿Cuál era el ángulo horario de α *Tauri* el 5 de Diciembre de 1870 cuando se contaban en México las $13^h 00^m 00^s$ de tiempo medio?

$$
\begin{array}{rrrr}
H = & 13^h & 00^m & 00^s.00 \\
A = & 16 & 57 & 25.05 \\
\text{acel.}\,(H) = & + & 2 & 8.13 \\
\hline
T = & 5 & 59 & 33.18 \\
\alpha = - & 4 & 28 & 31.19 \\
\hline
h = + & 1^h & 31^m & 1^s.99
\end{array}
$$

134.—Como se ofrece con mucha frecuencia la conversión de las longitudes geográficas y de los ángulos horarios, de arco á tiempo y vice versa, terminaré este Capítulo con una Tabla por cuyo medio se hacen las reducciones acaso con más facilidad que por la regla del número 25. El uso de esta Tabla es tan sencillo, que se comprenderá inmediatamente con las siguientes aplicaciones.

La longitud de México respecto de Greenwich, expresada en tiempo, es: $L = 6^h\ 36^m\ 28^s.6$, ¿cuál será su valor en arco?

Por 6^h	$90°\ 00'\ 00''.0$
„ 36^m	$9\ \ 00\ \ 00\ .0$
„ 28^s	$7\ \ 00\ .0$
„ 0.6	$9\ .0$
Por $6^h\ 36^m\ 28^s.6$	$99°\ \ 7'\ \ 9''.0$

Si la longitud de México es de $99°\ 7'\ 9''$, ¿á cuánto equivale en tiempo?

Por $90°$	$6^h\ 00^m\ 00^s.0$
„ 9	$36\ \ 00\ .0$
„ $7'$	$28\ .0$
„ $9''$	$0\ .6$
Por $99°\ 7'\ 9''$	$6^h\ 36^m\ 28\ .6$

TABLA

PARA CONVERTIR TIEMPO EN ARCO Y RECIPROCAMENTE.

Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.
1^h	15°	1^m	0°15′	31^m	7°45′	1^s	0′15″	31^s	7′45″
2	30	2	0 30	32	8 00	2	0 30	32	8 00
3	45	3	0 45	33	8 15	3	0 45	33	8 15
4	60	4	1 00	34	8 30	4	1 00	34	8 30
5	75	5	1 15	35	8 45	5	1 15	35	8 45
6	90	6	1 30	36	9 00	6	1 30	36	9 00
7	105	7	1 45	37	9 15	7	1 45	37	9 15
8	120	8	2 00	38	9 30	8	2 00	38	9 30
9	135	9	2 15	39	9 45	9	2 15	39	9 45
10	150	10	2 30	40	10 00	10	2 30	40	10 00
11	165	11	2 45	41	10 15	11	2 45	41	10 15
12	180	12	3 00	42	10 30	12	3 00	42	10 30
13	195	13	3 15	43	10 45	13	3 15	43	10 45
14	210	14	3 30	44	11 00	14	3 30	44	11 00
15	225	15	3 45	45	11 15	15	3 45	45	11 15
16	240	16	4 00	46	11 30	16	4 00	46	11 30
17	255	17	4 15	47	11 45	17	4 15	47	11 45
18	270	18	4 30	48	12 00	18	4 30	48	12 00
19	285	19	4 45	49	12 15	19	4 45	49	12 15
20	300	20	5 00	50	12 30	20	5 00	50	12 30
21	315	21	5 15	51	12 45	21	5 15	51	12 45
22	330	22	5 30	52	13 00	22	5 30	52	13 00
23	345	23	5 45	53	13 15	23	5 45	53	13 15
24	360	24	6 00	54	13 30	24	6 00	54	13 30
		25	6 15	55	13 45	25	6 15	55	13 45
		26	6 30	56	14 00	26	6 30	56	14 00
		27	6 45	57	14 15	27	6 45	57	14 15
		28	7 00	58	14 30	28	7 00	58	14 30
		29	7 15	59	14 45	29	7 15	59	14 45
		30	7 30	60	15 00	30	7 30	60	15 00

No constando en la Tabla las decimales, lo que se hace es tomar la cantidad que correspondería á cada cifra si fuese entera, y se divide después por 10 ó por 100, según el rango de la decimal. Así, para encontrar el arco equivalente á $0^s.6$, tomamos el que corresponde á 6^s, que es $1'\ 30''$ ó bien $90''$, y lo dividimos por 10. Una operación análoga se ejecuta para hallar el tiempo equivalente á un arco pequeño que no se encuentre en la Tabla, por ejemplo, $12°$. Considerándolo descompuesto en $15'' - 3''$, su correspondiente será

$1^s - \frac{1}{5}^s = 0^s.8$. Por otra parte, para más sencillez puede hacerse uso de la pequeña tabla auxiliar que sigue, desde 1 hasta 15.

Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.	Arco.	Tiempo.
1′	4^s	6′	24^s	11′	44^s	1″	0^s 07	6″	0^s 40	11″	0^s 73
2	8	7	28	12	48	2	.13	7	.47	12	.80
3	12	8	32	13	52	3	.20	8	.53	13	.87
4	16	9	36	14	56	4	.27	9	.60	14	.93
5	20	10	40	15	60	5	.33	10	.67	15	1.00

CAPITULO III.

DE LA REFRACCIÓN ASTRONÓMICA.

135.—Se sabe que cuando un rayo luminoso pasa oblicuamente de un medio á otro de diversa densidad, se desvía de su dirección primitiva. Este fenómeno, conocido con el nombre de *refracción*, produciéndose en la masa de aire que rodea á la tierra, influye necesariamente en la posición de los astros haciéndonoslos ver en un lugar algo diferente del que ocupan en realidad. La desviación total que sufre el rayo luminoso que emite un astro se produciría de una sola vez al atravesar la atmósfera terrestre, si esta fuera de una densidad uniforme en toda su altura; pero teniendo una densidad decreciente desde la superficie de la tierra, podemos considerarla como compuesta de capas concéntricas, diversamente densas, en cuya hipótesis el rayo luminoso iría experimentando desviaciones parciales y formando, en sus distintas direcciones, una línea quebrada ó poligonal hasta llegar al observador. Atribuyendo á las capas un espesor sumamente pequeño, de manera que pueda suponerse que sus densidades tengan un decremento gradual y continuo, la línea poligonal formada por el rayo luminoso se convertirá en una curva, cuyo último elemento es el que recibe el observador, el cual refiere la dirección del astro á la de la tangente en ese punto de la curva.

Sea $A\,a$ (fig. 39ª) la dirección en que un rayo de luz, que parte de un astro A, entra en a á la atmósfera terrestre. Al atravesar la primera capa sufre la primera desviación, y encuentra á la segunda en b; en este punto vuelve á desviarse, formando el segundo elemento $b\,c$ de la curva; y así sucesivamente hasta el observador O, quien verá el astro en A', siendo $A\,O\,A'$ el efecto de la refracción. Para dar una idea del modo de calcularlo, recordemos las principales leyes á que está sujeto este fenómeno. La primera de ellas indica que el plano $O\,a\,C$ en que se encuentra el rayo después de refractado, coincide con el plano $C\,a\,A$ en que se hallaba antes de refractarse; y la segunda que el seno del ángulo $A\,a\,Z'$ de incidencia, guarda una relación constante con el del ángulo $C\,a\,b$ de refracción.

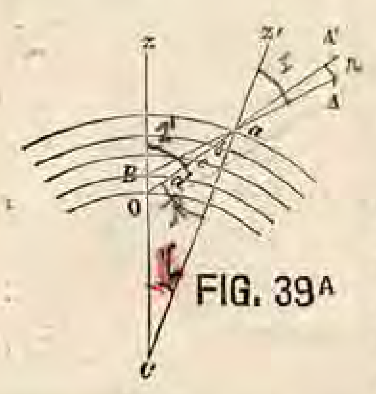


FIG. 39A

Por la primera ley se comprende que todo el efecto de la refracción se produce en el plano vertical determinado por el rayo incidente $A\,a$ y por la línea vertical $C\,Z$ del observador, ó lo que es lo mismo, que la refracción altera únicamente la distancia zenital sin producir variación en el azimut del astro. La alteración consiste en disminuir las distancias zenitales, por lo cual es preciso añadir á las que se observen el valor de la refracción.

Fundados en la segunda ley podremos calcular el valor aproximativo de la refracción, reflexionando para esto que la mayor parte de la desviación se produce en las capas más densas, que son las más inmediatas á la tierra; y que, en consecuencia, podremos admitir que la refracción sería sensiblemente la misma suponiendo que todo el fenómeno se verifica en a, admitiendo que este fuese un punto de una capa próxima á la tierra, y que el rayo refractado siguiese después una dirección rectilínea $a\,O$.

Designando por I el ángulo de incidencia $A\,a\,Z'$, por R el

de refracción $C\,a\,O$, y por n el índice de refracción del aire, tendremos:

$$\frac{\text{sen. } I}{\text{sen. } R} = n$$

Prolongando hasta B el rayo incidente, y llamando r el efecto de la refracción $B\,a\,O = A\,a\,A'$, se tiene además, $I = R + r$. Sustituyendo en la ecuación anterior, desarrollando y teniendo presente que, por ser r sólo de algunos minutos, se puede suponer $\cos. r = 1$ y $\text{sen. } r = r \text{ sen. } 1''$, resulta:

$\text{sen}(R+r) = \text{sen } R \cos r + \text{sen } r \cos R$

$$\frac{\text{sen } R + r \text{ sen } 1'' \cos R}{\text{sen } R}$$

$$r = \frac{n-1}{\text{sen. } 1''} \tan. R$$

$= 1 + r \text{ sen } 1'' \cot R$

El ángulo $Z\,O\,A'$ es la distancia zenital *aparente*, ó afectada por la refracción; designándola por z', y por C el ángulo $Z\,C\,Z'$, se halla $R = z' - C$, con lo cual el valor de r será:

$$r = \frac{n-1}{\text{sen. } 1''} \tan. (z' - C)$$

Siempre que no es muy considerable la distancia zenital, el valor de C es pequeño, y podremos omitirlo para adoptar la fórmula aproximativa:

$$r = \frac{n-1}{\text{sen. } 1''} \tan. z'$$

la cual indica que las refracciones son proporcionales á las tangentes de las distancias zenitales aparentes. Introduciendo en ella el valor del coeficiente de refracción del aire, que es $n = 1.00028$, se encuentra:

$$r = 57''.8 \tan. z' \text{ .... } (1)$$

136.—La fórmula anterior suministra con suficiente exactitud las refracciones desde 0° hasta 50° ó 60° de distancia zenital; pero la hipótesis en que está fundada origina errores de importancia para mayores distancias al zenit. Ya para $z' = 80°$ produce un error de unos 7″, y este crece rápidamente al aumentar z'. A la verdad, el establecimiento de una fórmula que represente con entera precisión las refracciones para cualquiera altura ó distancia zenital, es uno de los problemas que ofrecen más dificultades, originadas en su mayor parte por nuestra ignorancia de la verdadera constitución de la atmósfera y de las leyes que siguen el decremento de densidad y temperatura de sus capas superiores, que no son fácilmente accesibles á nuestra observación. Muchos geómetras distinguidos, como Laplace, Bradley, Bessel, etc., se han ejercitado en una investigación tan interesante, partiendo de hipótesis más ó menos plausibles, y han establecido fórmulas que representan con mucha exactitud las refracciones obtenidas por la experimentación directa, especialmente para distancias zenitales que no excedan de 80°. Para menores alturas respecto del horizonte los resultados de diversas fórmulas dejan de concordar bien entre sí y con los de las observaciones, lo cual también depende de las irregularidades que sufre la refracción misma cuando la luz atraviesa muy oblicuamente la masa atmosférica. Esta última circunstancia ha hecho prescribir la regla general de evitar la práctica de observaciones astronómicas á más de 80° de distancia zenital, ó sea á menos de 10° de altura sobre el horizonte.

No intentaré exponer las investigaciones de todos los astrónomos que se han ocupado de la teoría de la refracción, porque no ofrecen interés desde el punto de vista puramente práctico, y la fórmula aproximativa que he establecido es suficiente para mi objeto, que fué el de dar una idea general del monto de la refracción y de la manera de calcularla. Las diversas Tablas que se han construido, bien sea con los resultados obtenidos por la experimentación directa, ó bien por medio de teorías auxiliadas por la observación, proporcionan los valores de las refracciones con cuanta exactitud puede desearse en la práctica.

137.—Antes de explicar el uso de la Tabla de refracciones que va al fin de este libro, y que es la de Ivory, indiquemos la manera de obtener experimentalmente la refracción que corresponde á cualquiera distancia zenital. Debe advertirse de antemano que cuando las distancias zenitales son pequeñas, la fórmula $r = 57''.8 \tan. z'$, ó cualquiera otra, suministra el valor de r con bastante exactitud; y aun se conviene generalmente en que la refracción, cerca del zenit,

es de tantos segundos como grados tenga la distancia zenital, al menos si ésta no excede de 8° ó 10°. Según esto, si se observa una estrella cuya declinación difiera poco de la latitud del lugar, midiendo sus distancias zenitales tanto en el momento de su tránsito por el meridiano como cuando tenga diversos ángulos horarios, y se anotan las horas exactas de las observaciones, se habrán adquirido los datos necesarios para la determinación de las refracciones correspondientes. En efecto, aun suponiendo que el observador no conozca la latitud de su estación, la medida de la distancia zenital meridiana ζ, combinada con la declinación δ de la estrella, le dará......... $\varphi = \zeta + \delta$ si la estrella culmina al Sur, $\varphi = \delta - \zeta$ si culmina al Norte del zenit; y como por la hipótesis sólo tiene algunos grados la distancia zenital meridiana, podrá conocer el valor exacto de ζ, que es la cantidad angular obtenida después de añadirle la pequeña refracción que le corresponda. En seguida con φ, δ y h como datos, puede aplicarse la resolución del número 124 para obtener, por el cálculo, la distancia zenital verdadera z correspondiente á la hora...... $T = \alpha + h$ de la observación. Como á la hora T se supone también medida directamente la distancia zenital aparente z', se deduce que la diferencia entre el resultado del cálculo y el de la observación representa el efecto de la refracción que conviene á z', y se tendrá: $r = z - z'$.

Variando las circunstancias de la observación de manera que se obtengan valores de z' desde las inmediaciones del zenit hasta cerca del horizonte, se podrá formar por este método una Tabla de refracciones, independiente de toda hipótesis relativa á la constitución de la atmósfera; y quedará el observador en aptitud de corregir sus observaciones ulteriores por la ecuación $z = z' + r$, que suministra la distancia zenital real cuando es z' la aparente.

138.—Ya sea que se suponga formada una Tabla del modo experimental que se ha explicado, ó bien que se tenga calculada por cualquiera de las fórmulas que dan exactamente la refracción, es indispensable tomar en cuenta otros dos elementos que modifican ligeramente el valor tabular de r, y que necesariamente varían de una observación á otra, aun respecto de los mismos valores numéricos de las distancias zenitales aparentes. Estos elementos son la temperatura y la presión *actuales* del aire, que haciendo variar su densidad, influyen en la magnitud de la refracción, puesto que se admite que ésta es proporcional á la densidad de aquel fluido.

Si, pues, se toma por unidad la densidad del aire cuando es P la altura del barómetro y θ su temperatura y la del aire, su densidad á cualquiera otra presión p cuando el termómetro fijo indique la temperatura τ y el libre la temperatura t, será:

$$\frac{p}{P[1+m(\tau-\theta)][1+a(t-\theta)]}$$

siendo a y m respectivamente los coeficientes de dilatación del aire y del mercurio. Designando ahora por ρ la refracción que corresponde á cualquiera distancia zenital con las indicaciones P y θ del barómetro y de los termómetros, y por r la refracción actual para la presión p y las temperaturas τ y t, se tendrá:

$$r=\frac{p\rho}{P[1+m(\tau-\theta)][1+a(t-\theta)]}$$

La Tabla de Ivory, que va al fin de este libro, contiene los logaritmos de ρ para $P=0^{m}.762$ y $\theta=10°$, por lo cual haciendo para abreviar:

$$b=\frac{p}{0^{m}.762} \qquad l=\frac{1}{1+a\,(t-10)} \qquad f=\frac{1}{1+m\,(\tau-10)} \ldots\ldots(2)$$

se tiene que el valor de la refracción para las condiciones atmosféricas *actuales*, es:

$$r=blf\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

A la Tabla de los logaritmos de ρ he añadido otras dos, la primera de las cuales da los logaritmos de b con la presión ó altura barométrica observada p por argumento, y la segunda los logaritmos de l y de f con las indicaciones de los termómetros libre y fijo por argumentos. En consecuencia, toda la operación se reduce á sumar los

cuatro logaritmos para obtener el de la refracción que corresponde á los datos z', p, t y τ suministrados por la observación.

Ejemplo.—¿Cuál será la distancia zenital, corregida por la refracción cuando la aparente es $z'=73°\,24'\,19''.4$, la indicación del barómetro $p=0^{m}.586$, la del termómetro libre $t=16°.7$ y la del fijo $\tau=20°.0$?

Interpolando el log. ρ para el valor de z', obtendremos:

ρ	2.2869	
b	9.8859	
l	9.9892	
f	9.9992	
		$z'=73°\,24'\,19''.4$
r	2.1612	$r=+\;\;2\;\;24\;.9$
		$z=73°\,26'\,44''.3$

A falta de barómetro para tomar en cuenta la presión atmosférica, podría hacerse uso de un hipsómetro, pues hemos visto (Tomo I, número 287) que con las indicaciones de este instrumento se obtiene fácilmente aquel dato. Como en tal caso el valor de p se supone ya reducido á 0° de temperatura, se adoptará $\tau=0°$ para tomar el correspondiente log. f en las Tablas de refracción. El termómetro libre debe colocarse en un lugar descubierto á fin de obtener la verdadera temperatura del aire.

CAPITULO IV.

DE LA PARALAJE Y SUS EFECTOS.

139.—El fenómeno de la refracción, de que me he ocupado en el Capítulo anterior, no es la única causa de alteración en las posiciones de algunos astros sobre la esfera celeste, sino que hay otra que afecta las posiciones de aquellos cuya distancia á la tierra son comparativamente pequeñas, ó si se quiere, de aquellos respecto de cuyas distancias son apreciables las dimensiones de la tierra.

Supongamos para mayor claridad que dos observadores, situados en distintos lugares del globo, dirijan simultáneamente sus visuales á un mismo astro. Las dos líneas formarán en el centro del astro cierto ángulo cuyo valor dependerá tanto de la distancia que separa á los dos observadores, cuanto de la del astro al centro de la tierra. Para la inmensa mayoría de los cuerpos celestes este ángulo, llamado *paralaje*, es rigurosamente nulo; porque sus distancias son tales, que las dimensiones de nuestro planeta desaparecen ante la magnitud de aquellas, y son paralelas las visuales que se les dirigen desde cualquier punto de la tierra. No sucede lo mismo respecto del sol, de los planetas, y sobre todo, de la luna, en atención á que sus distancias al centro del globo, aunque muy considerables, no pueden suponerse infinitas relativamente al radio terrestre. Según esto, desde dos ó más lugares en que se observe alguno de estos astros en un mismo instante físico, no se le verá ocupar la misma posición en la esfera celeste, puesto que cada observador lo referirá á la dirección

de su visual, y, por consiguiente, lo verá proyectado en el punto en que ésta encuentra á la esfera. De aquí proviene la necesidad de referir todas las posiciones á un punto único, que es el centro de la tierra; de modo que las coordenadas que constan en las Efemérides son *geocéntricas*, ó tales como las vería un observador colocado en el centro del globo. Por la misma razón todas nuestras observaciones, practicadas en la superficie de la tierra, deben reducirse á su centro, pues de otra manera no podrían ser comparables, y para esta reducción es necesario el conocimiento de la paralaje.

Sea O (fig. 40ª) la estación que ocupa el observador en la superficie, y C el centro de la tierra. Al observar el astro L, lo verá el observador en la dirección $O\,L$, mientras que desde C se vería en la $C\,L$. El ángulo $O\,L\,C$ será, pues, la paralaje que mide la diferencia de direcciones en que se ve el astro desde O y desde C. Según esto, definiremos la paralaje de un astro diciendo que es el ángulo $O\,L\,C$ bajo el cual se vería, desde su centro L, el radio $C\,O$ del observador O.

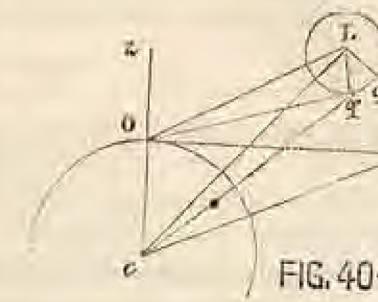


FIG. 40ª

A medida que el astro se aproxime al zenit Z, disminuirá el efecto de la paralaje, y será nulo en el mismo punto Z. Por el contrario, al acercarse al horizonte irá creciendo, y llegará á su *máximum* cuando el astro se encuentre en L', sobre el horizonte del observador. Por estas explicaciones se comprende que el efecto de la paralaje se ejerce en el plano vertical que pasa por el astro, y produce un aumento en la distancia zenital $Z\,O\,L$, llamada aparente, respecto de la verdadera ó geocéntrica $Z\,C\,L$. Por esta razón el ángulo $O\,L\,C$ se denomina generalmente paralaje de distancia zenital, ó bien paralaje de altura.

140.—Si designamos por z' la distancia zenital aparente $Z\,O\,L$ después de corregida por la refracción, por z la geocéntrica $Z\,C\,L$

y por p la paralaje de distancia zenital OLC, el triángulo dará: $z = z' - p$. Para calcular el valor de p que corresponde á cualquier valor de z', llamemos R el radio OC de la tierra y Δ la distancia actual CL del astro al centro del globo. El triángulo OCL suministra la relación:

$$\text{sen.}\, p = \frac{R}{\Delta}\, \text{sen.}\, z'$$

En lugar de hallar el valor de p por esta fórmula, es preferible eliminar la distancia Δ de este modo: Llamando π la paralaje *horizontal*, que tendría lugar cuando el astro, sin variar de distancia al centro de la tierra, se hallase en L', tendremos, puesto que en tal caso $z' = 90°$:

$$\text{sen.}\, \pi = \frac{R}{\Delta}$$

é introduciendo este valor en la ecuación precedente se halla por último:

$$\text{sen.}\, p = \text{sen.}\, \pi\, \text{sen.}\, z' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Las Efemérides proporcionan directamente el valor de la paralaje horizontal para un punto cualquiera del ecuador terrestre, quiere decir, para cualquiera estación de la superficie de la tierra cuya distancia al centro sea igual al radio a del ecuador; y de este elemento, llamado paralaje horizontal *ecuatorial*, es fácil deducir el que corresponde á otro punto que tenga R por radio. Designando, en efecto, por π_0 el dato de las Efemérides, tendremos las ecuaciones:

$$\text{sen.}\, \pi_0 = \frac{a}{\Delta} \qquad\qquad \text{sen.}\, \pi = \frac{R}{\Delta}$$

por cuya combinación se obtiene:

$$\frac{\text{sen.}\, \pi}{\text{sen.}\, \pi_0} = \frac{R}{a} = (1 - e^2\, \text{sen.}^2\, \varphi)^{\frac{1}{2}}$$

Como las dos paralajes siempre difieren muy poco y no son considerables, la relación de sus senos es sensiblemente la misma que

la de los arcos; y, en consecuencia, podemos sustituir esta última, á fin de obtener la reducción de la paralaje ecuatorial á la que conviene á la latitud φ. Desarrollando el binomio hasta el término en e^2, resultará, pues:

$$\frac{\pi}{\pi_0} = 1 - \frac{1}{2}\, e^2\, \text{sen.}^2\, \varphi$$

y de aquí se obtiene:

$$\pi = \pi_0 - \frac{1}{2}\, \pi_0\, e^2\, \text{sen.}^2\, \varphi$$

De esta manera por la substracción de la pequeña cantidad........ $\frac{1}{2}\pi_0 e^2\, \text{sen.}^2\, \varphi$ se reduce la paralaje ecuatorial al horizonte de otro lugar que tenga φ por latitud.

141.—He supuesto hasta ahora que es R la distancia de la estación O al centro de la tierra, lo cual equivale á admitir que sea nula su elevación sobre el nivel del mar; pero si no es así, y designamos por n la altura, es claro que la distancia del observador al centro de la tierra será $R + n$, y la paralaje deberá sufrir otra pequeña corrección por n.(1) Reproduciendo con $R + n$ el mismo razonamiento que se ha hecho con R, las ecuaciones para determinar el valor de π serán:

$$\text{sen.}\, \pi_0 = \frac{a}{\Delta} \qquad\qquad \text{sen.}\, \pi = \frac{R+n}{\Delta}$$

de las que se obtendrá como antes:

$$\pi = \pi_0 - \frac{1}{2}\, \pi_0\, e^2\, \text{sen.}^2\, \varphi + \pi_0\, \frac{n}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La luna es el único astro cuya paralaje es bastante grande para que sea preciso hacer estas pequeñas correcciones por latitud y altura sobre el nivel del mar, pues su valor medio es $\pi_0 = 57'$, variando

(1) En ninguna obra de astronomía he visto que se tome en cuenta esta corrección pero no creo que deba omitirse cuando se trate de observaciones exactas, especialmente en nuestro país, á causa de la considerable elevación de la mayor parte de su territorio.

entre 53′ 30″ y 60′ 30″ próximamente, según que aumenta ó disminuye su distancia á la tierra. Para el sol que sólo tiene 8″.9 por paralaje horizontal, y para los planetas, se omiten esas correcciones por no tener valor apreciable; y la paralaje de distancia zenital se calcula por la fórmula siguiente, que proviene de la (1) tomando los pequeños arcos en segundos por sus senos.

$$p = \pi \,\text{sen.}\, z'$$

Las Tablas que van á continuación contienen las dos pequeñas correcciones por latitud y altura, relativas á la paralaje de la luna. La primera, que da la corrección substractiva, tiene por argumentos π_0 y φ; la segunda, que da la corrección aditiva, tiene la altura n sobre el nivel del mar, expresada en metros, y la paralaje ecuatorial por argumentos.

Ejemplo.—En un lugar cuya latitud es de 26° y cuya altura sobre el nivel del mar se estima en 2250ᵐ, se obtuvo 60° 27′ 35″.0 por distancia zenital aparente del centro de la luna. ¿Cuál será su distancia zenital geocéntrica sabiendo que en el instante de la observación la paralaje horizontal ecuatorial era de 59′ 43″.1?

$\pi_0 = 59' 43''.1$	sen. π....... 8.2396786	
Correc. por φ..... $-2\,.3$	sen. z'...... 9.9395239	$z' = 60° 27' 35''.0$
Correc. por n...... $+1\,.2$	sen. p...... 8.1792025.........$p =$	$-\ \ 51\ 56\,.34$
$\pi = 59' 42''.0$		$z = 59° 35' 38''.7$

El cálculo de la ecuación (1) demanda, en general, logaritmos de siete cifras decimales; pero es fácil darle una forma más conveniente para obtener en segundos el valor de p con logaritmos de cinco cifras. Para esto se tiene que el arco en función del seno, es............ $p = \text{sen.}\,p + \frac{1}{6}\,\text{sen.}^3\,p$. Sustituyendo en esta fórmula el valor (1) de sen. p, y tomando el arco por el seno en el término sen.³ p, resulta:

$$p = \text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,z' + \frac{1}{6}\,\pi^3\,\text{sen.}^3\,z'$$

Corrección de la paralaje de la luna por la latitud del observador. $\frac{1}{2}\pi_0\, e^2\,\text{sen.}^2\,\varphi$			
Latitud	53′	57′	61′
14°	0″.6	0″.7	0″.7
16	0 .8	0 .9	0 .9
18	1 .0	1 .1	1 .2
20	1 .2	1 .3	1 .4
22	1 .5	1 .6	1 .7
24	1 .8	1 .9	2 .0
26	2 .0	2 .2	2 .4
28	2 .3	2 .5	2 .7
30	2 .7	2 .9	3 .1
32	3 .0	3 .2	3 .4
34	3 .3	3 .6	3 .8

Corrección de la paralaje de la luna por la altura de la estación sobre el nivel del mar. $\pi_0\,\frac{n}{a}$			
Altura	53′	57′	61′
500ᵐ	0″.2	0″.3	0″.3
1000	0 .5	0 .5	0 .6
1500	0 .7	0 .8	0 .9
2000	1 .0	1 .1	1 .1
2500	1 .2	1 .3	1 .4
3000	1 .5	1 .6	1 .7
3500	1 .7	1 .9	2 .0
4000	2 .0	2 .1	2 .3
4500	2 .2	2 .4	2 .6
5000	2 .5	2 .7	2 .9

Se sabe, además, que sen. $\pi = \pi - \frac{1}{6}\pi^3$ ......, por lo cual sustituyendo en la serie anterior, reduciendo y expresando en segundos los arcos π y p, se tendrá en último resultado:

$$p = \pi\,\text{sen.}\,z' - (8.5930)\,\pi^3\,\text{sen.}\,z'\cos.^2 z' \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

La cantidad numérica que está dentro del paréntesis es el logaritmo constante de $\frac{1}{6}$ sen.² 1″. Apliquemos esta fórmula al ejemplo precedente, tomando $\pi = 3582''.0$.

π....... 3.55413	Const....... 8.5930	Primer término.... 51′ 56″.40
sen. z'....... 9.93952	cos.² z'....... 9.3858	Segundo „ .... − 0 .04
3.49365	.... 3.4936	$p =$ 51′ 56″.36
	π^2........... 7.1082	
3116″.4	8.5806	

Por esta aplicación se ve que, aun para la luna, bastará casi siempre calcular el efecto de la paralaje por la fórmula más sencilla...... $p = \pi\,\text{sen.}\,z'$.

142.—Hasta ahora se ha supuesto conocida la distancia zenital aparente, puesto que el valor de p se ha calculado en función de z'. Este dato es, en efecto, el que se obtiene por la observación directa; pero á veces hay necesidad de calcular la distancia zenital aparente para compararla, por ejemplo, con la que suministra la observación, y entonces, sirviéndose de la posición geocéntrica de la luna, se halla por el cálculo la distancia zenital verdadera z, ó tal como se observaría desde el centro de la tierra, y es preciso determinar el valor de p en función de este elemento. A este fin, sustituyamos por z' su valor $z+p$ en la ecuación (1) y desarrollemos para encontrar:

$$\text{sen.}\,p = \text{sen.}\,\pi(\text{sen.}\,z\cos.\,p + \cos.\,z\,\text{sen.}\,p)$$

Dividiendo por $\cos.\,p$ y despejando, se hallará:

$$\tan.\,p = \frac{\text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,z}{1-\text{sen.}\,\pi\,\cos.\,z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Esta fórmula se reduce fácilmente á serie muy convergente elevando el denominador al numerador, á saber:

$$\tan.\,p = \text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,z(1+\text{sen.}\,\pi\cos.\,z+\ldots\ldots\ldots)$$

y puesto que $\text{sen.}\,2z = 2\,\text{sen.}\,z\cos.\,z$, tendremos, tomando los pequeños arcos p y π en segundos por sus líneas trigonométricas, y calculando el logaritmo de $\frac{1}{2}\,\text{sen.}\,1''$.

$$p = \pi\,\text{sen.}\,z + (4.3845)\,\pi^2\,\text{sen.}\,2z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ejemplo.—Si la distancia zenital geocéntrica de la luna es de...... 59° 35′ 38″.7 cuando la paralaje horizontal corregida es 59′ 42″.0, ¿cuál será su distancia zenital aparente?

π......	3.55413	Const.	4.3845	Primer término....	51′ 29″.3
sen. z......	9.93573	π^2..........	7.1082	Segundo „	+ 27 .1
	3.48986	sen. $2z$.........	9.9410	$\pi =$	51′ 56″.4
				$z =$	59 35 38 .7
			1.4337		
	3089″.3			$z' =$	60°27′ 35″.1

143.—La mayor parte de los astros no se presentan á la vista sino como puntos luminosos, aun valiéndose de los más poderosos telescopios; pero el sol, la luna y los planetas ofrecen un disco considerable, que es preciso tomar en cuenta. No siendo directamente observables los centros de esos astros, lo que se observa es alguno de sus bordes, y se reducen después las observaciones al centro sirviéndose del *semidiámetro*, que es el ángulo $L\,C\,q$ (figura 40ª) bajo el cual se vería desde el centro de la tierra el radio $L\,q$ de un astro. La corrección de las distancias zenitales por el semidiámetro será aditiva ó substractiva, según que se haya observado el borde superior ó el inferior del astro.

El valor del semidiámetro de un astro se obtiene fácilmente conociendo su paralaje horizontal ecuatorial y la relación de su radio con el de la tierra. Se ha visto, en efecto, que la paralaje tiene por expresión: $\text{sen.}\,\pi_0 = \frac{a}{\Delta}$, y, por otra parte, llamando s el semidiámetro, y r el radio lineal Lq del astro, el triángulo rectángulo $L\,C\,q$ da: $\text{sen.}\,s = \frac{r}{\Delta}$. Eliminando á Δ entre estas dos ecuaciones, y tomando los pequeños arcos s y π_0 por sus senos, se halla:

$$s = \frac{r}{a}\pi_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Para la luna la relación $\frac{r}{a}$ es de 0.273, de manera que se tiene para cualquier valor de la paralaje: $s = 0.273\,\pi_0$. De este modo están calculados los semidiámetros que constan en las Efemérides.

144.—El semidiámetro geocéntrico $s = L\,C\,q$ de la luna no tiene, sin embargo, exactamente el mismo valor que el aparente $s' = L\,O\,q'$ tal como se ve desde la superficie de la tierra, á causa de la desigualdad de las distancias $L\,C$ y $L\,O$. Designando por Δ' esta última distancia, tendremos, por los triángulos rectángulos $L\,C\,q$ y $L\,O\,q'$:

$$r = \Delta\,\text{sen.}\,s \qquad\qquad r = \Delta'\,\text{sen.}\,s'$$

de donde resulta la siguiente relación, tomando los arcos por los senos:

$$s' = \frac{\Delta}{\Delta'}\,s$$

y como el triángulo $O\,C\,L$ da:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\text{sen.}\, z'}{\text{sen.}\, z},$$

se hallará:

$$s' = s\,\frac{\text{sen.}\, z'}{\text{sen.}\, z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Esta fórmula permitiría calcular el semidiámetro aparente s' si se conociesen las distancias zenitales verdadera y aparente; mas como la observación sólo suministra directamente esta última, transformemos la expresión anterior eliminando á z. Más bien que el valor de s', conviene calcular el aumento $s' - s$ que debe hacerse al semidiámetro geocéntrico s para obtener el aparente s'. Con este objeto notemos que la relación $\frac{\text{sen.}\, z'}{\text{sen.}\, z}$ siempre difiere muy poco de la unidad, y haciendo:

$$\frac{\text{sen.}\, z'}{\text{sen.}\, z} = 1 + u$$

se tendrá: $s' = s(1 + u)$, ó bien:

$$s' - s = s\,u$$

En cuanto al valor de u, será:

$$u = \frac{\text{sen.}\, z' - \text{sen.}\, z}{\text{sen.}\, z},$$

y transformando el numerador, teniendo presente que $z' - z = p$, resulta sin dificultad:

$$u = \frac{2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}p\cos.(z' - \tfrac{1}{2}p)}{\text{sen.}\, z'\cos. p - \cos. z'\,\text{sen.}\, p} = \frac{\text{sen.}\, p\cos. z' + 2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}p\,\text{sen.}\, z'}{\text{sen.}\, z'\cos. p - \cos. z'\,\text{sen.}\, p}$$

Si se sustituye el valor (1) de sen. p, obtendremos después de abreviar:

$$u = \frac{\text{sen.}\,\pi\cos. z' + 2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}p}{\cos. p - \text{sen.}\,\pi\cos. z'}$$

Como el valor de u es muy pequeño, no hay inconveniente en to-

mar los arcos en segundos por los senos y la unidad por cos. p, omitiendo la segunda potencia de sen. $\frac{1}{2}p$, para obtener:

$$u = \frac{\pi\cos. z'\,\text{sen.}\, 1''}{1 - \pi\cos. z'\,\text{sen.}\, 1''}$$

Representando ahora por k la relación constante $\frac{s}{\pi} = 0.273$, tendremos:

$$\pi = \frac{s}{k},$$

y por consiguiente:

$$u = \frac{\frac{s}{k}\cos. z'\,\text{sen.}\, 1''}{1 - \frac{s}{k}\cos. z'\,\text{sen.}\, 1''} = \frac{s}{k}\cos. z'\,\text{sen.}\, 1''\left(1 - \frac{s}{k}\cos. z'\,\text{sen.}\, 1''\right)^{-1}$$

Desarrollando el binomio hasta la primera potencia, resulta por último:

$$u = \frac{s}{k}\cos. z'\,\text{sen.}\, 1'' + \frac{s^2}{k^2}\cos.^2 z'\,\text{sen.}^2 1''$$

con lo cual el aumento del semidiámetro será:

$$s' - s = M s^2\cos. z' + M^2 s^3\cos.^2 z' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

expresión en la que M representa la constante $\frac{\text{sen.}\, 1''}{k}$, y se tiene:

$$\log. M = 5.24941.$$

Esta fórmula puede reducirse á Tabla para tomar á la vista con los argumentos, distancia zenital aparente y semidiámetro geocéntrico, el aumento $s' - s$ que corresponde á este último. La Tabla que va á continuación está calculada por una fórmula de Mr. Francœur análoga á la anterior. Es claro que el aumento del semidiámetro sólo es sensible para la luna, á causa del valor considerable de su paralaje.

Ejemplo.—Sean $z' = 39°$ y $s = 16' 30'' = 990''$ los datos para calcular el semidiámetro aparente ó aumentado.

M.........	5.24941	M^2.........	0.4988
s^2.........	5.99127	s^3.........	8.9869
cos. z'.........	9.89650	cos.² z'.........	9.7810
	1.13118		9.2667
	13''.53		0''.18

El aumento será de 13''.7, y en consecuencia el semidiámetro aparente, $s' = 16' 43''.7$.

145.—Reasumiendo lo que se ha expuesto en este y en el Capítulo anterior, vemos que cuando se observa uno de los bordes ó limbos de un astro con el fin de medir la distancia zenital verdadera de su centro, hay que hacer tres correcciones á la indicación del instrumento, y son la de refracción, la de paralaje y la de semidiámetro aparente. Si, pues, designamos por z' el ángulo que da el instrumento cuando el hilo horizontal de su telescopio es tangente á uno de los bordes del astro, y además representamos como hasta aquí, por r la refracción, por p la paralaje de distancia zenital y por s' el semidiámetro aumentado, tendremos que, en general, la distancia zenital verdadera del centro, tiene por expresión:

$$z = z' + r - p \pm s' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (9)$$

tomando para s' el signo $\{\pm\}$ cuando se observe el borde $\left\{\begin{matrix}\text{superior.}\\ \text{inferior.}\end{matrix}\right\}$ Tratándose de una estrella fija, p y s son nulos, y se tiene simplemente: $z = z' + r$.

Aunque el orden de estas correcciones es casi indiferente á causa de lo poco que varían sus valores por un cambio considerable de la distancia zenital, el método más razonable es el de corregir en primer lugar por la refracción, que afecta al borde directamente observado. En seguida, con los argumentos s y $z' + r \pm s$ se toma de la Tabla el aumento del semidiámetro; y por último, con $z' + r \pm s'$ se calcula el valor de p por las fórmulas (1) ó (3), pues la z' que figura en ellas representa la distancia zenital aparente del centro.

AUMENTO DEL SEMIDIAMETRO DE LA LUNA.

Argumentos: *Distancia zenital aparente y semidiámetro geocéntrico.*

Dist. zenit.	14' 30''	15' 00''	15' 30''	16' 00''	16' 30''	17' 00''
0°	13''.7	14''.6	15''.6	16''.7	17''.7	18''.8
2	13 .7	14 .6	15 .6	16 .7	17 .7	18 .8
4	13 .6	14 .6	15 .6	16 .6	17 .7	18 .8
6	13 .6	14 .6	15 .6	16 .6	17 .6	18 .7
8	13 .5	14 .5	15 .5	16 .5	17 .6	18 .7
10	13 .5	14 .4	15 .4	16 .4	17 .5	18 .6
12	13 .4	14 .3	15 .3	16 .3	17 .4	18 .4
14	13 .3	14 .2	15 .2	16 .2	17 .2	18 .3
16	13 .1	14 .1	15 .0	16 .0	17 .1	18 .1
18	13 .0	13 .9	14 .9	15 .9	16 .9	17 .9
20	12 .9	13 .8	14 .7	15 .7	16 .7	17 .7
22	12 .7	13 .6	14 .5	15 .5	16 .5	17 .5
24	12 .5	13 .4	14 .3	15 .2	16 .2	17 .2
26	12 .3	13 .2	14 .1	15 .0	16 .0	16 .9
28	12 .1	12 .9	13 .8	14 .7	15 .7	16 .6
30	11 .8	12 .7	13 .5	14 .4	15 .4	16 .3
32	11 .6	12 .4	13 .3	14 .1	15 .1	16 .0
34	11 .3	12 .1	13 .0	13 .8	14 .7	15 .6
36	11 .1	11 .8	12 .7	13 .5	14 .4	15 .3
38	10 .8	11 .5	12 .3	13 .1	14 .0	14 .9
40	10 .5	11 .2	12 .0	12 .8	13 .6	14 .4
42	10 .2	10 .9	11 .6	12 .4	13 .2	14 .0
44	9 .8	10 .5	11 .3	12 .0	12 .8	13 .6
46	9 .5	10 .2	10 .9	11 .6	12 .3	13 .1
48	9 .2	9 .8	10 .5	11 .2	11 .9	12 .6
50	8 .8	9 .4	10 .1	10 .7	11 .4	12 .1
52	8 .4	9 .0	9 .7	10 .3	10 .9	11 .6
54	8 .1	8 .6	9 .2	9 .8	10 .5	11 .1
56	7 .7	8 .2	8 .8	9 .4	10 .0	10 .6
58	7 .3	7 .8	8 .3	8 .9	9 .4	10 .0
60	6 .9	7 .3	7 .9	8 .4	8 .9	9 .5
62	6 .5	6 .9	7 .4	7 .9	8 .4	8 .9
64	6 .0	6 .5	6 .9	7 .4	7 .8	8 .3
66	5 .6	6 .0	6 .4	6 .8	7 .3	7 .7
68	5 .2	5 .5	5 .9	6 .3	6 .7	7 .1
70	4 .7	5 .1	5 .4	5 .8	6 .1	6 .5
72	4 .3	4 .6	4 .9	5 .2	5 .6	5 .9
74	3 .8	4 .1	4 .4	4 .7	5 .0	5 .3
76	3 .4	3 .6	3 .9	4 .1	4 .4	4 .7
78	2 .9	3 .1	3 .3	3 .6	3 .8	4 .0
80	2 .4	2 .6	2 .8	3 .0	3 .2	3 .4
82	2 .0	2 .1	2 .3	2 .4	2 .6	2 .7
84	1 .5	1 .6	1 .7	1 .9	2 .0	2 .1
86	1 .0	1 .1	1 .2	1 .3	1 .4	1 .5
88	0 .6	0 .6	0 .7	0 .7	0 .8	0 .8
90	0 .1	0 .1	0 .1	0 .1	0 .2	0 .2

146.—Debo hacer notar que, sin sacrificar la exactitud á la brevedad del cálculo, puede seguirse un procedimiento que evita la necesidad de tomar en cuenta el aumento del semidiámetro. Consiste en hacer primero la corrección por refracción, lo mismo que se ha dicho, y después con $z' + r$ calcular la paralaje de distancia zenital. De este modo se obtiene el valor de p que convendría al limbo observado, y aplicándolo á $z' + r$, resulta $z' + r - p$ por distancia zenital verdadera del mismo borde, quiere decir, tal como se observaría desde el centro de la tierra. En tal caso se puede ya hacer uso del semidiámetro geocéntrico que dan las Efemérides, para obtener la distancia zenital verdadera del centro. Así, pues, designando por p' la paralaje que corresponde al borde, la fórmula (9) puede reemplazarse por la siguiente:

$$z = z' + r - p' \pm s \qquad\qquad (10)$$

Para comparar los dos métodos, apliquémoslos á los datos siguientes. La distancia zenital del borde inferior de la luna, corregida por los errores del instrumento y por la refracción, se encontró ser....... $z' + r = 59° 1' 13''.0$; la paralaje horizontal corregida por latitud y altura, era $\pi = 56' 23''.5$; y el semidiámetro tabular ó de las Efemérides, $s = 15' 23''.4$. Empleando el primer procedimiento tomaremos el aumento del semidiámetro con los elementos $s = 15' 23''.4$ y $z' + r - s = 58° 46'$ próximamente, y hallaremos $s' - s = 8''.0$, por lo cual $s' = 15' 31''.4$. Entonces la distancia zenital aparente del centro, será:

$$z' + r - s' = 58° 45' 41''.6.$$

Con este valor calculemos el de p y la distancia zenital verdadera del centro:

sen. π......	8.2149215	
sen. $(z' + r - s')$......	9.9319745	$z' + r - s' = 58° 45' 41''.6$
sen. p......	8.1468960	....................$p = -\ \ 48\ 12\ .9$
		$z = 57° 57' 28''.7$

Determinemos ahora la paralaje correspondiente al limbo observado, haciendo uso de $z' + r$ solamente.

sen. π.........	8.2149215	
sen. $(z' + r)$.	9.9331579	$z + r = 59° 01' 13''.0$
sen. p'.........	8.1480794	.... $p' = -\ \ 48\ 20\ .8$
		$s = -\ \ 15\ 23\ .4$
		$z = 57° 57' 28''.8$

Se ve que ambos resultados concuerdan hasta donde puede desearse, siendo más breve el segundo método en atención á que no hay necesidad de ocuparse en el aumento del semidiámetro; y se ve también que la paralaje del limbo difiere de la del centro una cantidad sensiblemente igual á aquel aumento.

147.—Puesto que la paralaje produce el efecto de hacer aparecer á un astro más bajo de lo que está realmente, originará también el de alterar aparentemente los valores geocéntricos ó tabulares de su ascensión recta y de su declinación. Sea, en efecto, A (fig. 41ª) el lugar verdadero del astro, y A' el aparente tal como se observa desde la superficie de la tierra, siendo $A\,A'$ el efecto p de la paralaje en el sentido vertical. El ángulo horario aparente será $Z\,P\,A'$, siempre numéricamente mayor que el verdadero $Z\,P\,A$, y, en consecuencia, la ascensión recta aparente $\gamma\,D' = \alpha'$, diferirá de la real $\gamma\,D = \alpha$, una cantidad

FIG. 41A

$D\,D' = A\,P\,A'$, que designaré por β. La declinación aparente....... $D'\,A' = \delta'$, tampoco será igual á la verdadera $D\,A = \delta$, sino que diferirán una cantidad que representaré por γ, de modo que tendremos:

$$\alpha' = \alpha - \beta$$
$$\delta' = \delta - \gamma$$

Determinemos los efectos β y γ, que se llaman respectivamente paralajes de ascensión recta y de declinación, comenzando por el primero. Designando por h' el ángulo horario aparente.............. $ZPA' = h + \beta$, el triángulo ZPA' da para el ángulo paraláctico $q' = PA'Z$:

$$\text{sen.}\, q' = \frac{\text{sen.}\, h' \cos.\, \varphi}{\text{sen.}\, z'}$$

y el triángulo APA' suministra esta otra forma del mismo valor:

$$\text{sen.}\, q' = \frac{\text{sen.}\, \beta \cos.\, \delta}{\text{sen.}\, p}$$

Igualándolo al anterior, y recordando que $\text{sen.}\, p = \text{sen.}\, \pi\, \text{sen.}\, z'$, resulta desde luego:

$$\text{sen.}\, \beta = \frac{\text{sen.}\, \pi \cos.\, \varphi}{\cos.\, \delta}\, \text{sen.}\, h' \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (11)$$

fórmula que da el valor de la paralaje de ascensión recta en función del ángulo horario aparente. Para obtenerlo en función del verdadero, sustituyamos por h' su valor $h + \beta$, y se hallará sin dificultad después de desarrollar y dividir por $\cos.\, \beta$:

$$\tan.\, \beta = \frac{\dfrac{\text{sen.}\, \pi \cos.\, \varphi}{\cos.\, \delta}\, \text{sen.}\, h}{1 - \dfrac{\text{sen.}\, \pi \cos.\, \varphi}{\cos.\, \delta} \cos.\, h}$$

Representando para abreviar por m el coeficiente de $\text{sen.}\, h \cos.\, h$, se puede escribir la ecuación de este modo:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\text{sen.}\, \pi \cos.\, \varphi}{\cos.\, \delta} \\ \tan.\, \beta &= \frac{m\, \text{sen.}\, h}{1 - m \cos.\, h} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Como la última es de la misma forma que la (4), es reductible á

serie por el mismo método, y se hallará en segundos con la exactitud suficiente:

$$\beta = \frac{m\, \text{sen.}\, h}{\text{sen.}\, 1''} + \frac{m^2 \text{sen.}\, 2h}{2 \text{sen.}\, 1''} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (13)$$

El signo de β, según lo indican las fórmulas, depende del de h; de suerte que será positiva la paralaje de ascensión recta al Oeste del meridiano, y negativa al Este. Siendo $\alpha' = \alpha - \beta$ la expresión de la ascensión recta aparente, se deduce que al Oeste, la paralaje disminuye la verdadera y al Este la aumenta. En cuanto al ángulo horario aparente $h' = h + \beta$, siempre resulta aumentado numéricamente, por ser en todos casos del mismo signo h y β.

Ejemplo.—¿Cuál fué la ascensión recta aparente de la luna el día 1º de Diciembre de 1870, á la hora sideral $T = 22^h\, 6^m\, 3^s.37$ de un lugar cuya latitud es $\varphi = 19°\, 19'\, 0''.0$, sabiendo que en ese instante la ascensión recta verdadera de la luna era $\alpha = 0^h\, 19^m\, 31^s.66$, su declinación $\delta = -3°\, 31'\, 00''.6$ y su paralaje corregida $\pi = 54'\, 48''.0$?

El ángulo horario geocéntrico (núm. 133) será $h = -2^h\, 13^m\, 28^s.29$, que convertido en arco es: $h = -33°\, 22'\, 4''.3$. Apliquemos la fórmula (12).

sen. π.........	8.2024883		
cos. φ.........	9.9748361		
cos. δ.........	—9.9991814		
m..............	8.1781430	....	8.17814
sen. h.........	9.7403725—	cos. h............	9.92177
			8.09991
Numerador...	7.9185155—		0.012587
Denominador.	9.9944988	....	0.987413
tan. β.........	7.9240167—	$\beta = -0°\, 28'\, 51''.5$	

El valor de β expresado en tiempo es $-1^m\, 55^s.43$, por lo cual la ascensión recta y el ángulo horario aparentes, serán en este caso:

$$\alpha' = \quad 0^h\, 19^m\, 31^s.66 + 1^m\, 55^s.43 = \quad 0^h\, 21^m\, 27^s.09$$
$$h' = -33°\, 22'\;\; 4''.3 \;-28'\; 51''.5 \;= -33°\, 50'\, 55''.8$$

Si se quiere hacer uso de la fórmula (13), se tiene:

m......	8.17814	m^2.......	6.3563		
sen. h..	9.74087—	sen. $2h$.	9.9632—	1.^{er} térm.^{o}	$= -1709''.8$
sen. $1''$	—4.68557	2 sen. $1''$	—4.9866	2.^{o} „	$= -\ \ 21\ .5$
	3.23294—		1.3329—		$\beta = -1731\ .3 = -28'51''.3$

148.—Para calcular la paralaje γ de declinación tenemos que en los triángulos astronómicos aparente PZA' y verdadero PZA, es común el azimut $a = PZA'$; y por consiguiente, siendo iguales los dos valores de $\cos. a$ resulta la ecuación:

$$\frac{\text{sen.}\,\delta' - \text{sen.}\,\varphi \cos.\,z'}{\text{sen.}\,z'} = \frac{\text{sen.}\,\delta - \text{sen.}\,\varphi \cos.\,z}{\text{sen.}\,z}$$

Ejecutando las operaciones y recordando que......................... $z' - z = p = \text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,z'$, obtendremos:

$$\text{sen.}\,\delta' = (\text{sen.}\,\delta - \text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,\varphi)\,\frac{\text{sen.}\,z'}{\text{sen.}\,z}$$

Se tiene, además, por la comparación de los valores de sen. a que dan los mismos triángulos:

$$\frac{\text{sen.}\,z'}{\text{sen.}\,z} = \frac{\text{sen.}\,h' \cos.\,\delta'}{\text{sen.}\,h \cos.\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

y así sustituyendo se halla fácilmente:

$$\tan.\,\delta' = \tan.\,\delta \left(1 - \frac{\text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\delta}\right) \frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

ecuación que suministra la declinación aparente en función de la geocéntrica y de los ángulos horarios aparente y verdadero.

Generalmente es mejor calcular el efecto $\gamma = \delta - \delta'$ para aplicarlo como corrección á la declinación geocéntrica δ. A este fin, representando por b la cantidad

$$\frac{\text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\delta}$$

tomemos la tangente de γ, y sustituyamos en su valor el precedente de $\tan.\,\delta'$, esto es:

$$\tan.\,\gamma = \frac{\tan.\,\delta - \tan.\,\delta\,(1-b)\,\dfrac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}}{1 + \tan.^2\,\delta\,(1-b)\,\dfrac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}}$$

Como la relación $\frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}$ difiere muy poco de la unidad, hagamos:

$$\frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h} = 1 + x$$

de donde resulta:

$$x = \frac{\text{sen.}\,h' - \text{sen.}\,h}{\text{sen.}\,h} = \frac{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\beta \cos.\,\frac{1}{2}(h'+h)}{\text{sen.}\,h}$$

y el valor de $\tan.\,\gamma$ se convierte en:

$$\tan.\,\gamma = \frac{\tan.\,\delta - (1-b)(1+x)\tan.\,\delta}{1 + (1-b)(1+x)\tan.^2\,\delta} = \frac{[b(1+x) - x]\tan.\,\delta}{\sec.^2\,\delta - [b(1+x) - x]\tan.^2\,\delta}$$

Multiplicando numerador y denominador por $\cos.^2\,\delta$, se obtiene:

$$\tan.\,\gamma = \frac{[b(1+x) - x]\,\text{sen.}\,\delta \cos.\,\delta}{1 - [b(1+x) - x]\,\text{sen.}^2\,\delta}$$

Restableciendo $\frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}$ por $1 + x$, y sustituyendo los valores de x y de b, haremos para abreviar:

$$n = \frac{\text{sen.}\,\pi\,\text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h} - \frac{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}\beta \cos.\,\frac{1}{2}(h'+h)\,\text{sen.}\,\delta}{\text{sen.}\,h}$$

con lo cual se tendrá: ... (16)

$$\tan.\,\gamma = \frac{n \cos.\,\delta}{1 - n\,\text{sen.}\,\delta}$$

Esta fórmula puede también reducirse á serie para calcularla en segundos, con más comodidad, con logaritmos de pocas decimales y resultará:

$$\gamma = \frac{n \cos. \delta}{\text{sen. } 1''} + \frac{n^2 \text{sen. } 2\,\delta}{2\,\text{sen. } 1''} \text{ .... } (17)$$

Ejemplo.—Calculemos la declinación aparente de la luna con los mismos elementos del párrafo anterior, á saber:

$$\pi = \ \ 0°\ 54'\ 48''.0 \qquad \delta = -\ \ 3°\ 31'\ 00''.6$$
$$\varphi = 19\ \ 19\ \ \ 0\ .0 \qquad h = -\ 33\ \ 22\ \ \ 4\ .3$$

y como en aquella aplicación se halló $\beta = -28'\ 51''.3$, se tendrá, haciendo uso de las fórmulas (16), y recordando que $h' = h + \beta$.

sen. π....	8.2024883	2..............	0.3010300		
sen. φ...	9.5195510	sen. $\frac{1}{2}\beta$.......	7.6228908−		
sen. h'...	9.7458580−	cos. $\frac{1}{2}(h'+h)$.	9.9205620		0.0053398
sen. h....	−9.7403725−	sen. δ.........	8.7877564−		−0.0007796
	7.7275248	sen. h'........	−9.7403725−	$n =$	0.0061194
			6.8918667−		

n...........	7.7867088	....	7.78671		
cos. δ.......	9.0001814	sen. δ.........	8.78776−		
Num.......	7.7858902		6.57447	$\gamma =$	0° 20′ 59″.4
Den.........	−0.0001630		−0.0003754	$\delta =$	− 3 31 0 .6
tan. γ.......	7.7857272	Den. =	1.0003754	$\delta' =$	− 3° 52′ 00″.0

Aunque en todo el cálculo he empleado logaritmos de siete cifras, no hay inconveniente en tomarlos de cinco al determinar el valor de n, que siempre es una pequeña fracción; así como tampoco lo hay en sustituir π sen. $1''$ y β sen. $1''$ por sen. π y 2 sen. $\frac{1}{2}\beta$, expresando estos arcos en segundos. Hagámoslo así al aplicar la serie (17).

π...........	3.51693	β.................	3.23842−		
sen. φ......	9.51955	cos. $\frac{1}{2}(h'+h)$....	9.92056		
sen. h'......	9.74586−	sen. δ...........	8.78776−		
sen. $1''$......	4.68557	....	4.68557		0.00534
sen. h'......	−9.74037−	....	−9.74037−		−0.00078
	7.72754		6.89194−	$n =$	0.00612

n...........	7.78675	n^2...........	5.5735		
cos. δ......	9.99918	sen. 2 δ......	9.0879−	1.er térm.º =	0° 21′ 00″.0
sen. $1''$.....	−4.68557	2 sen. $1''$.....	−4.9866	2.º „ =	− 0 .5
	3.10036		9.6748−	$\gamma =$	0° 20′ 59″.5
				$\delta =$	−3 31 0 .6
				$\delta' =$	−3° 52′ 00″.1

La misma sustitución del arco en segundos por el seno puede hacerse en el valor de m al calcular la fórmula (13).

Es necesario tener el mayor cuidado con el juego de los signos, y dar á cada línea trigonométrica el que le corresponda, según el valor que tenga el arco. En las aplicaciones anteriores, por ejemplo, se ha visto que los valores negativos de h y δ produjeron algún cambio de signos en diversas partes de las fórmulas, y en último resultado, unas coordenadas aparentes numéricamente mayores que las geocéntricas. Por esto al calcular las fórmulas importa no omitir los signos que van después de los logaritmos para indicar los de las cantidades á que pertenecen.

149.—Cuando se han calculado los efectos de la paralaje en la ascensión recta y en la declinación de la luna, es también muy fácil determinar el aumento de su semidiámetro, que puede obtenerse en función de las coordenadas aparentes y verdaderas. Eliminando, en efecto, la relación $\frac{\text{sen. } z'}{\text{sen. } z}$ en las ecuaciones (7) y (14), se halla por valor del semidiámetro aparente:

$$s' = s\,\frac{\text{sen. } h' \cos. \delta'}{\text{sen. } h \cos. \delta} \text{ .... } (18)$$

y si se prefiere calcular el aumento $s'-s$, supondremos:

$$\frac{\text{sen.}\,h'}{\text{sen.}\,h}=1+x \qquad \frac{\cos.\,\delta'}{\cos.\,\delta}=1+y$$

valores que sustituídos en el de s' dan por resultado:

$$s'-s=sx+sy+sxy$$

En el número anterior hallamos el valor de x, y por el mismo método puede determinarse el de y; pero atendiendo á la pequeñez de los efectos β y γ de la paralaje, tomaremos los arcos en segundos por sus senos, á saber:

$$\left.\begin{aligned} x&=\beta\,\frac{\cos.\,\tfrac{1}{2}(h+h')}{\text{sen.}\,h}\,\text{sen.}\,1'' \\ y&=\gamma\,\frac{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')}{\cos.\,\delta}\,\text{sen.}\,1'' \end{aligned}\right\}\quad\text{..............}\quad(19)$$

y como el término sxy sería muy pequeño por contener el factor $\text{sen.}^2\,1''$, bastará generalmente calcular sólo los dos primeros, que dan:

$$s'-s=sx+sy \quad\text{.......................}\quad(20)$$

En el ejemplo precedente el semidiámetro tabular era $s=14'57''.7$, y así para calcular el aparente, tendremos:

$$\beta=-1731'' \qquad \frac{1}{2}(h+h')=-33^\circ\,36'\,30''$$

$$\gamma=+1259'' \qquad \frac{1}{2}(\delta+\delta')=-\ \ 3^\circ\,41'\,30''$$

β	3.2383—	γ	3.1000		
cos. ½ $(h+h')$.	9.9206	sen. ½ $(\delta+\delta')$..	8.8088—		
sen. 1"	4.6856	....	4.6856	sx .... +	11".4
sen. h	—9.7404—	cos. δ	—9.9992	sy .... —	0 .4
x	8.1041	y	6.5952—	$s'-s=$	11".0
s	2.9533	....	2.9533	$s=$	14' 57".7
sx	1.0574	sy	9.5485—	$s'=$	15' 8".7

150.—Antes de terminar este Capítulo es preciso hacer una indicación de mucha importancia. Al calcular los efectos de la paralaje en la ascensión recta y en la declinación, he partido del supuesto de que el centro de la tierra se considere también como el de la esfera celeste, en el hecho de haber tomado como datos las coordenadas geocéntricas de la luna, y de haber definido la paralaje por el ángulo bajo el cual se vería el radio de la tierra desde el astro. Con tal hipótesis es indispensable hacer uso de la latitud geocéntrica, de manera que en la figura 41ª el punto Z representará el zenit geocéntrico del observador, punto en que su radio encuentra á la esfera celeste.

En la Parte Primera de este libro se ha expuesto el modo de calcular la latitud geocéntrica conociendo la geográfica, y la Tabla del número 23 suministra la reducción con la mayor facilidad, de modo que el cálculo de los efectos de la paralaje no presenta inconveniente alguno. Pero también se pueden determinar las coordenadas aparentes haciendo uso de la latitud geográfica, con tal que se suponga el centro de la esfera celeste en algún punto de la línea vertical del observador, y que se reduzcan las coordenadas geocéntricas de la luna á lo que serían vistas desde ese punto. De todos los puntos de la vertical, el extremo de la normal mayor es el que ofrece la ventaja de no demandar más que la reducción de la declinación geocéntrica, pues hallándose á la vez en el eje de la tierra y en el meridiano del observador, el ángulo horario de la luna, y en consecuencia, su ascensión recta, es exactamente la geocéntrica.

Siguiendo este nuevo método deberemos comenzar por tomar la paralaje en el sentido del ángulo bajo el cual se vería desde la luna la normal del observador. Si designamos, como antes, por π_0 la paralaje horizontal ecuatorial, por n la altura de la estación sobre el nivel del mar y por N la normal mayor, tendremos las ecuaciones:

$$\text{sen.}\,\pi_0=\frac{a}{\Delta} \qquad \text{sen.}\,\pi=\frac{N+n}{\Delta}$$

de las que resulta la relación siguiente de los arcos, que es sensiblemente igual á la de los senos:

$$\frac{\pi}{\pi_o} = \frac{N+n}{a} = \frac{1}{(1-e^2 \text{sen.}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{n}{a}$$

Elevando el binomio del denominador al numerador hasta la segunda potencia de e, se obtendrá por último:

$$\pi = \pi_o + \frac{1}{2}\pi_o e^2 \text{sen.}^2 \varphi + \pi_o \frac{n}{a} \text{ .... } (21)$$

Esta fórmula no difiere de la (2) más que en el signo del segundo término; y como los valores de este constan en la primera Tabla del número 141, se ve que para hallar la paralaje horizontal referida á la normal mayor, serán aditivas las dos correcciones por latitud y altura.

Calculemos ahora la reducción de la declinación geocéntrica de la luna. Sea C (fig. 42ª) el centro de la tierra, OH la normal del observador que ocupa el punto O en la superficie del globo, y ECE' el plano del ecuador. Siendo M la proyección de la luna L sobre este plano, tendremos que LCM es la declinación geocéntrica, que designaré por d, y su distancia polar será $LCP = 90° - d$. Llamando δ la declinación tal como se vería desde H, resulta que $LHP = 90° - \delta$, sería la distancia polar vista desde ese punto, común al eje y á la normal. El triángulo LCH da la ecuación:

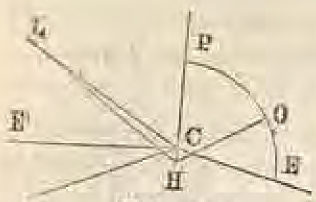


FIG. 42A

$$\Delta \,\text{sen.}\, L = CH \cos.\, \delta$$

y como el ángulo L es igual á $LCP - LHP = \delta - d$, y la distancia del centro al extremo de la normal tiene por valor (número 10): $CH = \frac{a e^2 \text{sen.}\, \varphi}{r}$, se obtendrá sustituyendo:

$$\text{sen.}\,(\delta - d) = \frac{a e^2 \text{sen.}\, \varphi \cos.\, \delta}{\Delta\, r} = \frac{N}{\Delta} e^2 \text{sen.}\, \varphi \cos.\, \delta$$

La forma de esta ecuación indica desde luego la extremada pequeñez de la diferencia $\delta - d$, de manera que nos será permitido introducir en ella algunas simplificaciones sin que se altere su exactitud. En primer lugar, puede tomarse sen. π_o por $\frac{N}{\Delta}$, en atención á que a y N difieren muy poco respecto de Δ; y en segundo no habrá inconveniente en emplear cos. d en vez de cos. δ. Con estas modificaciones, y tomando los pequeños arcos por sus senos, se tendrá:

$$\delta - d = \pi_o\, e^2 \cos.\, d\, \text{sen.}\, \varphi$$

que expresa la reducción de la declinación geocéntrica al extremo de la normal. Para facilitar las aplicaciones he calculado la Tabla que va á continuación, de los logaritmos de $A = \pi_o\, e^2 \cos.\, d$, y que tiene por argumento la paralaje ecuatorial y la declinación geocéntrica de la luna. Con ayuda de ese factor, la declinación tal como se vería desde el extremo de la normal, es:

$$\delta = d + A \,\text{sen.}\, \varphi \text{ .... } (22)$$

y haciendo uso de este valor pueden aplicarse las fórmulas de las paralajes de ascensión recta y de declinación, empleando también la latitud geográfica.

En las aplicaciones de las fórmulas de las paralajes, que se han hecho en los números precedentes, se emplearon las coordenadas geocéntricas de la luna y la latitud también geocéntrica 19° 19′ 00″ de México. Reduzcamos ahora la paralaje y la declinación al extremo de la normal, á fin de aplicar las mismas fórmulas con la latitud geográfica 19° 26′ 12″.3. La paralaje ecuatorial que dan las Efemérides es 54′ 48″.0, que fué la misma que se empleó en aquellos ejemplos, porque las correcciones por latitud y altura fueron numéricamente iguales y de distintos signos; pero en el caso actual tendrémos:

$$\begin{aligned} \pi_o &= 54' \, 48''.0 \\ \text{Correc. por } \varphi &= + \quad 1\,.2 \\ \text{Correc. por } n &= + \quad 1\,.2 \\ \hline \pi &= 54' \, 50''.4 \end{aligned}$$

Logaritmos del factor A para calcular la reducción de la declinación geocéntrica de la luna al extremo de la normal.

Argumentos: π_0 y d.

Declinación geocéntrica.	53′	55′	57′	59′	61′
0°	1.327	1.343	1.358	1.373	1.388
2	.326	.343	.358	.373	.388
4	.326	.342	.357	.372	.387
6	.324	.340	.356	.371	.385
8	.322	.339	.354	.369	.384
10	.320	.336	.352	.367	.381
12	.317	.333	.349	.364	.378
14	.314	.330	.345	.360	.375
16	.310	.326	.341	.356	.371
18	.305	.321	.337	.352	.366
20	.300	.316	.331	.346	.361
22	.294	.310	.326	.341	.355
24	.287	.304	.319	.334	.349
26	.280	.297	.312	.327	.342
28	.273	.289	.304	.319	.334
30	1.264	1.280	1.296	1.311	1.325

Tomando ahora el log. A con el valor de la paralaje ecuatorial y $d = -3° 31'$, se halla:

$$\begin{array}{ll} A \ldots\ldots\ldots & 1.341 \\ \text{sen. } \varphi \ldots\ldots\ldots & 9.519 \\ \hline \delta - d \ldots\ldots\ldots & 0.860 \ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{rl} d = & -3° 31' 00''.6 \\ \delta - d = & +\ 7\ .2 \\ \hline \delta = & -3° 30' 53''.4 \end{array}$$

Si con los nuevos datos, á saber: $\pi = 54' 50''.4$, $\varphi = 19° 26' 12''.3$ y $\delta = -3° 30' 53''.4$ se aplican ahora las fórmulas (12) y (16), se hallará $\beta = -28' 51''.5$, que es el mismo valor que se obtuvo por el otro método, y $\gamma = +21' 6''.7$. En consecuencia, la declinación aparente será:

$$\begin{array}{rl} \delta = & -3° 30' 53''.4 \\ \gamma = & +0\ \ 21\ \ \ 6\ .7 \\ \hline \delta' = & -3° 52'\ \ 0''.1 \end{array}$$

valor también igual al del número 148.

151.—Hay muchos casos en que es indiferente calcular los efectos de la paralaje por uno ú otro procedimiento; pero cuando se trata de comparar, por ejemplo, la distancia zenital calculada, con el valor que se haya obtenido por medio de la observación directa, me parece preferible hacer uso de la paralaje horizontal reducida por la fórmula (21) al extremo de la normal del observador, puesto que la medida de aquella distancia angular se refiere al zenit verdadero y no al geocéntrico. Lo mismo puede decirse cuando se desea calcular la distancia zenital geocéntrica de la luna empleando las ecuaciones (9) y (10), pues en la determinación de la paralaje de altura p no hay inconveniente en emplear la horizontal reducida por el nuevo método.

CAPITULO V.

DISPOSICIÓN Y USO DE LAS EFEMÉRIDES.

152.—Las tablas astronómicas de los Almanaques náuticos, de *La Connaissance des temps*, del *Jahrbuch* de Berlin y de otras publicaciones de este género, suministran las coordenadas y otros elementos relativos al sol, á la luna, á los planetas y á las principales estrellas fijas, así como otros varios datos astronómicos con cuyo auxilio se facilitan las aplicaciones de la ciencia. Por lo regular esos libros se publican con anticipación de tres ó cuatro años respecto de aquel para el cual están calculados, de manera que el astrónomo puede hacer de antemano las predicciones de todos los fenómenos que tenga interés en observar.

Los elementos de las Efemérides se refieren á determinado meridiano. Los de los Almanaques inglés y americano están referidos al de Greenwich como primer meridiano, si bien el último suministra también la mayor parte de los datos con relación al de Washington. *La Connaissance des temps* se refiere al meridiano de Paris, el *Jahrbuch* al de Berlin, etc. Todos los elementos están calculados para ciertos intervalos de tiempo del meridiano principal, tanto más cortos, en general, cuanto más rápida es la variación de los mismos elementos.

La disposición y el orden que tienen las tablas de las obras mencionadas son muy semejantes, de suerte que haciendo una breve descripción de las del Almanaque americano, por ejemplo, será muy

fácil comprender las de cualquiera otra publicación de la misma especie. Esta obra presenta, además, ciertas ventajas dependientes de sus numerosos datos, que me inclinan á recomendarla de preferencia.

Ocupan las primeras páginas del Almanaque las tablas del sol y de la luna, las cuales están arregladas por meses. En la primera página de cada mes, al lado del día y de la fecha, constan por su orden la ascensión recta, la declinación y el semidiámetro del sol, así como el tiempo sideral que invierte el semidiámetro en pasar por el meridiano, y la ecuación del tiempo. Todos estos elementos están calculados para el instante del medio día verdadero de Greenwich, acompañados los dos primeros y el último de sus variaciones horarias, con el objeto de facilitar las interpolaciones para cualquier otro instante.

En la segunda página correspondiente á cada mes, constan igualmente la ascensión recta del centro del sol, su declinación y la ecuación del tiempo, con sus variaciones horarias, calculadas para el momento del medio día medio de Greenwich, y además para la misma hora la ascensión recta del sol medio, que ocupa la última columna de la página, con el título de "Tiempo sideral."

La tercera página de cada mes contiene el día del año, contado sin interrupción desde 1 hasta 365; y en seguida la longitud y la latitud del sol [1], así como el logaritmo de su distancia á la tierra, y la hora media que se cuenta al comenzar el día (sideral).

La página cuarta del mes contiene el semidiámetro geocéntrico y la paralaje horizontal ecuatorial de la luna, con sus diferencias ó variaciones horarias; y también la hora media del tránsito de su centro por el meridiano, así como la edad de la luna. Estos datos están calculados para el medio día medio de Greenwich, y los dos primeros también para la media noche, de manera que se tienen con intervalos de 12^h de tiempo medio.

(1) La longitud y la latitud astronómicas constituyen otro sistema de coordenadas, poco usado en las aplicaciones más usuales de la Astronomía. La latitud es la distancia angular de un astro á la eclíptica contada en un arco perpendicular á su plano; y la longitud es el arco de la eclíptica contado desde el punto equinoccial hasta el pie del que mide la latitud.

Las ocho páginas siguientes traen la ascensión recta y la declinación del centro de la luna, calculadas de hora en hora de tiempo medio de Greenwich para todos los días del mes; y presentan, además, sus diferencias por un minuto. Estas tablas terminan con las horas de las fases de la luna, y con las de su apogeo y su perigeo.

Las páginas restantes del mes están destinadas á las "Distancias lunares," las cuales expresan las distancias angulares del centro de la luna á los de varios planetas y estrellas principales, tales como las vería un observador colocado en el centro de la tierra. Estos datos, que sirven para la determinación de las longitudes geográficas, están calculados de tres en tres horas de tiempo medio de Greenwich.

A continuación de las tablas del sol y de la luna vienen las Efemérides de los principales planetas, en las que constan sus posiciones (ascensión recta y declinación), las horas de sus culminaciones, sus paralajes horizontales y sus semidiámetros, todo referido al tiempo medio de Greenwich.

El resto del Almanaque está referido á Washington como primer meridiano, y comienza con una Tabla en que constan la paralaje del sol, la oblicuidad de la eclíptica y otros diversos elementos relativos al mismo astro, calculados para cada diez días del año. Vienen en seguida varios datos referentes á las estrellas fijas, y las ascensiones rectas y declinaciones de unas 200 estrellas principales, calculadas para cada diez días en los momentos de sus respectivos tránsitos por el meridiano de Washington. Estas posiciones son las *aparentes*, quiere decir, ya afectadas por la precesión de los equinoccios, por la nutación del eje de la tierra y por la aberración de la luz, que son las tres causas que alteran ligeramente las ascensiones rectas y declinaciones *medias*. También en las posiciones aparentes se ha tomado ya en cuenta el pequeño movimiento propio de las estrellas, de suerte que el calculador sólo tiene que interpolarlas para el día en que las necesite, sin ocuparse en otra clase de correcciones. Las interpolaciones pueden hacerse casi á la simple vista, atendida la pequeñez de las variaciones, las cuales constan en las mismas tablas al lado de las coordenadas respectivas.

Después de las estrellas trae el Almanaque americano las Efemérides del sol para los medios días medio y verdadero del meridiano de Washington, las cuales son semejantes á las que se refieren al de Greenwich y que antes se han explicado. En seguida las de la luna, y por último, las de los planetas principales, referidas también al meridiano de Washington. Vienen después los elementos necesarios para la predicción de los eclipses del sol y de la luna que deben verificarse en el año; y también los referentes á las ocultaciones de estrellas por la luna que son visibles en algún lugar del globo. El Almanaque termina con las tablas del planeta Júpiter y sus satélites, en las que constan los eclipses de éstos y sus tránsitos sobre el disco del planeta. Lo restante del libro está destinado á la explicación de sus diversas partes, y presenta también algunas tablas auxiliares de más ó menos importancia.

153.—Los datos, según se ha visto, están calculados á intervalos de tiempo más ó menos cortos, en razón de la rapidez é irregularidad de sus variaciones; así, por ejemplo, todos los elementos del sol sólo constan para cada 24^h del meridiano principal; mientras que las coordenadas de la luna están dadas de hora en hora. Cuando las variaciones son sensiblemente uniformes, la interpolación se ejecuta con la mayor facilidad, pues toda la operación se reduce á aplicar al elemento de que se trate, una corrección proporcional al tiempo transcurrido desde la hora para la cual conste en la tabla. Supongamos, por ejemplo, que se desee calcular la declinación del sol á la hora media H' de Greenwich el día 30 de Noviembre de 1870. Se ve en el Almanaque que ese día la declinación á 0^h, ó á medio día medio, es $-21° 40' 42''.0$ y su variación horaria en el mismo instante, $v = -24''.27$; luego expresando á H' en horas y fracciones, se tendrá:

$$\delta = -21° 40' 42''.0 - H'v$$

En general, si es l' un elemento cualquiera á medio día, v su variación ó movimiento horario, y H' un número de horas contado desde aquel instante, su valor á la hora H', es: $l = l' + H'v$.

154.—El anterior procedimiento es en muchos casos suficientemente exacto; pero cuando se desea la mayor precisión posible, es preciso atender á los cambios que de un momento á otro sufre el valor de v, pues muchas veces no puede suponerse constante sin error. En efecto, el sentido en que deben tomarse los valores de v que constan en las tablas, es el de la velocidad ó variación que en esos instantes tendría el elemento l si continuase variando de una manera uniforme; pero como generalmente esta hipótesis deja de ser cierta en un espacio considerable de tiempo, conviene tomar en cuenta la variacion de velocidad de este modo. Si designamos por h el intervalo constante de tiempo que hay entre dos valores consecutivos v_1 y v_2 de la variación, y que es de 24^h respecto del sol, tendremos que $v_2 - v_1$ representa su irregularidad en h horas, y $\frac{v_2 - v_1}{h}$ en la unidad de tiempo. Siendo H' la hora para la cual se desea calcular el elemento l, calcularemos el valor de la variación en el instante medio $\frac{1}{2} H'$, y entonces será permitido suponer que es constante durante el tiempo H'. Adoptaremos, según esto:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_1 + \frac{(v_2 - v_1)H'}{2h} \\ \text{y por consiguiente:} \qquad & \\ l &= l' + H'v \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

Por ejemplo, refiriéndonos al caso anterior del 30 de Noviembre de 1870, supongamos que se desea calcular la declinación para las 14^h de Greenwich. Tendríamos:

El día 30 de Nov.................... $v_1 = -24''.27$
El día 1º de Dic........................ $v_2 = -23''.23$

$$v_2 - v_1 = +\ 1''.04$$

$$v = -24''.37 + \frac{7 \times 1''.04}{24} = -23''.97$$

Este valor de v, que representa la variación media en las 14^h, da para la declinación:

$$\delta = -21^\circ 40' 2''.0 - 23''.97 \times 14 = -21^\circ 46' 17''.6$$

Si hubiéramos adoptado como constante el valor v del día 30, habría resultado un error de $4''$ próximamente.

155.—Este método de interpolación, tan sencillo como exacto, es aplicable á cualquier elemento que vaya acompañado de su variación en la unidad de tiempo; y lo único de que debe cuidarse es de expresar H' en la misma especie de unidades á que se refiera v, y elegir su valor de manera que represente una fracción del intervalo constante h. Por ejemplo, si se desea la posición de la luna para las $8^h\ 24^m\ 36^s$ de Greenwich, tenemos que como están dadas de hora en hora las Efemérides de ese astro, deberemos partir de su posición á las 8^h é interpolar por los $24^m\ 36^s$, que expresados en minutos son $24^m.6$. Este será el valor de H' que multiplicado por la variación v por minuto, calculada para el instante medio $12^m.3$, dará la corrección que debe sufrir el elemento que conste en las tablas para 8^h.

156.—He supuesto hasta ahora que el instante para el cual se desea obtener un elemento, expresa tiempo de Greenwich, ó sea del meridiano de las Efemérides; pero el caso más general es el de calcularlo para la hora H de otro meridiano cualquiera. Este caso, sin embargo, se reduce al anterior por medio de la diferencia de longitud. Siendo, en efecto, L la longitud geográfica del lugar respecto del meridiano de las Efemérides, expresada en tiempo, la hora que se cuenta en este en el mismo instante físico es: $H' = H + L$. Así, pues, por la simple adición de la longitud, tomada con su signo, se halla la hora contemporánea del meridiano principal, y en consecuencia, puede aplicarse el método que se ha explicado.

157.—Hay otro procedimiento para hacer las interpolaciones que es más general que el anterior, por no necesitar las variaciones en la unidad de tiempo. Llamemos y el valor de un elemento cualquiera, y x la cantidad de que depende, y que en las tablas astronómicas es el tiempo. El elemento y será, por consiguiente, una función de x, de la forma general:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Supongamos ahora que se haya formado una tabla de valores de y, calculada para valores equidiferentes de x, tales como $x = -h$,

$x=0$, $x=+h$, $x=+2h$, etc., y propongámonos determinar con su ayuda los coeficientes indeterminados b, c, d, etc. Atribuyendo á x los valores expresados, los correspondientes de y serán:

$$
\begin{aligned}
y_{-1} &= a - bh + ch^2 - dh^3 \\
y_0 &= a \\
y_{+1} &= a + bh + ch^2 + dh^3 \\
y_{+2} &= a + 2bh + 4ch^2 + 8dh^3
\end{aligned}
$$

Si cada uno de ellos se resta del que le sigue, se tendrá una serie de residuos, que llamaremos *diferencias primeras*, y que resultarán independientes de a, que es el valor de y cuando $x=0$. Restando de igual manera cada diferencia primera de la que le sigue, se obtiene la serie de *diferencias segundas*, en las cuales se ha eliminado el término bh. La misma operación dará las *diferencias terceras*, y así sucesivamente, de modo que las series son:

Difs. primeras.	Difs. segundas.	Difs. terceras.
$bh - ch^2 + dh^3$		
	$2ch$	
$bh + ch^2 + dh^3$		$6dh^3$
	$2ch^2 + 6dh^3$	
$bh + 3ch^2 + 7dh^3$		

Para determinar los coeficientes b, c, d, etc., en función de estas diferencias, supongamos que el valor de x que entra en la forma general, esté comprendido entre $x=0$ y $x=+h$. Entonces adoptaremos la diferencia primera que proviene de la substracción........... $y_{+1}-y_0$, y que es la segunda ó central en la serie anterior. Habiendo igual razón para tomar cualquiera de las dos diferencias segundas, haremos uso de su promedio; y designando por Δ_1, Δ_2 y Δ_3 respectivamente las diferencias primera, segunda y tercera adoptadas, tendremos las siguientes ecuaciones para la determinación de los coeficientes:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= bh + ch^2 + dh^3 \\
\Delta_2 &= 2ch^2 + 3dh^3 \\
\Delta_3 &= 6dh^3
\end{aligned}
$$

La última da el valor de d, que sustituído en la segunda suministra el de c; y sustituyendo los dos en la primera, resulta el de b. Esos valores son:

$$
b = \frac{\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{12}\Delta_3}{h}
$$

$$
c = \frac{\frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{1}{4}\Delta_3}{h^2}
$$

$$
d = \frac{\frac{1}{6}\Delta^3}{h^3}
$$

Introduciendo ahora estos coeficientes en la expresión general de y, y haciendo para abreviar:

$$
\left.
\begin{aligned}
t &= \frac{x}{h} \\
A &= \Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{12}\Delta_3 \\
B &= \quad\ \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{4}\Delta_3 \\
C &= \qquad\qquad\ \ \frac{1}{6}\Delta_3
\end{aligned}
\right| \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)
$$

el valor del elemento será:

$$
y = a + At + Bt^2 + Ct^3
$$

Al aplicar estas fórmulas es preciso seguir el mismo procedimiento que al desarrollarlas, esto es: tomar cuatro de los elementos de las Efemérides, elegidos de tal manera que el que se busca esté comprendido entre el segundo y el tercero. Calculemos el siguiente ejemplo: supongamos que se quiera saber cuál fué la ascensión recta del limbo visible ó iluminado de la luna el 19 de Noviembre de 1858, al pasar este astro por el meridiano de un lugar cuya longitud es $L = 6^h\ 36^m\ 43^s$ al Oeste de Greenwich.

El Almanaque náutico inglés trae las ascensiones rectas del borde visible de la luna en los instantes de sus tránsitos superior é inferior por el meridiano de Greenwich, quiere decir, para intervalos de

12^h de longitud. Como el tránsito de que se trata debió verificarse entre el superior y el inferior de Greenwich el 19 de Noviembre, tomaremos los datos siguientes:

		Dif. prim.	Dif. seg.	Dif. terc.
Nov. 18.—Paso inf...	$1^h 59^m 39^s.38$			
		$29^m 13^s.17$		
„ 19.—Paso sup.. $a=$	2 28 52 .55		$1^m 24^s.88$	
		30 38 .05		$0^s.39$
„ 19.—Paso inf...	2 59 30 .60		1 25 .27	
		32 3 .32		
„ 20.—Paso sup..	3 31 33 .92			

En este caso t será igual á

$$\frac{L}{h}=\frac{6^h 36^m.7}{12^h}=\frac{6^h.612}{12^h}=0.551$$

y de acuerdo con las fórmulas tendremos:

$$\Delta_1=1838^s.05 \qquad \Delta_2=85^s.07 \qquad \Delta_3=0^s.39$$

por lo cual los coeficientes serán:

$$A=1795^s.54 \qquad B=42^s.44 \qquad C=0^s.06$$

A.........	3.2541951	B.........	1.62778	C.........	8.7781
t.........	9.7411516	t^2.........	9.48230	t^3.........	9.2235
	2.9953467		1.11008		8.0016

$$\begin{aligned} At &= \ \ 989^s.34 \\ Bt^2 &= \ \ \ \ 12.88 \\ Ct^3 &= \ \ \ \ \ \ 0.01 \\ \hline y-a &= 1002^s.23 = 16^m 42^s.23 \\ a &= \qquad\qquad\ 2\ \ 28\ \ 52.55 \\ \hline y &= 2^h 45^m 34^s.78 \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior todas las diferencias resultan positivas; pero muchas veces no es así, y es preciso el mayor cuidado con los signos, no olvidando que invariablemente debe restarse cada cantidad de la que le sigue, dando á las restas ó diferencias sucesivas el signo que les corresponde según las reglas del álgebra.

158.—Cuando no son considerables los intervalos h, ó cuando no son muy irregulares las variaciones de los elementos, las diferencias segundas resultan sensiblemente iguales, y entonces pueden suponerse nulas las terceras. Con esta modificación las fórmulas serán:

$$\left.\begin{aligned} t&=\frac{x}{h} \\ A&=\Delta_1-\frac{1}{2}\,\Delta_2 \\ B&=\qquad\frac{1}{2}\,\Delta_2 \\ y&=a+At+Bt^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{........................} \ (3)$$

en las que Δ_2 representa siempre el promedio de las dos diferencias segundas.

Calculemos de esta manera el ejemplo del número 154, tomando las declinaciones del sol para los días 29 y 30 de Noviembre y 1 y 2 de Diciembre de 1870.

Nov. 29...	$-21°30'47''.1$			
		$-9'54''.9$		
„ 30... $a=$	$-21\ 40\ 42\ .0$		$+24''.9$	
		$-9\ 30\ .0$		$t=\frac{14^h}{24^h}=0.58333$
Dic. 1...	$-21\ 50\ 12\ .0$		$+25\ .2$	
		$-9\ \ 4\ .8$		
„ 2...	$-21\ 59\ 16\ .8$			

$$A=-570''.0-12''.5=-582''.5 \qquad B=+12''.5$$

A.........	2.76530—	B.........	1.0969	$At=-$	$5'39''.8$
t.........	9.76591	t^2.........	9.5318	$Bt^2=+$	4 .2
	2.53121—		0.6287	$y-a=$	$5'35''.6$
				$a=$	$-21\ 40\ 42\ .0$
				$y=$	$-21°46'17''.6$

Este método de interpolación se usa mucho, especialmente para calcular la posición de la luna por medio de las Efemérides horarias de este astro. Presentaré los ejemplos [illegible] es para ejercicio del lector. Dada la posición de la lu[illegible] $+114^s.63$ [illegible] Greenwich que van á continuación, ¿cuál será la que tenga á $4^h\ 5^m\ 31^s.4$, tiempo medio de México, siendo $L = 6^h\ 36^m\ 28^s.6$ la longitud de esta ciudad?

	ASCENSIÓN RECTA.	DECLINACIÓN.
A 9^h	$23^h\ 16^m\ 37^s.76$	$-9°\ 22'\ 28''.2$
„ 10	23 18 36 .34	−9 11 31 .8
„ 11	23 20 34 .71	−9 00 33 .4
„ 12	23 22 32 .89	−8 49 33 .1

Resolución.—Se tendrá: $t = 0.7$, y

$$a = 23^h\ 19^m\ 59^s.22 \qquad \delta = -9°\ 3'\ 51''.1$$

159.—La última de las ecuaciones (3) puede aplicarse á la determinación de la hora á la cual un astro tiene una posición dada (véase el número 127). En tal caso y representa ese elemento conocido; las Efemérides suministran los coeficientes A y B en función de las diferencias primeras y segundas; y sólo queda por incógnita la cantidad $t = \frac{x}{h}$. Siendo necesariamente t una fracción del intervalo constante h, puede resolverse la ecuación por aproximaciones sucesivas. Se tiene desde luego:

$$t = \frac{y-a}{A} - \frac{B}{A}\,t$$

é introduciendo en el segundo término el valor aproximativo......... $t = \frac{y-a}{A}$, resulta:

$$t = \frac{y-a}{A} - \frac{B}{A}\left(\frac{y-a}{A}\right)^2 \text{.................... (4)}$$

Ejemplo.—Dadas las ascensiones rectas horarias que se han empleado en la aplicación precedente, supongamos que se desee saber á qué hora de Greenwich tiene la luna $23^h\ 19^m\ 59^s.22$ por ascensión recta.

Las diferencias son $\Delta_1 = 118^s.37$ y $\Delta_2 = -0^s.20$; por consiguiente ,allaremos $A = 1$[illegible] $B = -0^s.10$; y tomando por a la ascensión recta á 10^h se [illegible]

$$y = 23^h\ 19^m\ 59^s.22$$
$$a = 23\ 18\ 36\ .34$$

$y - a = +\ 1^m\ 22^s.88 = +82.88$...... 1.9184497 B......... 9.0000−

A........ −2.0736084.................. −2.0736

9.8448413 ......cuad.... 9.6897

6.6161−

+0.69959 .... −0.00041

De aquí resulta $t = +\ 0.69959 + 0.00041 = +\ 0.70000$. Como en esas tablas de la luna el intervalo h es de 1^h ó de 3600^s, tendremos $x = 0.7 \times 3600^s = 2520^s = 42^m\ 00^s$; y por tanto la hora que se busca es $H' = 10^h\ 42^m\ 00^s$ de Greenwich; ó bien $H = 4^h\ 5^m\ 31^s.4$ de México.

Por el mismo método puede hacerse la predicción de las fases de la luna, puesto que este problema se reduce á determinar las horas en que el sol y la luna difieren en ascensión recta 0^h, 6^h, 12^h ó 18^h, que corresponden respectivamente á la neomenia, al cuarto creciente, al plenilunio y al cuarto menguante. Calculemos por ejemplo, la oposición en ascensión recta de Diciembre de 1870. La simple inspección de las posiciones del sol y de la luna da á conocer que el plenilunio se verificará el día 7 de Diciembre entre las 14^h y las 15^h de Greenwich; por consiguiente, calculemos las ascensiones rectas del sol y tomemos las de la luna para las horas siguientes:

	Ascensiones rectas del sol.	Ascensiones rectas de la luna.	Diferencias.
A 13^h	$16^h\ 58^m\ 15^s.39$	$4^h\ 56^m\ 4^s.21$	$11^h\ 57^m\ 48^s.82$
„ 14	16 58 26 .33	4 58 9 .68	11 59 43 .35
„ 15	16 58 37 .27	5 00 15 .35	12 1 38 .08
„ 16	16 58 48 .21	5 2 21 .21	12 3 33 .00

La columna de las diferencias se ha formado restando las del sol de las ascensiones rectas de la luna después de aumentarles 24^h; y para hallar el momento en que esa diferencia es exactamente de 12^h, haremos la interpolación con los datos:

$$y - a = 16^s.65 \qquad A = +114^s.63 \qquad B = +0^s.10$$

Del cálculo resulta $t = 0^h . 1452 = 8^m 43^s$, y así el plenilunio se verificará á las $14^h 8^m 43^s$ de Greenwich, ó á las $7^h 30^m 15^s$ de México próximamente.

160.—Todos estos problemas se resuelven acaso con más facilidad por medio de los movimientos ó variaciones horarias, que constan en las tablas ó que se calculan fácilmente de este modo. Diferenciando la última fórmula (3) respecto de t, se halla:

$$\frac{dy}{dt} = A + 2Bt$$

ecuación que expresa la variación de la coordenada y respecto de la del tiempo á la hora t. Por consiguiente, haciendo á $dx = 1^h$, y atendiendo á que $dt = \frac{dx}{h}$, resulta para el valor del movimiento horario:

$$v = \frac{dy}{dx} = \frac{A + 2Bt}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (5)$$

Ejemplo.—Con los datos $A = -582''.5$ y $B = +12''.5$ del número 158, calculemos el movimiento horario del sol en declinación el día 30 de Noviembre á 7^h de Greenwich. Se tendrá: $t = \frac{7}{24} = 0.29$.

$$\begin{array}{r} A = -582''.5 \\ 2Bt = +\;\; 7''.2 \\ \hline -575''.3 \end{array} \qquad v = -\frac{575''.3}{24} = -23''.97$$

resultado idéntico al del número 154.

Para las Efemérides de la luna, se tiene $h = 1^h$, y así sustituyendo los valores (3) de A y B, resulta:

$$v = \Delta_1 + \left(t - \frac{1}{2}\right)\Delta_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (6)$$

Notemos que cuando t es igual á $\frac{1}{2}$, se obtiene $v = \Delta_1$, lo cual indica que las diferencias primeras pueden considerarse como las variaciones horarias, correspondientes á la mitad del intervalo que hay entre las horas de dos coordenadas consecutivas.

Con ayuda del movimiento horario es muy fácil determinar la ho-

ra en que un astro adquiere una posición dada. Sea, en efecto, l este elemento, y l' el que más se aproxima á l en las Efemérides del astro. Si designamos por H' la hora correspondiente á l' y por H la que se busca, tendremos, siendo v la variación horaria.............. $v : 3600^s :: l - l' : H - H'$, de donde resulta:

$$H = H' + \frac{3600^s}{v}(l - l') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (7)$$

Para mayor exactitud debe calcularse el valor de v para el instante medio $\frac{1}{2}(H + H')$, determinando primero el valor aproximativo de H por el mismo método. Repitiendo el primer ejemplo del número 159, calculemos la hora de Greenwich en que la luna tiene $23^h 19^m 59^s.22$ de ascensión recta, tomando los datos que constan al fin del número 158. Por ellos vemos que la ascensión recta que más se aproxima á la anterior es la correspondiente á $H' = 11^h$, que es $23^h 20^m 34^s 71$, de modo que se tiene: $l - l' = -35^s.49$. Para determinar el valor aproximativo de H hagamos uso de la diferencia primera $118^s.37$ en vez de v, y se hallará en horas:

$$H - H' = -\frac{35.5}{118.4} = -0^h.3$$

Así, pues, tomaremos $H = 10^h.7$. En consecuencia, el instante medio vendrá á ser $10^h.85$, y calcularemos el valor de v por la fórmula (6) tomando $t = 0.85$.

$$\begin{array}{r} \Delta_1 = 118^s.37 \\ -0.2 \times 0.35 = -0\;.07 \\ \hline v = 118^s.30 \end{array}$$

y entonces la ecuación (7) dará:

$$H = 11^h - \frac{3600^s \times 35^s 49}{118.30} = 11^h - 18^m 00^s = 10^h 42^m 00^s$$

que es precisamente el resultado que se obtuvo por la fórmula (4)

CAPITULO VI.

TEORÍA Y USO DEL SEXTANTE.

161.—Los arcos celestes que se miden habitualmente para la resolución de todos los problemas de la Astronomía práctica son las distancias zenitales y los ángulos azimutales de los astros; por consiguiente un círculo repetidor, y mejor aún un teodolito astronómico ó altazimut, son suficientes para obtener los datos necesarios en todas las aplicaciones. Sin embargo, el sextante y todos los demás instrumentos de reflexión, se emplean igualmente con el mismo objeto, y si bien los resultados que proporcionan son por lo general inferiores á los que se obtienen con un buen altazimut ó algún otro aparato de precisión, presentan en cambio la ventaja inestimable de su fácil transporte y de su sencillo manejo, siendo también susceptibles de suministrar, en manos hábiles, resultados verdaderamente notables por su exactitud.

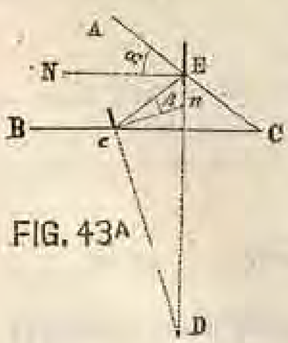


FIG. 43A

El principio que sirve de fundamento á la construcción de los instrumentos de reflexión es el siguiente: si un rayo luminoso $A\,E$ (fig. 43ª) sufre sucesivamente dos reflexiones $E\,e$ y $e\,C$ en dos espejos E y e, el ángulo $A\,C\,B$ formado por la primera dirección $A\,C$ con la última $B\,C$, es doble

del ángulo $E\,D\,e$ que forman los planos de los dos espejos. Con el fin de demostrar esta propiedad, llamemos α el ángulo de incidencia en el primer espejo, esto es, el formado por el rayo $A\,E$ con la normal $E\,N$ al espejo en el punto E; y β el de incidencia $E\,e\,n$ en el segundo espejo. Entonces el triángulo $E\,e\,C$, en el cual $2\,\alpha$ es el ángulo externo, da la ecuación:

$$C = 2\,\alpha - 2\,\beta$$

Por la misma razón el triángulo $E\,e\,D$, en que el ángulo externo es igual á $90° - \beta$, suministra esta otra:

$$D = \alpha - \beta$$

y por consiguiente resulta: $C = 2\,D$.

En virtud de este principio, si se coloca la vista en un punto cualquiera de $e\,C$, se verá la imagen refleja del punto A como si el rayo luminoso viniera de otro punto B situado en la prolongación de $C\,e$; ó en otros términos, el objeto A, visto por la doble reflexión, estaría en coincidencia con otro objeto B, visto directamente. Si, pues, de alguna manera se logra ver directamente la señal B, á la vez que A por reflexión, y se consigue medir el ángulo de los espejos cuando se haya establecido la coincidencia de ambas señales, el doble de este será el que forman los objetos.

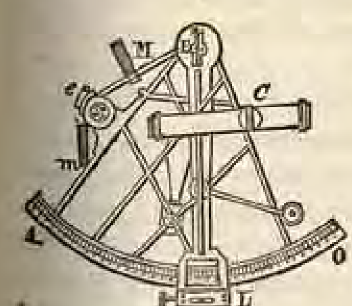


FIG. 44A

La primera de estas condiciones se ha llenado dejando sin platear ó sin estañar una parte del cristal de que está formado el espejo e, de modo que, al través de la mitad diáfana, puedan verse los objetos situados en la dirección $B\,C$; y la segunda haciendo que el espejo E se mueva con una alidada sobre un arco graduado, como lo indica la figura 44ª, que representa el sextante. El arco $O\,A$, que comunmente es de 60° á 70°, está dividido doblemente, quiere decir, de 120° á 140°, con el fin de que las lecturas suministren desde luego el ángulo de los objetos, doble del de los espejos. En el centro del arco está fijo, en la alidada EL, el espejo E, llamado espejo mayor, y por consiguiente se mueve con ella; mientras que el espejo menor e, fijo al limbo, no tiene más que el pequeño movimiento necesario para comprobar y corregir su posición, como se dirá después. Un telescopio cuyo eje es paralelo al plano del limbo, y al cual está unido por medio de un collar C, recibe las imágenes del objeto que se ve directamente al través de la parte superior del espejo menor, que no está estañada, y del que se ve después de la primera reflexión en el espejo mayor, y de la segunda en la mitad inferior del espejo e. En la parte posterior del limbo hay un mango de madera por el cual se toma el instrumento para servirse de él, pues por lo regular no se fija en un apoyo, sino que se tiene en la mano.

162.—Para que el sextante dé con precisión el ángulo de dos objetos, es necesario: 1º que su limbo sea paralelo al plano en que se verifica la doble reflexión; pero como este plano es perpendicular al de los espejos, resulta que estos deben ser exactamente perpendiculares al plano del limbo; 2º, que el cero O de la graduación se halle en la dirección del radio EO, en la cual son paralelos los planos de ambos espejos, puesto que sólo en ese caso formarán un ángulo nulo; 3º, que la línea de colimación del telescopio sea también paralela al plano de la reflexión, ó sea al del limbo; 4º, que la alidada gire precisamente en el centro del arco graduado. Veamos cómo se comprueban estas condiciones principales.

La primera se examina moviendo la alidada hasta colocarla próximamente en medio del arco, como la representa la figura. Entonces, si se sitúa la vista en E, lo más cerca que se pueda del plano del limbo, se verá directamente la parte del arco graduado que queda hacia el extremo A, y la misma por reflexión en el espejo. Si la imagen refleja se ve exactamente en la prolongación de la directa, de manera que ambas presenten el aspecto de un solo plano, existe la perpendicularidad entre el espejo mayor y el limbo; pero de lo contrario, será preciso mover el primero por medio de los tornillos que fijan su armadura metálica á la placa de la alidada, hasta conseguir la coincidencia de los dos arcos directo y reflejo. Como por lo

general los fabricantes hacen esta rectificación bastante bien, suele suceder que el espejo esté desprovisto del pequeño movimiento necesario para corregir su posición; en tal caso, si se le nota algún ligero error, lo que debe hacerse es introducir entre su armadura y la alidada una hoja de papel más ó menos grueso, según la magnitud del error; colocándola del lado anterior ó del posterior del espejo, según el sentido en que convenga moverlo, y volviendo en seguida á apretar los tornillos. Se estima que la vista puede apreciar muy bien una inclinación de 3′ á 4′ del plano ó arco reflejo respecto del directo; y como un error que no exceda de esta cantidad no tiene influencia sensible en la medida de los ángulos, se deduce que el método de comprobación indicado suministra siempre la precisión necesaria si se practica con esmero.

163.—Una vez corregido el espejo mayor, si hacemos de manera que el menor le sea paralelo en una posición cualquiera, habremos conseguido colocar también su plano perpendicular al del limbo. Con este fin se dirige el telescopio á un objeto muy distante, ó mejor á una estrella pequeña; y luego que se tiene en el campo su imágen directa, se lleva la alidada hacia el cero O de la graduación. Entonces se presentará en el campo del anteojo otra imagen del mismo objeto, que es la que proviene de la doble reflexión; y si en el movimiento de la alidada, las dos imágenes llegan á sobreponerse exactamente, se tiene la prueba de que existe el paralelismo de los dos espejos; mas si por el contrario, la imagen refleja se ve pasar á un lado de la directa, sin que pueda conseguirse su superposición, se moverá el espejo menor por medio de un tornillo colocado en su parte posterior, y á veces debajo del limbo; y se repetirán las pruebas hasta lograr la exacta coincidencia de ambas imágenes.

Al hacer esta y otras comprobaciones análogas, es preciso tener cuidado de que las dos imágenes se vean con la misma intensidad. Esto se consigue subiendo á bajando el anteojo, esto es, alejándolo ó acercándolo al plano del limbo, por medio de un tornillo que hace variar la distancia del collar del telescopio al limbo, sin alterar el paralelismo del eje de colimación y de este plano. En virtud de este movimiento, resulta en efecto que el objetivo del anteojo recibirá mayor cantidad de rayos reflejos si es pequeña su distancia al limbo; porque la parte diáfana del espejo menor, por la cual recibe los rayos directos, comienza á cierta altura respecto del limbo. Por el contrario, si se aleja el telescopio de este plano, será mayor la cantidad de rayos que reciba de la imagen directa, la cual, por consiguiente, se verá más brillante que la refleja. Dando, pues, al collar del anteojo, la posición conveniente, lo que es muy fácil después de dos ó tres ensayos, se presentarán las dos imágenes sensiblemente con la misma intensidad.

164.—Luego que se tiene seguridad de que ambos espejos son perpendiculares al limbo, se examina si el vernier de la alidada señala exactamente el cero de la graduación cuando se hacen coincidir las dos imágenes de un mismo objeto, por ser esta la posición en que son paralelos los planos de los espejos. Generalmente sucederá que al sobreponer las dos imágenes de una estrella, por ejemplo, moviendo al efecto el tornillo de aproximación de la alidada hasta lograr su exacta coincidencia, el vernier en vez de indicar precisamente 0°, señalará cierta lectura e_0; mas como la posición que entonces ocupa la alidada corresponde al paralelismo de los espejos, se infiere que el cero ú origen de la graduación debería hallarse en el punto e_0, y esta lectura representará por consiguiente, el *error inicial* ó bien *el error del cero*, como se le llama comunmente. En algunos sextantes puede hacerse desaparecer ese error, porque están provistos del mecanismo necesario para comunicar pequeños movimientos al espejo menor al derredor de una linea perpendicular al limbo; y entonces lo que debe hacerse es poner en coincidencia el cero de la alidada con el de la graduación, y observando la estrella, mover el espejo menor hasta que se confundan las dos imágenes. Otros sextantes no tienen ese mecanismo, que en realidad no es necesario; porque una vez hallado el valor de e_0, se aplica como corrección á todos los ángulos que se midan. Por otra parte, aun cuando se destruya de pronto el error, no permanece nulo por mucho tiempo; y no es raro que en el curso de una sola serie de observaciones varíe sensiblemente de valor, lo cual se nota cuando se determina al comenzar y al terminar la serie, que es lo más conveniente en todos casos.

Siendo, pues, e_0 el error inicial, y G la indicación del sextante cuando se mide con él un ángulo cualquiera, el arco verdadero será $G - e_0$. Debe advertirse que la graduación del limbo se prolonga un poco hacia la parte opuesta á la numeración creciente; porque puede suceder que el paralelismo de los espejos corresponda á algún punto de ese arco adicional, en cuyo caso el valor de e_0 se considerará como negativo, y el ángulo correcto será $G + e_0$. (1) También conviene advertir que cuando tal cosa suceda, debe tenerse cuidado de hacer la lectura con el vernier en sentido opuesto, quiere decir, tomando su última división por primera, la penúltima por segunda, etc. Así, por ejemplo, si el instrumento da una aproximación de 10°, el vernier estará generalmente numerado de 0 á 10; y entonces, en la cifra 10 se supondrá 0, en la 8 se supondrá 2, etc.

Con el fin de obtener el valor de e_0 sensiblemente independiente de los pequeños errores de observación, deben hacerse varias lecturas correspondientes á otras tantas coincidencias, y adoptar el término medio, como en el ejemplo siguiente, que se refiere á observaciones de distintas estrellas de segunda ó tercera magnitud:

$$\begin{array}{r} 1'\,55'' \\ 1\;\;50\; \\ 2\;\;00\; \\ 1\;\;55\; \\ 2\;\;\;\,5\; \\ \hline e_0 = 1'\,57''.0 \end{array}$$

Obtenidas estas lecturas en la parte positiva del arco, el ángulo correspondiente á cualquiera indicación G del instrumento, será: $G - 1'\,57''$.

El error inicial se determina también por medio del sol, midiendo

(1) Muchas veces se representa algebraicamente el ángulo correcto por la expresión general $G + e_0$ atribuyendo á e_0 el signo positivo cuando el paralelismo de los espejos corresponda á un punto del arco adicional ó negativo, y así lo he representado en mis "*Nuevos Métodos Astronómicos*;" pero se comprende que ambas formas de la expresión dan resultados necesariamente idénticos cuando se aplican atribuyendo á e_0 el signo que le corresponda de acuerdo con la convención que se haya establecido.

con el sextante su semidiámetro, por ser esta operación susceptible de más exactitud que la superposición de las dos imágenes de su limbo. A este fin, dirigiendo el telescopio hacia ese astro, se mueve la alidada con el tornillo de aproximación hasta que la imagen refleja se ponga en contacto con la directa, tanto hacia un lado como hacia el otro de ésta, y leyendo las dos indicaciones, cuyo término medio da el valor de e_0. En efecto, puesto que al coincidir los centros la lectura sería e_0, cuando los bordes están en contacto, los centros distarán $2s$, siendo s el semidiámetro del sol, y las dos lecturas serán, en consecuencia:

$$e_0 + 2s = g_1$$
$$e_0 - 2s = g_2$$

de donde resulta:

$$e_0 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$$
$$s = \frac{1}{4}(g_1 - g_2)$$

Tomemos por ejemplo las siguientes observaciones del sol, hechas con el mismo sextante á que se refiere el anterior:

$+33'45''$	$-29'50''$
$+33\ 45$	$-29\ 40$
$+33\ 40$	$-29\ 40$
$+33\ 40$	$-29\ 45$
$g_1 = +33'42''.5$	$g_2 = -29'43''.7$

$$e_0 = +\frac{3'58''.8}{2} = +1'59''.4 \qquad s = \frac{63'26''.2}{4} = 15'51''.5$$

Las cuatro lecturas positivas se obtuvieron estableciendo el contacto del borde inferior de la imagen refleja con el superior de la directa, tales como se veían al través del telescopio; y las negativas, obtenidas en el arco de exceso, provinieron de los contactos del limbo superior de la refleja con el inferior de la imagen directa.

Aunque la concordancia del semidiámetro obtenido por la obser-

vación, con el que suministran las efemérides del sol, no constituya en realidad una verdadera prueba de la exactitud con que se haya determinado el error inicial, da sin embargo una fuerte presunción en su favor. En el caso que consideramos, el semidiámetro tabular era $15'52''.4$ el día de la observación, que concuerda bastante bien con el que suministró la medida. Siempre que al determinar el error por este método, esté el sol poco elevado sobre el horizonte, debe hacerse uso del semidiámetro horizontal; porque los dos bordes del vertical, diversamente afectados por la refracción, darán al disco una apariencia algo elíptica. En consecuencia, teniendo hacia arriba el limbo del sextante, se establecerán los contactos de los limbos laterales de las imágenes, en lugar de establecer los de los bordes superior é inferior, con el sextante vertical. Debe también advertirse que en toda clase de observaciones solares se usan los helioscopios M y m, que se colocan delante de ambos espejos y que sirven para mitigar la intensidad de la luz. Por lo común, el sextante tiene varios de estos helioscopios de diversos colores, y se combinan dos ó más con el fin de obtener cada una de las imágenes del color y de la intensidad que se desee, procurando que sean tales que no fatiguen la vista, tanto por el mal que puede causar una luz demasiado viva, como por la mayor precisión con que pueden establecerse los contactos. Más bien que hacer uso de esos helioscopios, es conveniente servirse de uno sólo colocado delante del ocular del anteojo; porque si existe algún defecto en los que están delante de los espejos, afectará ese defecto á una sola de las imágenes, haciéndolas acaso aparecer en contacto cuando no lo están realmente. No sucede lo mismo con el helioscopio ocular cuyo error, si existe, afecta por igual á las dos imágenes y en consecuencia no altera su situación relativa.

165.—Expliquemos ahora el modo de comprobar el paralelismo del telescopio y del limbo. Como lo que se observa con el sextante no es la coincidencia de las señales con la línea de colimación, sino el contacto de las imágenes, su telescopio no tiene retícula, y está provisto únicamente de dos hilos paralelos, cuyo objeto es sólo el de marcar con alguna aproximación el centro del campo, que es el lugar en donde deben observarse los contactos. Así, pues, la línea de colimación será la que une el centro óptico del objetivo con el medio del espacio que separa los hilos; y esta línea es la que ha de ser paralela al plano del sextante. Para cerciorarse de si existe ó no ese paralelismo, se coloca el instrumento horizontalmente, sobre una mesa, por ejemplo, y después de haber hecho girar el telescopio al derredor de su eje hasta que los hilos queden próximamente paralelos al plano del limbo, se establece á la distancia de 6^m á 8^m por lo menos, una señal que pueda verse al través del anteojo y que se halle en la prolongación de aquel plano. En seguida se mide la distancia del limbo al centro del objetivo, y ésta se toma hacia arriba de la señal establecida. Si entonces se ve esta última en el telescopio, exactamente entre los dos hilos, existe el paralelismo; pero en el caso contrario se moverán los tornillos pequeños que tiene el collar del anteojo en su parte superior é inferior, y que le comunican movimiento en un plano perpendicular al del sextante, hasta que se vea la señal en el centro del campo.

Estas marcas pueden hacerse en una pared á la distancia indicada, dirigiendo una visual en el plano mismo del instrumento; pero es más exacto poner sobre el arco graduado dos cubos pequeños de madera ó de metal, cuya altura sea precisamente igual á la del centro del objetivo respecto del limbo, y entonces la visual dirigida por las caras superiores de esa especie de pínulas, determina desde luego una señal situada en un plano paralelo al del limbo, y que, por consiguiente, es la que debe verse á la mitad de la distancia de los hilos. Algunos sextantes están provistos de dos láminas metálicas del tamaño conveniente para que, colocadas sobre el arco, den una visual paralela al limbo y á la misma altura que el anteojo, el cual, por otra parte puede acercarse más ó menos á ese plano, según he dicho al hablar de la intensidad de las imágenes. Se estima que cuando el ángulo formado por el telescopio con el limbo, no excede de 6′ á 8′, no produce error sensible en los ángulos observados con el sextante; y para alcanzar ese grado de aproximación al tratar de nulificar el error, basta evidentemente que la marca no se desvíe de la visual paralela al limbo una cantidad superior 0.002 de la distancia, ó sea 0^m.02 por 10^m, lo cual siempre me parece fácil. Después de explicar

el manejo del sextante veremos otro medio de comprobar el paralelismo de su plano con la línea de colimación.

166.—El error más influente del sextante proviene de su excentricidad, esto es, de la falta de coincidencia exacta que puede existir entre el centro del movimiento de la alidada y el centro de la graduación; coincidencia que se juzga muy difícil de lograr, á no ser por efecto de la casualidad; y como el arco limitado del instrumento no permite más que el uso de un vernier, no es posible eliminar el efecto de la excentricidad por medio de dos ó más lecturas, como sucede en todos los demás goniómetros.

El método más sencillo de hallar el error que por esta causa tenga un sextante, consiste en comparar sus medidas angulares con las que suministre un buen teodolito. A este fin se coloca el sextante en una mesa ó en un tripié, y se miden con él los ángulos que formen entre sí varios objetos muy distantes y situados cerca del horizonte, á fin de que puedan verse en medio del campo en la posición que guarda el instrumento. Los mismos ángulos se miden después con el teodolito, y las diferencias que se encuentren entre los resultados se considerarán como otras tantas correcciones correspondientes á las respectivas lecturas del sextante, con las cuales se formará una tabla que por interpolación permita hallar las correcciones para cualquiera lectura del instrumento. Cinco ó seis ángulos que abracen todo el arco del sextante son por lo general suficientes.

Conviene indicar aquí que las correcciones determinadas de esta manera corresponden en rigor al punto de la graduación en que se lea la coincidencia de una de sus divisiones con otra del vernier, y no al punto del limbo que correspondería al ángulo obtenido, el cual puede distar mucho del primero. Supongamos, por ejemplo, que la lectura suministre el ángulo 25° 19′ 40″ en un sextante que dé una aproximación de 10″. Estando dividido el grado en 6 partes, es claro que directamente no pudo apreciarse más que el arco 25° 10′, y que el vernier proporcionó la fracción restante 9′ 40″; pero como la coincidencia de cada división del vernier con una del limbo hace avanzar 10′ el punto en que ambas parecen formar una sola línea, resulta que por cada minuto obtenido con el vernier, el punto de coincidencia adelantará 1°. Según esto, la lectura de 9′ 40″ hecha con el vernier, supone la coincidencia de las divisiones en un punto que dista 9° 40′ de la graduación obtenida directamente en el limbo, y en consecuencia, será el que corresponde á la división............ 25° 10′ + 9° 40′ = 34° 50′. Así, pues, si al comparar los ángulos del sextante con los que dé el teodolito, se halla que cuando el primero indica, por ejemplo, 25° 19′ 40″, el segundo da 25° 19′ 40″ + s, deberá considerarse que la corrección del sextante es de + s segundos en el punto 34° 50′ de su graduación, que en el que se verificó la coincidencia con el vernier.

Se comprende que no es preciso, al hacer la lectura de cada ángulo, anotar también el punto de coincidencia; porque puede deducirse después como lo hemos hecho, esto es, convirtiendo en grados y minutos respectivamente los minutos y segundos obtenidos con el vernier y sumando este arco con la indicación directa del limbo. Es claro, por otra parte, que esta regla sólo es aplicable al caso que he considerado; pero fácilmente se encontrarán reglas análogas cuando sea diversa la aproximación que dé un sextante á causa de estar dividido de otra manera.

Más adelante se explicarán otros medios de determinar las correcciones de la graduación originadas por el pequeño error de excentricidad que casi siempre tienen los sextantes; y sólo añadiré en este lugar que cuando se miden con estos instrumentos los ángulos formados por objetos terrestres, produce algún error la distancia que necesariamente existe del eje del telescopio al centro de la graduación. Este error no es otra cosa más que el pequeño ángulo bajo el cual se vería aquella distancia desde la señal; y por consiguiente, sólo tiene valor apreciable cuando se observan objetos muy inmediatos. Si las señales distan 6 ó 7 kilómetros por lo menos, puede suponerse el error sensiblemente nulo; pero si están más cercanas, lo que debe hacerse es eliminarlo determinando por medio de ellas, la corrección inicial, pues afectada ésta del mismo error, suministra el ángulo verdadero al aplicarla á las lecturas obtenidas. Este método es el que, por tanto, conviene adoptar al comparar las medidas angulares del sextante con las del teodolito.

167.—Puede emplearse el sextante para medir un arco celeste cualquiera; pero se usa con más frecuencia para la medida de las alturas angulares de los astros sobre el horizonte, pues aunque suele aplicarse también á la de los ángulos azimutales, tiene el inconveniente de demandar el auxilio del cálculo para reducirlos al horizonte, en atención á que sólo da directamente las distancias angulares en el plano de los objetos.

Para medir con el sextante la altura de un astro, se hace uso del *horizonte artificial*, que consiste en un receptáculo pequeño M (fig. 45ª) de hierro ó de madera, lleno de un líquido que por lo general es el mercurio, por ser uno de los mejores reflectores. El receptáculo es comunmente rectangular, de 0ᵐ.08 á 0ᵐ.10 por 0ᵐ.06 á 0ᵐ.07, y se cubre con una pieza metálica $B\,C\,D$, terminada por dos láminas $B\,C$ y $C\,D$, de vidrio, con el objeto de impedir que la superficie del mercurio se mueva por la acción del viento, así como preservarla del polvo ú otros cuerpos extraños. Al través de esas láminas se hacen las observaciones, por lo cual es de mucha importancia que las dos caras de cada una sean exactamente paralelas, pues de lo contrario desviarían la dirección de los rayos luminosos.

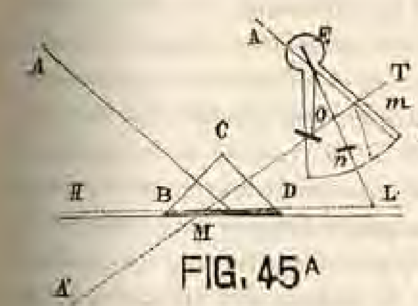


FIG. 45ᴬ

Siendo $M\,A$ la dirección en que se ve un astro A, su altura angular será $A\,M\,H$. El rayo luminoso $A\,M$ que emite el astro, se reflejará en la superficie del mercurio, de manera que colocando la vista en T, lo veremos por reflexión en A', quiere decir, deprimido respecto del horizonte una cantidad angular $H\,M\,A' = A\,M\,H$; de donde resulta que el ángulo $A\,M\,A'$ es doble de su altura. Este ángulo es el que se mide con el sextante; á este fin, teniendo el instrumento de modo que su limbo quede vertical, se dirige el telescopio al horizonte M para ver directamente la imagen A' del astro, y en seguida se mueve la alidada hasta que se vea en coincidencia con A' la imagen del mismo astro A, después de sufrir la doble reflexión en los dos espejos del sextante. La indicación de éste, corregida por el error inicial, el de excentricidad, etc., dará la doble altura $A\,m\,A'$ ó $A\,M\,A'$, pues es claro que $M\,A$ y $m\,A$ son paralelas por ser nula la pequeña distancia $M\,m$ respecto de la del astro.

Siempre que se observa de este modo una estrella ó un planeta de disco muy pequeño, se hace coincidir su imagen A' vista directamente en el horizonte, con la reflejada por los espejos; pero cuando se trata de un astro de disco considerable, como el sol y la luna, es más exacto poner en contacto uno de los bordes de A' con otro de A, de suerte que lo que se mide realmente es la altura angular de un limbo del astro, de la cual se deduce en seguida la del centro por la adición ó la substracción del semidiámetro. Para no equivocarse respecto del borde que haya de observarse, téngase presente que como por una parte la reflexión en el mercurio origina una inversión en los objetos, y por otra el telescopio produce nueva inversión, resulta que la imagen directa A' se ve en el horizonte en su posición natural, de modo que si se pone en contacto con su limbo inferior el borde superior de la imagen refleja, se habrá medido la doble altura del inferior del astro; y por el contrario, si se establece el contacto en la parte superior de la imagen del horizonte, se obtendrá la doble altura del limbo superior del astro.

Mientras no se adquiere alguna práctica, es algo difícil ver á la vez la imagen refleja y la del horizonte, ya sea porque no pueda estimarse con suficiente aproximación la cantidad angular que debe moverse la alidada según la altura del astro, ya sea porque no se conserve vertical el plano del sextante. Para vencer esas primeras dificultades, conviene proceder de esta manera: colocándose delante del horizonte en la posición propia para ver la imagen reflejada en el mercurio, se eleva el sextante hacia el astro con la alidada en cero próximamente. Entonces se verán directamente las dos imágenes, y si se mueve la alidada en el sentido de la numeración creciente del limbo, se irá separando la imagen refleja de la directa, de manera que para conservarla en el campo del telescopio, será preciso ir bajando gradualmente el sextante hacia el horizonte. Continuando así el movimiento lento é igual de la alidada y de todo el instrumento, se llegará á tener dirigido el telescopio al horizonte, en cuyo caso, sin que haya salido del campo la imagen refleja se verá también directamente la del mercurio. Una vez que estén inmediatas ambas imágenes, se fija la alidada con el tornillo de presión y se establece exactamente el contacto con el de aproximación.

Las observaciones de astros muy luminosos, especialmente del sol, no ofrecen tanta dificultad, y en todo caso se hallan pronto las imágenes mirando directamente la del mercurio con el juego de helioscopios que se crea conveniente colocar delante del espejo menor. En seguida, colocando delante del mayor uno sólo de los helioscopios más claros, se mueve la alidada sin dejar de ver la imagen del horizonte hasta que se presente la refleja, lo cual es entonces muy fácil á causa de la intensidad de su luz. Hecho esto se pone delante del espejo mayor la combinación conveniente de helioscopios, después de haber fijado la alidada, y se procede á establecer los contactos como se ha dicho.

Como en el curso de estas operaciones puede desviarse algo el sextante de la verticalidad, suele suceder que aunque la alidada haya llegado á la posición conveniente, no se vean desde luego las dos imágenes en el campo. Por eso conviene siempre hacer oscilar ligeramente el instrumento al derredor del eje del telescopio como eje de movimiento, ó sea al derredor de la visual dirigida á la imagen del horizonte. Ejecutando simultáneamente estos movimientos, quiere decir, el de la alidada y el de oscilación, sin dejar de ver la imagen directa del horizonte, se adquiere muy pronto la práctica necesaria para hallar inmediatamente las dos imágenes.

168.—Cuando la estrella que va á observarse está cerca de otra ú otras que tengan casi el mismo brillo, es fácil confundirlas tomando la imagen directa de una en el horizonte y la refleja de otra. Para evitar este inconveniente, así como también para no tener dificultad alguna en hacer que se presenten en el campo las dos imágenes de la misma estrella, puede hacerse uso de un nivel pequeño colocado en la alidada, y formando con ésta un ángulo igual al que forma el eje del telescopio con el radio que pasa por el cero de la graduación.

Un astrónomo ruso, Mr. Knorre, ha introducido esta utilísima mejora en el sextante, fundado en que el ángulo de que hice mención es igual al que forma la alidada con el horizonte cuando están en contacto las dos imágenes de un astro, sea cual fuere la altura de éste. En efecto, prolongando hasta el plano del horizonte la dirección EL de la alidada, y atendiendo á que el ángulo FEL es igual á la altura $a = OML$ del astro, puesto que supongo en F el cero de la graduación, el triángulo MOL da: $TOL = a + L$. Pero designando por C el ángulo constante TmF formado por el telescopio T con el radio del cero, se tiene también $TOL = a + C$; é igualando ambos valores, resulta $L = C$. Siendo, en consecuencia, invariable este ángulo para cada sextante, se infiere que colocado un nivel n en la alidada, de tal manera que forme con ella el mismo ángulo, bastará moverla visando la imagen del horizonte, hasta que la burbuja ocupe el centro del tubo, para que se presente la imagen refleja al lado de la directa. Importa advertir que como la amplitud del campo del telescopio excede generalmente de 1°, no se necesita emplear un nivel sensible, ni mucho menos que la burbuja permanezca precisamente en su centro, siendo bastante que el movimiento de la alidada la haga circular á lo largo del tubo.

El nivel debe fijarse á la alidada por medio de un apoyo que permita algún movimiento al tubo con el fin de rectificar su posición. El que he mandado construir últimamente se fija por medio de una pinza y de un tornillo de presión, y tiene otro de aproximación que hace bajar ó subir uno de los extremos del nivel, de manera que pueda variarse el ángulo formado por su tubo con la alidada. El modo de rectificarlo consiste en dirigir el telescopio al horizonte visando las dos imágenes del sol, y moviendo el tornillo de aproximación hasta conseguir que, cuando aquellas se confundan, permanezca la burbuja cerca del medio del tubo. Esta sencilla operación es bastante para que al observar un astro cualquiera visando directamente su imagen en el horizonte, se presente también la otra luego que por el movimiento de la alidada se haya hecho pasar la burbuja de un extremo á otro del tubo.

169.—La medida de las distancias zenitales ó de las alturas de los

astros sirve generalmente para la determinación de la hora exacta ó para la de la latitud del lugar. En uno y en otro caso se anotan las horas de un cronómetro á la vez que se toman las alturas, de tal manera que la indicación de este instrumento sea exactamente simultánea con la del instrumento angular. Muchas veces no es indispensable medir las alturas en momentos determinados, sino simplemente estar seguro de la simultaneidad de las horas y de las medidas angulares. En tales casos es cómodo practicar la operación de manera que las alturas correspondan á un número exacto de grados ó de minutos del sextante, esperando al efecto que el astro adquiera la altura señalada de antemano con el cero del vernier. Si se observa, por ejemplo, un astro al oriente del meridiano, irá aumentando su altura; y si ésta se mide primero aproximadamente, se podrá señalar en el limbo una indicación algo mayor, y esperar, visando hacia el horizonte, á que se verifique el contacto de las dos imágenes, que es el instante que debe anotarse apuntando la hora, minuto y segundo que señale el cronómetro. Al Occidente, las alturas, y en consecuencia, las indicaciones del sextante irán decreciendo; pero en lo demás se procederá absolutamente lo mismo que en el primer caso.

Casi nunca se practica una sola observación, sino que se repiten de 20′ en 20′ ó de 10′ en 10′ de la graduación, según que sea más ó menos rápido el movimiento ascendente ó descendente de los astros; y es de la mayor importancia acostumbrarse á emplear simultáneamente la vista y el oído para observar los contactos y para anotar las horas correspondientes. Con este fin, luego que se haya señalado en el limbo la graduación conveniente, se apunta la hora y minuto del cronómetro y comienzan á contarse en silencio los segundos ó las fracciones de segundo, determinados por los sonidos que produce el volante, á la vez que con la vista en el telescopio se espera el contacto. El número de segundos que se cuente en ese instante, agregado á la hora y minutos que se apuntaron al principio, suministra la indicación correspondiente del cronómetro. Después de apuntarla se señala en el sextante la nueva altura para proseguir la observación del mismo modo.

Algunos observadores no comienzan á contar los sonidos ó golpes del cronómetro sino desde el instante en que miran el contacto, y continúan contándolos hasta ver la indicación de este instrumento, de la cual restan el número de segundos que han contado, para obtener la hora correspondiente á la observación. Ambos métodos son igualmente buenos, y cada cual puede adoptar el que le parezca más fácil, teniendo presente, sin embargo, que al aplicar este último procedimiento es preciso contar *cero* en el momento del contacto, pues es común que los principiantes comiencen por 1, en cuyo caso cometen en la hora un pequeño error por defecto, puesto que cuentan un segundo, ó en general, un golpe de más en el número substractivo de segundos.

Cuando se observan los astros muy cerca del meridiano, ó bien cuando se toman las alturas de estrellas circumpolares, el movimiento ascensional es tan pequeño, que da lugar á bastante incertidumbre la apreciación exacta de la hora correspondiente al contacto. En tales casos, más bien que esperarlo, me parece mucho mejor establecerlo con el tornillo de aproximación, aun cuando la lectura del limbo no produzca una decena exacta de minutos, sino que sea preciso estimar las fracciones que indique el vernier. Si para anotar el tiempo se sigue el primer método que se ha explicado, lo que debe hacerse es contar los golpes del cronómetro á la vez que se mueve el tornillo de aproximación para acercar y sobreponer las dos imágenes; y si se sigue el segundo, se cuenta desde el instante en que éstas se confundan.

A las reglas generales que he establecido para el manejo del sextante, conviene añadir la conveniencia de cambiar de posición la cubierta del horizonte artificial, con el fin de eliminar del resultado algún error que pudiera provenir de la falta de paralelismo de las dos caras de sus vidrios. Para conseguirlo cuando se ejecuta una serie numerosa de observaciones, lo que se hace comunmente es practicar la mitad de las observaciones en una posición de la cubierta, é invertirla después para hacer la otra mitad. De esa manera, el vidrio que al principio estaba del lado del observador, queda en seguida del lado del astro, y así es que si alguno de ellos no está terminado por caras exactamente planas y paralelas, el error que se origine de

este defecto se producirá en sentidos opuestos, y por consiguiente, desaparecerá del promedio de la serie.

Otra regla que siempre debe tenerse presente es la de observar los contactos en el centro del espacio comprendido entre los hilos del telescopio, los cuales conviene colocar paralelamente al plano del limbo. Por lo general, la luz de las estrellas mismas es suficiente para estimar con la aproximación necesaria el centro del campo del telescopio; pero si no fuere así, bastará dirigir sobre el espejo menor una luz débil, tal como la que produce una lámpara colocada á cierta distancia, y si es posible hacia atrás del observador, con el fin de que no le impida ver las imágenes de una estrella pequeña. La necesidad de observar los contactos en medio del campo, suponiendo que la línea de colimación esté bien rectificada, proviene de que en ese punto es dondé se obtiene el ángulo verdadero, pues, á uno ú otro lado de esa dirección resultaría mayor del que debe ser.

En las explicaciones precedentes he supuesto que el observador hace uso á la vez del instrumento angular y del cronómetro, sirviéndose simultáneamente de la vista y del oído. Esta práctica es indudablemente la mejor; pero muchas personas acaso por falta de costumbre, siguen la de ejecutar sus observaciones con un ayudante que lee las indicaciones del cronómetro. Por medio de la palabra preventiva "atención," pronunciada 15ˢ ó 20ˢ antes del instante en que estiman que debe verificarse el contacto, ó en general, el fenómeno que observan, indican al ayudante que comience á contar los golpes del cronómetro; y por la ejecutiva "op," ú otra voz monosílaba breve, expresan el momento de la observación para que el lector del cronómetro apunte la correspondiente indicación de este instrumento. Proceder de esta manera es sin duda más fácil que contar á la vez el tiempo; pero repito que es preferible acostumbrarse desde un principio al otro método, tanto por ser independiente de la ayuda de otra persona, cuanto por no introducir en los resultados un elemento variable de error, que puede provenir del modo especial que cada uno tiene de apreciar las fracciones de segundo.

Los marinos emplean mucho el sextante, por ser el único que es posible usar sin apoyo fijo; pero no pudiendo servirse del horizonte artificial á causa del movimiento de las embarcaciones, lo que hacen es medir las alturas respecto del horizonte sensible del mar. Con este objeto dirigen el telescopio á la línea que limita la vista, y mueven la alidada hasta que alguno de los bordes del astro se vea tangente á esa línea. Aplicando en seguida la corrección por la depresión del horizonte (Tomo I, número 262), obtienen la altura aparente del mismo borde.

170.—Siguiendo estrictamente todas las reglas que se han expuesto, y practicando con el mayor cuidado posible todas las rectificaciones del sextante, juzgo que con alguna práctica podrá alcanzarse cuanta exactitud es susceptible de proporcionar este instrumento; y sólo falta indicar el modo de deducir la distancia zenital aparente del astro que se haya observado. Designando por e_0 el error inicial, por G la lectura obtenida y por c la corrección que corresponda al punto de coincidencia, según lo expuesto en el número 166, tendremos que la doble lectura, corregida por los errores instrumentales, es $2a = G + c - e_0$. La altura aparente será, pues:

$$a = \frac{1}{2}(G + c - e_0)$$

y en consecuencia la distancia zenital:

$$z' = 90° - \frac{1}{2}(G + c - e_0)$$

Esta cantidad es la que corregida por refracción, paralaje y semidiámetro, suministra la distancia zenital verdadera del centro del astro, según lo indican las expresiones generales de los números 145 y 146:

Tratándose de una serie de observaciones, G y c representan respectivamente los promedios de las lecturas del limbo y de las correcciones que les corresponden. En cuanto á e_0, expresa el término medio de los errores iniciales determinados al comenzar y al terminar la serie. Aquí conviene advertir que ya sea á consecuencia de algunos pequeños movimientos que tengan los espejos, ó bien simplemente á causa de la diversa dirección en que obra la pesantez en las

diferentes partes del sextante, suelen notarse en algunos de estos instrumentos ligeros cambios en el valor de e_0, según sean las alturas de los astros por cuyo medio se determinen. La existencia de este defecto se comprueba fácilmente midiendo el error inicial con estrellas diversamente elevadas y comparando los resultados, pues de ese modo si se hallan diferencias sensibles, puede aplicarse una corrección en cada caso particular; pero es más seguro eliminarlo completamente determinando el valor de e_0 en la misma posición que guarda el sextante en cada observación. A este fin se mide el error inicial con el telescopio dirigido al horizonte, estableciendo la coincidencia de las dos imágenes reflejadas por la superficie del mercurio. Practicada esta operación al principio y al fin de la serie, se obtiene el valor de e_0 que conviene á la posición del sextante en que se observa el astro.

171.—En la obra de Mr. W. H. Simms que tiene por título "*The sextant and its applications.*" publicada en Londres en 1858, trata el autor ampliamente de todos los errores del sextante y la manera de corregirlos ó de llevarlos en cuenta. Aunque el plan de mi libro no me permita exponer todos los procedimientos de Mr. Simms, me propongo indicar sus principales resultados, que son los que importa consignar en una obra práctica; pues el lector que lo desee puede consultar aquel tratado para imponerse de los fundamentos de que se derivan las conclusiones del autor. [1]

Si designamos por G una lectura cualquiera del sextante, por e_0 su error inicial, por η el pequeño ángulo formado por el telescopio con el plano del limbo, por λ otra pequeña cantidad angular que proviene de la falta de paralelismo de las dos caras que limitan el espejo mayor, y finalmente por c el efecto de la excentricidad, Mr. Simms establece la siguiente expresión del ángulo correcto:

$$A = G - e_0 - \eta^2 \tan.\frac{1}{2}\, G \operatorname{sen.} 1'' + B\lambda + c \text{ ....} \quad (1)$$

[1] También puede consultarse la obra de Mr. Chauvenet que lleva por título "*A Manual of spherical and practical Astronomy,*" Filadelfia, 1864. El Capítulo IV del tomo II se ocupa de los instrumentos de reflexión, con la amplitud y el acierto que caracteriza á ese excelente tratado de Astronomía práctica.

en la cual B representa un coeficiente que depende del índice de refracción n del vidrio, y del ángulo β de incidencia en el espejo menor, ó sea el formado por el telescopio con el mismo espejo. Llamando g el punto de coincidencia correspondiente á la lectura G (número 166), las expresiones de B y c son:

$$B = \sqrt{\frac{n^2 - \text{sen.}^2 (\frac{1}{2} G + \beta)}{\cos.^2 (\frac{1}{2} G + \beta)}} - \sqrt{\frac{n^2 - \text{sen.}^2 \beta}{\cos.^2 \beta}}$$

$$c = b \,\text{sen.}\, \frac{1}{4} g \cos. \left(\omega + \frac{1}{4} g \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La cantidad b que entra en el valor de c es una constante para cada instrumento, que depende de su radio y de la pequeña distancia que haya del centro del movimiento de la alidada al centro de la graduación. El ángulo ω es el formado por la dirección de la pequeña distancia que acaba de mencionarse con el radio que pasa por el cero de la división.

172.—Una vez conocida la expresión general del ángulo correcto, se determinan por la observación, para cada sextante, las constantes η, β, λ, b y ω de la manera que procuraré trazar brevemente. La determinación de η supone conocido el espacio angular a comprendido entre los hilos del telescopio, el cual se mide haciendo girar el tubo hasta que los hilos queden sensiblemente perpendiculares al plano del limbo, y visando en seguida un objeto, de manera que, por el movimiento de la alidada, la imagen directa se coloque en uno de los hilos y la refleja en el otro. Entonces, siendo γ la lectura y e_0 la indicación correspondiente á la coincidencia de ambas imágenes, se tiene: $a = \gamma - e_0$.

Para determinar ahora la constante η se mide el ángulo entre dos objetos distantes, estableciendo la coincidencia de sus imágenes, no en el centro del campo, sino sucesivamente en cada uno de los hilos, situados de nuevo en su posición natural paralela al limbo. Siendo G_1 y G_2 las dos lecturas que se obtengan, el valor de η es:

$$\eta = (3.2352) \frac{G_1 - G_2}{a} \tan. \frac{1}{4} (G_1 + G_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Con este valor ya podrá calcularse el término $-\eta^2 \tan. \frac{1}{2} G \,\text{sen.}\, 1''$

que forma parte de la expresión general (1), ó tomarlo de la Tabla siguiente, sin olvidar que esta corrección es siempre substractiva.

Se ve por la expresión de η y por la Tabla de las correcciones que origina, que el efecto de ese error crece rápidamente con el valor del ángulo. Por eso para determinarlo con precisión importa mucho elegir dos objetos cuya distancia angular exceda de 90°, y si es posible, que sea tan grande como la pueda medir el sextante.

G	10′	20′	30′	40′	50′
10°	0″.2	0″.6	1″.4	2″.4	3″.8
20	0 .3	1 .2	2 .8	4 .9	7 .7
30	0 .5	1 .9	4 .2	7 .5	11 .7
40	0 .6	2 .5	5 .7	10 .2	15 .9
50	0 .8	3 .3	7 .3	13 .0	20 .3
60	1 .0	4 .0	9 .1	16 .1	25 .2
70	1 .2	4 .8	11 .0	19 .6	30 .6
80	1 .5	5 .9	13 .2	23 .4	36 .6
90	1 .7	7 .0	15 .7	27 .9	43 .6
100	2 .1	8 .3	18 .7	33 .3	52 .0
110	2 .5	10 .0	22 .4	39 .9	62 .3
120	3 .0	12 .1	27 .2	48 .4	75 .6

Aplicando este método á un sextante mío, cuyos hilos formaban un ángulo $a = 64'$, medí varias series de distancias de la Polar á las estrellas *α Pegasi* y *α Piscis australis* poniendo los contactos en los dos hilos sucesivamente, obtuve por término medio de cuatro determinaciones $\eta = 12'.0$, siendo los resultados extremos 10′.6 y 13′.1. En consecuencia, la mayor corrección originada por η, que es la correspondiente á la graduación extrema 120° del instrumento, es sólo de $-4''.5$.

173.—Pasemos ahora á la determinación de λ. Como el coeficiente B de este error en la fórmula general, es una función de β, lo primero que debe hacerse es medir este ángulo, que por lo regular está comprendido entre 18° y 20°. Se puede obtener su valor aproximativo midiendo los lados del triángulo que tiene por vértices el medio del espejo mayor, el del menor y el centro del collar en que se atornilla el telescopio. Calculando con estos datos el ángulo cuyo vértice está en el espejo menor, se obtendrá el valor de β, que es la mitad de aquel.

Para medirlo con más exactitud, se desatornilla la armadura del espejo mayor para separarlo de la alidada. Entonces colocado horizontalmente el sextante, y llevando su alidada hacia el extremo del arco, se dirige el telescopio á un objeto distante. A la vez que este se mire directamente, se observará en coincidencia con él, la imagen de otro objeto, reflejada por el espejo menor y cuyos rayos incidentes han podido herirlo á causa de la remoción del mayor. Es claro que estos dos objetos forman entre sí un ángulo de $180° - 2\beta$, y por tanto, si el observador se fija bien en el que produce la imagen refleja, á fin de que lo pueda distinguir de los objetos inmediatos, quedará en aptitud de medir al ángulo $180° - 2\beta$ con un teodolito, ó con el mismo sextante después de repuesto el espejo mayor en su lugar. El sextante, sin embargo, no permite medir de una sola vez un ángulo tan considerable; pero puede hacerse la operación por partes, sirviéndose de un objeto intermedio para tomar los ángulos que forma con aquellos, y cuya suma da el valor de $180° - 2\beta$, del que se deducirá en seguida el de β. De esta manera encontré que en mi sextante, β es de 18°.8.

Con el valor de este ángulo pueden ya calcularse los de B para diversos valores de G desde 0° hasta 125°, que es el límite ordinario del sextante; pero como en todos los instrumentos de construcción moderna, el ángulo β está comprendido entre 18° y 20°, pongo en seguida una tabla de los coeficientes B que corresponden á los valores 18°, 19° y 20° de β, y de la cual se puede interpolar.

G	β			G	β		
	18°	19°	20°		18°	19°	20°
0°	0.00	0.00	0.00	80°	0.81	0.86	0.91
10	0.03	0.03	0.04	90	1.14	1.22	1.30
20	0.07	0.08	0.08	100	1.64	1.76	1.90
30	0.13	0.13	0.14	105	1.99	2.16	2.34
40	0.20	0.21	0.22	110	2.46	2.68	2.94
50	0.29	0.31	0.32	115	3.09	3.41	3.78
60	0.41	0.44	0.47	120	4.00	4.48	5.05
70	0.58	0.61	0.65	125	5.40	6.19	7.20

Tomando de esta Tabla el coeficiente B que corresponda al valor de β en el instrumento que se examine, se mide la distancia angular entre dos objetos, ó mejor entre dos estrellas. Sea A el ángulo exacto, G la indicación del sextante y e_0 su error inicial: la ecuación (1) dará:

$$A = G - e_0 - \eta^2 \tan. \frac{1}{2} G \operatorname{sen.} 1'' + B\lambda + e$$

En seguida se quita el espejo mayor y se invierte, de manera que su borde superior quede hacia abajo y vice versa. Se comprueba su perpendicularidad y se determina de nuevo el error inicial, que designaré por e'_0, pues generalmente no será igual al primitivo. Con esta segunda posición del espejo, se vuelve á medir el mismo ángulo A, y como el valor de λ producirá un efecto contrario, tendremos, designando por G' la nueva lectura y suponiendo iguales las pequeñas correcciones por η y por la excentricidad, como lo son sensiblemente en realidad:

$$A = G' - e'_0 - \eta^2 \tan. \frac{1}{2} G \operatorname{sen.} 1'' - B\lambda + e$$

La combinación de estas dos ecuaciones produce:

$$\lambda = \frac{(G' - G) - (e'_0 - e_0)}{2B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Cuando A expresa la distancia angular aparente de dos estrellas, varía generalmente de la primera observación á la segunda; pero es muy fácil tomar en cuenta la variación, como en el ejemplo siguiente, hecho, entre otros, para corregir mi sextante. El 6 de Noviembre de 1861 medí la distancia de la Polar á *α Piscis australis*, cuyo valor exacto era $A = 119° \, 8' \, 4''.8$, y habiendo hallado................. $G = 119° \, 9' \, 10''.8$, $e_0 = 28''.0$, y siendo $-4''.4$ la corrección por η, se tiene la ecuación:

$$119° 8' 4''.8 = 119° 9' 10''.8 - 28''.0 - 4''.4 + 4.16\lambda + e$$

ó bien reduciendo:

$$-33''.6 = 4.16\lambda + e$$

Al día siguiente, habiendo invertido el espejo, volví á medir la distancia entre las mismas estrellas, cuyo valor calculado era .... $A = 119°\,8'\,9''.4$, hallando

$$G' = 119°\,8'\,18''.3 \text{ y } e'_0 = 3''.9.$$

Por consiguiente, la nueva ecuación será:

$$119°\,8'\,9''.4 = 119°\,8'\,18''.3 - 3''.9 - 4''.4 + 4''\lambda + e$$

que reducida produce:

$$-0''.6 = -4.16\lambda + e$$

Combinando las dos ecuaciones se obtiene:

$$8.32\lambda = -33''.0$$
$$2.00e = -34''.2$$

de las que resulta $\lambda = -3''.97$ y $e = -17''.10$. Por muchas observaciones de la misma especie encontré en término medio $\lambda = -4''.4$. Tomando de la Tabla precedente los valores de B que corresponden á $\beta = 18°.8$, se podrá calcular, por consiguiente, la corrección $B\lambda$ que conviene á cada lectura G de este sextante. Es claro que el cálculo da el valor de λ con el signo corespondiente á la primera posición del espejo, y que para la segunda deberá tomarse con signo contrario.

El valor de la distancia A se determina calculando, para el instante preciso de la observación, las distancias zenitales verdaderas de las estrellas y sus azimutes, por las fórmulas (3) y (4) de los números 124 y 125. Restando la refracción se obtienen las distancias zenitales aparentes; y entonces en el triángulo formado por el zenit y las dos estrellas se conocerán dos lados y el ángulo comprendido, siendo los primeros las distancias zenitales aparentes; y el segundo la diferencia de los azimutes de las dos estrellas. La resolución dará, en consecuencia, el tercer lado; que es el valor de A. Conviene escoger las estrellas de manera que A sea considerable, para que lo sea

también el divisor $2B$ de la fórmula (4), pues así se disminuirá el efecto de los pequeños errores de observación.

174.—Obtenidos de este modo dos valores c_1 y c_2 de la corrección de excentridad, correspondientes á los puntos g_1 y g_2 de coincidencia, tendremos, según la ecuación (2):

$$c_1 = b\,\text{sen.}\,\frac{1}{4}g_1\cos.\left(\omega + \frac{1}{4}g_1\right)$$
$$c_2 = b\,\text{sen.}\,\frac{1}{4}g_2\cos.\left(\omega + \frac{1}{4}g_2\right)$$

Eliminando la constante b se obtiene sin dificultad la otra constante ω, por la fórmula:

$$\tan.\,\omega = \frac{c_1\,\text{sen.}\,\frac{1}{4}g_2 - c_2\,\text{sen.}\,\frac{1}{4}g_1}{2(c_1\,\text{sen.}^2\frac{1}{4}g_2 - c_2\,\text{sen.}^2\frac{1}{4}g_1)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(5)$$

y por último, cualquiera de las ecuaciones primitivas da:

$$b = \frac{c_1}{\text{sen.}\,\frac{1}{4}g_1\cos.(\omega + \frac{1}{4}g_1)} = \frac{c_2}{\text{sen.}\,\frac{1}{4}g_2\cos.(\omega + \frac{1}{4}g_2)} \;\ldots\ldots\; (6)$$

Aplicando este método, hallé para mi sextante $\omega = -81°\,2'$ y $\log. b = 1.652$—, pudiendo; por tanto, calcular el valor de la corrección c para cualquier punto g de coincidencia, por medio de la fórmula (2).

175.—Cuando se hayan determinado las cuatro constantes η, λ, b y ω del instrumento, se construyen Tablas de las tres correcciones:

$$c = b\,\text{sen.}\,\frac{1}{4}g\cos.\left(\omega + \frac{1}{4}g\right) \quad c' = -\eta^2\tan.\,\frac{1}{2}G\,\text{sen.}\,1'' \quad c'' = B\lambda$$

con lo cual para cualquiera lectura G y su correspondiente coincidencia g, se tendrá por ángulo correcto:

$$A = G - e_0 + c + c' + c''$$

Con el fin de presentar la forma de estas Tablas, pongo á continuación las que formé para mi sextante desde 40 hasta 120°, que es la parte de la graduación que se usa con más frecuencia.

g	ε
40°	− 2″.5
50	3 .6
60	4 .7
70	6 .0
80	7 .4
90	9 .0
100	10 .6
110	12 .3
120	−14 .1

G	ε'
40°	− 0″.9
50	1 .2
60	1 .5
70	1 .8
80	2 .2
90	2 .6
100	3 .1
110	3 .7
120	4 .5

G	ε''
40°	0″.8
50	1 .2
60	1 .7
70	2 .4
80	3 .4
90	4 .8
100	7 .0
110	10 .6
120	17 .6

La última está calculada con $\lambda = 4''$ y con los valores de B que corresponden á $\beta = 18°.8$. Como λ resultó negativa para la primera posición del espejo, las correcciones de esta Tabla serán substractivas siempre que se emplee el sextante con el espejo en esa primera posición, y positivas para la segunda. Además, las Tablas segunda y tercera tienen el mismo argumento G, y por consiguiente, es cómodo formar de ambas una sola Tabla colectiva para cada posición del espejo, reuniendo las correspondientes correcciones, de esta manera:

PRIMERA POSICIÓN.	
G	$\varepsilon' + \varepsilon''$
40°	− 1″.7
50	2 .4
60	3 .2
70	4 .2
80	5 .6
90	7 .4
100	10 .1
110	14 .3
120	− 22 .0

SEGUNDA POSICIÓN.	
G	$\varepsilon' + \varepsilon''$
40°	− 0″.1
50	0 .0
60	+ 0 .2
70	0 .6
80	1 .2
90	2 .2
100	3 .9
110	6 .9
120	+13 .0

Estas correcciones y las que suministra la primera Tabla con el punto de coincidencia g por argumento, permiten corregir inmedia-

tamente las lecturas del sextante. Aunque por comodidad para las aplicaciones se formen estas últimas Tablas colectivas, conviene, sin embargo, conservar las primitivas; porque los valores de ε' dependiendo de η, que es susceptible de variación, puesto que representa el pequeño ángulo del telescopio con el limbo, si este error se hace variar se habrán modificado igualmente los valores de ε', en cuyo caso será muy fácil formar una nueva Tabla colectiva de éstos y los de ε'' que no varían. Por otra parte, creo que aplicando con todo el cuidado posible el método de corrección del número 165, puede tenerse seguridad de reducir el error η á un valor bastante pequeño para que sea permitido suponer su influencia sensiblemente nula; y entonces serán sólo ε y ε'' las correcciones de los ángulos.

Tales son los resultados prácticos del método de Mr. Simms, para determinar y llevar en cuenta los principales errores del sextante; y espero que se comprenderá toda su importancia sabiendo que en muchos de estos instrumentos asciende á más de 1′ la suma de los errores, y que acaso todos ellos están sujetos á uno considerable de excentricidad.

176.—La teoría del sextante es igualmente aplicable al círculo de reflexión, ya sea simple ó repetidor. La ventaja esencial de estos últimos respecto de aquel consiste en que el principio de la repetición elimina casi del todo el error de excentricidad; pero en cambio son de un manejo algo más complicado. En el círculo de reflexión además de la alidada que se mueve con el espejo mayor, hay otra á la cual está fijo el menor y el telescopio, que se mueven con ella sin que se altere su posición relativa, quiere decir, el ángulo que forma la línea de colimación con este último espejo. Las dos alidadas tienen movimientos independientes, y un vernier cada una de ellas.

Suponiendo que las divisiones estén numeradas de izquierda á derecha, para medir con este instrumento el ángulo de dos objetos, se fija la alidada del espejo mayor en 0° ó en otro punto cualquiera del limbo, y teniendo el telescopio dirigido á la señal de la derecha, se mueve el círculo hasta que la imagen de la izquierda, doblemente reflejada, se vea en contacto con ella. Entonces se fija la alidada del espejo menor, y mirando directamente la señal de la izquierda, se pone en movimiento la otra alidada en el sentido de la numeración creciente hasta que se vea por la doble reflexión el objeto de la derecha en coincidencia con el de la izquierda. Como en este movimiento ha recorrido la alidada del espejo mayor un arco cuya numeración es doble del ángulo de las señales, la semidiferencia de sus indicaciones suministrará el valor de este ángulo. Si se desea repetir la medida se vuelve á comenzar la operación partiendo de la posición en que haya quedado fijada la alidada del espejo mayor, y por el mismo procedimiento se obtiene de nuevo el doble ángulo, ó bien el cuádruplo respecto de la primera indicación del viernier de esta alidada al comenzar la serie. De una manera idéntica se obtiene el séxtuplo, el óctuplo, etc., del mismo ángulo.

En la fábrica de Pistor & Martin, de Berlin, se construyen en la actualidad sextantes y círculos de reflexión llamados prismáticos, por tener un prisma de cristal en lugar del espejo menor. Presentan sobre los instrumentos comunes la ventaja de permitir la medida de ángulos de cualquiera amplitud, á causa de la situación del prisma, muy inmediato al objetivo del telescopio. Por lo demás, su uso es del todo semejante al de los demás instrumentos de reflexión.

CAPITULO VII.

DETERMINACIÓN DE LA HORA.—MÉTODO DE DISTANCIAS ZENITALES.

177.—En el número 123 se ha dado una idea general de la resolución de este problema, la cual consiste esencialmente en calcular el ángulo horario del astro con los datos: distancia zenital z medida directamente, latitud φ de la estación y declinación δ del astro; y en combinar después el ángulo horario calculado, con la ascensión recta, á fin de obtener la hora exacta de la observación, que comparada con la que señalaba el cronómetro en el mismo instante, da á conocer el error de este instrumento respecto del tiempo real de la estación.

Si siempre pudieran suponerse exactos todos los elementos del cálculo, no habría inconveniente en aplicar esta resolución, cualquiera que fuese la posición del astro respecto del meridiano del observador; pero como en la práctica es casi imposible alcanzar esa rigurosa precisión, se hace indispensable investigar en qué circunstancias tienen la menor influencia posible los pequeños errores que pueden existir en los datos suministrados por la observación directa, y aun en los que se toman de las Tablas astronómicas. Con este objeto, suponiendo en z, φ y δ los pequeños errores ó variaciones Δz, $\Delta \varphi$ y $\Delta \delta$, el ángulo horario h resultará con el error Δh, que consideraré como el resultante de los anteriores, ó sea como una función de los mismos; y en consecuencia, limitándome á sus primeras potencias á causa de su pequeñez, el error del ángulo horario será de la forma:

$$\Delta h = \frac{d\,h}{d\,z}\Delta z + \frac{d\,h}{d\,\varphi}\Delta\varphi + \frac{d\,h}{d\,\delta}\Delta\delta$$

Los coeficientes de los errores se deducen de la ecuación fundamental siguiente, que contiene todos los elementos del problema.

$$\cos.\,z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\,\varphi\cos.\,\delta\cos.\,h$$

Diferenciándola sucesivamente respecto de cada uno de los datos, resulta:

$$\frac{d\,h}{d\,z} = \frac{\text{sen.}\,z}{\cos.\,\varphi\cos.\,\delta\,\text{sen.}\,h}$$

$$\frac{d\,h}{d\,\varphi} = \frac{\cos.\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta - \text{sen.}\,\varphi\cos.\,\delta\cos.\,h}{\cos.\,\varphi\cos.\,\delta\,\text{sen.}\,h} = \frac{\tan.\,\delta - \tan.\,\varphi\cos.\,h}{\text{sen.}\,h}$$

$$\frac{d\,h}{d\,\delta} = \frac{\text{sen.}\,\varphi\cos.\,\delta - \cos.\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta\cos.\,h}{\cos.\,\varphi\cos.\,\delta\,\text{sen.}\,h} = \frac{\tan.\,\varphi - \tan.\,\delta\cos.\,h}{\text{sen.}\,h}$$

178.—Estos valores, sustituídos en la expresión del error Δh, miden la influencia de los que se suponen en los datos, y aun permiten corregir el ángulo horario luego que se conocen las magnitudes de las correcciones Δz, $\Delta\varphi$ y $\Delta\varphi$; pero por ahora investiguemos cuáles son las condiciones que reducen á un *minimum* estos coeficientes. Comenzando por el de Δz, vemos que si se designa por a el azimut del astro, el triángulo astronómico da:

$$\text{sen.}\,h\cos.\,\delta = \text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,z$$

Introduciendo este valor en el coeficiente $\frac{d\,h}{d\,z}$, se halla:

$$\frac{d\,h}{d\,z} = \frac{1}{\cos.\,\varphi\,\text{sen.}\,a}$$

El examen de esta expresión indica que si bien su valor no puede ser nulo, adquiere el menor posible cuando $\varphi = 0°$, y $a = 90°$, esto es, cuando la estación se halla en el ecuador y se observa un astro en el plano del primer vertical. Es claro que el observador no es dueño de llenar la primera condición, puesto que tiene necesidad de operar

en determinada latitud; pero aquellas consideraciones demuestran que el método de distancias zenitales, por lo que respecta al error que pueda cometerse en este elemento, es más favorable en las bajas que en las altas latitudes, en igualdad de circunstancias, á causa del valor considerable de los cosenos de arcos pequeños. Para una latitud dada, el coeficiente tiene su *minimum* cuando $a = 90°$, en cuyo caso será:

$$\frac{d\,h}{d\,z} = \frac{1}{\cos.\,\varphi} = \sec.\,\varphi$$

Se ve que este valor es constante; y que en consecuencia, cuando un astro pasa por el primer vertical, su movimiento ascendente ó descendente es proporcional al tiempo; quiere decir, asciende ó desciende espacios iguales en tiempos iguales. Esta conclusión también es sensiblemente cierta cuando el azimut del astro difiere poco de 90°, puesto que los senos de arcos próximos á un cuadrante varían con mucha lentitud; y como por otra parte, en las mismas circunstancias es poco sensible el movimiento azimutal de los astros, se infiere que aun para azimutes que se alejen 20° ó 30° del primer vertical tanto hacia el Norte como hacia el Sur, siempre puede admitirse que en 10^m ó 12^m que dure una serie de observaciones, el movimiento ascensional es sensiblemente proporcional al tiempo, de modo que el promedio de las distancias zenitales medidas, siempre corresponderá al promedio de las horas anotadas en el cronómetro. Se comprenderá toda la importancia de esta conclusión por el simple hecho de que autoriza la repetición de las medidas, y en consecuencia, la adopción de promedios en vez de observaciones sencillas ó individuales.

179.—Pasemos al coeficiente de $\Delta\varphi$. Cuando el triángulo astronómico es rectángulo en el zenit, se tiene: $\cot.\,\varphi = \cot.\,\delta\cos.\,h$, ó bien: $\tan.\,\delta = \tan.\,\varphi\cos.\,h$, por lo cual en ese instante:

$$\frac{d\,h}{d\,\varphi} = 0$$

lo que demuestra que un pequeño error en la latitud no tiene influencia en la determinación de la hora siempre que se observe el astro en el primer vertical. Es evidente que poco antes ó poco después de ese momento será muy pequeña la diferencia................. tan. δ — tan. φ cos. h, y que, por tanto, con un astro cerca del primer vertical podrá el observador determinar exactamente la hora local, aun cuando tenga alguna incertidumbre respecto de su verdadera latitud, porque el error quedará multiplicado por una fracción sumamente pequeña. También esta conclusión es de grande importancia en la práctica, puesto que muchas veces el astrónomo ignora casi completamente la latitud de la estación que ocupa, y procediendo como se ha indicado puede determinar bien su tiempo para corregir en seguida el valor de la latitud supuesta. Estas correcciones sucesivas son muy frecuentes en la aplicación de la Astronomía, y siempre conducen á muy buenos resultados si se guían los trabajos de acuerdo con las indicaciones de la teoría, análogas á las precedentes.

180.—El coeficiente de $\Delta\delta$ no se nulifica cuando $a = 90°$, sino cuando el triángulo astronómico es rectángulo en el astro. En efecto, en tal caso se tiene: cot. δ = cot φ cos. h, ó lo que es lo mismo, tan. φ = tan. δ cos. h, y por consiguiente:

$$\frac{d\,h}{d\,\delta} = 0$$

La condición de que sea recto el ángulo paraláctico no puede tener lugar, sin embargo, más que cuando la declinación del astro sea mayor que la latitud del lugar; y como siendo recto ese ángulo, el plano vertical ZA' (fig. 46ª) que pasa por el astro A', es tangente á su círculo $RA'S$ de declinación, resulta que en ese momento adquiere el mayor valor posible su azimut PZA'. Así pues, la condición de un azimut considerable es en todos casos la más conveniente para nulificar ó disminuir los efectos de los pequeños errores existentes en los datos necesarios para la determinación de la hora.

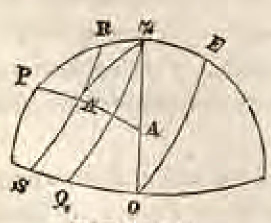


FIG. 46A

181.—Adviértase que sólo pueden pasar por el primer vertical

ZO los astros cuyas declinaciones están comprendidas dentro de los límites 0° y φ. El que tuviera nula su declinación cortaría aquel plano en el punto O del horizonte, por ser común al ecuador EO; y el que tuviera por declinación una cantidad igual á φ, describiría el círculo ZQ, tocando, por consiguiente, al primer vertical en el zenit. Se deduce de aquí que el número de astros susceptibles de un azimut de 90°, es en general tanto menor, cuanto más pequeña es la latitud de la estación; y que ciñéndose estrictamente á ese valor del azimut, el número de las estrellas útiles para observaciones de tiempo se reduce aun por la necesidad de no medir sus alturas muy cerca del horizonte, á causa de las irregularidades de la refracción; pues se recordará (número 136) que nunca se juzgan dignas de confianza las observaciones practicadas á más de 80° de distancia zenital. Esto no obstante, como todas las ventajas de un azimut de 90° existen casi en el mismo grado á 20° ó 30° á un lado y otro del primer vertical, se infiere que en cualquiera latitud se puede contar siempre con un gran número de estrellas propias para la determinación del tiempo; y que la única regla práctica que establecen las consideraciones precedentes es la de evitar las observaciones cerca del meridiano, y por consiguiente, las estrellas circumpolares, y en nuestras regiones las de estrellas australes cuyas declinaciones sean grandes numéricamente; porque unas y otras nunca pueden tener azimutes considerables. Pongo á continuación una Tabla de las distancias zenitales más convenientes para las observaciones de tiempo en cada latitud, y que se refiere á estrellas de diferentes declinaciones. Siendo φ del mismo signo y mayor que δ, pasará el astro por el primer vertical; y en el momento de su tránsito por ese plano, se tendrá la relación siguiente, por ser el triángulo astronómico rectángulo en el zenit:

$$\cos. z = \frac{\text{sen.}\,\delta}{\text{sen.}\,\varphi}$$

Si por el contrario, δ es mayor que φ, en el instante en que el plano vertical que pasa por la estrella es tangente á su círculo de declinación, se tendrá:

$$\cos. z = \frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\delta}$$

Por medio de estas relaciones se ha calculado la Tabla, la cual, por consiguiente, sólo se refiere á estrellas cuyas declinaciones tengan el mismo signo que la latitud.

DISTANCIAS ZENITALES MAS FAVORABLES PARA LA DETERMINACION DE LA HORA.

LATITUD.	DECLINACIÓN DEL ASTRO.						
	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
15°	70°19′	47°52′	00°00′	40°49′	52°14′	58°50′	63°11′
20	75 14	59 29	40 49	00 00	35 20	46 50	53 24
25	78 6	65 44	52 14	35 20	00 00	32 15	42 32
30	79 58	69 41	58 50	46 50	32 15	00 00	29 20
35	81 16	72 23	63 11	53 24	42 32	29 20	00 00

Cuando φ y δ sean de signos contrarios, sólo se procurará observar el astro cuando tenga el mayor azimut posible.

Habiendo estudiado la influencia de cada uno de los errores Δz, $\Delta\varphi$ y $\Delta\delta$, notemos por la inspección de sus coeficientes, que deben producir efectos contrarios á un lado y otro del meridiano, puesto que el ángulo horario es positivo al Oeste y negativo al Este. Si, pues, se observan dos estrellas de declinación poco diferente y próximamente con el mismo azimut, la una al E. y la otra al O., el promedio de los resultados podrá considerarse independiente de pequeños errores constantes que existan en los datos. Esta indicación es muy útil para el observador que no conozca con precisión el valor de su latitud, los errores de su instrumento angular, ó bien que carezca de los medios de estimar con exactitud la refracción atmosférica.

182.—Presentemos ahora algunas aplicaciones que hagan comprender perfectamente todos los detalles de la práctica de este método, comenzando por reunir las fórmulas que deben emplearse.

$$\left.\begin{aligned} z &= z' + r - p \pm s \\ a &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}(\varphi - \delta) \\ b &= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}(\varphi - \delta) \\ \text{sen.}\ \frac{1}{2}h &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,b}{\cos.\,\varphi\cos.\,\delta}} \\ T &= a + h \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Se recordará que z' representa la distancia zenital aparente, tal como la da el instrumento después de corregida por los errores de éste; que r, p y s indican respectivamente la refracción, la paralaje de altura y el semidiámetro del astro, siendo este último aditivo ó substractivo, según que se haya observado el borde superior ó el inferior, y teniendo presente que p y s son nulos siempre que se trate de una estrella; y por último, que el valor de h se convertirá en tiempo para combinarlo con la ascensión recta del astro, á fin de obtener la hora sideral de la observación, siendo h positivo al Oeste y negativo al Este del meridiano.

Si designamos ahora por t la hora del cronómetro, correspondiente al instante de la observación, y por Δt la corrección que necesita, tendremos: $T = t + \Delta t$, y en consecuencia:

$$\Delta t = T - t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La corrección Δt se considerará positiva si el cronómetro está atrasado, puesto que en tal caso su indicación t será menor que la hora real T; y negativa si está adelantado.

Lo anterior supone que se haga uso de un cronómetro sideral; pero si fuere solar, se convertirá la hora T en tiempo medio (número 131) para hacerla comparable con la de aquel instrumento.

Ejemplo.—El 17 de Diciembre de 1861 hice con sextante y cronómetro solar las siguientes observaciones de la estrella *α Orionis* al Este del meridiano, en un lugar cuya latitud es $\varphi = 19°\ 25'53''.5$:

CRONÓMETRO.	SEXTANTE.		
$9^h 24^m\ 8^s.7$	......$97° 35' 10''$	Termóm.º libre	$t = 5°.0$
,, 25 20 .5	98 9 50	Termóm.º fijo...	$\tau = 7\ .5$
,, 26 14 .3	98 35 15	Barómetro......	$p = 0^m.590$
,, 27 21 .0	......99 5 10	Error inicial ...	$e_0 = 20''.0$
Promedios... $t = 9^h 25^m 46^s.12$	......$98° 21' 21''.2$		

La suma de las demás correcciones del sextante era $c = -32''.6$; y la posición de la estrella: $\alpha = 5^h 47^m 44^s.41$ y $\delta = +7° 22' 41''.4$.

Sextante.......	$98° 21' 21''.2$				
$e_0 =$	$-20\ .0$				
$c =$	$-32\ .6$				
$2a =$	98 20 28 .6				
$a =$	49 10 14 .3				
$z' =$	40 49 45 .7	......ρ......	1.7029		
$r =$	+ 39 .8	b......	9.8889	$\varphi =$	$19° 25' 53''.5$
		L......	0.0082	$\delta =$	+ 7 22 41 .4
$z =$	$40° 50' 25''.5$	f......	0.0002		
				$\varphi - \delta =$	$12°\ 3' 12''.1$
		r......	1.600		

$\frac{1}{2} z =$	$20° 25' 12''.7$		
$\frac{1}{2}(\varphi - \delta) =$	6 1 36 .0		
$a =$	26 26 48 .7	......................sen..........	9.6487186
$b =$	14 23 36 .7	......................sen..........	9.3954670
			9.0441856
		cos. φ.........	-9.9745291
		cos. δ.........	-9.9963891
$\frac{1}{2} h =$	$-20°\ 7' 27''.8$		
$h =$	$-\ 2^h 40^m 59^s.71$	sen.$^2 \frac{1}{2} h$.........	9.0732674
$\alpha =$	5 47 44 .41		
		sen. $\frac{1}{2} h$.........	9.5366337
$T =$	$3^h\ 6^m 44^s.70$		
$A =$	17 45 28 .36	.... Ascensión recta del sol medio.	
$T - A =$	9 21 16 .34		
red.$(T - A) =$	$-$ 1 31 .95	.... Tabla de la página 253.	
$H =$	$9^h 19^m 44^s.39$	.... Hora media.	
$t =$	9 25 46 .12	.... Hora cronométrica.	
$\Delta t =$	$-\ 6^m\ 1^s.73$	.... Corrección del cronómetro.	

Cuando se observa una estrella al Oeste del meridiano, no ofrece más diferencia el cálculo respecto del anterior, que la del signo positivo del ángulo horario, el cual, por tanto, se suma con la ascensión recta para hallar la hora sideral correspondiente. Se ha dicho ya que la conversión de ésta en hora media es indispensable cuando se usa un cronómetro solar, y aunque la reducción no presenta dificultad alguna, se comprende desde luego que bajo el aspecto de la brevedad del cálculo, hay ventaja en servirse de un cronómetro sideral, puesto que su indicación es inmediatamente comparable con la hora T.

183.—En las observaciones del sol se verifica lo contrario por razones análogas, y especialmente por la de que el resultado del cálculo suministra directamente la hora verdadera si está el sol al Oeste; y si está al Este se obtiene la hora astronómica verdadera, restando de 24^h el ángulo horario que da el cálculo. En seguida no queda más que convertirla en hora media con ayuda de la ecuación del tiempo, y compararla con la indicación del cronómetro solar para hallar la corrección de éste. Así, pues, designando por H la hora media real y por E la ecuación del tiempo, la expresión $H = h + E$ reemplaza á la última de las formulas (1), y por consiguiente, la corrección del cronómetro será:

$$\Delta t = H - t = h + E - t \quad \text{.......................} \quad (3)$$

expresión en que se sustituye $24^h - h$ en lugar de h, cuando se haya observado el sol al Este.

La determinación de la hora por observaciones solares me parece, sin embargo, algo más laboriosa que por medio de las estrellas, no sólo por ser preciso tomar en cuenta la paralaje de distancia zenital y aun el semidiámetro, si es que no se observa más que uno de los bordes, sino principalmente por la necesidad de interpolar la declinación del astro para el instante de la observación. Como esta hora es precisamente la incógnita del problema, resulta que es necesario proceder por aproximaciones sucesivas de este modo: siendo t la hora del cronómetro y Δt la corrección que se le supone, $t + \Delta t$ representará aproximadamente la hora media local, y $H' = t + \Delta t + L$ la correspondiente del primer meridiano. Para el momento H' se calcula la declinación del sol (véase el número 154), y con este y los demás datos se procede al cálculo de h, y por consiguiente de Δt; mas si este valor resulta muy diferente del que se supuso al principio, será preciso repetir el cálculo haciendo uso de la corrección Δt determinada por el primero, para hallar la hora media del primer meridiano é interpolar con más exactitud la declinación. Por otra parte, esta coordenada nunca varía con mucha rapidez, de suerte que si se conoce la corrección del cronómetro con aproximación de 1^m ó 2^m, lo cual casi siempre es fácil, no habrá necesidad de repetir el cálculo, por ser suficientemente exacto el resultado del primero, pues se recordará la poca influencia de un pequeño error de la declinación en el ángulo horario de un astro cuando se observa con un azimut considerable.

184.—Puede también eliminarse la corrección por el semidiámetro observando los dos limbos del sol alternativa ó sucesivamente; porque siendo proporcional al tiempo el movimiento ascensional del astro, el promedio de las distancias zenitales de los bordes dará la del centro, correspondiente al término medio de las horas. Siempre he acostumbrado seguir este procedimiento tomando, con graduaciones equidistantes del instrumento angular, varias alturas ó distancias zenitales del primer limbo (el superior al Este y el inferior al Oeste), y volviendo á hacer que el instrumento señale las mismas indicaciones para observar el segundo.

Ejemplo.—El 8 de Enero de 1863 hice de esa manera las siguientes observaciones con un cronómetro solar en una estación (Chapultepec), cuya posición es próximamente $\varphi = 19°\,25'\,15''$ y............ $L = 6^h\,36^m\,39^s$.

ANGULO HORARIO DEL SOL AL OESTE DEL MERIDIANO.

Limbo inferior.	Sextante.	Limbo superior.		
$3^h\,31^m\,3^s.0$	48°30′	$3^h\,33^m\,55^s.0$	Termómetro libre.	16°.5
„ 31 29 .0.........	48 20	„ 34 20 .5	„ fijo...	16 .0
„ 31 55 .0.........	48 10	„ 34 48 .0	Barómetro	0^m.587
„ 32 21 .5.........	48 00	„ 35 15 .0	Error inicial.......	6″.2
„ 32 48 .5.........	47 50	„ 35 41 .0		

El promedio de las horas $t = 3^h\,33^m\,21^s.65$ es la del paso del cen-

tro del sol por la distancia zenital correspondiente á la indicación media $G = 48°\,10'$ del sextante. Suponiendo al cronómetro un atraso de $3^m\,3^s$ respecto del tiempo medio local, se halla $H' = 10^h\,13^m\,4^s$ por hora media contemporánea de Greenwich, y con ella la declinación $= -22°\,13'\,4''.0$ del sol, y $E = +7^m\,4^s.78$ por ecuación del tiempo.

Sextante...... 48°10′ 00″.	ρ...... 2.1139	π...... 0.9542
$e_0 =$ − 6 .2	b...... 9.8867	sen. z...... 0.9605
$e =$ − 25 .0	l...... 9.9895	
	f...... 9.9995	p...... 0.9147
$2a =$ 48° 9′ 28 .8		
$a =$ 24 4 44 .4	r...... 1.9896	

	$\varphi =$ 19°25′ 15″
$z' =$ 65°55′ 15″.6	$\delta = -22$ 13 4
$r =$ + 1 37 .6	
$p =$ − 8 .2	$\varphi - \delta =$ 41°38′ 19″
$z =$ 65° 56′ 45″	

$\frac{1}{2} z =$ 32° 58′ 22″.5
$\frac{1}{2}(\varphi - \delta) =$ 20 49 9 .5

$a =$ 53°47′ 32″.	........................sen..........	9.9068090
$b =$ 12 9 13	........................sen..........	9.3233209
		9.2301299
	cos. φ	−9.9745586
	cos. φ.........	−9.9664953
$\frac{1}{2} h =$ 26°10′ 26″.9		
$h =$ $3^h\,29^m\,23^s.59$......(Hóra verdadera).		9.2890760
$E =$ + 7 4 .78	sen. $\frac{1}{2} h$.........	9.6445380
$H =$ $3^h\,36^m\,28^s.37$		
$t =$ 3 33 21 .65		
$\Delta t =$ + $3^m\,6^s.72$		

El resultado del cálculo comprueba la suficiente exactitud de la primera hipótesis $3^m\,3^s$, y, por consiguiente, es inútil repetirlo; porque el pequeño cambio de declinación del sol en $3^s.7$ que hay de diferencia, respecto del atraso supuesto, no influye en manera alguna en el valor de h.

185.—Cuando se halle una diferencia notable entre el valor supuesto de Δt y el calculado, me parece que corregir el primer resultado es preferible á repetir toda la operación. Puede procederse, al efecto, de esta manera: hallamos al principio de este Capítulo el coeficiente diferencial de h respecto de δ, que es el siguiente, expresando la variación de h en segundos de tiempo.

$$\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,\delta}=\frac{1}{15}\left(\frac{\tan.\varphi}{\mathrm{sen}.\,h}-\frac{\tan.\delta}{\tan.\,h}\right)$$

Llamando ahora c la corrección supuesta al cronómetro, y c' la que resulta del cálculo, consideremos que $\mathrm{d}\,\delta$ representa la variación de declinación en el tiempo $c'-c$. Si, pues, designamos por v su movimiento horario, se tendrá:

$$\mathrm{d}\,\delta=\frac{v(c'-c)}{3600}$$

Sustituyendo este valor en el de $\mathrm{d}\,h$ y despejando, resulta:

$$\mathrm{d}\,h=\frac{v(c'-c)}{15\times3600}\left(\frac{\tan.\varphi}{\tan.\,h}-\frac{\tan.\delta}{\tan.\,h}\right)$$

y como $h+\mathrm{d}\,h$ representa el ángulo horario correcto, la verdadera corrección del cronómetro será:

$$\Delta t=c'+(5.26761)(c'-c)v\left(\frac{\tan.\varphi}{\mathrm{sen}.\,h}-\frac{\tan.\delta}{\tan.\,h}\right)\dots\dots\ (4)$$

fórmula en la cual se ha introducido el logaritmo de la constante, y que calculada en logaritmos de cuatro ó cinco decimales, da el valor correcto de Δt con más facilidad que por la repetición del primer cálculo. Es claro que los valores de δ y h que entran en ella son los mismos de la primera resolución, y que puede tomarse por v la variación horaria que consta en las Efemérides del sol para el día de la observación, sin que sea necesario interpolarla para el ins-

tante de ésta. En lo que sí es preciso mucho cuidado es en el juego de los signos.

186.—Para la determinación de la hora, como para todas las demás operaciones astronómicas, es preferible, en general, servirse de un instrumento fijo, tal como un círculo y especialmente un altazimut. Habiéndose explicado ya en otras partes de esta obra el manejo de esos instrumentos, sólo añadiré que pueden usarse ó repitiendo las medidas de las distancias zenitales y haciendo tantas lecturas diferentes del ángulo y del tiempo cuantas sean las veces que se vise el astro con la intersección de los hilos de la retícula, ó bien fijando el instrumento en una graduación conveniente y anotando las horas del cronómetro en los instantes en que el astro, en virtud de su movimiento, pasa por cada uno de los hilos horizontales del telescopio. Este último método es más cómodo, pues sólo hay necesidad de ir variando gradualmente el azimut del telescopio por medio del tornillo de aproximación del círculo horizontal, á fin de que el astro pase por los hilos horizontales cerca de su intersección con el vertical del centro. Esta precaución tiene por objeto evitar el error que podría originarse de la falta de horizontalidad perfecta de los hilos, aunque ya se ha indicado (número 47) el modo de comprobarla.

Sea cual fuere el método de observación que se adopte, es muy conveniente medir las distancias zenitales en las dos posiciones del círculo, para eliminar el efecto de la colimación vertical, según se ha dicho en el número 243 del primer Tomo. Sin embargo, si se ha determinado previamente este error, puede emplearse el instrumento en una sola posición, aplicando á sus indicaciones la corrección constante correspondiente. También es preciso no olvidar la otra corrección que proviene del nivel paralelo al círculo.

Por vía de ejercicio presentaré algunos datos y los principales resultados para que el lector los compare con los que obtenga al desarrollar todo el cálculo.

Ejemplo 1º—El 24 de Agosto de 1869 hice en México las siguientes observaciones con cronómetro solar y un teodolito astronómico que daba distancias zenitales con el círculo vertical á la derecha y alturas á la izquierda. En ambas posiciones se observaron los pasos de los dos limbos del sol por cada uno de los tres hilos horizontales de la retícula, con el fin de eliminar la corrección del semidiámetro. Las lecturas fueron: á la derecha, $b = 49^\circ\ 17'\ 10''$ y á la izquierda, $a = 39^\circ\ 29'\ 50''$, cada una de las cuales es promedio de dos verniers.

	A la derecha.	A la izquierda.	NIVEL. Ocular.	NIVEL. Objetivo.
Limbo inferior...	$3^h\ 22^m 00^s.0$......	$3^h\ 27^m 22^s.0$	15.0	13.0
	„ 22 44 .0......	„ 28 5 .0	14.5	12.5
	„ 23 27 .5......	„ 28 49 .5		
Limbo superior...	„ 24 14 .5......	„ 29 35 .5		
	„ 24 58 .5......	„ 30 18 .5	Barómetro á 0°......	$0^m.586$
	„ 25 41 .5......	„ 31 3 .0	Termómetro libre:...	23°.0

Siendo de 15″ el valor angular de cada división del nivel, deberá hallarse:

$$z' = 45^\circ + \frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{2}\left[(o + o') - (e + e')\right]v = 49^\circ\ 53'\ 55''$$

y tomando 8″.6 por paralaje del sol, resultará:

$$z = z' + r - p = 49^\circ\ 54'\ 39''.2$$

La declinación del sol, calculada para la hora de la observación, era $\delta = +10^\circ\ 52'\ 30''.8$, la ecuación del tiempo $E = +\ 2^m\ 00^s.66$ y la latitud del lugar, $\varphi = 19^\circ\ 26'\ 10''$. Con estos datos se encontrará:

Hora verdadera......................	$V = h =$	$3^h\ 24^m 30^s.57$
Correción del cronómetro................	$\Delta t =$	$-0\ .39$

Ejemplo 2º—Con los propios instrumentos observé en la noche de ese mismo día la estrella *α Bootis* al Oeste. Su posición era:

$$\alpha = 14^h\ 9^m\ 41^s.52 \qquad \delta = +19^\circ\ 52'\ 14''.8$$

A la derecha.	A la izquierda.	NIVEL. Ocular.	NIVEL. Objetivo.
$7^h\ 29^m 17^s.5$	$7^h\ 32^m 32^s.5$	16.5	12.0
„ 30 02 .5	„ 33 16 .2	16.5	12.0
„ 30 46 .2	„ 34 00 .0	Barómetro á 0°......	$0^m.586$
$b = 50^\circ\ 7'\ 32''.5$	$a = 39^\circ\ 9'\ 32''.5$	Termómetro libre...	19°.0

Los principales resultados serán:

$$z = 50^\circ 30'\ 26''.3 \qquad h = +\ 3^h\ 35^m 29^s.41$$
$$H = 7^h\ 31^m 39^s\ 31 \qquad \Delta t = \qquad +\ 0\ .11$$

Ejemplo 3º—El 7 de Enero de 1863 obtuve en Chapultepec......... (Log. $= 6^h\ 36^m\ 39^s$ y lat. $= 19^\circ\ 25'\ 15''$) los siguientes datos, observando los dos limbos del sol al Este del meridiano: $z = 64^\circ 49'\ 13''.4$ y $t = 8^h\ 40^m\ 36^s.50$. Contando el tiempo astronómicamente, se tendrá por fecha el 6 de Enero á $t = 20^h\ 40^m\ 36^s.50$ del cronómetro. Para el instante de la observación se halló $\delta = -22^\circ\ 23'\ 13''.8$ y......... $E = +\ 6^m\ 31^s.96$.

Con estos elementos deberá encontrarse:

Angulo horario........................	$h = -$	$3^h\ 22^m 52^s.60$
Hora verdadera........................	$V =$	20 37 7 .40
Corrección del cronómetro..........	$\Delta t =$	+ 3 2 .86

Recomiendo mucho al lector la resolución de todos los ejemplos con arreglo á los tipos de cálculo que antes se han presentado, pues ésta es la única manera de adquirir la práctica indispensable para las aplicaciones.

187.—Es sumamente difícil, y casi puede decirse imposible, que los cronómetros y los péndulos, aun los de mejor construcción, marchen exactamente de acuerdo con el tiempo que están destinados á medir. Por lo general siempre adelantan ó atrasan diariamente algunos segundos, de manera que es enteramente indispensable determinar con frecuencia su corrección absoluta Δt con el fin de deducir su variación en la unidad de tiempo, ya sea ésta el día ó la hora. La variación ó marcha de los guarda-tiempos no ofrece inconveniente alguno en las aplicaciones, ni puede reputarse como un defecto de los instrumentos, con tal de que sea sensiblemente uniforme; porque tomándola en cuenta, siempre es posible saber la corrección absoluta que es necesario hacer á sus indicaciones en cualquier instante. Es ciertamente ventajoso que sea pequeña la variación de un guardatiempo, en atención á que los cálculos se abrevian algo de esa manera; pero lo más esencial es la constancia en el adelanto ó atraso diario, aunque sea considerable numéricamente.

La marcha en la unidad de tiempo se determina hallando las correcciones Δt_1 y Δt_2 en dos momentos, t_1 y t_2, pues designándola por v, se tendrá:

$$v = \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{t_2 - t_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Según que el denominador exprese días ú horas, se obtendrá por esta fórmula la variación diaria ú horaria. Las dos primeras aplicaciones del número precedente indican, por ejemplo, que el cronómetro tenía la corrección $\Delta t_1 = -0^s.39$ cuando su indicación era $t_1 = 3^h 26^m$ próximamente, y que en seguida se le halló $\Delta t_2 = +0^s.11$ cuando señalaba $t_2 = 7^h 32^m$ con poca diferencia. Refiriéndose ambas correcciones al mismo día, se ve que el tiempo transcurrido fué de $4^h 6^m = 4^h 1$, y en consecuencia, su variación horaria era:

$$v = \frac{0^s.11 + 0^s.39}{4.1} = +0^s 122$$

La marcha diaria sería $0^s.122 \times 24 = +2^s.93$. El mismo resultado se hallaría expresando en días el tiempo transcurrido, que es: $t_2 - t_1 = 0^d.1708$, y entonces:

$$v = +\frac{0^s.50}{0.1708} = +2^s.93$$

El signo positivo de v indica que el cronómetro atrasa respecto del tiempo medio real; cuando resulta negativo da á conocer que adelanta en la unidad de tiempo.

Con el fin de determinar con más precisión el valor de v debe procurarse que sea grande el denominador de la fórmula, porque así se fraccionan más los pequeños errores que tengan las correcciones absolutas Δt_1 y Δt_2. El cronómetro á que me refiero tenía en aquella época una marcha diaria de más de 3^s, y se ve que la produce algo menor el cálculo hecho con las determinaciones de su corrección en

un intervalo de algunas horas solamente. El 21 de Agosto, por ejemplo, á $t_1 = 3^h 22^m$ tenía un adelanto de $9^s.67$, y el 24 del mismo mes á $7^h 32^m$ un atraso de $0^s.11$. Haciendo el cálculo con estos datos y expresando en días el tiempo transcurrido, resulta:

$$v = \frac{0.11 + 9.67}{3.17} = +3^s.09$$

Los cronómetros suelen sufrir irregularidades en su marcha, aunque se manejen con el mayor cuidado y sin exponerlos á movimientos rápidos ni á cambios bruscos de temperatura. Por eso es indispensable determinar cada dos ó tres días, si es posible, su corrección absoluta, y con más frecuencia aún, si se tiene motivo para temer la influencia de alguna causa de alteración. De ese modo puede admitirse sin error sensible que es uniforme su marcha en el intervalo de una á otra observación; y entonces se podrá calcular su corrección absoluta en cualquier instante intermedio. Sea, en efecto, t_1 el momento en que se haya determinado la corrección Δt_1 y llamemos v la variación hallada para la unidad de tiempo. Cuando el instrumento señale la hora t habrá transcurrido respecto de aquel instante una duración $t - t_1$, y, en consecuencia, su corrección á la hora t, será:

$$\Delta t = \Delta t_1 + (t - t_1) v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

expresando la duración $t - t_1$ en la misma unidad á que se refiera v.

Ejemplo.—¿Cuál será la hora exacta cuando un cronómetro señala $t = 4^h 25^m 19^s.2$, teniendo un adelanto diario de $11^s.4$ y habiéndose hallado 2 días 9 horas antes que atrasaba $7^m 32^s.35$ respecto del tiempo real?

$$\begin{array}{rr} \Delta t = + & 7^m 32^s.35 \\ -2.375 \times 11.4 = - & 27\ .07 \\ \hline \Delta t = + & 7^m\ 5^s.28 \\ t = & 4\ 25\ 19\ .20 \\ \hline \text{Hora exacta.........} & 4^h 32^m 24^s.48 \end{array}$$

188.—El sol es casi el único de los astros que tiene disco y paralaje apreciables que se emplea para la determinación de la hora, y aun cuando su observación no ofrezca dificultad alguna, juzgo de la mayor importancia consignar aquí un nuevo método de observarlo, que se debe á Mr. Quetelet y que presenta grandes ventajas respecto del procedimiento común. Consiste en sacar un poco el tubo del ocular del telescopio hasta que comiencen á verse con vaguedad los hilos de su retícula. Entonces sucederá que dirigido el telescopio hacia el sol, y poniendo delante del ocular una hoja de papel ó de cartón, podrán verse en él tanto las imágenes de los hilos como la del astro. Por consiguiente, estando fijo el círculo en la graduación conveniente, se observarán con la mayor comodidad y exactitud los instantes en que los limbos del sol son tangentes á los hilos, para anotar las horas correspondientes del cronómetro. Esta manera de observar, á la vez que más fácil, tiene también la ventaja de que, amplificada así la imagen del astro, y dándole la intensidad que se quiera para que no fatigue la vista, permite apreciar los instantes de los contactos de los hilos con los bordes con más seguridad que por medio de la visión directa. Se comprende por supuesto que la retícula debe hallarse en el foco estelario del objetivo, lo mismo que en el método ordinario, pues de otra manera no podrían pintarse en el mismo plano las imágenes del sol y de los hilos.

El fundamento de este procedimiento proviene de que alejando el ocular de la reticular, en vez de formar una imagen virtual hacia adelante, la forma real hacia atrás. En consecuencia, sacando más ó menos el tubo del ocular, se puede acercar ó alejar el plano en que se pintan las imágenes, y el observador es dueño de elegir de esa manera la distancia que juzgue más á propósito para obtenerlas de la amplitud é intensidad convenientes, sin necesidad de la interposición de un helioscopio. En todos casos, es muy poco lo que debe sacarse el ocular.

Como los rayos directos del sol al caer sobre el cartón ó el papel molestarían la vista, y acaso impedirían ver con claridad las imágenes, debe ponerse cerca del ocular ó en el objetivo del telescopio un disco de cartón que los intercepte. De ese modo sólo se reciben en la hoja de papel los rayos que han pasado por el interior del telescopio y que son los que producen las imágenes.

CAPITULO VIII.

DETERMINACIÓN DE LA HORA.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE DOS ESTRELLAS.

189.—Las consecuencias que se deducen del análisis hecho al principio del Capítulo precedente, respecto de las mejores condiciones en que conviene observar un astro con el fin de hallar la hora, me condujeron á encontrar un procedimiento de observación, que reuniendo todas las indicaciones de aquel análisis, presentase, además, la ventaja de eliminar completamente del resultado las distancias zenitales medidas, y en consecuencia los errores que podrían afectarlas. Este procedimiento, ampliamente desarrollado, consta en las secciones I y II del primer Capítulo de mis *Nuevos Métodos Astronómicos*, y á esta obra puede ocurrir el lector en busca de más detalles; pues aquí sólo me limitaré á exponer su parte práctica.

Consiste el nuevo procedimiento en observar dos estrellas elegidas de manera que lleguen á la misma distancia zenital á horas poco diferentes, la una al Este y la otra al Oeste del meridiano, y en lo posible con un azimut considerable; en anotar las correspondientes indicaciones del cronómetro; y en servirse de éstas como únicos datos obtenidos por la observación, para determinar la corrección que necesiten.

Se comprende que no entrando como elemento en la resolución del problema la distancia zenital común á las dos estrellas, se evitan también todas las operaciones preliminares para la preparación de ese elemento, como son las relativas al cálculo de la refracción y á las correcciones instrumentales; circunstancia que á su vez produce la ventaja de no hacer indispensables las indicaciones del barómetro y del termómetro, y la de permitir el uso de un instrumento incorrecto para practicar la observación. Desarrollemos las sencillas fórmulas que resuelven el problema.

190.—Designando por h y δ respectivamente el ángulo horario y la declinación de la estrella occidental, y por h' y δ' los mismos elementos de la oriental, se tienen las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \cos. z &= \text{sen}.\varphi\, \text{sen}.\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos. h \\ \cos. z &= \text{sen}.\varphi\, \text{sen}.\delta' + \cos.\varphi \cos.\delta' \cos. h' \end{aligned}$$

de las que resulta por diferencia:

$$\tan.\varphi(\text{sen}.\delta - \text{sen}.\delta') = \cos.\delta' \cos. h' - \cos.\delta \cos. h$$

Descomponiendo ambos miembros en factores, esta ecuación puede escribirse así: (1)

$$2\,\text{sen}.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\tan.\varphi = \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\cos.\delta' - \cos.\delta)(\cos h' + \cos. h) \\ +\tfrac{1}{2}(\cos.\delta' + \cos.\delta)(\cos. h' - \cos. h) \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de las sumas y diferencias de los cosenos, se halla:

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\tan.\varphi = \begin{cases} \text{sen}.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\text{sen}.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(h+h')\cos.\tfrac{1}{2}(h-h') \\ +\cos.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\text{sen}.\tfrac{1}{2}(h+h')\text{sen}.\tfrac{1}{2}(h-h') \end{cases}$$

Dividiendo toda la ecuación por

$$\cos.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\,\text{sen}.\tfrac{1}{2}(h-h')$$

y haciendo para abreviar:

$$\left.\begin{aligned} \tan.\psi &= \tan.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\tan.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cot.\tfrac{1}{2}(h-h') \\ \gamma &= \frac{\tan.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\tan.\varphi}{\text{sen}.\tfrac{1}{2}(h-h')} \\ &\text{se hallará sin dificultad alguna:} \\ \text{sen}.\tfrac{1}{2}(h+h') &+ \tan.\psi\cos.\tfrac{1}{2}(h+h') = \gamma \end{aligned}\right\} \text{..........} (1)$$

(1) En general, la diferencia $m'n' - mn$ de dos productos siempre puede ponerse bajo la forma: $m'n' - mn = \frac{1}{2}(m'-m)(n'+n) + \frac{1}{2}(m'+m)(n'-n)$.

Expresemos ahora la semisuma y la semidiferencia de los dos ángulos horarios en función de las horas anotadas en el cronómetro. Designando para esto por α y α' las ascensiones rectas de las estrellas occidental y oriental respectivamente; por t y t' las horas cronométricas de las observaciones, y por Δt y $\Delta t'$ sus correspondientes correcciones, tendremos que las horas siderales exactas, serán:

$$\begin{aligned} T &= t + \Delta t \\ T' &= t' + \Delta t' \end{aligned}$$

y por consiguiente los ángulos horarios:

$$\begin{aligned} h &= t + \Delta t - \alpha \\ h' &= t' + \Delta t' - \alpha' \end{aligned}$$

Llamando ε su semisuma y θ su semidiferencia algebraicas, se obtendrá:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(h+h') = \varepsilon = \tfrac{1}{2}(t+t') + \tfrac{1}{2}(\Delta t + \Delta t') - \tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha) \\ \tfrac{1}{2}(h-h') = \theta = \tfrac{1}{2}(t-t') + \tfrac{1}{2}(\Delta t - \Delta t') + \tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha) \end{aligned}\right\} \text{.........} (2)$$

con lo cual la última de las ecuaciones (1) se convierte en la siguiente:

$$\text{sen}.\varepsilon + \tan.\psi\cos.\varepsilon = \gamma \text{ ....} (3)$$

Esta ecuación es la que se trata de resolver para hallar el valor de ε, pues todas las demás cantidades son conocidas. El valor de θ ó $\frac{1}{2}(h-h')$ se compone de la diferencia de las ascensiones rectas y de la de las horas cronométricas, corregida por la pequeña cantidad $\frac{1}{2}(\Delta t - \Delta t')$, que representa la variación del cronómetro en el intervalo $\frac{1}{2}(t-t')$. Luego que se haya determinado el valor de ε, la primera de las ecuaciones (2) dará á conocer la corrección del cronómetro.

Multiplicando ahora la ecuación (3) por $\cos.\psi$, resulta:

$$\text{sen}.\varepsilon\cos.\psi + \cos.\varepsilon\,\text{sen}.\psi = \gamma\cos.\psi$$

que equivale á la expresión:

$$\text{sen}.(\varepsilon+\psi) = \gamma\cos.\psi$$

En consecuencia, si representamos por ω la suma $\varepsilon + \psi$, tendremos:

$$\text{sen.}\,\omega = \gamma\cos.\psi = \frac{\tan.\frac{1}{2}(\delta-\delta')\tan.\varphi\cos.\psi}{\text{sen.}\,\theta} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

y una vez calculado este ángulo, se obtiene:

$$\varepsilon = \omega - \psi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

191.—Las ecuaciones precedentes contienen toda la resolución del problema. Reunamos por su orden las fórmulas que deben calcularse para que se comprenda mejor todo el procedimiento.

$$\left.\begin{aligned}
\theta &= \tfrac{1}{2}(t-t') + \tfrac{1}{2}(\varDelta t - \varDelta t') + \tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha)\\
\tan.\psi &= \tan.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\tan.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\cot.\theta\\
\text{sen.}\,\omega &= \frac{\tan.\frac{1}{2}(\delta-\delta')\tan.\varphi\cos.\psi}{\text{sen.}\,\theta}\\
\varepsilon &= \omega - \psi\\
\tfrac{1}{2}(\varDelta t + \varDelta t') &= \tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha) + \varepsilon - \tfrac{1}{2}(t+t')
\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\; (6)$$

El valor de θ, convertido en arco, permitirá el cálculo de ψ y el de ω. Con esto queda ε determinada en arco; mas reducida á tiempo y sustituída en la última fórmula, da á conocer la semisuma de las correcciones del cronómetro, la cual representa evidentemente su corrección en el instante medio $\frac{1}{2}(t+t')$ entre las horas á que se hayan observado las dos estrellas.

Por tratarse de observaciones de estrellas, todo el cálculo se ha desarrollado en la hipótesis de que sea sideral el cronómetro cuyas indicaciones son t y t'; pero si fuese solar, se convertirá en tiempo sideral la duración $\frac{1}{2}(t-t') + \frac{1}{2}(\varDelta t - \varDelta t')$ por medio de la Tabla de la página 252. De este modo, el valor de ε expresará también tiempo sideral, y será preciso convertir en hora media (página 253) la sideral $\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha) + \varepsilon$ para hacerla comparable con las indicaciones del cronómetro, si éste es solar.

La marcha $\frac{1}{2}(\varDelta t - \varDelta t')$ sólo tiene valor apreciable cuando es de alguna consideración el intervalo de tiempo $t - t'$ que transcurre de una observación á la otra, ó bien cuando el cronómetro tiene una

fuerte variación diaria. Por esta circunstancia, y especialmente por las ventajas que resultan de terminar toda la operación en poco tiempo, es de importancia escoger bien el momento en que conviene observar las dos estrellas que se hayan combinado con este objeto. Veremos después que esto es siempre muy fácil; y por ahora presentemos una aplicación de este método, que indudablemente es más sencillo de lo que parece á primera vista.

Ejemplo.—En un lugar (San Luis Potosí) cuya latitud es 22° 9′ 00″ y cuya longitud es de $6^h 43^m 49^s$, hice el 28 de Abril de 1867 las siguientes observaciones con sextante y un cronómetro solar que atrasaba cosa de $0^s.1$ por hora.

	γ^1 *Leonis* al O.	Sextante.	α *Bootis* al E.
	$9^h\ 47^m\ 50^s.5$	128° 00′	$10^h\ 1^m\ 54^s.0$
	„ 48 33 .5	127 40	„ 1 10 .2
	„ 49 17 .2	127 20	„ 0 27 .7
	„ 50 00 .5	127 00	9 59 44 .5
	„ 50 44 .0	126 40	„ 59 1 .5
	„ 51 28 .0	126 20	„ 58 18 .5
	„ 52 11 .5	126 00	„ 57 36 .0
Promedios......	$t = 9^h\ 50^m\ 00^s.74$	127° 00′	$t' = 9^h\ 59^m\ 44^s.63$

Se ve por estos datos que en menos de un cuarto de hora se tomaron 7 alturas de cada estrella, de 20′ en 20′ del sextante. También se notará que las horas relativas á la estrella oriental crecen en el orden de las graduaciones del sextante, y se han escrito invertidas á fin de que cada una corresponda á la misma altura que la estrella occidental, la cual se observó primero. Las posiciones de las estrellas eran:

γ^1 *Leonis*......... $\alpha = 10^h\ 12^m\ 39^s.33$............. $\delta = +20°\ 30'\ 38''.3$
α *Bootis*......... $\alpha' = 14\ \ 9\ \ 37.58$............. $\delta' = +19\ \ 52\ \ 19.9$

Apliquemos las fórmulas (6) omitiendo la marcha del cronómetro por ser inapreciable en el corto intervalo transcurrido de una observación á otra.

$$\begin{array}{rr l r l r}
\tfrac{1}{2}(t-t') = & -\ 0^h\ 4^m51^s.95 & \tan.\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\ldots\ldots & 7.74408 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 7.74408\\
\text{Acel.} = & -\ 0\ .80 & \tan.\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\ldots\ldots & 9.56559 & \tan.\varphi\ldots & 9.60967\\
\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha) = & 1\ 58\ 29\ .18 & \cot.\theta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0.26702 & \cos.\psi\ldots & 9.00000\\
\hline
 & & & & \text{sen.}\,\theta\ldots & -9.67728\\
\theta = & \left\{\begin{array}{l} 1^h53^m36^s.38\\ 28^\circ 24'\ 5''.7\end{array}\right. & \tan.\psi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 7.57669 & & \\
 & & & & \text{sen.}\,\omega\ldots & 7.67647
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\psi = & 0^\circ\ 12'\ 58''.2\\
\omega = & 0\ \ 16\ \ 19\ .2\\
\hline
\epsilon = & +\ 0^\circ\ \ 3'\ 21''.0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\tfrac{1}{2}(\alpha'+\alpha) = & 12^h\ 11^m\ \ 8^s.45\\
\epsilon = & +\ 13\ .40\\
\hline
\text{Hora sideral} = & 12^h\ 11^m\ 21^s.85\\
A = & -\ \ 2\ \ 25\ \ \ 3\ .72\\
\hline
 & 9^h\ 46^m\ 18^s.13\\
\text{Red.}\ (T-A) = & -\ 1\ \ 36\ .05\\
\hline
\text{Hora media} = & 9^h\ 44^m\ 42^s.08\\
\tfrac{1}{2}(t+t') = & 9\ \ 54\ \ 52\ .68\\
\hline
\tfrac{1}{2}(\Delta t+\Delta t') = & -\ 10^m\ 10^s.60
\end{array}$$

En este ejemplo, habiéndose observado primero la estrella occidental, resulta negativo el valor de $\frac{1}{2}(t-t')$ y por eso se consideró con el mismo signo su reducción á tiempo sideral; pero nótese que de una ú otra manera esta reducción ó aceleración aumenta el valor numérico de los intervalos de tiempo medio.

192.—El análisis de este método, hecho en la obra que cité al principio, conduce á las reglas siguientes para la elección de las dos estrellas que deben formar cada combinación: 1ª Las mejores estrellas son las zenit-ecuatoriales (las que culminan entre el ecuador y el zenit), porque pueden observarse cerca del primer vertical. De consiguiente, en las regiones intertropicales conviene elegir estrellas cuyas declinaciones no excedan de 30° á 40°. En nuestro país podrán tomarse por límites de declinación desde 45° Norte hasta

25° Sur, sin ningún inconveniente. 2ª Se procurará que la diferencia de declinaciones de las dos estrellas que formen cada combinación, ó sea cada par, no exceda de 15° ó 20° cuando más, debiendo ser la de ascensiones rectas de 4^h á 8^h, y en general la que sea necesaria para que puedan observarse cómodamente ambas estrellas, la una al Este y la otra al Oeste del meridiano en poco tiempo. 3ª Las estrellas de cada par deberán ser próximamente de la misma magnitud, para que sus imágenes se presenten con el mismo brillo en el telescopio, y se tenga igual seguridad en las observaciones.

En mis *Nuevos Métodos* consta una Tabla que contiene 48 combinaciones de estrellas notables por su brillo, y propias para la aplicación de este método de observación. Pondré en seguida un extracto de aquella Tabla, con dos pares de estrellas para cada mes del año.

La cuarta columna contiene las horas siderales á las que las estrellas de cada par tienen la misma altura, la una al Oriente y la otra al Occidente del meridiano. Este dato designado por τ en la Tabla, es de mucha importancia para prepararse á la observación; porque sabiendo la hora á que las dos estrellas llegan á la misma altura simultáneamente, puede escogerse el momento favorable para observarlas, teniendo presente que después de aquella hora no se puede ya comenzar la operación, puesto que la estrella oriental continuará ascendiendo y la occidental descendiendo. Es, pues, indispensable principiar antes; y estimando en 5^m ó 6^m el tiempo que demanda la observación de cada estrella, y en otro tanto el que se necesita para preparar el instrumento, para visar la segunda, etc., creo que no será prudente comenzar después de $\tau - 5^m$, porque de otra manera habrá peligro de perder la observación de la segunda estrella. Es evidente, por supuesto, que puede principiarse todo el tiempo que se quiera antes de esa hora; pero la doble observación durará algo más.

Pares de estrellas propias para determinar la hora por el método de alturas iguales.

Núms.	Al Este.	Al Oeste.	τ	Epoca.		Log. $\frac{d\tau}{d\varphi}$
1	β *Geminorum.*	α *Andromedæ.*	$3^h 49$	Enero	3	5.2160+
2	β *Geminorum.*	α *Arietis.*	4 47	"	17	7.7581−
3	β *Geminorum.*	β *Tauri.*	6 27	Febrero	12	6.5461+
4	α *Leonis.*	α *Tauri.*	7 18	"	24	7.5820+
5	α *Leonis.*	α *Orionis.*	7 40	Marzo	4	7.9688+
6	β *Leonis.*	γ *Geminorum.*	9 7	"	24	7.1241+
7	α *Bootis.*	γ *Geminorum.*	10 18	Abril	11	7.4453−
8	α *Bootis.*	β *Geminorum.*	10 57	"	21	7.8945+
9	α *Bootis.*	γ^1 *Leonis.*	12 12	Mayo	10	6.9546+
10	α *Coronæ.*	δ *Leonis.*	13 17	"	26	7.8833−
11	α *Ophiuchi.*	α *Leonis.*	13 45	Junio	3	5.0003−
12	α *Ophiuchi.*	β *Leonis.*	14 38	"	16	7.4316+
13	α *Ophiuchi.*	α *Bootis.*	15 55	Julio	6	8.0786+
14	α *Aquilæ.*	α *Bootis.*	17 6	"	23	8.0752+
15	α *Aquilæ.*	α *Serpentis.*	17 39	Agosto	1	7.3599−
16	α *Pegasi.*	α *Serpentis.*	18 35	"	15	7.3805−
17	ε *Pegasi.*	α *Herculis.*	20 3	Septiembre	7	5.6817+
18	α *Andromedæ.*	α *Lyræ.*	21 15	"	26	8.0395+
19	α *Arietis.*	α *Ophiuchi.*	21 37	Octubre	1	7.8993−
20	α *Arietis.*	α *Aquilæ.*	22 42	"	17	8.1369−
21	α *Ceti.*	α *Aquilæ.*	23 25	"	28	7.6321+
22	α *Ceti.*	α *Pegasi.*	0 23	Noviembre	11	7.7951+
23	α *Aurigæ.*	α *Cygni.*	0 52	"	19	6.9130−
24	α *Tauri.*	ε *Pegasi.*	1 42	Diciembre	2	7.2671−
25	β *Tauri.*	α *Andromedæ.*	2 40	"	16	6.1572−

La hora τ está calculada por las mismas fórmulas (6) con la condición de la simultaneidad, á saber, $t = t'$, y suprimiendo las correcciones del cronómetro, puesto que se trata de determinar la hora sideral exacta, que será, en consecuencia:

$$\tau = \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha) + \omega - \phi$$

y como el valor de ω depende también de la latitud de la estación, lo he calculado para $\varphi = 24°$, que puede considerarse como la latitud media de la República. Para cualquiera otra latitud $\varphi = 24° + \varDelta\varphi$, se tendrá:

$$\tau' = \tau + \frac{d\tau}{d\varphi}\varDelta\varphi$$

Los logaritmos de $\frac{d\tau}{d\varphi}$ constan en la última columna de la Tabla, y por tanto es muy fácil hallar la hora de la igual altura simultánea para cualquiera otra latitud; porque introduciendo en esta fórmula el valor de $\varDelta\varphi$ en minutos, se obtendrá la corrección correspondiente, también en minutos de tiempo. Calculemos, por ejemplo, la hora τ' para la latitud del lugar en que se hicieron las observaciones del número 191, y que se refieren al 9º par de la Tabla. Se tiene: $\varDelta\varphi = 22° 9' - 24° = -111'$.

$$\begin{array}{lll} \frac{d\tau}{d\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots & 6.9546+ & \\ \varDelta\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots & 2.0453- & \tau = 12^h 12^m \\ \hline & 8.9999- \ldots\ldots & -\ 0.1 \\ & & \overline{\tau' = 12^h 11^m.9} \end{array}$$

193.—Por esta aplicación se comprenderá que las más veces puede prescindirse de la corrección, á no ser que tenga varios grados el valor de $\varDelta\varphi$, ó que sea muy considerable el logaritmo de su coeficiente; porque nunca es necesario conocer con mucha precisión el valor de τ, atendido el uso á que está destinado. Cuando se emplea para las observaciones un cronómetro solar, se convertirá τ en hora media, de la cual se deduce fácilmente la cronométrica si se conoce la corrección aproximativa de aquel instrumento. Verificándose así en nuestro ejemplo, se halla que la hora media correspondiente á $\tau = 12^h 12^m$ es $H = 9^h 45^m$; y teniendo el cronómetro unos 10^m de adelanto, seria próximamente $9^h 55^m$ su indicación en el instante de la igual altura simultánea de las dos estrellas. Por eso se principió la observación cosa de 7^m antes de esa hora.

La quinta columna de la Tabla suministra un dato que también sirve para formarse una idea de la hora más avanzada á la cual puede comenzarse la observación. Con el título de "Época" consta en la columna mencionada la fecha hacia la cual cada par de estrellas adquiere igual altura simultáneamente á las 9^h de la noche (tiempo medio); y como la hora sideral avanza cada día cerca de cuatro minutos ($3^m.93$) respecto de la media, sabremos que n días después de la "Época" las estrellas correspondientes llegarán simultáneamente á la misma altura á la hora media $9^h - 3^m.93\,n$. Si n se refiere á una fecha anterior á la de la Tabla, es claro que se tomará $9^h + 3^m.93\,n$ por hora media de la igualdad de alturas. En nuestro ejemplo, la "Época" que corresponde al par número 9 es el 10 de Mayo; en consecuencia, se tendrá $n = -12$ para el 28 de Abril, día de la observación, y así:

$$H = 9^h + 3^m.9 \times 12 = 9^h\,47^m$$

que con el adelanto supuesto da $9^h\,57^m$ próximamente por hora cronométrica de la altura igual y simultánea.

Cuando no se conoce ni aun aproximadamente el estado del cronómetro, tampoco podrá aplicarse ninguno de los anteriores procedimientos; pero en tal caso se determina la hora conveniente para la observación, calculando el valor aproximativo de la distancia zenital común á las dos estrellas en el instante τ. En efecto, siendo entonces $h = \tau - a$ y $h' = \tau - a'$ sus ángulos horarios, podrá calcularse z por las fórmulas (3) del número 124, á saber:

$$\tan. M = \frac{\tan. \delta}{\cos. h} \qquad \cos. z = \frac{\text{sen.}\, \delta}{\text{sen.}\, M} \cos. (M - \varphi)$$

Hagamos el cálculo para *α Bootis* con logaritmos de tres ó cuatro decimales, que es lo bastante para el objeto.

$\tau = \quad 12^h\,12^m$	$\tan. \delta$ 9.5580		$\text{sen.}\, \delta$ 9.5314
$a = -14\ \ 10$	$\cos. h$ .... −9.9397		$\cos. (M - \varphi)$ 0.0000
$h = \begin{cases} -\ 1^h\,58^m \\ -29^\circ\,30' \end{cases}$	$\tan. M$ 9.6183		$\text{sen.}\, M$ ...... −9.5838
	$M = 22^\circ\,33'$		$\cos. z$ 9.9476
	$\varphi = 22\ \ \ 9$		$z = 27^\circ\,35'$
	$M - \varphi = \ 0^\circ\,24'$		

El mismo resultado daría la otra estrella con poca diferencia. Por consiguiente, siendo sextante el instrumento de que se hizo uso, su indicación debía ser $G = 2\,(90^\circ - z) = 124^\circ\,50'$ para la igualdad de

altura simultánea. Ya con este dato y sin referencia alguna al cronómetro, cuya corrección se supone enteramente desconocida, sabremos que si se da principio á la observación con la estrella oriental, deberá ser con una graduación del sextante menor que 125°, y por el contrario, algo mayor si se comienza con la occidental, como se hizo en efecto.

Es evidente que todos estos cálculos aproximativos para prepararse á observar, no son útiles más que el primer día en que se observe un par, puesto que en los siguientes la indicación del instrumento angular ó la del cronómetro son suficientes para apreciar la hora conveniente, no olvidando que si el guarda–tiempo es solar deberá anticiparse cada día unos 4^m. Por otra parte, el objeto de los mismos cálculos es únicamente el de emplear poco tiempo en la operación; pero repito que puede comenzarse mucho antes de la hora τ, sin más desventaja que la de ocupar más tiempo, pues si la primera estrella se observa m minutos antes de τ, la otra llegará á la misma altura m minutos después próximamente, de suerte que en toda la operación se empleará el tiempo $2\,m$.

194.—Cuando se tiene necesidad de determinar la hora con alguna frecuencia, es útil bajo diversos conceptos servirse de los mismos pares de estrellas, y aun observarlas á las mismas alturas por todo el tiempo en que cómodamente sea posible hacerlo. Para esto notemos que como el tiempo sideral adelanta cosa de 2^h por mes respecto del solar, resulta que un mes antes de su "Época," cada par de estrellas llegará á su igual altura simultánea hacia las 11^h de la noche, y, por el contrario, un mes después la tendrá á eso de las 7^h. Por consiguiente, observando entre las 7^h y las 11^h, podrá emplearse durante dos meses cualquiera de las combinaciones de la Tabla.

Las ventajas de proceder así provienen en primer lugar, y según se ha dicho, de la facilidad de hacer las observaciones conociendo de antemano las indicaciones aproximativas de los instrumentos; en segundo de que si por algún accidente sólo puede observarse una de las estrellas de la combinación, se tendrá lo bastante con este único dato para determinar el estado del cronómetro; y en tercer lugar, de que toda observación completa suministra los medios de hallar el error del instrumento angular que se emplee.

En efecto, puede admitirse, sin error apreciable, que durante cuatro ó cinco días son constantes las coordenadas de una estrella, y que, por consiguiente, tendrá cada día la misma altura á la misma hora sideral. Según esto, la diferencia de las indicaciones del cronómetro, dividida por el número de días transcurridos desde la última observación completa, da á conocer con suficiente precisión su marcha diaria si el instrumento es sideral; y si es solar, llamando d la diferencia mencionada y n el número de días, se tiene:

$$v = \frac{d}{n} - 3^m\,55^s.91 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

puesto que $3^m\,55^s.91$ representa el atraso diario del tiempo medio respecto del sideral. Por ejemplo, el 30 de Abril de 1867 sólo pude hacer la observación siguiente de *α Bootis*, habiendo perdido la de γ^1 *Leonis* á causa de la interposición de las nubes:

	α Bootis al Este.	Sextante.
	$9^h\,49^m\,50^s.0$	$126^\circ\,00'$
	„ 50 53 .5	126 30
	„ 51 57 .7	127 00
	„ 53 1 .0	127 30
	„ 54 5 .5	128 00
Promedios	$t' = 9^h\,51^m\,57^s.54$	$127^\circ\,00'$

Como el día 28 se había obtenido t' $9^h\,59^m\,44^s.63$ observando la estrella á la misma altura, resulta $d = 7^m\,47^s.09$, y por consiguiente:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}d &= 3^m\,53^s.94 \\ \text{Const.} &= -3\ \ 55\ .91 \\ \hline v &= -\quad\ \ 2^s.37 \end{aligned}$$

Este procedimiento supone, á la verdad, que en las dos observaciones sean iguales la refracción y el estado del instrumento. Lo primero es sensiblemente exacto, siempre que no sea considerable la

distancia zenital de la estrella; y en cuanto á lo segundo, si se nota algún cambio en el error inicial, en las indicaciones de los niveles, etc., puede tomarse en cuenta introduciendo pequeñas correcciones en el valor de d. A este fin es fácil calcular el tiempo que invierte la estrella para ascender ó descender $1''$, por la simple comparación de las indicaciones del instrumento angular con las correspondientes del cronométrico. Así, por ejemplo, en la última observación de *α Bootis*, restando una de otra las dos indicaciones extremas, y teniendo en cuenta que el sextante da alturas dobles, se ve que la estrella empleó $4^m\,15^s.5$ en ascender 1°, y por consiguiente, $\frac{255^s.5}{3600''} = 0^s.071$ por cada segundo. Esta será, pues, la cantidad que multiplicada por el número de segundos que haya de diferencia en las alturas, suministrará la corrección de d, que se le aplicará con el signo que convenga.

195.—El error del instrumento de que se haga uso puede determinarse por medio de cualquiera observación completa, si se cuenta con barómetro y termómetro para calcular el valor de la refracción. En efecto, puesto que la observación da la corrección del cronómetro, independientemente de la lectura angular del clisímetro, se infiere que el observador puede calcular en seguida las horas exactas á las cuales tomó las alturas iguales; determinar éstas aplicando las fórmulas (3) del número 124; y finalmente, comparar el resultado con la indicación del instrumento angular atendiendo al efecto de la refracción. Sea z la distancia zenital calculada por aquellas ecuaciones y r la refracción; la distancia zenital aparente será $z - r$, que comparada con la lectura del clisímetro, previas las correcciones conocidas por el estado de los niveles, por el error inicial, etc., da por diferencia la corrección de este instrumento, ó con más propiedad, la del punto de la graduación correspondiente al promedio de las lecturas. Suponiendo que se trate de un sextante, sea G la lectura media, e_0 el error inicial y ΔG la corrección que se va á determinar. La graduación correcta, ó sea la doble altura aparente será, pues:

$$G + \Delta G - e_0$$

y en consecuencia, la distancia zenital aparente tiene por expresión $90° - \frac{1}{2}(G + \Delta G - e_0)$, que igualada á $z - r$, produce:

$$\Delta G = 2(90° + r - z) - (G - e_0) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Es claro que ΔG representa el efecto resultante de todos los errores que puede tener el instrumento, como son el de excentricidad, el que proviene de la falta de paralelismo entre el telescopio y el limbo, etc.; pero es también el que más importa conocer en la práctica, y desde este punto de vista, el método anterior para determinar las correcciones, sea acaso preferible, por más sencillo, al que se ha expuesto en el número 171 y siguientes, si bien este último es superior como tipo de investigación individual de todas las causas de error.

Determinemos el error del sextante que usaba yo en 1867 valiéndonos de los datos del número 191. Pueden calcularse desde luego los ángulos horarios, puesto que las fórmulas (6) dan la semisuma s y la semidiferencia θ.

$$\begin{aligned} s &= 0°\ 3'21''.0 \\ \theta &= 28\ \ 24\ \ 5\ .7 \end{aligned}$$

$$h = +28°27'26''.7 \qquad\qquad h' = -28°20'44''.7$$

$$\begin{array}{lr} \tan.\ \delta \ldots\ldots\ldots\ldots & 9.5729835 \\ \cos.\ h \ldots\ldots\ldots\ldots & -9.9440736 \\ \hline \tan.\ M \ldots\ldots\ldots\ldots & 9.6289099 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lr} \text{sen.}\ \delta \ldots\ldots\ldots & 9.5445409 \\ \cos.(M-\varphi) \ldots\ldots\ldots & 9.9999464 \\ \text{sen.}\ M \ldots\ldots\ldots & -9.5927743 \\ \hline \cos.\ z \ldots\ldots\ldots & 9.9517130 \end{array}$$

$$\begin{aligned} M &= 23°\ \ 3'00''.9 \\ \varphi &= 22\ \ \ \ 9\ 00\ .0 \\ \hline M - \varphi &= \ 0°54'00''.9 \end{aligned} \qquad\qquad z = 26°31'14''.5$$

$$\begin{array}{lr} \tan.\ \delta' \ldots\ldots\ldots\ldots & 9.5581095 \\ \cos.\ h' \ldots\ldots\ldots\ldots & -9.9445313 \\ \hline \tan.\ M' \ldots\ldots\ldots\ldots & 9.6135782 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lr} \text{sen.}\ \delta \ldots\ldots & 9.5314390 \\ \cos.(M'-\varphi) \ldots\ldots & 9.9999978 \\ \text{sen.}\ M' \ldots\ldots & -9.5797239 \\ \hline \cos.\ z \ldots\ldots & 9.9517129 \end{array}$$

$$\begin{aligned} M' &= 22°19'49''.6 \\ \varphi &= 22\ \ \ \ 9\ 00\ .0 \\ \hline M' - \varphi &= \ 0°10'49''.6 \end{aligned} \qquad\qquad z = 26°31'14''.6$$

Esta es la distancia zenital verdadera; atendiendo á este elemento y á las indicaciones de los instrumentos meteorológicos á la hora de la observación, hallé por valor de la refracción, $r = 22''.5$. Además, el error inicial era aquella noche $e_0 = 1'50''.0$, por lo cual se tendrá:

$$\begin{aligned} 2(90° + r - z) &= 126°58'16'' \\ G - e_0 &= 126\ \ 58\ 10 \\ \hline \Delta G &= \qquad\ \ + 6'' \end{aligned}$$

Se obtiene, pues, por este ejemplo la corrección de $+6''$ para el punto 127° 00' del sextante; porque esta fué la graduación media del instrumento al observar las dos estrellas. Es claro que deben repetirse las determinaciones ΔG con el fin de obtener un promedio independiente de los pequeños errores accidentales.

De igual manera pueden hallarse las correcciones para cada 10° ó para cada 20° de la graduación, desde el punto 30° ó 40° hasta el 120° ó 130°; y entonces por interpolación se determinan para cualquiera indicación del instrumento. También se construye, para mayor sencillez, una curva con las graduaciones por abscisas, y los valores hallados de ΔG por ordenadas, de la cual se toma gráficamente la corrección que corresponde á cualquiera abscisa. En esta clase de construcciones conviene mucho exagerar las dimensiones de las ordenadas para obtenerlas con más precisión por medio de la escala. Así, por ejemplo, si en el eje de las abscisas se representan 10° por $0^m.01$, se podrán tomar las ordenadas de manera que cada segundo de ΔG quede representado por $0^m.001$.

196.—Además de las enunciadas, hay otra ventaja en servirse de los mismos pares de estrellas, la cual consiste en que por algún tiempo puede suponerse constante la parte de las ecuaciones (6) que depende de las posiciones de las estrellas y de la latitud. Así, haciendo:

$$C = \tan.\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\tan.\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') \qquad D = \tan.\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\tan.\varphi$$

los valores de tan. ψ y sen. ω serán:

$$\tan.\psi = C\cot.\theta \qquad \text{sen.}\ \omega = D\frac{\cos.\psi}{\text{sen.}\ \theta}$$

Si, pues, se calculan las cantidades C y D con las posiciones correspondientes al día de la "Época" del par, no habrá, por lo general, inconveniente en emplear los mismos valores durante los dos meses en que aquel puede observarse entre las 7^h y las 11^h de la noche, lo que facilita considerablemente los cálculos.

197.—En muchas de las combinaciones que constan en nuestra Tabla se verifica que es pequeña la diferencia de declinaciones de las dos estrellas, la cual si no excede de un grado ó de grado y medio, permite una simplificación importante en las fórmulas (6), pues tomando los arcos pequeños por sus senos y tangentes y la unidad por sus cosenos, se reducirán á la siguiente la segunda, la tercera y la cuarta de aquellas ecuaciones:

$$\varepsilon = (8.5229)(\delta - \delta')\left[\frac{\tan.\varphi}{\tan.\theta} - \frac{\tan.\frac{1}{2}(\delta+\delta')}{\tan.\theta}\right] \ldots\ldots\ (9)$$

En ésta, $\delta - \delta'$ expresa segundos de arco, y la constante es el logaritmo de $\frac{1}{30}$, pues se ha dividido por 15 el segundo miembro con el objeto de que ε resulte desde luego en segundos de tiempo. El cálculo es extremadamente sencillo con esta simplificación aplicable á todas las combinaciones en que $\delta - \delta'$ no sea mayor que $1° 30'$, según se ha dicho.

198.—Cuando el método de alturas iguales se aplique con altazimut ú otro clisímetro provisto de niveles, importa atender á las indicaciones de éstos á fin de tomar en cuenta la pequeña diferencia que puede producirse en la posición del telescopio respecto de la vertical. A la verdad, durando la observación tan poco tiempo y procurando no tocar el telescopio, puesto que el instrumento se dirige de una á otra estrella por medio del movimiento del círculo azimutal, es en general admisible que no varíe la posición del anteojo respecto del nivel. Puede suceder, sin embargo, que no sea exactamente vertical la columna del instrumento, en cuyo caso al pasar de una situación á otra variarán las lecturas del nivel aunque no se haya alterado la posición de éste relativamente al telescopio; mas como de una ú otra manera el estado del nivel indica que la línea de colimación no forma exactamente los mismos ángulos con el

horizonte, veamos cómo se corrigen por esta causa las observaciones. Llamando o y e respectivamente las lecturas ocular y objetiva de los extremos de la burbuja al observarse la estrella occidental, o' y e' las indicaciones semejantes que se refieren á la oriental, v el valor angular de sus divisiones y z la distancia zenital que se supone tiene el telescopio; sus distancias zenitales verdaderas son:

Al observar la estrella oriental......... $z_1 = z + \frac{1}{2}(o' - e')v$
Al observar la estrella occidental...... $z_2 = z + \frac{1}{2}(o - e)v$

Si designamos por t_1 y t_2 las horas anotadas en el cronómetro, y por s', s los tiempos que invierten las estrellas en elevarse ó descender $1''$, las horas que corresponden á la igualdad real de alturas, y que, por consiguiente, son las que deben entrar en el cálculo de las fórmulas (6), son:

$$\left.\begin{array}{l} t' = t_1 + \frac{1}{2}(o' - e')vs' \\ t = t_2 - \frac{1}{2}(o - e)vs \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

Las cantidades s' y s se determinan, como se ha dicho al fin del número 194, por la comparación del arco recorrido con el tiempo empleado en recorrerlo. Se procede exactamente como se explicó allí, siempre que el telescopio, provisto de un solo hilo horizontal, se haya ido colocando sucesivamente en graduaciones equidistantes para observar los pasos de las estrellas por sus diversas posiciones. Este modo de operar no es, sin embargo, el más conveniente, tanto por ser molesto, cuanto porque pueden cometerse pequeños errores al poner las indicaciones del círculo, los cuales darían por resultado la falta de igualdad de alturas, condición esencial del método; y por eso es mucho mejor hacer uso de varios hilos horizontales en la retícula con intervalos iguales, de $4'$ á $6'$. Entonces, fijando el telescopio con su tornillo de presión, sea cual fuere la indicación del círculo, se observa el paso de la primera estrella por todos los hilos, y se procede lo mismo con la segunda después de haberle dirigido el telescopio en virtud del movimiento azimutal del instrumento. En tal caso la determinación de s' y s supone conocido el espacio angular que abrazan los hilos extremos; pero esto se consigue fácilmente ya sea midiéndolo por la diferencia de lecturas del círculo cuando aquellos se hacen coincidir con un objeto distante ó con la retícula de un colimador, ya sea observando una mira dividida puesta á una distancia dada, y calculando el ángulo visual de la parte interceptada por los hilos. (Véase el Tomo primero, números 159 y 167).

En el Capítulo siguiente presentaré algunas observaciones hechas con el altazimut de la manera que acaba de explicarse y que indudablemente es la más exacta, terminando este con otro ejemplo de alturas iguales observadas con sextante, á fin de que el lector se familiarice con la aplicación de las fórmulas (6).

El 9 de Mayo de 1867 observé las estrellas siguientes con los mismos instrumentos á que se refiere el ejemplo detallado del número 191.

α Bootis al E.	Sextante.	*α Leonis* al O.
$8^h\ 44^m\ 00^s.5$	112° 00′	$9^h\ 18^m\ 43^s.5$
" 45 5 .0	112 30	" 17 37 .0
" 46 10 .0	113 00	" 16 31 .5
" 47 15 .0	113 30	" 15 26 .0
" 48 18 .5	114 00	" 14 18 .5
" 49 23 .5	114 30	" 13 13 .5
" 50 27 .5	115 00	" 12 9 .5
" 51 33 .0	115 30	" 11 2 .0
" 52 38 .0	116 00	" 9 55 .0
$t' = 8^h\ 48^m\ 19^s.0$	114° 00′	$t = 9^h\ 14^m\ 19^s.61$

La posición del lugar era $\varphi = 22°\ 9'$, $L = 6^h\ 43^m 49^s$ próximamente, y las de las estrellas:

α Bootis	$\alpha' = 14^h\ 9^m\ 37^s.62$	$\delta' = +19°\ 52'\ 32''.1$
α Leonis	$\alpha = 10\ \ 1\ \ 18.18$	$\delta = +12\ \ 36\ \ 47.8$

Atendiendo á estos elementos, se ve que $\delta - \delta'$ es negativa. El cálculo será, por consiguiente:

$\frac{1}{2}(t-t') = 0^h\ 13^m 00^s.31$	$\tan.\frac{1}{2}(\delta-\delta')$ ...... 8.80250—	.... 8.80250—
Acel. = 2 .14	$\tan.\frac{1}{2}(\delta+\delta')$ 9.46444	$\tan.\varphi$... 9.60967
$\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha) = 2\ \ 4\ \ 9.72$	$\cot.\theta$ 0.16611	$\cos.\psi$... 9.99984
$\theta = \begin{cases} 2^h 17^m 12^s.17 \\ 34° 18'\ 2''.5 \end{cases}$	$\tan.\psi$ .... 8.43305—	$\text{sen}.\theta$....—9.75092
		$\text{sen}.\omega$... 8.66109—

$$\psi = -1°\ 33'\ 9''.5$$
$$\omega = \ \ 2\ \ 37\ \ 35.0$$
$$\varepsilon = -1°\ \ 4'\ 25''.5 \ \ldots\ldots$$

$\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha) =$	$12^h\ \ 5^m\ 27^s.90$
$=$	$-\ \ 4\ \ 17.70$
Hora sideral $=$	$12^h\ \ 1^m\ 10^s.20$
$A =$	$3\ \ 8\ \ 25.82$
	$8^h\ 52^m\ 44^s.38$
Red. $(T-A) =$	$-\ 1\ \ 27.28$
Hora media $=$	$8^h\ 51^m\ 17^s.10$
$\frac{1}{2}(t+t') =$	$9\ \ 1\ \ 19.31$
$\frac{1}{2}(\Delta t+\Delta t') =$	$-\ 10^m\ \ 2^s.21$

199.—La determinación de la hora puede hacerse también observando una sola estrella á la misma altura á uno y otro lado del meridiano. En este caso, puesto que se tiene $\alpha = \alpha'$ y $\delta = \delta'$ será nulo el valor de ε, y por tanto las fórmulas (6) se reducen á la siguiente:

$$\frac{1}{2}(\Delta t + \Delta t') = \alpha - \frac{1}{2}(t+t') \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Se ve que de esta manera toda la operación consiste en comparar el promedio de las indicaciones del cronómetro sideral con la ascensión recta de la estrella. Si es solar el guarda–tiempo, se calculará la hora media correspondiente á la sideral α, quiere decir, se hallará la hora media del tránsito de la estrella por el meridiano (número 133), y con esta se comparará la indicación del cronómetro.

En lo relativo al cálculo, este método no puede ser más sencillo; pero tiene el inconveniente de que demanda tres ó cuatro horas, por lo menos, para terminar la observación. En una duración tan considerable, es fácil que sufra alguna variación el instrumento, ó bien que se produzcan cambios en el estado de la atmósfera, los cuales podrían originar la pérdida de la observación occidental, correspondiente á la oriental, ó que al menos alterarían el poder refringente del aire, y en tal caso, las alturas aparentemente iguales, no lo serían en realidad. Por todas estas razones, me parece preferible la aplicación de mi método general de dos estrellas, cuya principal ventaja consiste en la brevedad con que se termina la operación.

CAPITULO IX.

DETERMINACIÓN DE LA HORA.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DEL SOL.

200.—Anotando las indicaciones de un cronómetro solar en los instantes en que el centro del sol adquiere la misma altura al Este y al Oeste del meridiano, es fácil deducir la hora que señalaría en un momento intermedio; y como por otra parte, puede calcularse la hora media correspondiente al mismo instante, resulta que la comparación de ésta con la hora cronométrica dará á conocer el error del guarda-tiempo.

Tal es el fundamento de este método para determinar la hora. Antes de desarrollar el sencillo cálculo que demanda, notemos que la declinación del sol varía con mucha lentitud y de una manera sensiblemente uniforme, por lo menos cuando se adopta por movimiento horario el que corresponde á un instante intermedio del espacio de tiempo á que se refiere el cambio de declinación (número 154). De esta consideración se deduce que el momento de la culminación del sol debe diferir muy poco del correspondiente á la mitad del intervalo transcurrido entre las dos observaciones, al que sería exactamente igual sin la variación de la declinación, según se ha visto al fin del Capítulo precedente refiriéndonos á la doble observación de una sola estrella. Se infiere también que el cambio que sufre la declinación desde la hora de la primera observación hasta la del tránsito meridiano del astro, es sensiblemente igual al que tiene lugar entre esta última hora y la de la segunda observación; de suerte que si designamos por n la variación total entre la primera observación y la segunda, y por δ la declinación del sol en el instante de su tránsito, tendremos que será $\delta - \frac{1}{2}n$ á la hora de la primera observación y $\delta + \frac{1}{2}n$ á la hora de la segunda. Según esto, llamando θ el ángulo horario del sol al Oriente y $\theta + 2\varepsilon$ al Occidente del meridiano, se tendrán las relaciones siguientes en los instantes de las observaciones:

$$\cos. z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,(\delta - \tfrac{1}{2}n) + \cos.\varphi \cos.(\delta - \tfrac{1}{2}n) \cos.\theta$$
$$\cos. z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,(\delta + \tfrac{1}{2}n) + \cos.\varphi \cos.(\delta + \tfrac{1}{2}n) \cos.(\theta + 2\varepsilon)$$

las que desarrolladas y atendiendo á que por ser muy pequeños n y 2ε pueden omitirse sus productos y sus segundas potencias, se convierten en las siguientes:

$$\cos. z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta - \tfrac{1}{2}n\,\text{sen.}\,\varphi \cos.\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos.\theta + \tfrac{1}{2}n \cos.\varphi \cos.\delta \cos.\theta$$
$$\cos. z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \tfrac{1}{2}n\,\text{sen.}\,\varphi \cos.\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos.\theta - \tfrac{1}{2}n \cos.\varphi\,\text{sen.}\,\delta \cos.\theta$$
$$- 2\varepsilon \cos.\varphi \cos.\delta \cos.\theta$$

Restando una de otra y despejando, se halla:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} n \left(\frac{\tan.\varphi}{\text{sen.}\,\theta} - \frac{\tan.\delta}{\tan.\theta} \right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Siendo ahora T' y T las lecturas del cronómetro en las observaciones oriental ó *antemeridiana* y occidental ó *postmeridiana*; $\Delta T'$ y ΔT sus correcciones, y M la hora media á medio día verdadero, se tiene en tiempo medio:

$$\theta = M - (T' + \Delta T')$$
$$2\varepsilon + \theta = T + \Delta T - M$$

de donde resulta:

$$\theta = \tfrac{1}{2}(T - T') + \tfrac{1}{2}(\Delta T - \Delta T') - \varepsilon \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$
$$\tfrac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') = M + \varepsilon - \tfrac{1}{2}(T + T') \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Se ve por esta última ecuación que la cantidad ε es la corrección que debe sufrir M para obtener la hora media exacta correspondiente á la cronométrica $\frac{1}{2}(T + T')$, y, por consiguiente, su corrección $\frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T')$ en ese instante.

Si llamamos v la variación horaria de la declinación del sol, calculada para la hora de su culminación, y recordamos que n representa el cambio en el intervalo $T - T'$, se halla: $n = (T - T')v$. Sustituyendo este valor y dividiendo por 15 el de ε para que resulte en segundos de tiempo, tendremos:

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2}(T - T')v}{15} \left(\frac{\tan.\varphi}{\text{sen.}\,\theta} - \frac{\tan.\delta}{\tan.\theta} \right)$$

Esta cantidad es siempre tan pequeña, que no hay inconveniente en suprimirla en el valor de θ, lo mismo que la marcha del cronómetro en el intervalo $\frac{1}{2}(T - T')$, á no ser ésta excepcionalmente grande. Omitiéndolas, en consecuencia, se tendrán las siguientes fórmulas para determinar la corrección del cronómetro:

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \tfrac{1}{2}(T - T') \\ \varepsilon &= \frac{\theta v}{15} \left(\frac{\tan.\varphi}{\tan.\theta} - \frac{\tan.\delta}{\tan.\theta} \right) \\ \tfrac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') &= M + \varepsilon - \tfrac{1}{2}(T + T') \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (4)$$

201.—El método de alturas iguales del sol se emplea desde hace mucho tiempo, y por eso he desarrollado directamente las fórmulas que se aplican; pero también puede considerarse como un caso particular de mi método general de alturas iguales, y por consiguiente, deducirlas de las ecuaciones (6) del Capítulo precedente. Desde luego reflexionemos que siendo de 1′ próximamente el mayor movimiento horario del sol en declinación, se podrá aplicar la fórmula más sencilla del número 197, que es:

$$\varepsilon = \frac{1}{30} (\delta - \delta') \left(\frac{\tan.\varphi}{\text{sen.}\,\theta} - \frac{\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')}{\tan.\theta} \right)$$

y en la cual δ y δ' representan las declinaciones de las dos estrellas. En el caso del sol he representado por $\delta - \frac{1}{2}n$ y $\delta + \frac{1}{2}n$ sus declinaciones al Este y al Oeste respectivamente, por lo que la diferencia y la semisuma que figuran en la última ecuación se convertirán en n y δ. De esta manera se obtiene desde luego la fórmula (1), aunque ya resulta ε en segundos de tiempo.

Respecto del ángulo θ en las ecuaciones antes citadas, si se omite la pequeña corrección originada por la marcha del cronómetro, podrá escribirse así:

$$\theta = \tfrac{1}{2}(t - \alpha) - \tfrac{1}{2}(t' - \alpha')$$

y si llamamos T y T' las horas de un cronómetro solar correspondientes á las siderales t y t' se tiene: $T = t - \alpha$ y $T' = t' - \alpha'$, de donde resulta para el caso del sol:

$$\theta = \tfrac{1}{2}(T - T')$$

que es el mismo valor obtenido directamente. Por último, la cantidad $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ de las ecuaciones (6) del Capítulo precedente representa, en el caso de observaciones del sol, la ascensión recta de este astro á la hora de su culminación; mas como se ha supuesto el uso de un cronómetro solar, será preciso introducir la hora media M correspondiente á la sideral $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ en vez de esta última, con todo lo cual resulta como antes:

$$\tfrac{1}{2}(\varDelta T + \varDelta T') = M + \varepsilon - \tfrac{1}{2}(T + T')$$

202.—No obstante, la sencillez de las ecuaciones (4), se han simplificado todavía más, formando Tablas de los valores:

$$A = \frac{(T - T')}{30\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(T - T')} = \frac{\theta}{15\,\text{sen.}\,\theta}$$
$$B = \frac{(T - T')}{30\,\text{tan.}\,\frac{1}{2}(T - T')} = \frac{\theta}{15\,\text{tan.}\,\theta}$$

con lo cual aquellas ecuaciones se convierten en las siguientes:

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon = A v\,\text{tan.}\,\varphi - B v\,\text{tan.}\,\delta \\ \tfrac{1}{2}(\varDelta T + \varDelta T') = M + \varepsilon - \tfrac{1}{2}(T + T') \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

La Tabla IV que va al fin de este libro, contiene los logaritmos de A y B, de la cual se toman con el intervalo de tiempo $T - T$ transcurrido de una observación á la otra por argumento. Con esta modificación, el cálculo es extremadamente sencillo.

203.—Antes de presentar algunas aplicaciones, recordemos que

como M representa la hora media á medio día verdadero, se tiene (número 128): $M = E$, siendo E la ecuación del tiempo, positiva desde el 25 de Diciembre hasta el 15 del mes de Abril siguiente, y desde el 15 de Junio hasta el 31 de Agosto. Por lo regular se expresa la hora M en tiempo medio civil, en cuyo caso se tendrá en general:

$$M = 12^h \pm E$$

tomando el signo positivo durante los períodos que se han expresado y el negativo en todo el resto del año.

El valor de v es positivo cuando la declinación del sol va creciendo, entendiéndose el incremento en el sentido algebraico y no en el numérico, lo que tiene lugar desde el solsticio de invierno (hacia el 21 de Diciembre) hasta el de estío siguiente (hacia el 21 de Junio). Desde el 21 de Junio hasta el 21 de Diciembre es negativa la variación horaria v.

La declinación δ del sol es positiva cuando se halla este astro en el hemisferio boreal, quiere decir, desde el equinoccio de primavera (hacia el 21 de Marzo) hasta el de otoño (hacia el 21 de Septiembre). En todo el resto del año es negativa.

Atendiendo á la pequeñez del valor ε, se comprende que basta hacer uso de valores puramente aproximativos de φ y de δ; y así es que al interpolar esta última cantidad por medio de las Efemérides para la hora del medio día local, ó sea para la hora L del primer meridiano, siendo L la longitud de la estación, no es preciso proceder como se ha explicado en el número 154, sino simplemente emplear un valor de L aproximado hasta la primera decimal de una hora. Así, por ejemplo, si se desea la declinación del sol para el medio día verdadero de México, que se verifica $6^h\ 36^m\ 28.6$ después del de Greenwich, tomaremos $L = 6^h.6$; y siendo $\varDelta$ la declinación que dan las Efemérides para el medio día verdadero de Greenwich y v su movimiento horario, se tendrá, $\delta = \varDelta + 6^h.6\ v$.

Si se procediera con toda exactitud, debería calcularse v para la hora $\frac{1}{2}L$; mas no siendo necesario hacerlo así, se adoptará el valor de v interpolado para la hora L del primer meridiano, consiguiéndose así la ventaja de que se tiene desde luego la misma cantidad que debe entrar después en los dos términos del valor (5) de ε.

En cuanto á la ecuación del tiempo E, sí conviene interpolarla adoptando su variación horaria para el instante $\frac{1}{2}L$, aunque son tan pequeños los cambios diarios de esta variación, que por lo general no se cometería error de importancia si se interpolara haciendo uso de la variación que suministran directamente las Efemérides. Lo que no se debe olvidar es que, tanto la ecuación como la declinación tienen que interpolarse con los elementos que da el Almanaque para el medio día verdadero, y no con los correspondientes al medio día medio.

204.—Presentemos ahora algunas aplicaciones, comenzando por una serie de observaciones hechas con sextante. En la ciudad de Río Verde el 8 de Julio de 1863 tomé las siguientes alturas de los dos limbos del sol con las mismas indicaciones del instrumento:

	Observ. antemeridiana.	Sextante.	Observ. postmeridiana.
Limbo superior	$8^h\ 53^m\ 55^s.0$	96° 00′	$15^h\ 00^m\ 53^s.0$
	„ 54 16 .5	„ 10	„ 00 31 .0
	„ 54 38 .5	„ 20	„ 00 9 .0
	„ 55 0 .0	„ 30	14 59 47 .5
	„ 55 22 .0	„ 40	„ 26 26 .5
Limbo inferior	8 56 13 .0	96° 00′	14 58 35 .0
	„ 56 34 .5	„ 10	„ 58 13 .0
	„ 56 55 .5	„ 20	„ 57 52 .0
	„ 57 17 .0	„ 30	„ 57 29 .5
	„ 57 40 .0	„ 40	„ 57 7 .8
Promedios	$T' = 8^h\ 55^m\ 47^s.20$		$T = 14^h\ 59^m\ 00^s.43$

En la observación postmeridiana ú occidental se cuentan 13^h, 14^h, 15^h, etc., en lugar de 1^h, 2^h, 3^h, etc., que indica el cronómetro, con el fin de que el promedio $\frac{1}{2}(T+T')$ indique desde luego la hora aproximativa del tránsito del sol, y la semidiferencia $\frac{1}{2}(T-T')$ el tiempo transcurrido.

Aunque el cálculo puede hacerse con los promedios T y T', es conveniente examinar la concordancia de los valores individuales de $\frac{1}{2}(T+T')$ para formarse idea de su grado de precisión. En la serie anterior resulta:

	$\frac{1}{2}(T+T')$
Limbo superior	$11^h\ 57^m\ 24^s.00$
	„ „ 23 .75
	„ „ 23 .75
	„ „ 23 .75
	„ „ 24 .25
Limbo inferior	„ „ 24 .00
	„ „ 23 .75
	„ „ 23 .75
	„ „ 23 .25
	„ „ 23 .90
Promedio general	$\frac{1}{2}(T+T') = 11^h\ 57^s\ 23^s.81$

La misma semisuma se habría obtenido con T y T'; pero tomando la de cada par de observaciones correspondientes, se descubre con facilidad alguna equivocación que pueda haber en las horas, y se conoce también si debe desecharse alguno de los resultados individuales, por muy discorde respecto de los demás.

Para aplicar las ecuaciones (5) tenemos que la posición aproximativa de Río Verde es: $\varphi = 21°\ 56'$ y $L = 6^h\ 40^m.2 = 6^h\ 67$. Con este último dato se obtienen para el medio día de aquella ciudad los elementos siguientes:

Declinación del sol	$\delta =$	$+\ 22°\ 29'\ 35''$
Variación horaria	$v =$	$-\ 16''.7$
Ecuación del tiempo	$E =$	$+\ 4^m\ 42^s.10$

y como las observaciones dan $T - T' = 6^h\ 3^m$ próximamente, tomemos con este argumento los logaritmos de A y de B de la Tabla IV. El cálculo será:

A	9.4523	B	9.2989	$M = 12^h + E =$	$12^h\ 4^m\ 42^s.10$
v	1.2227−		1.2227−	$\varepsilon =$	$-\ 0.53$
tan. φ	9.6049	tan. δ	9.6171		
				$M + \varepsilon =$	$12^h\ 4^m\ 41^s.57$
	0.2799−		0.1387−	$\frac{1}{2}(T+T') =$	11 57 23 .81
	$-\ 1^s.905$		$-\ 1^s.376$	$\frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') =$	$+\ 7^m.17^s.76$

205.—Pongamos otro ejemplo de observaciones practicadas con un altazimut pequeño. Con el fin de arreglar un péndulo, tomé el 13 de Marzo de 1870 las alturas de los dos limbos del sol, anotando las horas de sus tránsitos por los cinco hilos horizontales de la retícula. El telescopio permaneció fijo al círculo vertical después de ejecutada la observación antemeridiana hasta la hora de la postmeridiana, (1) y en ambas se tuvo cuidado de apuntar las indicaciones del nivel. En cuanto á las observaciones, están hechas por el método explicado en el número 188.

	AM.	PM.	Semisumas.
Limbo superior...........	$10^h\ 15^m\ 59^s.5$	$13^h\ 45^m\ 42^s.0$	$12^h\ 00^m\ 50^s.75$
	„ 16 31 .5	„ 45 9 .7	„ „ 50 .60
	„ 17 3 .5	„ 44 35 .5	„ „ 50 .50
	„ 17 37 .2	„ 44 3 .2	„ „ 50 .20
	„ 18 7 .5	„ 43 33 .5	„ „ 50 .50
Limbo inferior............	10 18 12 .7	13 42 49 .0	„ „ 50 .85
	„ 19 25 .5	„ 42 15 .2	„ „ 50 .35
	„ 19 59 .7	„ 41 41 .5	„ „ 50 .60
	„ 20 32 .5	„ 41 9 .5	„ „ 51 .00
	„ 21 3 .0	„ 40 39 .0	„ „ 51 .00
		Promedio general...............	$12^h\ 00^m\ 50^s\ 63$

Las lecturas del nivel fueron:

A. M.		*P. M.*	
O e.	*O b.*	*O e.*	*O b.*
25	31	22	33

y valiendo $8''$ cada división, se tiene $n' = \frac{1}{2}(o' - e')\,v = -24''$ en la observación AM., y $n\,\frac{1}{2}(o - e)\,v = -44''$ en la PM. Con el fin de tomar en cuenta estas inclinaciones, corregiremos el promedio

(1) Las voces *antemeridiana* y *postmeridiana* se designan generalmente haciendo uso de la abreviatura *A M* para la primera, y *P M* para la segunda.

de las horas por las fórmulas del número 198. Las series de observaciones indican que el limbo superior empleó $2^m\ 8^s.0$ en la A M., y $2^m\ 8^s.5$ en la P M., para recorrer el espacio total de los hilos; y el inferior $2^m\ 10^s.3$ y $2^m\ 10^s.0$ respectivamente (1). Tomando el término medio y atendiendo á que el espacio era de $23'\ 42''$, se halla que el sol invertía $s = \frac{129^s.2}{1422''} = 0^s.091$ en recorrer $1''$, y que, por consiguiente, la corrección del promedio general de las semisumas deberá ser $c = \frac{1}{2}(44 - 24)\,s = +\,0^s\,91$. Se tendrá, pues:..................... $\frac{1}{2}(T + T') = 12^h\ 00^m\ 51^s\ 54$.

Los demás elementos para el medio día verdadero de México, son:

$$M = 12^h\ 9^m\ 33^s.74 \qquad \delta = -2^\circ\ 46'.5 \qquad v = +\,59''.1$$

y tomando los log. de A y B con el argumento $T - T' = 3^h\ 25^m$, resulta:

A.........	9.4205	B.........	9.3756	$M =$	$12^h\ 9^m\ 33^s.74$
v.........	1.7716	....	1.7716	$\epsilon =$	$+\,6.17$
tan. φ....	9.5475	tan. δ.....	8.6855—	$M + \epsilon =$	$12^h\ 9^m\ 39^s.91$
	0.7396		9.8327—	$\frac{1}{2}(T + T') =$	12 00 51 .54
	$+\,5^s.49$		$-\,0^s.68$	$\frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') =$	$+\,8^m.48^s.37$

206.—Estas aplicaciones son suficientes para dar á conocer la exactitud y sencillez de este procedimiento, cuya única desventaja consiste en el mucho tiempo que es preciso que transcurra de la primera observación á su correspondiente, lo cual origina á veces la pérdida de esta última á consecuencia de la interposición de nubes, ó de otro accidente cualquiera. Debe cuidarse de preservar el instrumento de los rayos directos del sol durante todo ese tiempo, pues de lo contrario sería fácil que lo desarreglase la elevada temperatura á que quedaría expuesto, siendo el resultado que sus indicaciones iguales no corresponderían acaso á alturas exactamente iguales.

(1) Esta pequeña diferencia en la velocidad ascensional de los dos bordes, proviene de que las observaciones se ejecutaron bastante cerca del meridiano; y en tales casos las variaciones de altura comienzan á no ser exactamente proporcionales al tiempo. (Véase el número 178.)

No es indispensable observar los dos limbos, porque pudiéndose suponer constante por muchas horas el semidiámetro del sol, es claro que á las alturas iguales de cualquiera de los bordes, corresponden también alturas iguales del centro. A pesar de esto, me parece útil observar los dos siempre que se pueda, con el fin de eliminar el error que pudiera existir en el modo especial de anotar los instantes en que cada uno de ellos es tangente á los hilos, si se usa un telescopio común, ó en el de apreciar los contactos de las imágenes al acercarse ó separarse, si se emplea el sextante.

207.—Después de practicadas las observaciones AM., es de la mayor importancia conocer con cierta aproximación la hora cronométrica de las PM., con el objeto de prepararse á ejecutarlas y no exponerse á perderlas por falta de oportunidad. A este fin notemos que como la última de aquéllas debe corresponder á la primera de éstas, si llamamos T' la última indicación del cronómetro en la serie AM., y ΔT su corrección aproximativa, tendremos que $T'+\Delta T-E$ será la hora verdadera, y $12^h-(T'+\Delta T-E)$ el ángulo horario del sol; ó su distancia al meridiano expresada en tiempo. Esta misma será la hora verdadera de la primera observación PM.; la hora media $12^h-(T'+\Delta T-E)+E$; y por consiguiente, la cronométrica:

$$T=12^h-T'+2(E-\Delta T)$$

En la última aplicación suponiendo de $+9^m$ la corrección del cronómetro, y teniéndose $E=+9^m 34^s$, resulta:

$$\begin{array}{lll} T'=10^h 21^m & E=9^m 34^s & 12-T'=1^h 59^m \\ 12^h-T'=1\ 39 & \Delta T=\underline{9\ 00} & 2(E-\Delta T)=\underline{+\ 1} \\ & E-\Delta T=+0^m 34^s & T=1^h 40^m \end{array}$$

ó sea $13^h 40^m$, que fué, en efecto, con muy corta diferencia, la primera hora cronométrica de la serie PM.

208.—Sucede á veces que por un accidente cualquiera no puede practicarse la observación PM. correspondiente á la AM.; mas si se logra ejecutar otra poco tiempo después, se puede hallar por interpolación la hora cronométrica que correspondería á aquélla. Con este

objeto se calcula la velocidad ascensional del sol, tanto en la observación oriental como en la occidental, comparando las indicaciones extremas del cronómetro con los arcos recorridos, según se ha explicado antes. Si los dos resultados difieren algo entre sí, como sucede generalmente, se adopta el término medio por velocidad del astro en el instante intermedio entre la hora de la observación practicada y la que debió practicarse. Con este elemento, y con la diferencia que exista entre la graduación AM. del instrumento, y aquella en que se haya ejecutado la observación occidental, se determina por una simple proporción la corrección que debe sufrir la hora cronométrica obtenida, á fin de reducirla á la que se hubiera obtenido con la graduación correspondiente á la observación oriental. Sea $L'-l'$ la diferencia de lecturas cronométricas extremas de la observación AM., y que expresa en término medio el tiempo invertido por los dos limbos del sol en ascender g' grados; $L-l$ la misma diferencia relativa á la observación ejecutada al Occidente, y que expresa el tiempo debido á un descenso de g grados. Entonces

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{L-l}{g}+\frac{L'-l'}{g'}\right)$$

representa el tiempo que emplea el sol en recorrer la unidad angular cuando la indicación del clisímetro es el término medio $\frac{1}{2}(G+G')$ de las G' y G en que se ha observado al Este y al Oeste respectivamente. En consecuencia, la corrección de la hora será: $C=(G-G')s$, la cual restada de la indicación cronométrica que se haya obtenido por término medio de la serie, da por resultado la correspondiente al promedio de las observaciones del Este.

Supongamos, por ejemplo, que en la mañana se hubiera obtenido $T'=8^h 46^m 33^s.33$ cuando la graduación media del sextante era de $68^\circ 40'$; que habiéndose perdido la serie correspondiente de la tarde, se hubiera hallado poco después $T+C=14^h 40^m 28^s.91$ con la indicación media $67^\circ 00'$; y que al Este se hubiera obtenido $1^m 44^s.75$ y al Oeste $1^m 43^s.75$ por el tiempo invertido en ascender y descender $40'$ del sextante ó sea $20'$ de altura real. Se tomará $1^m 44^s.25$ por duración de un movimiento de 20′, y como la diferencia de las alturas que señalaba el instrumento es realmente de 50′, se tendrá:

$$C = \frac{50 \times 104.25}{20} = 4^m\,20^s 62$$

Por consiguiente, la hora PM. corregida es $T = 14^h\,36^m\,8^s.29$.

209.—El mismo procedimiento se aplica para corregir las horas en caso de que no se observe el astro exactamente en las mismas condiciones á un lado y otro del meridiano. Se ha expuesto ya un ejemplo de esta clase de correcciones por el estado del nivel, y se procedería de una manera análoga para tomar en cuenta la diferencia de refracciones, si se desease no omitir circunstancia alguna que contribuyese á la mayor precisión del resultado. De los elementos que sirven para asignar el valor de la refracción, el más variable, á la vez que el más influente, es el factor que depende de la temperatura del aire, de manera que aun siendo iguales las indicaciones del clisímetro al Este y al Oeste del meridiano y haciendo uso de un valor medio de la presión barométrica, se hallará que puede ser de algunos segundos la diferencia de refracciones si difieren bastante las temperaturas. Es, sin embargo, muy fácil introducir en el cálculo la pequeña corrección necesaria para eliminar esta causa de error, pues siendo ρ la refracción media que dan las Tablas con la distancia zenital aparente por argumento, y que es la misma para las mismas indicaciones del instrumento angular; b y f los factores que provienen del barómetro adoptando sus indicaciones medias en la localidad de que se trate; y llamando l' y l los factores originados por la temperatura del aire en los momentos de las observaciones AM. y PM. respectivamente, se tiene:

$$r = \rho b f l \qquad r' = \rho b f l'$$

y aunque estos valores sean sólo aproximativos, por ser calculados con las indicaciones medias, ó por hipótesis constantes, del barómetro, su diferencia es sensiblemente exacta. Según esto, siendo s el tiempo que emplea el sol en ascender ó descender 1″, hallaremos que $T' + sr'$ debió ser la hora cronométrica AM. en el instante en

que la altura real del sol era igual á la aparente, y $T - sr$ la correspondiente á la observación PM. Por consiguiente, ...
$\frac{1}{2}(T + T') - \frac{1}{2}s(r - r')$ es la indicación del cronómetro á la hora media $M + \varepsilon$, ó lo que es lo mismo, la verdadera corrección de este instrumento será: $\frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') + \frac{1}{2}s(r - r')$.

210.—El método que se ha indicado en el número 208 para hacer correspondientes dos series observadas á diversas alturas, da resultados suficientemente exactos si no excede de 15^m ó 20^m el valor de la corrección C; pero si por cualquiera causa no se puede practicar la observación occidental dentro de este período, contado desde la hora de la serie correspondiente, habría algún error en corregir de esa manera la hora, porque no debe admitirse la proporcionalidad entre el tiempo y el movimiento ascensional más que en duraciones cortas. En tales casos, lo mejor es tomar cuando se pueda la serie occidental, y hasta el siguiente día la oriental, representando entonces M la hora media de la media noche. La modificación que en este caso necesitan las fórmulas (5) consiste en que verificándose la media noche verdadera en el mismo instante físico en que tiene lugar el medio día verdadero de nuestros antípodas, debe usarse $-\varphi$ por latitud, de manera que se tendrá para un paso inferior del sol:

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon = -A\,v\tan.\varphi - B\,v\tan.\delta \\ \frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') = M + \varepsilon - \frac{1}{2}(T + T') \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (6)$$

En este caso el tiempo transcurrido entre las dos observaciones es mayor que 12^h, y en consecuencia, será negativo el valor de B. También debe tenerse presente que δ representa la declinación del sol en el momento de la media noche, de modo que siendo L la longitud, v la variación horaria de aquella coordenada á la hora $12^h + L$ (número 154) y Δ su valor á medio día de Greenwich, se tendrá: $\delta = \Delta + (12^h + L)v$. Lo mismo se calcula la ecuación del tiempo E para determinar $M = 12^h + E$, con la única diferencia de que se interpolará su variación horaria para el instante $6^h + \frac{1}{2}L$.

Ejemplo.—El 27 de Junio de 1867 hice las siguientes observaciones del limbo superior del sol en un lugar cuya posición es $\varphi = 22°9'$ y $L = 6^h.73$.

PM.	Sextante.	AM.	Semisumas.
$2^h 00^m 49^s.7$	$126°40'$	$22^h 6^m 43^s.5$	$12^h 3^m 46^s.60$
„ 1 11.5	„ 30	„ 6 21.7	„ „ 46.60
„ 1 32.7	„ 20	„ 6 0.7	„ „ 46.70
„ 1 54.2	„ 10	„ 5 38.7	„ „ 46.45
„ 2 16.5	„ 00	„ 5 17.5	„ „ 47.00
$T = 2^h\ 1^m 32^s.92$	$126°20'$	$T' = 22^h 6^m 00^s.42$	$12^h 3^m 46^s.67$

Los demás datos son:

$$T' - T = 20^h 4^m.5 \qquad \delta = +23°\,18'\,10'' \qquad v = -6''.77 \qquad E = +2^m 49^s.39$$

y por consigniente se tendrá:

A........	0.1340	B.........	0.0740−	$M = 12^h 2^m 49^s.39$
v.........	0.8306−	....	0.8306−	$\varepsilon = \quad +0.29$
tan. φ....	9.6097	tan. δ.....	9.6342	$M + \varepsilon = 12^h 2^m 49^s.68$
	0.5743−		0.5388	$\frac{1}{2}(T + T') = 12\ 3\ 46.67$
	$-3^s.75$		$+3^s.46$	$\frac{1}{2}(\Delta T + \Delta T') = -0^m 56^s.99$

Digamos para terminar, que cuando se toman alturas iguales del sol sirviéndose de un cronómetro sideral, debe convertirse en tiempo medio la duración $t - t'$ transcurrida entre las observaciones, para tomar con ese argumento los logaritmos de A y B. También en ese caso se hará uso de la ascensión recta α del sol verdadero calculada para el medio día local, en vez de la hora media M correspondiente al mismo instante. En todo lo demás se procede absolutamente lo mismo que se ha explicado, pues el valor de ε es siempre bastante pequeño para que no ofrezca diferencia apreciable, ya sea que esté expresado en tiempo solar ó en tiempo sideral.

El lector que desee ejercitarse en la resolución de mayor número de ejemplos, é imponerse de varios detalles relativos al método de alturas iguales del sol, puede consultar la Sección III, Capítulo I de mis *Nuevos Métodos Astronómicos*.

CAPITULO X.

DETERMINACIÓN DE LA HORA.—MÉTODO DE PASOS MERIDIANOS.

211.—Según la definición que se ha dado (número 120) de la ascensión recta de un astro, inferimos que si se anota la hora de un cronómetro sideral en el instante del tránsito del astro por el meridiano de un lugar, se obtendrá la corrección de aquel instrumento por la simple comparación de la hora que señale con la ascensión recta del astro tomada de las Efemérides. Si el cronómetro es solar, se comparará su indicación con la hora media de la culminación del astro, que se halla fácilmente (número 133) por medio de su ascensión recta.

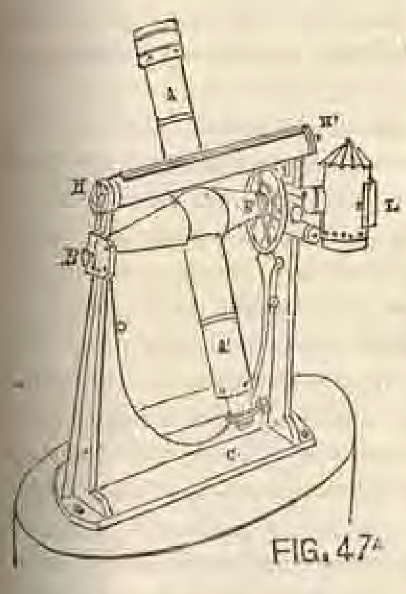


FIG. 47ª

En esta sencilla consideración se funda el método de pasos meridianos, considerado como uno de los mejores para determinar la hora. En cuanto á la observación, se practica con el instrumento llamado *telescopio meridiano ó de tránsitos*, cuyas dimensiones varían desde cosa de $0^m.5$ hasta más de $1^m.0$ en los portátiles; y desde $1^m.0$ hasta más de $2^m.5$ en los fijos ó de Observatorio permanente. La fig. 47ª representa la forma ordinaria de los instrumentos portátiles: el telescopio $A\,A'$ está unido á un eje $B\,B'$, perpendicular á su eje óptico, y cuyos extremos descansan en un apoyo de hierro C, que por medio de fuertes tornillos, se fija á un poste de piedra destinado al efecto, de tal manera que el eje $B\,B'$ quede sensiblemente horizontal y dirigido de Este á Oeste, á fin de que la línea de colimación describa el plano del meridiano al mover el telescopio.

Como sería difícil establecer de una sola vez el instrumento en su situación exacta, sus diversas piezas están dotadas de los pequeños movimientos necesarios para rectificar su posición, corrigiendo la aproximativa que se le haya dado al fijar el pie C. Así, el apoyo B de uno de los extremos del eje es susceptible de un pequeño movimiento vertical, que lo hace subir ó bajar por medio de un tornillo, con el fin de que $B\,B'$ quede exactamente horizontal; y en la otra extremidad B' el apoyo correspondiente tiene algún movimiento azimutal que permite establecer el eje óptico con toda precisión en el plano del meridiano.

En B' hay un círculo pequeño cuyo objeto es el de señalar la altura ó distancia zenital que es preciso que tenga el telescopio para que se presente en su campo el astro que se desee observar. El círculo está fijo al eje $B\,B'$ y gira con él; pero sus vernieres, que están unidos á la pieza que se fija al apoyo de hierro, permanecen inmóviles durante la revolución del telescopio; y así es que haciéndolos señalar la indicación que se necesite con la aproximación de $1'$ ó $2'$, y apretando el tornillo de presión, quedará el eje óptico con la inclinación conveniente, cuidando, sin embargo, de que siempre indique la horizontalidad el pequeño nivel que va unido á la alidada y que es, por consiguiente, paralelo al plano del círculo. La graduación de éste, por lo general, está numerada por cuadrantes, de modo que da distancias zenitales en una posición y alturas en la otra, cuando el observador invierte los extremos del eje; verificándose lo mismo en una sola posición, según que el telescopio esté dirigido al Norte ó al Sur. El examen y la nulificación del error de colimación en el

sentido vertical se practican como se ha explicado en el Tomo I, número 243, pues no necesitándose gran precisión en las lecturas, atendido el uso de este círculo, es conveniente destruir aquel error para no tener que llevarlo en cuenta cada vez que sea preciso variar la inclinación del telescopio.

La retícula consta de tres, cinco, siete y, en general, de un número impar de hilos verticales equidistantes; porque si bien uno sólo podría servir para observar los tránsitos, se considera con razón que un promedio de varias observaciones es digno de más confianza que una sola, por ser más independiente de los pequeños errores accidentales al anotar las horas correspondientes. Hay, además, dos hilos horizontales bastante próximos entre sí, colocados hacia el centro del campo, y cuyo objeto es el de hacer que los astros pasen siempre entre ellos; pues procediendo así se logra practicar las observaciones en los mismos puntos del campo, á fin de eliminar el efecto de alguna ligera inclinación que pudieran tener los hilos verticales. Por otra parte, la exacta verticalidad de éstos ó la horizontalidad de aquéllos se comprueba fácilmente, como se explicó en el número 47. p. 105
La retícula se hace visible de noche por medio de la lámpara L, la que inclinada más ó menos respecto del eje $B\,B'$, suministra la luz necesaria para ver bien los hilos sin que se ofusquen las imágenes de las estrellas, aun cuando sean pequeñas.

Por la breve descripción que precede se habrá notado la semejanza que tiene el telescopio de tránsitos con el de un altazimut, del que no difiere en realidad más que en la menor aproximación del círculo vertical; y se comprenderá también que el altazimut sirve perfectamente como instrumento meridiano, con la ventaja sobre éste de prestarse á la medida exacta de las distancias zenitales de los astros en su culminación. Tanto uno como otro están provistos de oculares acodados para practicar con comodidad las observaciones cerca del zenit.

212.—Un telescopio de pasos cuando está perfectamente arreglado reúne las condiciones siguientes: 1ª Su eje de rotación debe ser exactamente horizontal. 2ª Su plano de colimación, determinado por el centro óptico del objetivo y el hilo central de la retícula, ha de ser perpendicular al eje de rotación. 3º El mismo plano de colimación debe coincidir con el del meridiano.

La primera condición se comprueba con el nivel montante HH', procediendo enteramente como se explicó en el número 74, refiriéndonos al eje horizontal del altazimut. Conviene, con este motivo, hacer una indicación de importancia, que consiste en que cuando se usan niveles muy sensibles, es preciso comprobar el exacto paralelismo del tubo y de la línea que sirve de apoyo á los pies del nivel sobre el eje de rotación. Puede suceder, en efecto, que se haya conseguido establecer el tubo en un plano horizontal, sin que por esto sea paralelo al eje; y para investigar si tal cosa se verifica, debe el observador inclinar ligeramente el nivel hacia adelante y hacia atrás, después de haber situado la burbuja en el centro. Si durante este pequeño movimiento permanecen sus extremidades en las mismas divisiones de la escala, existe el paralelismo; mas si la burbuja varía de indicaciones, es porque un extremo sube un poco y el otro baja. Supongamos para mayor claridad que la extremidad del nivel que queda á la derecha del observador se desvíe del paralelismo hacia adelante respecto del eje; en tal caso, al llevarlo un poco hacia atrás, subirá la extremidad de la derecha y bajará la de la izquierda, puesto que este pequeño movimiento se ha verificado sin que los pies del nivel dejen de apoyarse en el eje del telescopio. Será, pues, necesario para corregir el error, mover algo el tubo del nivel dentro de su armadura, de manera que la extremidad de la derecha se acerque un poco al observador, ó por el contrario, se aleje de él la de la izquierda. Este movimiento se comunica por medio de un tornillo lateral colocado en la armadura hacia una de sus extremidades, el cual obra sobre el tubo; y debe irse haciendo poco á poco la corrección hasta conseguir que los pequeños movimientos oscilatorios de que he hablado, comunicados hacia un lado y otro de la vertical que pasa por los pies del nivel, no hagan variar sus indicaciones. Luego que esto se haya logrado, se arregla el otro nivel pequeño que está unido en H á la armadura del grande; y así ya en lo sucesivo para obtener las indicaciones de este último, se le debe dar la posición necesaria para que la burbuja de aquél quede en el centro de su pequeño

tubo; porque es evidente que de esa manera será siempre igual la situación que toman los pies del nivel montante respecto de la vertical.

213.—La línea de colimación se corrige también lo mismo que se explicó en el número 47 al exponer las rectificaciones del altazimut, esto es: por medio de la inversión del eje observando un objeto distante ó la retícula de un colimador, y también sirviéndose de dos colimadores opuestos. Además de estos procedimientos y de otro fundado en observaciones astronómicas, que indicaré después, se emplea un método muy exacto y fácil de ejecutar. Consiste en dirigir verticalmente el telescopio sobre una vasija llena de mercurio, que se coloca en el apoyo C. Suponiendo muy bien nivelado el eje de rotación, sucederá entonces que los rayos de luz que parten de la retícula saldrán paralelos del objetivo; y al caer sobre la superficie del mercurio, serán reflejados por ésta, y al volver á atravesar el objetivo se irán á reunir de nuevo en el foco estelario del telescopio. Según esto, verá el observador directamente la retícula al través del ocular, y en coincidencia con ella su propia imagen reflejada por el mercurio, si es nulo el error de colimación. En el caso contrario, se presentará la imagen á un lado de la retícula, siendo la distancia de un hilo vertical á su imagen, doble de aquel error. Puede, por consiguiente, el observador destruirlo moviendo los tornillos de la retícula hasta establecer la coincidencia del hilo con su propia imagen.

Muchas veces los instrumentos de tránsitos están provistos de un micrómetro en el ocular, cuyo mecanismo es idéntico al que he descrito en el número 165 del Tomo I, y sirve para medir pequeños espacios angulares dentro del campo del telescopio. Moviéndose su hilo paralelamente á los verticales de la retícula, permite estimar la distancia angular del hilo central á su imagen, ya sea para situarlo con los tornillos exactamente á la mitad de ese espacio, ya sea para medir y llevar en cuenta el pequeño error de colimación que puede quedar después de practicada la rectificación como se ha dicho. El mismo uso tiene el micrómetro cuando se examina la colimación observando una señal distante ó la retícula de otro anteojo. Para emplear con buen éxito el colimador de mercurio es preciso iluminar muy bien los hilos, por lo cual se hace uso de un ocular especial que está provisto de un espejo metálico en el interior del tubo, inclinado 45° respecto del eje óptico, y perforado en su centro para no interceptar la visión directa. Una abertura lateral, practicada en el tubo del ocular, sirve para que el espejo reciba la luz de una lámpara y la refleje sobre la retícula.

Lo anterior supone la perfecta horizontalidad del eje de rotación del telescopio; mas si no sucede así, se puede determinar á la vez el error de colimación y la inclinación del eje. Al efecto, se invierte el instrumento sobre sus apoyos, y dirigido de nuevo hacia el mercurio, se vuelve á medir la distancia del hilo central á su imagen por medio del micrómetro. Designando por b la inclinación del eje, por c la colimación del hilo, y por l y l' las distancias que da el micrómetro en ambas posiciones, se tiene evidentemente:

$$l = 2(b+c)$$
$$l' = 2(b-c)$$

de donde resulta:

$$b = \frac{1}{4}(l+l') \qquad c = \frac{1}{4}(l-l')$$

y así es que, conociendo el valor angular de las divisiones del micrómetro, fácilmente se obtienen en segundos los de ambas cantidades.

214.—La situación del telescopio en el plano del meridiano se hace calculando la hora sideral ó media (número 133) de la culminación de una estrella, y visándola con el hilo central de la retícula en el instante en que un cronómetro, cuya corrección sea conocida, señale la indicación equivalente á aquella hora. Cuando no se conozca con exactitud el estado del cronómetro, es conveniente servirse de una estrella circunpolar, en atención á que siendo muy leve el movimiento azimutal de las circumpolares, no influirá mucho el error que se cometa en la hora. También puede establecerse el telescopio determinando previamente la dirección del meridiano por medio de una brújula, teniendo en cuenta la declinación magnética, ó bien trazando la meridiana por alguno de los métodos que se explicaron en la Topografía; pues tratándose sólo de situar el instrumento muy cerca de aquel plano, no hay inconveniente en servirse de cualquier procedimiento aproximativo, con tal que no produzca un error que exceda de 10′ á 15′. Las observaciones astronómicas que se practican en seguida con el mismo telescopio, dan á conocer su desviación ó sea el pequeño azimut que le haya quedado, y permiten, en consecuencia, su rectificación ulterior por medio del pequeño movimiento azimutal que puede comunicarse á una de las extremidades de su eje, aun cuando se haya fijado definitivamente su apoyo sobre el poste destinado á recibirlo. No será inútil advertir que la cara superior de este macizo debe acercarse tanto como se pueda á la horizontalidad, á fin de que después de consolidado el apoyo no sea necesario subir ó bajar mucho uno de los extremos del eje de rotación para que la burbuja se conserve siempre hacia el centro del tubo. Tanto este movimiento vertical como el azimutal, no son de mucha extensión, y por eso conviene practicar con la mayor aproximación que sea posible el establecimiento provisional del telescopio. De ese modo el definitivo sólo demandará pequeñas correcciones.

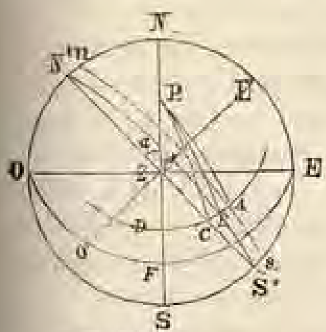


FIG. 48A

215.—Los procedimientos de rectificación que he expuesto reducen los errores á la mayor pequeñez; pero ni puede suponerse, en general, que se les destruya completamente, ni aun cuando se lograra hacerlo debería admitirse que permaneciesen nulos por mucho tiempo. En virtud de esta consideración, investiguemos el modo de reducir al meridiano las observaciones que se hagan con un instrumento incorrecto, aceptando únicamente la hipótesis de que sean muy pequeños los errores, como se verifica en realidad por muy defectuosas que hayan sido sus rectificaciones.

Admitiendo, pues, la existencia de una desviación azimutal del eje óptico del telescopio, la de una inclinación de su eje horizontal y un error de colimación en su retícula, sea $NESO$ (fig. 48ª) el plano del horizonte, sobre el cual consideraré proyectada la esfera. Si el instrumento estuviese correcto, su eje de rotación quedaría dirigido según la línea EO y su línea de colimación describiría el meridiano NS; pero á causa de sus errores, el eje ocupará la posición $E'O'$, y, en consecuencia, su eje óptico se dirigirá al punto N' del horizonte, formando con el meridiano el ángulo azimutal $NZN'=a$. El telescopio describiría en su movimiento el plano vertical que pasa por $N'S'$ si fuese exactamente horizontal su eje de rotación; mas suponiendo que su extremidad O' esté elevada sobre el horizonte una cantidad b, describirá el plano inclinado $N'Z'S'$, de modo que el zenit Z' del instrumento distará b segundos del zenit real Z. Si llamamos, además, c el error de colimación, tendremos que la línea de colimación se hallará á c segundos de distancia del eje óptico, que es la verdadera línea perpendicular al eje de rotación del telescopio.

Cualquiera de los hilos laterales de la retícula describe un círculo menor nAs paralelo á $N'Z'S'$, y designando por i su distancia angular á la línea de colimación, resulta que la que lo separa del eje óptico es $AB=c+i$.

216.—Establecido lo anterior, consideremos una estrella A en el momento de su paso por el hilo lateral; para llegar á su culminación en D tendrá que transcurrir un tiempo medido por el pequeño ángulo horario $h=APD$, siendo P la proyección del polo. El ángulo h se compone de $h_1=DPC$, de $h_2=CPB$ y de $h_3=BPA$, originado el primero por la desviación azimutal a; el segundo por la inclinación b del eje de rotación, y el tercero por la colimación y el intervalo del hilo, ó sea por la cantidad $c+i$.

El triángulo PZC, en el cual PC es la distancia polar de la estrella, é igual á $90°-\delta$, da la ecuación:

$$\text{sen.}\, h_1=\frac{\text{sen.}\, a\,\text{sen.}\, z}{\cos.\,\delta}$$

siendo $z=ZC$ la distancia zenital de la estrella al pasar por el punto

C. Aunque para dar más claridad á la figura se ha exagerado mucho la magnitud de los errores, debe tenerse presente que a y h_1 son sumamente pequeños, por lo cual podremos tomar los arcos por los senos para obtener:

$$h_1=a\frac{\text{sen.}\, z}{\cos.\,\delta}\ \dots\dots\dots\dots\ (1)$$

Con el fin de calcular el valor de h_2 llamemos x la pequeña distancia CB, y entonces el triángulo CPB da:

$$\cos.\, x=\text{sen.}^2\,\delta+\cos.^2\,\delta\cos.\, h_2$$

También el triángulo CBS' cuyo ángulo S' es igual á b, y cuyos lados CS' y BS' pueden tomarse por los complementos de la distancia zenital de la estrella, suministra este otro valor:

$$\cos.\, x=\text{sen.}^2\, z+\cos.^2\, z\cos.\, b$$

Igualando estas dos ecuaciones resulta:

$$\text{sen.}^2\,\delta+\cos.^2\,\delta\cos.\, h_2=\text{sen.}^2\, z+\cos.^2\, z\cos.\, b$$

y atendiendo á que por ser tan pequeños b y h_2 se puede sustituir el desarrollo de sus cosenos hasta la segunda potencia, obtendremos sin dificultad:

$$h_2=b\,\frac{\cos.\, z}{\cos.\,\delta}\ \dots\dots\dots\dots\ (2)$$

Por último, siendo $AB=c+i$, el triángulo APB da:

$$\cos.\,(c+i)=\text{sen.}^2\,\delta+\cos.^2\,\delta\cos.\, h_3$$

ecuación en la que introducidos también los desarrollos de los cosenos de los pequeños arcos, produce:

$$h_3=\frac{c+i}{\cos.\,\delta}\ \dots\dots\dots\dots\ (3)$$

El ángulo horario total será, en consecuencia:

$$h=\frac{\text{sen.}\, z}{\cos.\,\delta}\,a+\frac{\cos.\, z}{\cos.\,\delta}\,b+\frac{1}{\cos.\,\delta}\,(c+i)$$

y es el que representa la corrección que debe sufrir la hora señalada por el cronómetro al observar la estrella en el hilo lateral, para obtener la de su paso por el meridiano. Llamando, pues, t la hora cronométrica de la observación, Δt su corrección y recordando que la hora sideral del tránsito es igual á la ascensión recta de la estrella, se tendrá la ecuación general:

$$\alpha = t + \Delta t + \frac{\text{sen.}\,z}{\cos.\,\delta}\,a + \frac{\cos.\,z}{\cos.\,\delta}\,b + \frac{1}{\cos.\,\delta}\,(c+i)$$

por cuyo medio puede calcularse la corrección Δt del cronómetro, conociendo las magnitudes y los signos de los errores instrumentales, y que también sirve para la determinación de éstos, como se verá después.

217.—Antes de pasar adelante, notemos que atendida la pequeñez de a, la distancia zenital $z = ZC$ es también sensiblemente igual á ZD; y como esta última representa la distancia zenital meridiana de la estrella, puede expresarse en función de su declinación y de la latitud del lugar. En efecto, siendo EFO la proyección del ecuador, se tiene $FZ = \varphi$ y $FD = \delta$, por lo que $z = ZD = \varphi - \delta$. Sustituyendo este valor, nuestra ecuación general adquiere la forma:

$$\alpha = t + \Delta t + \frac{\text{sen.}(\varphi-\delta)}{\cos.\,\delta}\,a + \frac{\cos.(\varphi-\delta)}{\cos.\,\delta}\,b + \frac{1}{\cos.\,\delta}\,(c+i) \quad \text{.....} \quad (4)$$

Los coeficientes de a, b y $c+i$ que, en cada estación determinada, sólo dependen de la declinación del astro, se representan comunmente por A, B y C, de manera que por lo regular se escribe así la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{\text{sen.}(\varphi-\delta)}{\cos.\,\delta} \quad B = \dfrac{\cos.(\varphi-\delta)}{\cos.\,\delta} \quad C = \dfrac{1}{\cos.\,\delta} \\ \alpha = t + \Delta t + A a + B b + C(c+i) \end{array}\right\} \quad \text{............} \quad (5)$$

En la figura se han supuesto positivos todos los errores; pero es evidente que sean cuales fueren sus signos, el efecto de cada uno de ellos dependerá, según las reglas del álgebra, tanto de su signo como

como del de su coeficiente; y en cuanto á esto conviene advertir desde ahora que A es positivo siempre que la estrella culmine al Sur del zenit, ya sea que tenga declinación boreal ó austral, pues en este último caso $\varphi - \delta$ se convertirá en $\varphi + \delta$. Por el contrario, será negativo para los tránsitos al Norte del zenit siempre que se verifiquen entre este punto y el polo, en atención á que en tales casos δ es necesariamente mayor que φ; pero si la culminación se verifica entre el polo y el horizonte, quiere decir, si se trata del tránsito inferior de una circumpolar, el valor de A volverá á ser positivo, por ser negativos á la vez su numerador y su denominador. En efecto, la cantidad que se ha designado por δ representa en la figura el arco contado desde el ecuador hasta la estrella, y como en un tránsito inferior esa distancia es mayor que 90°, resulta que será preciso tomar el suplemento $180° - \delta$ en vez de δ, ó sea $\varphi + \delta - 180°$ en lugar de $\varphi - \delta$. Por consiguiente, serán negativos el seno que forma el numerador de A, y el cos. $(180° - \delta)$ que constituye su denominador.

El coeficiente B es positivo para todos los tránsitos superiores, sea que se verifiquen al Norte ó al Sur del zenit; pero será negativo para los inferiores ó sub-polares, á causa de que varía el signo de su denominador sin que varíe el de su numerador, por ser un coseno. Lo mismo, y por idéntica razón, debe decirse de C, á saber: que es positivo para los pasos superiores y negativo para los subpolares. Aun sin necesidad de consideraciones analíticas, todo lo anterior se comprende muy bien por la simple inspección de la figura, teniendo presente que en los tránsitos inferiores parecen moverse las estrellas de Occidente á Oriente, y que en consecuencia, siendo positivos los errores, pasarán por el telescopio antes que por el meridiano; y la hora sideral $t + \Delta t$ de la observación será menor que $12^h + \alpha$, hora exacta del paso sub-polar.

218.—Con relación á los errores mismos, tenémos que a es positivo siempre que el eje óptico del telescopio se desvíe hacia el Oeste del verdadero Norte, ó hacia el Este del punto Sur; y por el contrario, negativo cuando la desviación tenga lugar hacia el Este respecto del Norte. La inclinación b del eje de rotación será positiva cuando su extremidad occidental esté más elevada que la oriental, y negativa en el caso contrario; de suerte que llamando o y e respectivamente las indicaciones de los extremos *Oeste* y *Este* de la burbuja, o' y e' las mismas después de la inversión del nivel, y expresando el valor de b en segundos de tiempo, se tendrá:

$$b=\frac{(o+o')-(e+e')}{60}v \text{ ....} (6)$$

fórmula en la que v es el valor angular de las divisiones. Es claro que cuando la suma de las dos lecturas orientales resulte mayor que la de las occidentales, será negativa la inclinación b.

En cuanto á c es positiva cuando la línea de colimación queda al Occidente del eje óptico, puesto que en virtud de la inversión de las imágenes producidas por el telescopio, las estrellas pasarán por aquella línea antes que por el eje; pero es preciso advertir que c varía de signo cuando se invierte el telescopio, de manera que para evitar equivocaciones importa anotar en los apuntes la posición que guarda el instrumento al practicar cada observación. Por lo común aquella se indica expresando si se halla al Este ó al Oeste la extremidad del eje de rotación en que se coloca la lámpara destinada á iluminar la retícula; y así se anota *Luz al Este* ó bien *Luz al Oeste* según el caso. De esta manera no habrá dificultad para aplicar á c el signo que le corresponda.

Cuando los hilos de la retícula están equidistantes entre sí, ó que, por lo menos, son exactamente simétricos respecto del central y se observa el paso de las estrellas por cada uno de ellos, debe verificarse que el término medio de todas las horas anotadas concuerde con la correspondiente al central, haciendo abstracción de los pequeños errores cometidos en la apreciación de las fracciones de segundo; mas si sus distancias son ligeramente diversas, el promedio de todas las horas dará la del tránsito por cierto punto del campo por el que puede suponerse que pasa un hilo ficticio llamado *hilo medio*, cuya pequeña distancia al central depende de la desigualdad supuesta en los intervalos de los demás. A este hilo imaginario es al que se refiere la colimación c, y representará su distancia al eje óptico del telescopio; de suerte que cuando se haya medido directamente la colimación del hilo central por cualquiera de los procedimientos conocidos, deberá combinarse el resultado con la pequeña distancia de que he hablado, para obtener el valor de c que figura en la fórmula (5).

219.—Pronto me ocuparé de un método directo para determinar la colimación del hilo medio; pero antes conviene advertir que la cantidad designada por i en la misma fórmula, será también la distancia de un hilo lateral cualquiera al imaginario que he llamado medio, puesto que á éste se refieren todas las observaciones. De aquí se deduce que para todos los hilos que atraviesa la estrella antes de llegar al medio, deberán tomarse positivos los valores de i que les correspondan, y que serán, por el contrario, negativos los que se refieran á los hilos que atraviesa después. En consecuencia, subsistiendo la ecuación (5) para la observación hecha en cada uno de los hilos, resulta que el promedio de todas ellas es independiente de i, cuyo valor final es necesariamente nulo; y así es que para el hilo medio se tendrá:

$$a=t+\Delta t+Aa+Bb+Cc \text{ ....} (7)$$

fórmula que conviene á las observaciones completas, ó hechas en todos los hilos de la retícula. La ecuación (5) es, sin embargo, más general por corresponder al caso de tránsitos incompletos, ó sea aquellos en que se hayan perdido las observaciones de uno ó más hilos; y es evidente que representará también el promedio de una observación incompleta, con tal que por i se introduzca el término medio de los intervalos propios á los diversos hilos en que se haya observado el paso, contados siempre desde el medio y atendiendo á sus signos, y representando t el promedio de las horas respectivas.

220.—Por todo lo expuesto se comprenderá que una de las operaciones más importantes, y acaso la que conviene hacer en primer lugar, es la determinación de los valores de i, llamados generalmente *intervalos ecuatoriales* de los hilos, por representar, en efecto, el tiempo que invertiría una estrella de declinación nula en pasar de un hilo lateral al medio. Hay varios procedimientos para conseguirlo, y uno de los más sencillos consiste en observar el tránsito completo de una estrella de declinación conocida, y en comparar el promedio de las horas con la anotada en cada uno de los hilos. Designando, pues, por $i_1, i_2, \ldots\ldots i_n$ los intervalos de los diversos hilos en el orden en que los va atravesando la estrella, por $t_1, t_2, \ldots\ldots t_n$ las horas correspondientes, y atendiendo á que todas las demás cantidades de la fórmula (5) son invariables para la misma posición del telescopio, sin excluir la corrección Δt del cronómetro por ser de tan corta duración el tránsito, se tendrán las n ecuaciones:

$$a = t_1 + \Delta t + Aa + Bb + Cc + Ci_1$$
$$a = t_2 + \Delta t + Aa + Bb + Cc + Ci_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a = t_n + \Delta t + Aa + Bb + Cc + Ci_n$$

El promedio de estas es la correspondiente al hilo medio, y así llamando t el promedio de las horas, y recordando que para este hilo se tiene $i = 0$, hallaremos:

$$a = t + \Delta t + Aa + Bb + Cc$$

Restando de ésta cualquiera de las anteriores, y designando en general por q el número de orden del hilo á que se refiera, se obtendrán n diferencias de la forma:

$$t - t_q - Ci_q = 0$$

de las que resulta:

$$i_q = \frac{t - t_q}{C} = (t - t_q)\cos.\delta \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (8)$$

lo cual indica que para hallar el intervalo ecuatorial, expresado en tiempo, de cualquiera de los hilos, debe multiplicarse por el coseno de la declinación de la estrella la diferencia entre el promedio de las horas y la correspondiente al hilo.

Ejemplo.—Determinemos los intervalos ecuatoriales por el siguiente paso meridiano de *α Eridani*, observado el 18 de Diciembre de 1861, con un telescopio de tránsitos portátil, cuya retícula tenía cinco hilos verticales.

		$t - t_q$	
Primer hilo............	$7^h\,46^m\,52^s.00$............	$+61^s.60$	
Segundo ,, ...	,, 47 23 .00............	+30 .60	
Tercer ,, ...	,, 47 53 .25............	+ 0 .35	$\delta = -57°\,56'\,29''$
Cuarto ,, ...	,, 48 24 .50............	−30 .90	
Quinto ,, ...	,, 48 55 .25............	−61 .65	

Hilo medio....... $t = 7^h\,47^m\,53^s.60$

	Primero.	Segundo.	Tercero.	Cuarto.	Quinto.
$t - t_q$.....	1.78958+	1.48572+	9.544+	1.48996−	1.78993−
cos. δ.....	7.72492	9.72492	9.725	9.72492	9.72492
i_q.........	1.51450+	1.21064+	9.269+	1.21488−	1.51485−

$$i_1 = +32^s.696 \quad i_2 = +16^s.242 \quad i_3 = +0^s.186 \quad i_4 = -16^s.401 \quad i_5 = -32^s.723$$

Por otras muchas observaciones obtuve, en término medio, para el mismo instrumento:

$$i_1 = +32^s.882 \quad i_2 = +16^s.226 \quad i_3 = +0^s.074 \quad i_4 = -16^s.348$$
$$i_5 = -32^s.834$$

221.—Entre otros usos, los intervalos ecuatoriales sirven para reducir al hilo medio los tránsitos incompletos, ú observados en algunos hilos solamente. Para esto la ecuación (8) indica que el intervalo contado *en el paralelo de la estrella*, es igual al ecuatorial dividido por el coseno de la declinación. Cada uno de los hilos en que se hubiese practicado la observación daría lugar al mismo cálculo, por lo cual se abrevia este generalmente, tomando el término medio de los intervalos de los hilos en que se haya observado el paso, dividiéndolo por cos. δ y añadiendo el resultado, con su signo, al promedio de las horas de los hilos observados. La suma algebraica da el tránsito por el hilo medio. Supongamos, por ejemplo, que en la anterior observación de *α Eridani* se hubieran perdido los pasos por los hilos primero y tercero. Tendríamos el siguiente tránsito incompleto, el promedio de cuyas horas designaré por t_r, siendo i_r el promedio de los intervalos ecuatoriales correspondientes:

Segundo hilo...........	$7^h\,47^m\,23^s.00$	$i_2 = +16^s.226$
Cuarto "	" $48\;\;24.50$	$i_4 = -16.348$
Quinto "	" $48\;\;55.25$	$i_5 = -32.834$
	$t_\varphi = 7^h\,48^m\,14^s.25$	$i_\varphi = -10^s.985$

La reducción al hilo medio será, en consecuencia:

i_φ...............	1.04080−		$t_\varphi = 7^h\,48^m\,14^s.25$
cos. δ..........	−9.72492		
$t - t_\varphi$.........	1.31588−	....	$-\;20.70$
			$t = 7^h\,47^m\,53^s.55$

cuyo resultado es casi idéntico al que se obtuvo directamente, no obstante haber hecho uso de los valores medios de los intervalos, que difieren algo de los que produjo la observación de la estrella.

Tanto para la determinación de los intervalos ecuatoriales como para la reducción de los tránsitos incompletos se emplea la fórmula (8), con tal de que la estrella á que se refiera la operación no esté muy inmediata al polo; pero tratándose de una circumpolar cuya declinación exceda de 85° ú 86°, es preciso modificar aquella expresión para hacerla más exacta. A este fin notemos que dirigido el telescopio á la circumpolar, el intervalo de un hilo lateral al medio intercepta, en su círculo de declinación, un espacio que no representa un pequeño arco, sino el seno de éste. Por consiguiente, la fórmula exacta debería ser sen. i_φ = sen. $(t - t_\varphi)$ cos. δ; pero como i_φ es siempre muy pequeño, podrá tomarse en todos casos:

$$i_\varphi = \frac{\text{sen.}\,(t - t_\varphi)\cos.\delta}{15\,\text{sen.}\,1''}$$

en la cual $t - t_\varphi$ debe convertirse en arco, resultando ya el intervalo ecuatorial en segundos de tiempo. En la página 74 de mis "Nuevos Métodos Astronómicos" puede verse una Tabla destinada á facilitar la aplicación de esta fórmula, así como en la página 80 otro procedimiento sencillo para determinar los intervalos ecuatoriales.

222.—Ocupémonos ahora en el modo de hallar la colimación c del

hilo medio. Si cerca de su culminación se observa el paso de una circumpolar por uno ó más hilos de la retícula, y en seguida se invierten cuidadosamente los extremos del eje de rotación del instrumento, para continuar observando el paso por los mismos ú otros hilos, podremos reducir ambas observaciones al hilo medio, según el método explicado en el número precedente. Si las dos reducciones dan la misma hora para el tránsito por el hilo medio, es evidente que será nulo el error de colimación, puesto que ha permanecido invariable la desviación azimutal a en las dos posiciones del eje; pero en el caso contrario, la diferencia de los resultados proviene de la situación simétrica que ha tomado la linea de colimación á un lado y otro del eje óptico. Estas dos situaciones, distando entre sí la cantidad $2c$, puede obtenerse el valor de c por medio de aquella diferencia. En efecto, designando por t_1 el término medio de las horas anotadas antes de invertir el telescopio, por i_1 el de los intervalos correspondientes á los hilos en que se hayan observado los pasos y por b_1 la inclinación del eje calculada por la fórmula (6), se tendrá en virtud de la (5):

$$a = t_1 + \Delta t + A\,a + B\,b_1 + C\,c + C\,i_1$$

Llamando t_2 el promedio de las horas obtenidas después de la inversión, por i_2 el de los intervalos de los hilos correspondientes y por b_2 la inclinación del eje, admitiendo para más generalidad que haya variado, tendremos para la nueva posición del instrumento, atendiendo á que la colimación y los intervalos producen efectos contrarios:

$$a = t_2 + \Delta t + A\,a + B\,b_2 - C\,c - C\,i_2$$

Restando la primera ecuación de la segunda resulta:

$$t_2 - t_1 + B\,(b_2 - b_1) - 2\,C\,c - C(i_1 + i_2) = 0$$

Despejando á c y sustituyendo los valores (5) de B y C, se obtiene por último:

$$c = \tfrac{1}{2}\,(t_2 - t_1)\cos.\delta + \tfrac{1}{2}\,(b_2 - b_1)\cos.(\varphi - \delta) - \tfrac{1}{2}\,(i_1 + i_2) \;......\; (9)$$

Ejemplo.—Entre otras, hice el 26 de Octubre de 1858 las siguientes observaciones de ρ *Draconis* para medir la colimación de un telescopio meridiano:

Primera posición.—Luz al O.	Intervalos.	Segunda posición.—Luz al E.	Intervalos.
I hilo... $5^h44^m44^s.0$	$+49^s.636$	II hilo... $5^h47^m59^s.0$	$+24^s.940$
II " ... " $45\ 48.2$	$+24.940$	I " ... " $49\ \ 3.5$	$+49.636$
$t_1 = 5^h45^m16^s.10$	$i_1 = +37^s.288$	$t_2 = 5^h48^m31^s.25$	$i_2 = +37^s.288$

En este caso, como en ambas posiciones se observó la estrella en los mismos hilos, se tiene $\frac{1}{2}(i_1 + i_2) = i_1$. En cuanto al nivel, cuyas divisiones valían $1''$, sus indicaciones fueron:

Antes de la inversión.		Después de la inversión.	
$o = 31$	$e = 35$	$o = 38$	$e = 31$
$o' = 33$	$e' = 33$	$o' = 30$	$e' = 39$

y, por consiguiente, se obtiene $b_1 = -0^s.067$ y $b_2 = -0^s.033$ por la fórmula (6). El cálculo será, pues, siendo $\varphi = 19°\ 24'\ 15''$ y $\delta = 67°\ 28'\ 30''$:

$$\frac{1}{2}(t_2 - t_1) = 97^s.57 \ldots\ldots\ 1.98932 \qquad \frac{1}{2}(b_2 - b_1) = +0^s.017 \ldots\ldots\ 8.2304$$
$$\cos.\delta \ldots\ldots\ 9.58330 \qquad \cos.(\varphi - \delta) \ldots\ldots\ 9.8249$$
$$1.57262 \qquad 8.0553$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(t_2 - t_1)\cos.\delta &= \ \ 37^s.38 \\
\tfrac{1}{2}(b_2 - b_1)\cos.(\varphi - \delta) &= +\ 0.01 \\
\tfrac{1}{2}(i_1 + i_2) &= -37.29 \\
c &= +\ 0^s.10
\end{aligned}$$

El signo que resulta del cálculo es el que corresponde á la primera posición del telescopio, de modo que para la segunda, ó sea *Luz al Este*, la colimación que debe emplearse es $c = -0^s.10$.

Cuando se determine directamente la colimación del hilo central por cualquier otro procedimiento (números 51 y 213), se deduce fácilmente, según he dicho, la que corresponde al hilo medio. Supongamos, por ejemplo, cinco hilos en la retícula, y sea c' la colimación

del tercero, que en este caso es el central; designando por i_3 su intervalo ecuatorial, se tendrá para el hilo medio, $c = c' \mp i_3$.

223.—Todo lo que precede manifiesta que de los tres errores instrumentales a, b y c, los dos últimos pueden determinarse con entera independencia del primero, á saber: la inclinación b con el nivel montante aplicando la fórmula (6), y la colimación c invirtiendo el telescopio, según se ha explicado. El valor de b es bastante susceptible de variación en los instrumentos portátiles, y no es raro ver que en el transcurso de algunas horas varíe $0^s.2$ ó $0^s.3$. Por esta razón, al observar una serie de tránsitos, conviene leer el nivel inmediatamente antes ó después de cada uno, ó bien anotar sus indicaciones cada media hora, por ejemplo, y si las variaciones son considerables se halla por interpolación el valor de b que conviene á cada uno de los tránsitos. En el caso contrario, se adopta el promedio de las lecturas para todas las observaciones.

El error de colimación es mucho más estable, sobre todo cuando se tiene cuidado de no tocar los tornillos de la retícula. Esto no obstante, importa determinarlo periódicamente; así, en una operación dilatada, se examinarán todos los meses, por ejemplo, adoptando entre una y otra determinación el último valor hallado, ó mejor el promedio de los dos resultados, al menos si se tiene motivo para creer que su variación no ha sido brusca.

224.—El conocimiento de los errores b y c permite corregir los tránsitos observados, reduciéndolos á lo que serían si fuese exactamente horizontal el eje de rotación del telescopio y si coincidiese su hilo medio con el eje óptico. Según esto, representando ahora por t la hora del paso ya corregida por la suma algebraica de los dos términos Bb y Cc en los tránsitos completos, ó por Bb y $C(c+i)$ en los incompletos, nuestra ecuación general (5) será para cualquiera estrella:

$$a = t + \Delta t + \Delta a$$

en la que quedan las dos incógnitas a y Δt. Para determinarlas á la vez, se observa otra estrella que suministra otra ecuación semejante, á saber:

$$a' = t' + \Delta t' + \Delta' a$$

Restando una de otra y haciendo para abreviar:

$$\left.\begin{array}{l} 2\theta = (\alpha' - \alpha) + (t - t') + (\Delta t - \Delta t') \\ \text{resulta:} \\ a = \dfrac{2\theta}{A' - A} \end{array}\right\} \text{............ (10)}$$

obteniéndose la corrección del cronómetro por cualquiera de las dos ecuaciones primitivas, esto es:

$$\Delta t = (\alpha - A\,a) - t \text{ .... (11)}$$

En el valor de 2θ, y por consiguiente en el de a, entra la variación ó marcha $(\Delta t - \Delta t')$ del cronómetro en el tiempo $t - t'$ que transcurre de una observación á otra, la cual sólo tiene valor apreciable siendo fuerte la variación diaria, ó muy considerable el intervalo $t - t'$. Para poder prescindir de ella sin error sensible, y para no temer algún cambio en la desviación azimutal del telescopio, conviene elegir dos estrellas que difieran poco en ascensión recta, á fin de que sólo transcurran algunos minutos entre sus tránsitos.

Omitiendo en esas circunstancias la marcha del cronómetro, sustituyendo los valores

$$A' = \frac{\text{sen.}(\varphi - \delta')}{\cos.\,\delta'} \quad \text{y} \quad A = \frac{\text{sen.}(\varphi - \delta)}{\cos.\,\delta}$$

y desarrollándolos, el de a puede escribirse así:

$$a = \frac{[(\alpha' - \alpha) + (t - t')]\cos.\delta\cos.\delta'}{\cos.\varphi\,\text{sen.}(\delta - \delta')} \text{ .... (12)}$$

Por esta expresión se ve que para disminuir el efecto de algún pequeño error en la diferencia $t - t'$, que es el dato obtenido por la observación, conviene que sea grande el denominador, ó lo que es lo mismo, que las dos estrellas difieran mucho en declinación. Si se escogen de manera que la una tenga declinación positiva y la otra negativa, el denominador se convertirá en $\cos.\varphi\,\text{sen.}(\delta + \delta')$. La misma ventaja, y la de disminuir á la vez el factor de 2θ, se consigue combinando dos circumpolares que difieran casi 12^h en ascensión recta; porque entonces se observa en poco tiempo el paso superior de una de ellas y el inferior de la otra. Es preciso no olvidar que para esta última debe emplearse $12^h + \alpha$ ó $12^h + \alpha'$ en lugar de α ó α', respectivamente, así como el suplemento de su declinación, de modo que se tendrá:

$$a = -\frac{2\theta\cos.\delta\cos.\delta'}{\cos.\varphi\,\text{sen.}(\delta + \delta')}$$

Finalmente, puede hacerse uso del doble tránsito de una circumpolar; pero un instrumento portátil no se presta á este método, en primer lugar porque no debe admitirse que permanezca invariable su desviación azimutal durante las 12^h siderales que transcurren del paso superior al inferior; y en segundo, porque con telescopios pequeños es difícil observar las estrellas de día, y generalmente sucederá que uno de los tránsitos, por lo menos, se verificará estando el sol sobre el horizonte.

225.—Las fórmulas (10) y (11) suponen el uso de un cronómetro sideral; pero siendo solar, se convertirá en tiempo sideral, por medio de la Tabla de la página 288, la duración que se haya obtenido, y se tendrá así la cantidad $t - t'$ que entra en el valor de 2θ. En el mismo caso, se convertirá en hora media la sideral $\alpha - A\,a$ de la fórmula (11), según se ha explicado en el número 131; ó bien se calculará la hora media M del tránsito de la estrella, equivalente á su ascensión recta α, para obtener: $\Delta t = (M - A\,a) - t$.

Por lo general, siempre que se observan pasos meridianos, se escogen dos ó más estrellas para determinar la desviación azimutal a, que reunan las condiciones antes establecidas, á saber: poca diferencia en ascensión recta y mucha en declinación; y se observan además otras varias para la determinación del estado del cronómetro. Estas últimas conviene que sean circum-zenitales ó zenit-ecuatoriales, tanto á causa de que la rapidez de su movimiento hace muy seguras las observaciones, cuanto por suministrar resultados casi independientes de a, pues en tales circunstancias es muy pequeño el coeficiente A, y varía de signo del Norte al Sur del zenit.

Ejemplo.—Tomemos el siguiente de tránsitos observados en México el 29 de Noviembre de 1861, con un cronómetro solar cuya variación era inapreciable en cortos intervalos, pues no llegaba á $0^s.02$ por hora.

México, Noviembre 29 de 1861.

PASOS MERIDIANOS.—LUZ AL ESTE.

Estrellas.	HILOS.						Nivel.
	I	II	III	IV	V	Medio.	
η Piscium.	^{m} 53 ^{s} 38.50	^{m} 53 ^{s} 56.00	^{m} 54 ^{s} 12.25	^{m} 54 ^{s} 29.75	^{m} 54 ^{s} 46.25	^{h} 8 ^{m} 54 ^{s} 12.55	
α Eridani.	1 38.75	2 10.00	2 40.00	3 11.25	3 42.25	9 2 40.45	$+0^s.23$
β Arietis..	16 29.00	16 47.00	17 4.00	17 21.50	17 39.25	9 17 4.10	
α Arietis..	28 49.00	29 7.25	29 25.00	29 42.50	30 00.25	9 29 24.80	$+0.11$

Sólo se han escrito los minutos y los segundos obtenidos en cada uno de los hilos; pero en el medio constan completas las horas cronométricas de las observaciones. La posición del lugar es $\varphi = 19°26'$ y $L = 6^h\ 36^m.4$ próximamente, y las de las estrellas:

	Ascensiones rectas.	Declinaciones.
η Piscium.............	$1^h\ 24^m\ 7^s.79$..............	$+14°\ 38'$
α Eridani...............	1 32 36 .48...............	$-57\ 56$
β Arietis.................	1 47 3 .11......	$+20\ 8$
α Arietis.................	1 59 25 .89...............	$+22\ 49$

La colimación del telescopio era $c = -0^s.058$ para la posición *Luz al Este*. Tomando el término medio de las lecturas del nivel tendremos $b = +0^s.17$. Obtuve las indicaciones que constan en la Tabla leyendo el nivel inmediatamente después de observada la segunda estrella y poco antes de observar la última. A fin de presentar un tipo del cálculo, corrijamos por nivel y colimación las estrellas segunda y tercera, que tienen su A de distinto signo.

α Eridani.

$$\begin{array}{llll}
\varphi = \ \ 19°\,26' & & & \\
\delta = -57\ \ 56 \ldots\ldots \cos \ldots\ldots & 9.7250 & \ldots\ldots\ldots\ 9.7250 & \ldots\ldots\ 9.7250 \\
\varphi - \delta = +77°\,22' \ldots\ldots \mathrm{sen} \ldots\ldots & 9.9894+ & \ldots \cos \ldots\ldots\ 9.3399 & \\
 & A \ldots\ldots\ 0.2644+ & B \ldots\ 9.6149 & C \ldots\ 0.2750 \\
 & & b \ldots\ldots\ 9.2304+ & c \ldots\ldots\ 8.7634- \\
 & A = +\ 1.838 & & \\
 & & Bb \ldots\ldots\ 8.8453+ & Cc \ldots\ 9.0384-
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Hilo medio} &= 9^h\ 2^m\ 40^s.45 \\
Bb &= \ \ +\ \ 0\ .070 \\
Cc &= \ \ -\ \ 0\ .109 \\
t &= 9^h\ 2^m\ 40^s.41
\end{aligned}$$

β Arietis.

$$\begin{array}{llll}
\varphi = \ \ 19°\,26' & & & \\
\delta = +20\ \ 8 \ldots\ldots \cos \ldots\ldots & 9.9726 & \ldots\ldots\ldots\ 9.9726 & \ldots\ldots\ 9.9726 \\
\varphi - \delta = -\ 0°\,42' \ldots\ldots \mathrm{sen} \ldots\ldots & 8.0870- & \ldots \cos \ldots\ldots\ 0.0000 & \\
 & A \ldots\ldots\ 8.1144- & B \ldots\ 0.0274 & C \ldots\ 0.0274 \\
 & & b \ldots\ldots\ 9.2304+ & c \ldots\ldots\ 8.7634- \\
 & A = -\ 0.013 & & \\
 & & Bb \ldots\ldots\ 9.2578+ & Cc \ldots\ 8.7908-
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Hilo medio} &= 9^h\ 17^m\ 4^s.10 \\
Bb &= \ \ +\ \ 0\ .181 \\
Cc &= \ \ -\ \ 0\ .062 \\
t &= 9^h\ 17^m\ 4^s.22
\end{aligned}$$

De una manera idéntica se corregirán las observaciones de las otras dos estrellas, de modo que los valores de t y los de A son:

η Piscium............	$t = 8^h\ 54^m\ 12^s.66$............	$A = +\ 0.086$
α Eridani............	$t = 9\ \ 2\ \ 40\ .41$............	$A = +\ 1.838$
β Arietis.............	$t = 9\ \ 17\ \ \ 4\ .22$............	$A = -\ 0.013$
α Arietis.............	$t = 9\ \ 29\ \ 24\ .92$........ ..	$A = -\ 0.064$

Combinemos ahora la primera estrella con la segunda, y ésta con la tercera, para determinar la desviación azimutal por las fórmulas (10).

η Piscium y α Eridani.

$\alpha'-\alpha=$	$+8^m 28^s.69$	$t=$	$8^h 54^m 12^s.66$
$t-t'=$	$-8\ \ 29\ .14$	$t'=$	$9\ \ 2\ \ 40\ .41$
$2\theta=$	$-0^s.45$		$8^m 27^s.75$
$A'-A=$	$+1\ .75$	sol.$=$	$1\ .39$
		$t-t'=$	$-8^m 29^s.14$

$$a=-\frac{0^s.45}{1.75}=-0^s.26$$

α Eridani y β Arietis.

$\alpha'-\alpha=$	$+14^m 26^s.63$	$t=$	$9^h\ 2^m 40^s.41$
$t-t'=$	$-14\ \ 26\ .17$	$t'=$	$9\ 17\ \ 4\ .22$
$2\theta=$	$+0^s.46$		$14^m 23^s.81$
$A'-A=$	$-1\ .85$	sol.$=$	$2\ .36$
		$t-t'=$	$-14^m 26^s.17$

$$a=-\frac{0^s.46}{1.85}=-0^s.25$$

Este resultado, por ser negativo, indica que el eje óptico del telescopio estaba desviado del Norte hacia el Este la pequeña cantidad $0^s.255=3''.8$.

Con excepción de *α Eridani* cuya declinación es demasiado grande, las otras estrellas llenan las mejores condiciones para determinar la corrección del cronómetro, aplicando la fórmula (11), después de convertir en hora media la sideral $\alpha-\varDelta\alpha$, por haberse empleado un cronómetro solar.

	η Piscium.	*β Arietis.*	*α Arietis.*
α........	$1^h 24^m\ 7^s.79$	$1^h 47^m\ 3^s.11$	$1^h 59^m 25^s.89$
$-\varDelta\alpha$........	$+\ 0\ .02$	$0\ .00$	$0\ .02$
Hora sideral........	$1^h 24^m\ 7^s.81$	$1^h 47^m\ 3^s.11$	$1^h 59^m 25^s.87$
Asc. recta del sol...	$-16\ 34\ 29\ .82$	$-16\ 34\ 29\ .82$	$-16\ 34\ 29\ .82$
	$8^h 49^m 37^s.99$	$9^h 12^m 33^s.29$	$9^h 24^m 56\ .05$
Reducción........	$-\ 1\ 26\ .77$	$-\ 1\ 30\ .52$	$-\ 1\ 32\ .55$
Hora media........	$8^h 48^m 11^s.22$	$9^h 11^m\ 2^s.77$	$9^h 23^m 23^s.50$
t........	$8\ 54\ 12\ .66$	$9\ 17\ \ 4\ .22$	$9\ 29\ 24\ .92$
$\varDelta t$........	$-\ 6^m\ 1^s.44$	$-6^m\ 1^s.45$	$-6^m\ 1^s.42$

El promedio $\varDelta t=-6^m 1^s.44$ debe considerarse como la corrección del cronómetro en el momento en que su indicación era......... $t=9^h 14^m$, que es próximamente el término medio de las tres.

226.—Este ejemplo manifiesta la grande exactitud con que puede obtenerse la hora por el método de pasos meridianos cuando se co-

nocen bien las correcciones instrumentales a, b y c. De no ser así, es claro que los errores que tengan influyen directamente en el resultado. El efecto de a puede eliminarse, sin embargo, observando estrellas circum-zenitales, según he dicho; y si se escogen de manera que culminen á distancias casi iguales del zenit, la una al Norte y la otra al Sur de este punto, el promedio de los resultados será independiente de a por variar el signo de $A\,a$, como sucede en nuestro ejemplo con *η Piscium* y *α Arietis*. El efecto de b no se puede eliminar en general, por ser invariable el signo de su coeficiente B en todos los tránsitos superiores, que son los que se emplean en la determinación de la hora. Lo que debe hacerse es reducir la inclinación b á la menor cantidad posible, y por si fueren algo desiguales los diámetros de los muñones ó extremidades en que gira el eje de rotación, conviene eliminar esta nueva causa de error por medio de la frecuente inversión del telescopio, pues es evidente que los resultados obtenidos en las dos posiciones del eje, afectados en distinto sentido por la desigualdad de sus extremos, darán un promedio sensiblemente independiente de ella. La inversión elimina también casi del todo el efecto de la colimación; porque como C es siempre positivo para los tránsitos superiores, el signo de $C\,c$ sólo depende de c, y el de este error es diverso en las dos posiciones del eje. En el Capítulo II, Sección IV de los *Nuevos Métodos Astronómicos*, puede ver el lector más detalles respecto de los pasos meridianos, así como el modo de determinar simultáneamente la mayor parte de las correcciones instrumentales, y el de combinar y discutir los resultados.

A la vez que la hora, se obtiene también por el método de tránsitos la desviación azimutal del telescopio con la mayor precisión, y aunque el valor de a se refiera al eje óptico, fácil es deducir el que corresponde al hilo central de la retícula conociendo su distancia al hilo medio y la colimación de éste. Si, pues, antes de practicar las observaciones se establece una señal distante en coincidencia con el hilo del centro, podrá corregirse después su posición para trazar el meridiano con toda exactitud (Tomo I, número 86). Una señal meridiana sirve para rectificar la posición del telescopio siempre que se desee, y para medir directamente el azimut de una línea cualquiera, de modo que bajo este aspecto, el método de tránsitos constituye también uno de los mejores procedimientos para orientar los lados de una cadena trigonométrica.

227.—Aunque las fórmulas (5) sean bastante sencillas en su aplicación, según se ha visto por el ejemplo anterior, suelen emplearse bajo otra forma en los Observatorios permanentes, y en general, siempre que se cuente con la estabilidad del telescopio meridiano. Sustituyendo y desarrollando los valores de A y B, se halla:

$$\alpha = t + \varDelta t + a\,\text{sen.}\,\varphi - a\cos.\varphi\tan.\delta + b\cos.\varphi + b\,\text{sen.}\,\varphi\tan.\delta + \frac{c+i}{\cos.\delta}$$

ecuación que equivale á las tres siguientes:

$$\left.\begin{aligned} m &= a\,\text{sen.}\,\varphi + b\cos.\varphi \\ n &= -a\cos.\varphi + b\,\text{sen.}\,\varphi \\ \alpha &= t + \varDelta t + m + n\tan.\delta + \frac{c+i}{\cos.\delta} \end{aligned}\right\} \text{..........} (13)$$

Bajo esta forma, si se conocen a y b, se calculan fácilmente m y n, que introducidos en la última ecuación sirven para corregir todos los tránsitos. No conociendo la desviación a, se determina directamente la constante n por la combinación de dos estrellas que difieran poco en ascensión recta y tanto como sea posible en declinación, procediendo como se explicó en la determinación de a. Una vez conocida n, la eliminación de a en las dos primeras ecuaciones suministra el valor de m, y entonces ya podrá aplicarse la última.

Para desarrollar esté método sin hacer uso de nuevas anotaciones, convengamos en designar por t la hora cronométrica corregida por colimación, y en los tránsitos incompletos por el promedio i de los intervalos de los hilos en que se haya practicado la observación. Entonces los pasos de las dos estrellas darán las ecuaciones:

$$\alpha = t + \varDelta t + m + n\tan.\delta$$
$$\alpha' = t' + \varDelta t + m + n\tan.\delta'$$

en las que supongo contante la corrección del cronómetro en atención al corto intervalo que transcurre entre ambas observaciones.

Restándolas una de otra se eliminará á m y obtendremos:

$$n = -\frac{(\alpha'-\alpha)+(t-t')}{\tan.\delta-\tan.\delta'} = -\frac{2\theta\cos.\delta\cos.\delta'}{\text{sen.}(\delta-\delta')} \text{.........} (14)$$

Eliminando la desviación a entre las primeras fórmulas (13), se halla:

$$m = \frac{b}{\cos.\varphi} - n\tan.\varphi \text{ ....} (15)$$

y finalmente, cualquiera de las ecuaciones primitivas da:

$$\varDelta t = (\alpha - m - n\tan.\delta) - t \text{ ....} (16)$$

Se ve, pues, que siguiendo este procedimiento no es necesario conocer el valor de a; pero si se desea, con el objeto de situar una señal meridiana ó para cualquiera otro uso, se tiene:

$$a = b\tan.\varphi - \frac{n}{\cos.\varphi}, \qquad \text{ó bien} \qquad a = \frac{m}{\text{sen.}\,\varphi} - b\cot.\varphi \text{ ....} (17)$$

228.—No juzgo indispensable aplicar detalladamente estas últimas fórmulas, porque los cálculos preliminares son del todo semejantes á los que preceden. No olvidando que si en el primer método t representaba la hora cronométrica corregida por nivel y colimación, en éste lo que representa es la misma hora corregida sólo por la colimación, pues la otra corrección va incluída en el valor de m, deberá hallarse con los datos de nuestro ejemplo:

η *Piscium*........................	$t = 8^h\,54^m\,12^s.49$
α *Eridani*........................	$t = 9\ \ 2\ \ 40.34$
β *Arietis*........................	$t = 9\ 17\ \ \ 4.04$
α *Arietis*........................	$t = 9\ 29\ \ 24.74$

Combinemos la primera estrella con la segunda, y esta con la tercera, para calcular la constante instrumental n por la fórmula (14):

η Piscium y α Eridani.

$\alpha'-\alpha=+8^m.28^s.69$		$t=8^h\,54^m\,12^s.49$	
$t-t'=-8\ .29\ .24$		$t'=9\ \ 2\ \ 40\ .34$	
$2\theta=$	$-0^s.55$		$8^m\,27^s.85$
		Acel.$=$	$1\ .39$
		$t-t'=$	$-8^m\,29^s.24$

-2θ.....	9.7404	
cos. δ......	9.9857	
cos. δ'.....	9.7250	
sen. $(\delta-\delta')$.	-9.9796	
n......	9.4715	$n=+0^s.296$

α Eridani y β Arietis.

$\alpha'-\alpha=+14^m\,26^s.63$		$t=9^h\ \ 2^m\,40^s.34$	
$t-t'=-14\ \ 26\ .06$		$t'=9\ 17\ \ 4\ .04$	
$2\theta=$	$+0^s.57$		$14^m\,23^s.70$
		Acel.$=$	$2\ .36$
		$t-t'=$	$-14^m\,26^s.06$

-2θ.....	9.7559—	
cos. δ......	9.7250	
cos. δ'.....	9.9726	
sen. $(\delta-\delta')$.	-9.9905—	
n......	9.4630	$n=+0^s.291$

Tomando el término medio $n=+0^s.293$, calculemos el valor de m por la fórmula (15) recordando que $b=+0^s.17$ y $\varphi=19°26'$.

b.....	9.2304	n......	9.4669	Primer término $=$	$0^s.180$
cos. φ.....	-9.9745	tan. φ......	9.5475	Segundo „ $=$	$-0\ .103$
	9.2559		9.0144	$m=$	$+0^s.077$

Finalmente, determinemos el estado del cronómetro por medio de la primera y las dos últimas estrellas aplicando la fórmula (16).

	η Piscium.	*β Arietis.*	*α Arietis.*
α..............	$1^h\,24^m\ \ 7^s.79$.........	$1^h\,46^m\ \ 3^s.11$.........	$1^h\,59^m\,25^s.89$
$-m$..............	$-0\ .077$	$-0\ .077$	$-0\ .077$
$-n$ tan. δ.......	$-0\ .076$	$-0\ .107$	$-0\ .123$
Hora sideral	$1^h\,24^m\ \ 7^s.64$	$1^h\,47^m\ \ 2^s.93$	$1^h\,59^m\,25^s.69$
Asc. recta del sol..	$-16\ \ 34\ \ 29\ .82$	$-16\ \ 34\ \ 29\ .82$	$-16\ \ 34\ \ 29\ .82$
	$8^h\,49^m\,37^s.82$	$9^h\,12^m\,33^s.11$	$9^h\,24^m\,55\ .87$
Reducción.........	$-\ \ 1\ \ 26\ .77$	$-\ \ 1\ \ 30\ .52$	$-\ \ 1\ \ 32\ .55$
Hora media.......	$8^h\,48^m\,11^s.05$	$9^h\,11^m\ \ 2^s.59$	$9^h\,23^m\,23^s.32$
Hora cronomét^a..	8 54 12.49	9 17 4.04	9 29 24.74
$\Delta t=$	$-\ 6^m\ \ 1^s.44$.........	$-6^m\ \ 1^s.45$.........	$-6^m\ \ 1^s.42$

Se ve que estos resultados son los mismos que se obtuvieron por las fórmulas (10) y (11). Si se desease conocer la desviación azimutal, tendríamos:

b......	9.2304	n...	9.4669	Primer término	$=+0^s.06$
tan. δ......	9.5475	cos. φ...	-9.9745	Segundo „	$=-0\ .31$
	8.7779		9.4924		$a=-0\ .25$

229.—Las aplicaciones anteriores indican que ambos métodos son muy sencillos, aunque el segundo lo es un poco más en atención á que m es constante para todas las estrellas observadas; pero en cambio supone mayor estabilidad en el instrumento, puesto que b forma parte del valor de m, cantidad que no sería en rigor constante si la inclinación del eje de rotación variase de una manera notable.

No sólo las estrellas sino también el sol sirve para determinar la hora por este método. Basta observar los tránsitos de sus dos limbos anotando las horas cronométricas en que son tangentes á los hilos de la retícula. El promedio de ambos pasos da el del centro, que corregido por Bb y Cc, ó bien por Cc solamente, puede compararse con la hora $M-A\,a$ en el primer caso, y con $M-m-n\,\tan.\,\delta$ en el segundo, siendo M la hora media en el instante del medio día verdadero local. Si es sideral el cronómetro, se emplea en lugar de M la ascensión recta α del sol verdadero, calculada para el mismo instante.

Como el cálculo de un tránsito del sol no ofrece diferencia sustancial respecto de los de estrellas, me parece inútil presentar nuevos ejemplos: y más bien terminaré este Capítulo estableciendo algunas reglas prácticas para facilitar el cálculo de los promedios de las observaciones, y para preparar las estrellas convenientes.

Sea cual fuere el número de hilos de la retícula, como sus distancias son sensiblemente iguales, siempre he acostumbrado á tomar las diferencias de las horas correspondientes, con el objeto de cerciorarme, por sus leves desigualdades, de que no ha habido equivocación alguna al apuntar las indicaciones del cronómetro. Estas diferencias me sirven en seguida para hallar el promedio, ó sea la hora correspondiente al hilo medio, con mucha mayor facilidad que sumando todas las horas y dividiendo la suma por el número de hilos. El procedimiento que aplico es como sigue: suponiendo que la retícula tenga cinco hilos, que es el número más común á la vez, que el más conveniente, el tercero será el central; y por medio de las diferencias mencionadas es fácil referir todas las horas á la de este hilo. Representemos por p, s, t, c y q las horas de los pasos, por el primero, el segundo, ... el quinto hilos, y por d_1, d_2, d_3, d_4 las cuatro diferencias que se obtienen restando la hora de esta manera:

$$
\begin{aligned}
p &= t - d_1 - d_2 \\
s &= t - d_2 \\
t &= t \\
c &= t + d_3 \\
q &= t + d_3 + d_4
\end{aligned}
$$

Si llamamos m la hora del paso por el hilo medio, se tendrá:

$$m = \frac{p+s+t+c+q}{5} = t + \frac{2(d_3 - d_2) + (d_4 - d_1)}{5}$$

ó bien simplificando:

$$m = t + 0.4(d_3 - d_2) + 0.2(d_4 - d_1)$$

donde se ve que con una ligera corrección, que las más veces puede hacerse á la memoria, se reduce á la media la hora del hilo central.

Ejemplo.—Apliquemos este sencillo método al siguiente tránsito del sol, observado con un telescopio en que el hilo central distaba bastante del medio.

I Limbo.		II Limbo.	
$11^h 49^m 59^s.75$		$11^h 52^m 9^s.50$	
„ 50 24 .75	$d_1 = 25^s.00$	„ 52 34 .75	$d_1 = 25^s.25$
„ 50 49 .25	$d_2 = 24.50$	„ 52 59 .25	$d_2 = 24.50$
„ 51 14 .75	$d_3 = 25.50$	„ 53 24 .75	$d_3 = 25.50$
„ 51 40 .00	$d_4 = 25.25$	„ 51 50 .25	$d_4 = 25.50$
$11^h 50^m 49^s.70$		$11^h 52^m 49^s.70$	

Se ve que las correcciones del tercer hilo son por el primero y segundo limbos, las siguientes:

$$
\begin{aligned}
m - t &= 0.4 \times 1 + 0.2 \times 0.25 = +0^s.45 \\
m - t &= 0.4 \times 1 + 0.2 \times 0.25 = +0.45
\end{aligned}
$$

las que aplicadas con su signo al central, dan desde luego el hilo medio. El promedio de los dos limbos suministra después $11^h 51^m 54^s.7$ por hora del tránsito del centro del sol por el hilo medio.

Cuando la retícula tiene sólo tres hilos, no habrá más que dos diferencias, y aplicando el mismo procedimiento se halla:

$$m = s + \tfrac{1}{2}(d_2 - d_1)$$

Finalmente, si tiene siete resulta:

$$m = c + 0.43(d_4 - d_3) + 0.29(d_5 - d_2) + 0.14(d_6 - d_1)$$

En todos casos se notará que la desigualdad de las diferencias centrales tiene más influencia que las de las extremas; pero que siendo iguales de dos en dos, aunque no lo sean entre sí, coincidirá el hilo medio con el central. Como es útil que sea sensiblemente nula la distancia del hilo central al ficticio ó medio, será conveniente procurar la colocación equidistante, ó al menos simétrica, de los hilos.

230.—La preparación de las estrellas cuyos tránsitos se tenga intención de observar, no demanda casi cálculo alguno, si ha de emplearse un cronómetro sideral, puesto que la hora del paso es igual á la ascensión recta de cada estrella; así es que conociendo poco más ó menos el estado del guarda–tiempo, se sabrá con suficiente aproximación el instante en que debe presentarse la estrella en el telescopio. Conviene, sin embargo, tener presente que la lentitud del movimiento azimutal, en la culminación, está en razón inversa de cos. δ, de manera que si una estrella ecuatorial se presenta generalmente en el campo del telescopio cosa de 2^m antes de su paso por el hilo central, una circumpolar deberá esperarse mucho antes, y si es de las más inmediatas al polo, tardará muchos minutos en pasar de un hilo á otro.

Haciendo uso de un cronómetro solar, se calcula la hora media del tránsito (número 133), de la que se deduce la aproximativa cronométrica para proceder como se ha explicado.

En cuanto á la distancia zenital que tiene que señalar el pequeño círculo del telescopio, para que se presente cada estrella en el campo, se tendrá que llamando φ la latitud y δ la declinación aproximativa del astro, si φ es mayor que δ culminará la estrella al Sur del zenit, y si φ es menor que δ pasará al Norte. Como en uno y otro caso la distancia zenital meridiana es igual á la diferencia de φ y δ, tendremos:

Al Sur del zenit.................... $\zeta = \varphi - \delta$

Al Norte del zenit.................. $\zeta = \delta - \varphi$

Respecto de los pasos subpolares, la distancia zenital meridiana tiene por expresión: $\zeta = 180° - (\varphi + \delta)$.

Estos ángulos ó sus complementos, según que el círculo dé distancias zenitales ó alturas, son los que ha de señalar el vernier para fijar el telescopio en la posición conveniente. Es claro que basta hacer uso de valores aproximativos de φ y δ, siendo más que suficiente la aproximación de 1′ ó 2′ para el caso.

CAPITULO XI.

DETERMINACIÓN DEL AZIMUT DE UNA SEÑAL.—MÉTODO DE DISTANCIAS ANGULARES ENTRE LA SEÑAL Y UNA ESTRELLA CONOCIENDO LA HORA DE LA OBSERVACIÓN.

231.—En los cuatro Capítulos que preceden he dado á conocer los principales procedimientos para obtener la corrección de un cronómetro en un instante cualquiera. Este elemento y la marcha diaria del instrumento permiten al astrónomo designar la hora exacta que corresponde á cualquiera indicación de su guarda–tiempo, según se ha visto en el número 187. Por consiguiente, siempre que observe un astro cuya posición sea conocida, anotando la hora cronométrica de la observación, podrá deducir en seguida la hora exacta, y por último, el ángulo horario del astro en el mismo instante, puesto que es un elemento que se compone de la ascensión recta de la estrella y de la hora sideral de la observación (número 121).

Establecido lo anterior, supongamos colocada una señal luminosa en el punto cuyo azimut se trate de determinar, y que el observador, por medio de un altazimut ó de un teodolito, mida el angulo horizontal comprendido entre la señal y una estrella. Si cada vez que dirige su visual á la estrella, anota la hora cronométrica en el momento en que queda cortada por la intersección de los hilos, es claro que reunirá los datos necesarios para calcular después el azimut del astro en el instante de cada observación, á saber: la latitud φ del lugar, la declinación δ del astro y su ángulo horario h. Llamando a el resultado del cálculo y A el ángulo medido, el azimut de la señal será: $u = A + a$.

Toda la parte astronómica de la operación queda, pues, reducida al cálculo del azimut a de la estrella, para lo cual se han establecido en el número 125 las fórmulas:

$$\tan. M = \frac{\tan. \delta}{\cos. h} \qquad \tan. a = \frac{\tan. h \cos. M}{\text{sen.} (M - \varphi)} \cdots\cdots (1)$$

232.—Con el fin de investigar las condiciones más favorables á la observación, analicemos la ecuación de que provienen las anteriores, que es:

$$\tan. a = \frac{\text{sen.} h}{\cos. \varphi \tan. \delta - \text{sen.} \varphi \cos. h} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

Suponiendo pequeños errores en todos los datos del problema, consideraré como una función de éstos al que necesariamente resulta en a, á saber:

$$\Delta a = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}h} \Delta h + \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\varphi} \Delta \varphi + \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\delta} \Delta \delta$$

y diferenciando la ecuación anterior con relación á los tres elementos h, φ y δ sucesivamente, se obtendrá con facilidad:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{2} (\cot. h - \text{sen.} \varphi \tan. a) \text{sen.} 2a$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(\tan. \delta \,\text{sen.} \varphi + \cos. h \cos. \varphi) \,\text{sen.}^2 a}{\text{sen.} h}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\delta} = - \frac{\cos. \varphi \,\text{sen.}^2 a}{\text{sen.} h \cos.^2 \delta}$$

Por estos coeficientes de los errores, se ve que el primero se nulifica cuando el triángulo astronómico ZPA (fig. 49ª) es rectángulo en la estrella A, porque entonces se tiene: sen. φ cot. h cot. a, ó bien: sen. φ tan. $a = $ cot. h. En consecuencia, un pequeño error en la hora, no influye en el resultado siempre que se observe una estrella en los

momentos de su *mayor elongación*, quiere decir, en los de su mayor distancia angular al meridiano, que es cuando el plano vertical es tangente á su círculo de declinación. Esta condición demanda que δ sea mayor que φ, según consta en el número 180.

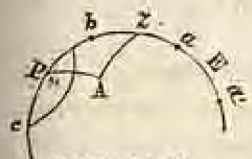


FIG. 49A

El mismo coeficiente indica que la influencia de Δh disminuye en general con el azimut, de suerte que una circumpolar cerca de su elongación reune las mejores circunstancias para la determinación del azimut, siempre que no se tenga entera confianza en el estado del cronómetro.

El segundo coeficiente, que es el que mide la influencia de un pequeño error en la latitud, disminuye con el azimut y con el aumento del ángulo horario. Sustituyendo por sen. h su valor $\frac{\text{sen.} a \,\text{sen.} z}{\cos. \delta}$, puede ponerse bajo la forma:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{(\text{sen.} \varphi \,\text{sen.} \delta + \cos. \varphi \cos. \delta \cos. h) \,\text{sen.} a}{\text{sen.} z} = \frac{\text{sen.} a}{\tan. z}$$

que manifiesta la conveniencia de que siendo pequeño el azimut, sea grande la distancia zenital; condiciones que también llenan perfectamente las circumpolares, especialmente en nuestras bajas latitudes.

El coeficiente de $\Delta \delta$ se puede escribir de la manera siguiente, introduciendo la relación $\frac{\text{sen.} h}{\text{sen.} z}$ en vez de $\frac{\text{sen.} a}{\cos. \delta}$:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\delta} = - \frac{\cos. \varphi \,\text{sen.} a}{\text{sen.} z \cos. \delta}$$

valor que es nulo con a, y que en general disminuye á medida que aumenta la distancia del astro al zenit; circunstancia á que se prestan muy bien las circumpolares en nuestro país.

También debe anotarse que los efectos de $\Delta \varphi$ cambian de signo de un lado á otro del meridiano; y que, por consiguiente, el promedio de dos observaciones de una misma estrella al Oriente y al Occidente suministrará un resultado sensiblemente independiente de aquel error, si se procura practicarlas cuando los respectivos ángulos horarios sean casi iguales numéricamente. Aunque no con todo rigor, puede decirse lo mismo de dos estrellas diferentes, con tal que no sean muy desiguales sus declinaciones.

Este breve análisis recomienda, pues, bajo todos aspectos la elección de las estrellas inmediatas al polo cuando se tiene por objeto la determinación del azimut de una señal.

233.—La práctica de la operación no ofrece dificultad alguna, reduciéndose á la medida común de un ángulo, sin más diferencia que la de anotar la hora cada vez que se vise el astro; pero como generalmente tiene este cierta altura sobre el horizonte, es preciso tomar en cuenta el error de colimación para corregir las lecturas del instrumento angular, y sobre todo, las indicaciones del nivel montante, con el fin de hacer correcciones análogas por la inclinación del eje, según se ha visto en el número 50 y siguientes, donde se dijo también que la observación en dos posiciones inversas del teodolito ó del altazimut, elimina casi del todo los errores.

Presentemos el siguiente ejemplo de un azimut determinado por observaciones de α *Ursæ minoris* (estrella polar). El 4 de Mayo de 1860 en el extremo occidental de la base para la triangulación del Valle de México, medí los ángulos A, que van á continuación, entre la polar y la señal luminosa colocada en el extremo oriental, los cuales están contados partiendo de la señal y *de izquierda á derecha.*

Angulos entre la señal y la estrella.		Horas del cronómetro.
238° 33′ 50″.0		$9^h 50^m 28^s.5$
„ 35 1 .7		„ 53 55 .0
„ 36 5 .0		„ 56 38 .0
„ 37 21 .7		„ 59 41 .5
„ 38 10 .0		10 1 52 .5
A = 238° 36′ 5″.7	Promedios	$9^h 56^m 31^s.1$

El cronómetro era solar, y á la hora de la observación tenía $2^m 13^s.6$ de adelanto. La latitud de la estación es $\varphi = 19° 25' 23''$, y la posición de la estrella era aquella noche: $\alpha = 1^h 7^m 14^s.50$ y

$$\delta = +88° 33' 50''.3$$

Haciendo el cálculo de las fórmulas (1) con los promedios de las observaciones, tendremos:

$t = 9^h 56^m 31^s.1$	tan. δ 1.6008688	tan. h .... 8.9390907—
$\Delta t = -\ 2\ 13\ .6$	cos. h —9.9983658—	cos. M .... 8.3973623—
		sen. $(M-\varphi)$ —9.9782250
Hora media = $9^h 54^m 17^s.50$	tan. M 1.6025030—	
As. recta = 2 51 26 .80		tan. a 7.3582280
Acel. = 1 38 .04	$M = 91° 25' 50''.3$	
	$\varphi = 19\ 25\ 23\ .0$	$a = +\ 0°\ 7'50''.6$
$T = 12^h 47^m 22^s.24$		$A = 238\ 36\ 5\ .7$
$\alpha = 1\ 7\ 14\ .50$	$M - \varphi = 72° 00' 27''.3$	
		$u = 238° 43' 56''.3$

$$h = \begin{cases} +11^h 40^m\ 7^s.84 \\ +175° 1' 57''.6 \end{cases}$$

234.—Con el fin de eliminar la influencia de la pequeña inclinación que pudiera tener el eje de rotación del telescopio, no obstante haberse rectificado cuidadosamente, lo mismo que la colimación, tomé pocos minutos después la siguiente serie en la posición inversa del instrumento:

Angulos entre la señal y la estrella		Horas del cronómetro.
238° 43′ 56″.7		$10^h 15^m 59^s.0$
„ 45 3 .3		„ 19 8 .5
„ 46 21 .7		„ 22 14 .5
„ 47 56 .7		„ 26 15 .0
„ 49 3 .3		„ 28 55 .5
A = 238° 46′ 28″.3	Promedios	$10^h 22^m 30^s.5$

La variación del cronómetro, muy pequeña en 24^h, no era apreciable en el corto intervalo transcurrido entre ambas series, de modo que emplearé el mismo valor de Δt al desarrollar el cálculo, lo cual juzgo útil para que se vea el diverso juego de signos que, respecto de la primera, tiene esta nueva serie. En efecto, como las observaciones tuvieron lugar en los momentos del tránsito inferior de la polar, en la segunda serie estaba ya la estrella al Este del meridiano.

$t=10^h22^m30^s.5$	$\tan.\delta$ 1.6008688	$\tan. h$ 8.4312624
$\Delta t=-\ 2\ 13.6$	$\cos. h$ — 9.9998416—	$\cos. M$ .... 8.3988350—
Hora media $=10^h20^m16^s.90$	$\tan. M$ 1.6010272—	$\text{sen.}(M-\varphi)$. 9.9782370
As. recta $=\ 2\ 51\ 26.80$		$\tan.\alpha$ .... 6.8518604—
Acel. $=\ 1\ 41.90$	$M=91°\,26'\,7''.8$	
$T=13^h13^m25^s.60$	$\varphi=19\ 25\ 23.0$	$\alpha=-\,0°\ 2'26''.5$
$\alpha=1\ 7\ 14.50$	$M-\varphi=72°\,00'\,44''.8$	$A=238\ 46\ 28.3$
$h=\begin{cases}-11^h53^m48^s.90\\-178°27'13''.5\end{cases}$		$u=238°\,44'\ 1''.8$

El término medio de los dos resultados es, pues, $u=238°\,43'59''.0$, y su semidiferencia $2''.7$ puede considerarse como el efecto de los pequeños errores mencionados y de los de observación. El promedio final, obtenido por seis noches de trabajo, dió $u=238°\,43'58''.2$ por azimut de la extremidad oriental de la base.

235.—En las precedentes aplicaciones se han tomado por datos los promedios de las series de observaciones, práctica justificada por el hecho de haberse ejecutado éstas en los momentos del paso de la estrella. En efecto, siempre que h contado desde el tránsito más inmediato, y por consiguiente a, sean bastante pequeños para que sin error de importancia puedan tomarse los arcos por sus senos ó tangentes y la unidad por sus cosenos, la ecuación (2) será en segundos:

$$a=\frac{h}{\cos.\varphi\tan.\delta-\text{sen.}\varphi}$$

y multiplicando numerador y denominador por $\cos.\delta$, da:

$$a=\frac{h\cos.\delta}{\text{sen.}(\delta-\varphi)}$$

Como el factor $\frac{\cos.\delta}{\text{sen.}(\delta-\varphi)}$ es constante para cada estrella en determinada latitud, se infiere que muy cerca del meridiano el movimiento azimutal es proporcional al tiempo. Por esta razón hice uso de los términos medios, puesto que el de las horas corresponderá al de los ángulos medidos.

El mismo principio sirve de fundamento á un método muy sencillo para medir el azimut de una señal, el que casi no demanda más cálculo que el de la hora cronométrica de la culminación de la estrella. Tomando cerca de esa hora dos ó más ángulos entre la estrella y la señal, se hallará por una simple proporción el azimut que tenía la primera en uno de los instantes de la observación, comparando el efecto la variación de los ángulos con el tiempo transcurrido. Nuestras dos series, por ejemplo, suministran los siguientes datos:

Angulos medidos.	Horas cronométricas.
$A=238°\,36'\,5''.7$	$t=\ 9^h56^m31^s.1$
$A'=238\ 46\,28.3$	$t'=10\ 22\ 30.5$
$A-A'=\ -10'22''.6=-622''.6$	$t'-t=+\ 25^m59^s.4=+1559^s.4$

La relación $\frac{A-A'}{t'-t}$ expresa el aumento del azimut en la unidad de tiempo; y así llamando θ la hora cronométrica del tránsito y a el azimut de la estrella á la hora t se tendrá:

$$t'-t:A-A'::t-\theta:a=\frac{A-A'}{t'-t}(t-\theta)$$

Para aplicar este procedimiento á los datos precedentes, calculando la hora media correspondiente á $12^h+\alpha=13^h\,7^m14^s.5$ por tratarse de un tránsito sub-polar, se halla: $M=10^h\,14^m\,6^s.8$; y como el cronómetro tenía $2^m\,13^s.6$ de adelanto, su indicación en ese instante debió ser $\theta=10^h\,16^m20^s.4$. Tendremos:

$$t-\theta=-19^m\,49^s.3=-1189^s.3,$$

y en consecuencia:

$$a=\frac{622.6\times1189.3}{1559.4}=+0°\,7'\,54''.8$$

El azimut de la señal será $A+a=238°\,44'\,00''.5$, que sólo difiere $1''.5$ del promedio obtenido por el cálculo de las ecucciones (1). Este método me parece, por tanto, muy aceptable, sobre todo, si se aplica á una estrella de declinación considerable y que culmine á poca altura sobre el horizonte, pues ambas circunstancias contribuyen á que tenga menor influencia un pequeño error en la hora.

236.—Aunque las fórmulas (1) son enteramente generales y fácilmente aplicables á un astro cualquiera, algunos astrónomos prefieren el cálculo de una serie cuando se trata de una estrella circumpolar cuya distancia al polo no exceda de 2° ó 3°. Llamando d la distancia polar, complemento de la declinación, la fórmula (2) puede escribirse así:

$$\tan. a = \frac{\text{sen.}\, h}{\cos. \varphi \cot. d - \text{sen.}\, \varphi \cos. h}$$

y considerando al azimut a como una función de d, la supondré desarrollada respecto de las potencias de esta cantidad, á saber:

$$a = Md + Nd^2 + Pd^3 + \text{etc.} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(3)$$

siendo M, N, P, etc., los coeficientes que deben determinarse en función de los elementos conocidos h y φ. Con este objeto sustituyamos en el valor de $\tan. a$ el desarrollo de $\cot. d$, que es:

$$\cot. d = \frac{1}{d} - \frac{1}{3} d - \frac{1}{45} d^3 - \text{etc.},$$

y multiplicando después por d el numerador y el denominador, hallarémos, no apreciando más que hasta los términos de tercer órden:

$$\tan. a = \frac{d\, \text{sen.}\, h}{(1 - \frac{1}{3} d^2) \cos. \varphi - d\, \text{sen.}\, \varphi \cos. h}$$

Se tiene, además: $\tan. a = a + \frac{1}{3} a^3 + \ldots\ldots$ que atendiendo á la relación (3), será:

$$\tan. a = Md + Nd^2 + (P + \tfrac{1}{3} M^3) d^3$$

Igualando este valor con el precedente y quitando el denominador, se encuentra:

$$\left.\begin{array}{l} (M \cos. \varphi - \text{sen.}\, h)\, d + (N \cos. \varphi - M \text{sen.}\, \varphi \cos. h)\, d^2 \\ + (P \cos. \varphi + \frac{1}{3} M^3 \cos. \varphi - \frac{1}{3} M \cos. \varphi - N \text{sen.}\, \varphi \cos. h)\, d^3 \end{array}\right\} = 0$$

ecuación en la que debiendo ser nulos separadamente los coeficientes de las diversas potencias de d, suministrará las relaciones siguientes para la determinación de M N y P:

$$\begin{array}{l} M \cos. \varphi - \text{sen.}\, h = 0 \\ N - M \tan. \varphi \cos. h = 0 \\ P + \frac{1}{3} M^3 - \frac{1}{3} M - N \tan. \varphi \cos. h = 0 \end{array}$$

De la primera resulta:

$$M = \frac{\text{sen.}\, h}{\cos. \varphi}$$

Sustituyendo este valor en la segunda, se tiene:

$$N = \frac{\text{sen.}\, h}{\cos. \varphi} \tan. \varphi \cos. h$$

y con los de M y N la última produce:

$$P = \frac{\text{sen.}\, h}{\cos. \varphi} \tan.^2 \varphi \cos.^2 h + \frac{1}{3} \frac{\text{sen.}\, h}{\cos. \varphi} \left(1 - \frac{\text{sen.}^2 h}{\cos.^2 \varphi}\right)$$

Expresando ahora en segundos los pequeños ángulos a y d, la ecuación (3) da finalmente:

$$a = d \frac{\text{sen.}\, h}{\cos. \varphi} \left[\begin{array}{l} 1 + d \tan. \varphi \cos. h\, \text{sen.}\, 1'' + (d \tan. \varphi \cos. h\, \text{sen.}\, 1'')^2 \\ + \frac{1}{3} d^2 \left(1 - \frac{\text{sen.}^2 h}{\cos.^2 \varphi}\right) \text{sen.}^2 1'' \end{array} \right] \ldots\ldots (4)$$

Apliquemos esta fórmula á nuestro ejemplo tomando los promedios de las dos series de observaciones, á saber:

$$A = 238^\circ\, 41'\, 17'' \qquad\qquad h = 178^\circ\, 17'\, 22''$$

y no apreciando más que hasta los términos de segundo orden, esto es:

$$a = d \frac{\text{sen.}\, h}{\cos. \varphi} + d \frac{\text{sen.}\, h}{\cos. \varphi} d \tan. \varphi \cos. h\, \text{sen.}\, 1''$$

La distancia polar de la estrella es $d = 90° - \delta = 1°26'9''.7 = 5169''.7$; y por consiguiente tendremos:

d............	3.71347...............		3.7135	Primer término......	$+2'\,43''.6$
sen. h........	8.47495	cos. h.....	9.9998—	Segundo „	$-\quad 1\,.4$
cos. φ........	—9.97455	tan. φ....	9.5473		
		sen. 1″...	4.6856		$a = +0°\;\; 2'\,42''.2$
	2.21387...............		2.2139		$A = 238\;\; 41\;\; 17\;.0$
	$+163''.6$		0.1601—		$u = 238°\,43'\,59''.2$
			$-1''.4$		

237.—Para medir un azimut por observaciones de una estrella cuando dista bastante del meridiano, se procede como se ha explicado, con la diferencia de que no pudiéndose suponer entonces las variaciones del azimut proporcionales al tiempo, tampoco debe aplicarse la ecuación (1) con los promedios de las observaciones, sino que es mejor calcular separadamente cada una de ellas. Esto no obstante, en los momentos de la mayor elongación de las circumpolares su movimiento azimutal es sensiblemente nulo, de manera que se pueden tomar varios ángulos entre la señal y la estrella y calcular después el azimut máximo de ésta por la ecuación:

$$\text{sen.}\, a = \frac{\cos.\, \delta}{\cos.\, \varphi} \qquad (5)$$

sin referencia alguna á la hora. Para que este procedimiento dé, sin embargo, la exactitud necesaria, es indispensable emplear poco tiempo en las observaciones, procurando que el instante medio de la serie sea casi el de la mayor elongación, cuya hora puede obtenerse por la fórmula:

$$\cos.\, h = \tan.\, \varphi \cot.\, \delta \qquad (6)$$

Calculando, pues, con este valor de h la hora cronométrica de la elongación, se principiará 5^m ó 6^m antes á medir el ángulo entre la estrella y la señal, para terminar también 5^m ó 6^m después. De este modo no es necesario anotar los instantes de las observaciones, puesto que la relación (5) es independiente del ángulo horario de la estrella; pero sí es útil para procurar que el promedio de las horas corresponda á la de la elongación.

Cuando es posible observar así los ángulos que forman la señal con la estrella tanto en la elongación oriental como en la occidental, es evidente que el azimut de la primera será igual al término medio de los dos ángulos, por ser el de la estrella numéricamente igual á un lado y otro del meridiano. En general, siendo g y g' las lecturas del círculo azimutal cuando se visa la estrella en los momentos de sus elongaciones occidental y oriental respectivamente, la graduación meridiana, ó sea la que tendría lugar cuando el telescopio coincidiese con el meridiano, será $m = \frac{1}{2}(g + g')$, puesto que el arco $g' - g$ representa el doble del azimut correspondiente á la elongación. Por consiguiente, siempre que se tenga confianza en la estabilidad del instrumento durante las 12 horas que próximamente transcurren entre las dos elongaciones, el método anterior sirve muy bien para determinar el meridiano astronómico; y designando por G la indicación del círculo al visar la señal, la diferencia $u = m - G$ da desde luego el azimut de ésta.

El procedimiento que acaba de trazarse deja de ser recomendable cuando la serie de observaciones dura más tiempo del que se ha indicado, ó cuando la estrella no es de las más inmediatas al polo. El método general que voy ahora á trazar es aplicable á cualesquiera estrellas circumpolares, y permite reducir al instante mismo de la elongación los ángulos que se midan entre ellas y una señal terrestre, aun cuando estas observaciones tengan lugar en momentos bastante distantes del de la mayor digresión.

Sean a el azimut máximo de la estrella y h el ángulo horario correspondiente, calculados por las fórmulas (5) y (6). El azimut que tiene la circumpolar en el instante t' en que se mide el ángulo entre su plano vertical y el de una señal terrestre, será a', calculado por la ecuación

$$\tan.\,(a - x) = \frac{\text{sen.}\,(h - \theta)}{\cos.\, \varphi \tan.\, \delta - \text{sen.}\, \varphi \cos.\,(h - \theta)}$$

en la que he representado por $x = a - a'$ la variación de azimut debida al intervalo de tiempo sideral $\theta = h - h' = t - t'$, transcurrido entre la hora t de la mayor elongación y la t' de la observación. De ella resulta, atendiendo á que

$$\text{sen.}\, \varphi = \cot.\, a \cot.\, h = \frac{\cot.\, a \tan.\, \varphi \cot.\, \delta}{\text{sen.}\, h}$$

la siguiente:

$$\tan.\, x = \frac{\tan.\, a \cos.\, \varphi \tan.\, \delta - \cot.\, h \cos.\,(h - \theta) - \text{sen.}\,(h - \theta)}{\cos.\, \varphi \tan.\, \delta + \tan.\, a\, \text{sen.}\,(h - \theta) - \text{sen.}\, \varphi \cos.\,(h - \theta)}$$

Si multiplicamos por sen. h los dos términos del segundo miembro, lo cual reduce á 1 el primer término del numerador, y hacemos en seguida el desarrollo de sen. $(h-\theta)$ y cos. $(h-\theta)$, se halla sin dificultad:

$$\tan. x = \frac{1-\cos.\theta}{\cot. a + m\cos.\theta - n\,\mathrm{sen}.\theta}$$

siendo:

$$m = \tan. a\,\mathrm{sen}.^2 h - \cot. a\cos.^2 h = \frac{\mathrm{sen}.^2 h}{\mathrm{sen}.\,a\,\cos.\,a} - \cot. u$$

$$n = (\tan. a + \cot. a)\,\mathrm{sen}.\,h\cos.\,h = \frac{\mathrm{sen}.\,h\,\cos.\,h}{\mathrm{sen}.\,a\,\cos.\,a}$$

Como el intervalo θ nunca es demasiado considerable, puede expresarse en serie la ecuación anterior. Desarrollando el seno y el coseno de este arco hasta los términos de tercer orden, se tendrá desde luego:

$$\tan. x = \frac{\frac{1}{2}\theta^2}{m + \cot. a - n\theta - \frac{1}{2}m\theta^2 + \frac{1}{6}n\theta^3}$$

y considerando á x como una función de θ, en la que no puede haber término alguno independiente de esta cantidad, supondremos:

$$x = A\theta + B\theta^2 + C\theta^3$$

En consecuencia, deberá tenerse, limitando siempre la aproximación hasta los términos de tercer orden:

$$\tan. x = A\theta + B\theta^2 + (C + \tfrac{1}{3}A^3)\theta^3$$

Igualando los dos valores de tan. x y haciendo las reducciones necesarias, se hallará:

$$\left.\begin{array}{l} A(m+\cot. a)\theta + [B(m+\cot. a) - An - \frac{1}{2}]\theta^2 \\ +[(C+\frac{1}{3}A^3)(m+\cot. a) - Bn - \frac{1}{2}Am]\theta^3 \end{array}\right\} = 0$$

y por la nulificación de cada término se tendrá por lo mismo:

$$A = 0$$

$$B = \frac{1}{2(m+\cot. a)} = \frac{\mathrm{sen}.\,a\,\cos.\,a}{2\,\mathrm{sen}.^2 h} = \frac{\mathrm{sen}.\,2\delta}{4\cos.\varphi\,\mathrm{sen}.\,h}$$

$$C = \frac{n}{2(m+\cot. a)^2} = \frac{\mathrm{sen}.\,a\cos.\,a\cot.\,h}{2\,\mathrm{sen}.^2 h} = \frac{\mathrm{sen}.\,2\delta\cot.\,h}{4\cos.\varphi\,\mathrm{sen}.\,h}\ .$$

Sustituyendo estos valores en el de x, y expresándolo en segundos de arco, así como el de θ en segundos de tiempo sideral, se halla por último:

$$x = (6.43570)\frac{\mathrm{sen}.\,2\delta}{\cos.\varphi\,\mathrm{sen}.\,h}(t-t')^2 + (2.2974)\frac{\mathrm{sen}.\,2\delta\cot.\,h}{\cos.\varphi\,\mathrm{sen}.\,h}(t-t')^3 \ldots\ldots (7)$$

Las cantidades numéricas expresan los logaritmos de las constantes

$$\tfrac{1}{4}(15)^2\,\mathrm{sen}.\,1'' \quad \text{y} \quad \tfrac{1}{4}(15)^3\,\mathrm{sen}.^2\,1''$$

Como lo habíamos indicado, se ve que esta fórmula reduce á la hora precisa de la mayor digresión las observaciones hechas poco antes ó poco después de ese instante. Cuando se calcula cada observación en particular con el valor correspondiente de $t-t'$, se tiene la ventaja de poder examinar la mayor ó menor concordancia de los resultados individuales; pero también puede hacerse el cálculo empleando los promedios de $(t'-t)^2$ y de $(t-t')^3$, y se obtiene así la corrección que debe hacerse al término medio de los ángulos medidos entre la señal y la estrella, para determinar el que se habría hallado en el momento mismo de la elongación. De un modo ó de otro, siendo A el ángulo, ya corregido por los errores de nivel y colimación (número 52), será $A-x$ el que habría resultado en el momento de la digresión, y por consiguiente, $A-x+a$ el azimut de la señal.

Supongamos que á la latitud $\varphi = 19°\ 26'\ 00''$ se hubiera medido el ángulo $A = 149°\ 53'\ 29''$ entre la señal luminosa de una estación terrestre y una estrella cuya declinación fuese $\delta = 73°\ 15'\ 30''$; y que se hubiera visado la estrella $18^m\ 36^s$ de tiempo sideral *antes* del instante de su máxima elongación *oriental*. Se desea saber cuál es el azimut de la señal.

Las fórmulas (5) y (6) dan $a = -17°\,47'\,8''.8$ y $h = -83°\,54'\,28''.3$, á los que asignamos el signo negativo por estar la estrella al Este del meridiano. El valor de $t-t' = 1116^s$ será positivo por haberse observado antes de la elongación.

Tendremos, pues:

		cot. h......	9.0283−	Primer término.	$-0°\ 3'19''.84$
const......	6.43570	const......	2.2974	Segundo „ $+$	$1\ .73$
sen. 2δ...	9.74170	....	9.7417		
$(t-t')^2$..	6.09533	$(t-t')^3$...	9.1430+	$x=$	$-\ 0°\ 3'18''.1$
				$A=$	$149\ 53\ 29\ .0$
	2.27273		0.2104−		
cos. φ...	−9.97452	....	−9.9745	$A-x=$	$149°56'47''.1$
sen. h...	−9.99754−	....	−9.9975−	$a=$	$-\ 17\ 47\ 8\ .8$
	2.30067−		0.2384+	$u=$	$132°\ 9'38''.3$

El ejemplo precedente manifiesta la pequeñez del segundo término de la serie (7), no obstante el valor considerable de $t-t'$, y el de δ relativamente pequeño para una circumpolar. Esto indica que en muchos casos, sobre todo, cuando $t-t'$ es sólo de unos cuantos minutos, puede limitarse el cálculo únicamente al primer término, consideración que también se expresa diciendo que en los momentos de las elongaciones de las circumpolares, sus cambios de azimut son proporcionales á los cuadrados de los tiempos.

Por otra parte, para cada latitud y cada declinación es fácil asignar el límite de $t-t'$ para que la omisión del segundo término de la serie no produzca un error mayor que una cantidad dada f. Eliminando á este fin á h en ese término por medio de la relación (6) y representando por c la constante, se tiene:

$$f=c\frac{\text{sen.}\,2\delta\,\text{tan.}\,\varphi\,\text{cot.}\,\delta}{\text{cos.}\,\varphi\,(1-\text{tan.}^2\varphi\,\text{cot.}^2\delta)}(t-t')^2=c\frac{\text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}^2 2\delta}{2\,\text{sen.}\,(\delta+\varphi)\,\text{sen.}\,(\delta-\varphi)}(t-t')^2$$

y finalmente en minutos de tiempo:

$$t-t'=(0.8897)\sqrt[4]{f\,\frac{\text{sen.}\,(\delta+\varphi)\,\text{sen.}\,(\delta-\varphi)}{\text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}^2 2\delta}}$$

El valor de f se asigna conforme á la aproximación que dé el instrumento que se emplee. Aun con los mejores aparatos astronómicos no se puede responder, en rigor, de la apreciación de $0''.5$; de suerte que dando á f este valor y calculando la fórmula con los datos del ejemplo precedente, se halla: $t-t'=12^m.3$. Por consiguiente, en la misma latitud podría haberse observado la estrella desde 12^m antes hasta 12^m después de la hora de la elongación, esto es: du-

rante 24 minutos, sin que la omisión del segundo término de la serie hubiera producido un error superior á $0''.5$. A medida que crece δ es también mayor el límite de $t-t'$, siempre en igualdad de latitud; y así, por ejemplo, para $\varphi=19°\ 26'$ y suponiendo de $88°40'$ la declinación de la Polar, nuestra fórmula da $t-t'=66^m$, resultado que asigna más de dos horas por intervalo en que las variaciones azimutales de la estrella polar son sensiblemente proporcionales á los cuadrados de los tiempos.

Ya sea que por el método que precede se reduzcan al instante preciso de la máxima elongación las observaciones ejecutadas poco antes ó poco después, ó ya que se observen las estrellas en aquel momento mismo, se puede medir también el azimut de una señal, ó determinar la graduación meridiana m del instrumento, combinando dos estrellas que lleguen á sus mayores digresiones con muy poca diferencia de tiempo. Siendo en efecto, d y d' las distancias polares de las dos estrellas, complementos de sus declinaciones, y a y a' sus azimutes máximos, la ecuación (5) dará:

$$\frac{\text{sen.}\,a+\text{sen.}\,a'}{\text{sen.}\,a-\text{sen.}\,a'}=\frac{\text{sen.}\,d+\text{sen.}\,d'}{\text{sen.}\,d-\text{sen.}\,d'}$$

que equivale á la relación:

$$\frac{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(a+a')}{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(a-a')}=\frac{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(d+d')}{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(d-d')}$$

Si designamos, como antes, por g y g' las lecturas del círculo azimutal al visar las estrellas, después de hechas todas las correcciones, y por m la graduación incógnita que se obtendría cuando el eje óptico del telescopio estuviese en el meridiano, tendremos:

$$a=m-g \qquad a'=m-g'$$

y por tanto:

$$a+a'=2m-(g+g') \qquad a-a'=g'-g$$

Sustituyendo en la relación anterior resulta:

$$\text{tan.}\,[m-\tfrac{1}{2}(g+g')]=\frac{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(d+d')}{\text{tan.}\,\frac{1}{2}(d-d')}\,\text{tan.}\,\tfrac{1}{2}(g'-g) \quad ....(8)$$

ecuación que determina la indicación meridiana m.

Debemos advertir que supusimos la numeración del instrumento creciendo de izquierda á derecha, como es habitualmente el caso. Por consiguiente, el primer miembro de nuestra ecuación será positivo ó negativo, esto es, m será mayor ó menor que $\frac{1}{2}(g+g')$ según que las dos estrellas se hayan observado al Oeste ó al Este del meridiano. Cuando se combine la digresión oriental de la una con la occidental de la otra, el signo del primer miembro será el mismo que tenga la digresión que sea numéricamente mayor. Todo esto resulta sin dificultad del juego de los signos de las líneas trigonométricas contenidas en el segundo miembro; pero es importante notar que en el último caso que hemos considerado, como $g'-g$ representa siempre la diferencia algebraica de ambos azimutes máximos, es claro que cuando estos sean de distintos signos representará su suma numérica; y por consiguiente el arco $\frac{1}{2}(g+g')$ equivaldrá á su semidiferencia también numérica. De esta consideración se deduce que debe invertirse entonces la relación de que partimos, lo cual equivale á invertir la fracción que figura en el segundo miembro. Así, pues, en el caso de haberse combinado una elongación oriental con otra occidental, se tendrá:

$$\tan.[m-\tfrac{1}{2}(g+g')]=\frac{\tan.\frac{1}{2}(d-d')}{\tan.\frac{1}{2}(d+d')}\tan.\tfrac{1}{2}(g'-g) \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Con el fin de facilitar la elección de estrellas para todas estas combinaciones, he preparado la tabla que sigue para la latitud $\varphi=19°26'$ de la ciudad de México ([1]). Contiene las horas siderales de las digresiones oriental y occidental de 20 estrellas cuyas distancias polares no exceden de 30°; y se han añadido, además, sus distancias zenitales y sus azimutes máximos para hallarlas sin dificultad en el cielo. Estos elementos están calculados por las fórmulas:

$$\cos.h=\frac{\tan.\varphi}{\tan.\delta} \qquad \cos.z=\frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\delta} \qquad \text{sen.}\,a=\frac{\cos.\delta}{\cos.\varphi} \qquad \tau=\alpha\pm h$$

([1]) Esta Tabla está extractada de la más extensa que presenté la Ministerio de Fomento en Junio de 1880, y que se imprimió en el año siguiente.

En cuanto á la *Epoca*, tiene el mismo significado y el mismo uso que explicamos en el número 193.

ESTRELLAS.	AL OESTE.		AL ESTE.		z	a
	τ	Época.	τ'	Epoca.		
	h m		h m		° ′	° ′
δ *Ursæ minoris*	0 9	Nov. 7	12 18	Mayo 11	70 32	± 3 36
δ *Draconis*	0 30	Nov. 15	13 46	Junio 2	68 53	24 1
ε *Draconis*	1 19	Nov. 25	14 18	Junio 11	69 15	21 20
κ *Cephei*	1 55	Dic. 4	14 31	Junio 14	70 3	13 27
α *Cephei*	2 32	Dic. 14	15 59	Julio 6	67 52	29 49
β *Cephei*	2 57	Dic. 20	15 57	Julio 5	69 16	21 16
ι *Cephei*	4 8	Enero 7	17 22	Julio 27	68 33	26 3
γ *Cephei*	5 15	Enero 24	17 53	Agto. 4	70 1	13 53
α *Ursæ majoris*	16 13	Julio 10	5 38	Enero 30	67 57	29 23
λ *Draconis*	16 54	Julio 20	5 53	Fbro. 2	69 15	21 14
ξ *Draconis*	17 59	Agto. 6	6 57	Fbro. 19	69 20	20 44
α *Ursæ minoris* (Polar)	7 10	Fbro. 22	19 14	Agto. 25	70 33	1 27
50 *Cassiopeæ*	7 26	Fbro. 26	20 19	Sept. 10	69 30	19 20
ι *Cassiopeæ*	7 44	Mzo 2	20 53	Sept. 19	68 47	24 40
α *Draconis*	19 23	Agto. 27	8 39	Mzo. 16	68 27	26 38
β *Ursæ minoris*	20 29	Sept. 13	9 13	Mzo. 25	69 49	16 16
γ^2 *Ursæ minoris*	20 55	Sept 19	9 49	Abril 3	69 33	18 49
9 *Camelopardi*	10 5	Abril 7	23 17	Otbre. 25	68 40	25 25
η *Draconis*	21 39	Sept. 30	11 6	Abril 23	67 49	30 4
ε *Ursæ minoris*	22 48	Otbre 18	11 10	Abril 24	70 23	± 8 14

Aunque esta tabla está calculada para $\varphi=19°\,26'$ como he dicho, puede aplicarse también á la determinación de los mismos elementos para otra latitud φ', sin necesidad de recurrir á las Efemérides, sino por medio de las ecuaciones siguientes, que se derivan de las anteriores:

$$\cos.h'=\frac{\tan.\varphi'}{\tan.\varphi}\cos.h \qquad \cos.z'=\frac{\text{sen.}\,\varphi'}{\text{sen.}\,\varphi}\cos.z \qquad \text{sen.}\,a'=\frac{\cos.\varphi}{\cos.\varphi'}\,\text{sen.}\,a$$

El valor de h en arco se deduce de la relación $h=\frac{1}{2}(\tau-\tau')$, que expresa el ángulo horario en tiempo, ó sea la semidiferencia de las horas de las elongaciones occidental y oriental, añadiendo 24^h á la primera cuando la segunda sea mayor que ella. En cuanto á la ascensión recta de la estrella, se tiene $\alpha=\frac{1}{2}(\tau+\tau')$, que combinada con h', dará las horas de las digresiones para la latitud φ'.

No creo inútil hacer notar que, en esos instantes, z nunca difiere mucho de la colatitud; y que, por consiguiente, para la nueva latitud casi siempre podrá tomarse $z' = z - (\varphi' - \varphi)$, al menos para el objeto de hallar la estrella en el campo del telescopio, y cuando la diferencia de latitudes no exceda de unos 5° ó 6°.

238.—También el sol se aplica á la medida de los azimutes, consistiendo la operación en medir el ángulo horizontal comprendido entre la señal y uno de los dos bordes del astro, y en anotar las horas correspondientes del cronómetro. Calculando en seguida la hora verdadera de la observación, se deduce el ángulo horario del sol, ó interpolando para el mismo instante su declinación, se reunen los datos necesarios para aplicar la ecuación (1). Si sólo se han medido los ángulos respecto de uno de los bordes, es preciso tomar en cuenta el azimut del semidiámetro, que es:

$$\varDelta a = \frac{s}{\text{sen. } z} \quad \text{..........................} \quad (10)$$

puesto que los dos planos verticales que pasan el uno por el centro del astro y el otro tangente á uno de sus bordes, interceptan ese arco del horizonte. La cantidad $\varDelta a$, aplicada con el signo conveniente al azimut a del centro, obtenido por la fórmula (1), suministrará el del limbo cuyas distancias á la señal se hayan medido. En las observaciones solares, tanto por comodidad como por la menor influencia de los pequeños errores que pudieran tener los elementos del cálculo, conviene observar el astro á poca altura respecto del horizonte, por lo cual se practican generalmente las medidas angulares poco después de su orto ó poco antes de su ocaso.

CAPITULO XII.

DETERMINACIÓN DEL AZIMUT.—MÉTODO DE DISTANCIAS ANGULARES ENTRE LA SEÑAL Y LA ESTRELLA, CONOCIENDO LA DISTANCIA ZENITAL DE ÉSTA.

239.—En lugar del dato ó elemento cronométrico al medir el ángulo horizontal comprendido entre la señal y el astro, puede hacerse uso de la distancia zenital de éste, medida directamente; porque también de esa manera se reunen los tres elementos indispensables para la resolución del triángulo astronómico, á saber: la latitud φ de la estación, la declinación δ de la estrella y su distancia zenital z. Es fácil, por lo mismo, calcular su azimut por medio de las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{ll} m = \tfrac{1}{2}(z + \varphi + \delta) & n = \tfrac{1}{2}(z + \varphi - \delta) \\ \multicolumn{2}{c}{\text{sen. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\dfrac{\cos. m \text{ sen. } n}{\cos. \varphi \text{ sen. } z}}} \end{array}\right\} \quad \text{..............} \quad (1)$$

Suponiendo pequeños errores en todos los datos del problema, el que resulta en el azimut será:

$$\varDelta a = \frac{da}{dz} \varDelta z + \frac{da}{d\varphi} \varDelta \varphi + \frac{da}{d\delta} \varDelta \delta$$

y para deducir las condiciones más ventajosas, analicemos la ecuación siguiente, de la cual provienen las anteriores:

$$\text{sen.}\,\delta = \text{sen.}\,\varphi \cos.z + \cos.\varphi\,\text{sen.}\,z \cos.a$$

Diferenciándola sucesivamente respecto de cada uno de los elementos, es fácil hallar:

$$\frac{d\,a}{d\,z} = \frac{\cos.a \cot.z - \tan.\varphi}{\text{sen.}\,a}$$

$$\frac{d\,a}{d\,\varphi} = \frac{\cot.z - \tan.\varphi \cos.a}{\text{sen.}\,a}$$

$$\frac{d\,a}{d\,\delta} = -\frac{\cos.\delta}{\cos.\varphi\,\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,z} = -\frac{1}{\cos.\varphi\,\text{sen.}\,h}$$

El primer coeficiente se nulifica cuando el triángulo astronómico es rectángulo en la estrella; el segundo cuando lo es en el polo; y el tercero adquiere el menor valor posible también cuando $h = 90°$. Estas tres condiciones se logran simultáneamente, casi con entera exactitud, observando una circumpolar en los momentos de su mayor elongación; porque en ese instante es recto su ángulo paraláctico y se acerca tanto más á serlo su ángulo horario, cuanto menor sea la distancia polar de la estrella. Debe notarse igualmente que como no varían de signo los numeradores de los tres coeficientes, ya sea que se practique la observación al Este ó al Oeste del meridiano, y sí los de sus denominadores, se infiere que los pequeños errores de los datos producirán efectos contrarios, y numéricamente iguales, si se observa la estrella en posiciones simétricas á un lado y otro de aquel plano.

Las estrellas que no pueden observarse en los momentos en que el plano vertical es tangente á sus círculos de declinación, por ser esta coordenada menor que la latitud del lugar, deberán observarse con el mayor azimut posible; porque las expresiones de los coeficientes manifiestan que, en igualdad de circunstancias, disminuyen sus valores á medida que crece el azimut. Observando una estrella

cerca del primer vertical, podremos suponer $a = 90°$, en cuyo caso se tiene:

$$\frac{d\,a}{d\,z} = -\tan.\varphi$$

$$\frac{d\,a}{d\varphi} = +\cot.z$$

$$\frac{d\,a}{d\,\delta} = -\frac{\cos.\delta}{\cos.\varphi\,\text{sen.}\,z}$$

Estas cantidades demuestran que el método es favorable en las bajas latitudes, é indican la conveniencia de que sea considerable la distancia zenital del astro en el instante de la observación.

240.—La medida de un azimut por este método, si bien no demanda el uso de un cronómetro, exige en cambio el de los instrumentos meteorológicos para calcular la refracción, á fin de corregir la distancia zenital aparente del astro. En cuanto á la observación es bastante sencilla, pues se reduce á leer las indicaciones de los círculos horizontal y vertical luego que se haya cortado la estrella por la intersección de los hilos de la retícula. La lectura del círculo azimutal, comparada con la que se obtiene al visar la señal, da el ángulo formado por los planos verticales que pasan por los dos objetos; y la del otro círculo, corregida por la colimación en el sentido vertical (Tomo I, número 243), proporciona la distancia zenital aparente de la estrella. Es claro que deben tomarse en cuenta las indicaciones de los niveles para obtener los ángulos correctos, según se ha explicado varias veces.

Con el fin de presentar un tipo del cálculo que demanda este método, tomemos por dato el promedio de los que figuran en el Capítulo anterior, á saber:

$$A = 238°\,41'\,17''$$

Suponiendo que por distancia zenital verdadera de la polar, se hubiera obtenido $z = 72°\,00'\,44''.6$ en el instante que corresponde á este promedio, tendríamos:

$$
\begin{array}{rll}
\tfrac{1}{2}(\varphi + z) = & 45^\circ\, 43'\ \ 3''.8 & \\
\tfrac{1}{2}\,\delta = & 44\ \ 16\ \ 55\ .1 & \\
\hline
m = & 89^\circ\, 59'\, 58''.9 & \ldots\ldots\ldots\ldots \cos \ldots\ldots \quad 4.72696 \\
n = & 1\ \ 26\ \ \ 8\ .7 & \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{sen} \ldots\ldots \quad 8.39891 \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ 3.12587 \\
\tfrac{1}{2}\,a = & \quad 1'\, 20'' & \qquad \cos.\varphi \ldots\ldots -9.97455 \\
a = & +\,0^\circ\ \ 2\ 40 & \qquad \mathrm{sen}.\,z \ldots\ldots -9.97824 \\
A = & 238\ \ 41\ 17 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ 3.17308 \\
\hline
u = & 238^\circ\, 43'\, 57'' & \qquad \mathrm{sen}.\tfrac{1}{2}\,a \ldots\ldots \quad 6.58654
\end{array}
$$

Las circunstancias del ejemplo precedente son, sin embargo, altamente desfavorables para la aplicación de este procedimiento, á causa de hallarse la estrella muy próxima al meridiano, que es precisamente lo que debe evitarse según lo indican los coeficientes de los errores. El error de 1″ solamente en la distancia zenital, produciría en el azimut otro de más de 30″, pues el valor de su coeficiente, calculado con los datos φ, z y con el resultado a, es próximamente:

$$\frac{da}{dz} = -36$$

CAPITULO XIII.

DETERMINACIÓN DEL AZIMUT.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES POR DOS ESTRELLAS.

241.—En el Capítulo II, Sección I de mis *Nuevos Métodos Astronómicos*, he expuesto un procedimiento para trazar el meridiano ó para medir el azimut de una señal, en el cual procuré cumplir las condiciones favorables que indica el análisis de los Capítulos XI y XII de este libro. Consiste en observar con un altazimut dos estrellas á la misma altura, y en anotar las horas en que ambas pasan por el hilo horizontal, en el punto en que éste es cortado por el vertical del centro. Este dato, la posición de las estrellas y las graduaciones del círculo azimutal, que se obtienen inmediatamente después de apuntadas las horas cronométricas, bastan para determinar la indicación que señalaría el mismo círculo cuando el eje óptico del telescopio coincidiese con el meridiano, y en consecuencia el azimut de una señal conociendo la graduación que se obtendría al visarla.

Cuando se sabe de antemano el estado del cronómetro, se deducen desde luego, de las horas cronométricas, las siderales exactas de las observaciones, y por consiguiente los ángulos horarios de ambas estrellas, que, como veremos, entran como elemento en el cálculo que voy á desarrollar. Si no se conoce el estado del guarda-tiempo, las mismas observaciones sirven para determinarlo, aplicando el procedimiento del Capítulo VIII, de suerte que este método permite hallar simultáneamente el azimut y la hora. Para aplicarlo de esta manera, debe fijarse la alidada del círculo azimutal luego que se presente la primera estrella en el campo del telescopio, y como su movimiento aparente será oblicuo respecto de los hilos, se moverá lentamente el tornillo de aproximación á fin de que los pasos por los hilos horizontales que preceden al central, se verifiquen hacia el medio del campo; y al pasar por el hilo horizontal del centro, se hará que la estrella quede exactamente cortada por el hilo vertical del medio, paralizando entonces el movimiento del tornillo con el objeto de que permanezca el telescopio en el azimut que tenía la estrella en ese instante; porque la graduación correspondiente del círculo horizontal es uno de los datos del problema, y en consecuencia, debe leerse al terminar la observación de los pasos por los hilos restantes. Estos últimos pueden tener lugar lejos del centro, lo cual no ofrece inconveniente alguno, con tal de que se haya rectificado bien la situación exactamente horizontal de todos los hilos (número 47). En seguida se observa la segunda estrella procediendo de una manera idéntica. Es claro que durante toda la operación debe permanecer fijo el círculo vertical, á fin de cumplir la condición de igualdad de distancias zenitales.

242.—Llamando ahora a y a' los azimutes de las dos estrellas en los instantes de sus respectivos tránsitos por la intersección de los hilos centrales, tendremos las dos ecuaciones:

$$\text{sen.}\, a = \frac{\text{sen.}\, h \cos.\delta}{\text{sen.}\, z} \qquad \text{sen.}\, a' = \frac{\text{sen.}\, h' \cos.\delta'}{\text{sen.}\, z}$$

y sustituyendo estos valores en la relación:

$$\frac{\tan.\frac{1}{2}(a+a')}{\tan.\frac{1}{2}(a-a')} = \frac{\text{sen.}\, a + \text{sen.}\, a'}{\text{sen.}\, a - \text{sen.}\, a'}$$

hallaremos la siguiente:

$$\frac{\tan.\frac{1}{2}(a+a')}{\tan.\frac{1}{2}(a-a')} = \frac{\text{sen.}\, h \cos.\delta + \text{sen.}\, h' \cos.\delta'}{\text{sen.}\, h \cos.\delta - \text{sen.}\, h' \cos.\delta'}$$

Busquemos expresiones equivalentes á la semisuma y á la semidiferencia de los azimutes; siendo g y g' las graduaciones obtenidas

en el círculo horizontal, y m la indicación incógnita que daría el mismo círculo al coincidir con el meridiano el telescopio, dirigido hacia el Norte, se tiene evidentemente:

$$a = m - g \qquad a' = m - g'$$

valores que combinados por adición y substracción producen:

$$a + a' = 2m - (g + g') \qquad a - a' = g' - g$$

con lo cual nuestra ecuación adquiere la forma:

$$\frac{\tan.[m - \frac{1}{2}(g+g')]}{\tan.\frac{1}{2}(g'-g)} = \frac{\text{sen.}\, h \cos.\delta + \text{sen.}\, h' \cos.\delta'}{\text{sen.}\, h \cos.\delta - \text{sen.}\, h' \cos.\delta'}$$

Para aplicarle fácilmente el cálculo logarítmico, hagamos uso de un ángulo subsidiario x determinado por la relación:

$$\tan.(x - 45°) = \frac{\text{sen.}\, h' \cos.\delta'}{\text{sen.}\, h \cos.\delta} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dividiendo ahora por sen. h cos. δ el numerador y el denominador del segundo miembro de la ecuación precedente, y sustituyendo el de la última se obtiene:

$$\frac{\tan.[m - \frac{1}{2}(g+g')]}{\tan.\frac{1}{2}(g'-g)} = \frac{1 + \tan.(x - 45°)}{1 - \tan.(x - 45°)}$$

la que desarrollada y reducida produce finalmente:

$$\tan.[m - \tfrac{1}{2}(g+g')] = \tan.x \tan.\tfrac{1}{2}(g'-g) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Una vez calculado el ángulo auxiliar x por la fórmula (1), la (2) determina la indicación meridiana m, puesto que se conoce g y g'. Por consiguiente, si es G la lectura del círculo horizontal al visar la señal cuyo azimut u se trata de medir, tendremos:

$$u = m - G \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

243.—En todo lo anterior he supuesto que la graduación está numerada de izquierda á derecha, que es lo más común; mas si no fuere así, con facilidad se introducirán en las fórmulas las modificaciones necesarias. Las lecturas G, g y g' se suponen ya corregidas por nivel y colimación (número 52). Importa igualmente anotar las indicaciones del nivel paralelo al círculo vertical, pues aunque las pequeñas diferencias de altura no influyen sensiblemente en los valores de g y g' cuando las estrellas se observan con el mayor azimut posible, sirven para corregir las horas, según lo expuesto en el número 198 y en la aplicación del 205.

Ejemplo.—El día 1º de Diciembre de 1865 observé á la misma altura las dos estrellas siguientes, en un lugar cuya latitud es $\varphi = 22°9'$, sirviéndome de un cronómetro solar que atrasaba $0^s.6$ por hora. Las horas cronométricas, las posiciones de las estrellas y las graduaciones correctas, que se suponen suministradas por el círculo azimutal, constan á continuación:

α Tauri al Este.		*α Pegasi* al Oeste.	
$t' = 8^h41^m53^s.10$	$\alpha' = 4^h28^m15^s.56$	$t = 9^h\ 3^m17^s.10$	$\alpha = 22^h58^m\ 5^s.50$
$g' = 312°25'37''$	$\delta' = 16°14'\ 9''.1$	$g = 129°37'32''$	$\delta = 14°29^m17''.2$

Con los primeros datos se obtienen, por las fórmulas (6) del Capítulo VIII, los elementos $\theta = 43°\ 57'\ 13''.3$ y $\varepsilon = -0°\ 15'\ 48''.7$, y con ellos:

$$h = \varepsilon + \theta = +43°\,41'\,24''.6 \qquad h' = \varepsilon - \theta = -44°\,13'\,2''.0$$

Apliquemos las fórmulas (1) y (2) para determinar la graduación meridiana m, siendo $\frac{1}{2}(g+g') = 221°\,1'\,34''.5$ y $\frac{1}{2}(g'-g) = 91°24'2''.5$.

$$\begin{array}{lr}
\text{sen.}\,h' \ldots\ldots & 9.8434698- \\
\cos.\,\delta' \ldots\ldots & 9.9823251 \\
\text{sen.}\,h \ldots\ldots & -9.8393262 \\
\cos.\,\delta \ldots\ldots & -9.9859649 \\
\hline
\tan.(x-45°)\ldots & 0.0005038- \\
x - 45° = & 134°58'00''.4 \\
x = & 179\ 58\ 00\ .4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\tan.\,x \ldots\ldots & 6.7633025- \\
\tan.\,\frac{1}{2}(g'-g) \ldots\ldots & 1.6116929- \\
\hline
\tan.[m-\frac{1}{2}(g+g')] \ldots\ldots & 8.3749954 \\
m - \frac{1}{2}(g+g') = & +1°21'30''.4 \\
\frac{1}{2}(g+g') = & 221\ \ 1\ 34\ .5 \\
\hline
m = & 222°\,23'\,\ 5''
\end{array}$$

Con el valor de m se tendrá:

$$\begin{array}{ll}
\text{Azimut de } \alpha \textit{ Tauri} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m - g' = -90°\ \ 2'32'' \\
\text{Azimut de } \alpha \textit{ Pegasi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m - g\ = +92\ 45\ 33
\end{array}$$

y suponiendo que, al visar una señal, se hubiera obtenido............ $G = 287°\ 52'\ 43''$, su azimut sería: $u = m - G = -65°\ 29'\ 38''$ del Norte al Este, ó bien $294°\ 30'\ 22''$ del Norte hacia el Oeste, en el orden de los cuadrantes.

244.—Las graduaciones meridianas m hacia el Norte, y $180° + m$ hacia el Sur, permiten también establecer una señal exactamente en el plano del meridiano, pues basta hacer que la alidada indique cualquiera de ellas, y situar la señal en coincidencia con la intersección de los hilos. Si con el círculo azimutal pueden obtenerse las lecturas aproximadas hasta los segundos, se usa desde luego el valor de m tal como resulta del cálculo; mas si no es así, se establece la alidada en la graduación más inmediata, y después de colocada provisionalmente la señal como se ha indicado, se corrige su posición como se explicó en el número 86 del Tomo I. Suponiendo, por ejemplo, que el instrumento sólo diese una aproximación de $10''$, pondríamos en nuestro caso la alidada en $222°\ 23'\ 00''$ ó en $222°\ 23'\ 10''$, y la señal establecida en esa dirección á la distancia k del telescopio, se movería en seguida la cantidad $5\,k\,\text{sen.}\,1''$ hacia la derecha del observador en el primer caso, y hacia su izquierda en el segundo.

245.—Cuando se observa una sola estrella á la misma altura, tanto al Este como al Oeste del meridiano, se tiene $\delta = \delta'$, y sus ángulos horarios serán iguales numéricamente y de signos contrarios, por lo que la ecuación (1) dará:

$$\tan.(x - 45°) = -1$$

relación que corresponde á $x = 0°$ ó á $x = 180°$. En ambos casos se tiene $\tan.\,x = 0$, y por consiguiente la fórmula (2) produce.

$$m = \frac{1}{2}(g + g')$$

Este resultado demuestra que la graduación meridiana es entonces igual al término medio de las dos lecturas del círculo azimutal. Se recordará que este fué uno de los métodos para trazar el meridiano que expuse en la Topografía, y si bien es el más sencillo por no demandar casi cálculo alguno, tiene el inconveniente de exigir el transcurso de varias horas para terminar la operación, al ménos si se desea observar la estrella en las mejores condiciones posibles.

CAPITULO XIV.

DETERMINACIÓN DEL AZIMUT.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DEL SOL.

246.—Si se observa el sol á la misma altura de un lado y otro del meridiano, de manera que á la vez que su limbo superior ó su limbo inferior toquen alguno de los hilos horizontales, el borde boreal ó el austral sean tangentes al hilo vertical del centro, se podrá también determinar la graduación meridiana m en función de las lecturas g' y g del círculo azimutal y del ángulo horario del astro, obtenido por la semidiferencia de las horas cronométricas correspondientes.

Considerado este método como caso particular del que he expuesto en el Capítulo precedente, sería fácil derivar de las fórmulas que allí se establecieron, las que deben aplicarse á las observaciones del sol; pero es tal vez más sencillo desarrollarlas directamente de este modo. Llamando a el valor numérico del azimut del centro del sol en el instante de la observación antemeridiana, y $a + \Delta a$ el que tiene á la hora de la postmeridiana, consideraré á Δa como la variación originada por el cambio de declinación del astro; porque si esta coordenada fuera constante, ambos azimutes serían numéricamente iguales, como en el caso de una estrella. Representando, pues, por δ' y δ las declinaciones del sol en los mismos instantes, tendremos $\Delta\delta = \delta - \delta'$, y por consiguiente:

$$\Delta a = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\delta}\Delta\delta$$

En el número 239 hallamos

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\delta}=-\frac{1}{\cos.\varphi\,\mathrm{sen.}\,h}$$

por lo cual designando por $2\theta=T-T'$ el tiempo solar transcurrido entre las dos observaciones, la cantidad θ representará el ángulo horario del sol, y así la variación de su azimut será:

$$\varDelta a=-\frac{\delta-\delta'}{\cos.\varphi\ \mathrm{sen.}\,\theta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Siendo ahora m la indicación meridiana, y teniendo presente que al Este del meridiano los azimutes son negativos, los del borde observado tienen por expresiones:

$$-\left(a\pm\frac{s}{\mathrm{sen.}\,z}\right)=m-g'$$

$$a+\varDelta a\pm\frac{s}{\mathrm{sen.}\,z}=m-g$$

que dan combinadas por adición:

$$m=\tfrac{1}{2}(g+g')+\tfrac{1}{2}\varDelta a$$

y sustituyendo el valor (1) de $\varDelta a$, resulta:

$$m=\tfrac{1}{2}(g+g')-\frac{\delta-\delta'}{2\cos.\varphi\,\mathrm{sen.}\,\theta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

La diferencia de declinaciones puede expresarse en función del tiempo transcurrido y de la variación horaria v de la declinación, interpolada con ayuda de las Efemérides del sol para la hora del medio día verdadero local (números 154 y 203). La expresión de aquella diferencia es, pues: $\delta-\delta'=2\theta v$, y, en consecuencia, la de m será:

$$m=\tfrac{1}{2}(g+g')-\frac{\theta v}{\cos.\varphi\,\mathrm{sen.}\,\theta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

Todavía es posible dar una forma más sencilla á esta ecuación in-

troduciendo en ella el coeficiente designado por A en el número 202; con lo cual se representará así:

$$m=\tfrac{1}{2}(g+g')-\frac{15\,A\,v}{\cos.\varphi}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

y al aplicarla se tomará, con el intervalo $T-T'$ por argumento, el log. A de la Tabla IV que va al fin de este libro. El cálculo es tan fácil de esta manera, que me parece innecesario presentar un ejemplo numérico, y sólo recordaré que v es positiva desde el solsticio de invierno hasta el de estío, y negativa durante la otra mitad del año.

247.—La fórmula (2) es también aplicable al caso de haberse observado dos estrellas por el método del Capítulo anterior, siempre que la diferencia de sus declinaciones no exceda de 1° ó 2°, tomando en tal caso por θ el promedio numérico de sus ángulos horarios. Haciendo uso de los datos del número 243, se halla $\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')=-3145''.9$ y $\theta=43°\,57'\,13''$, y así tendremos:

$\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')$	3.49774–		
cos. φ	–9.96670		
sen. θ	–9.84141	$\tfrac{1}{2}(g+g')=$	221° 1′ 34″.5
	3.68963–	....	+1 21 33 .6
		$m=$	222° 23′ 8″.1

resultado que es casi idéntico al que se obtuvo allí, no obstante el valor considerable de $\delta-\delta'$.

Es claro que lo mismo que en el caso de las estrellas, puede determinarse por medio del sol la hora exacta de la observación; porque como se anotan las cronométricas correspondientes á la igualdad de sus alturas, es inmediatamente aplicable el procedimiento que para hallar la corrección del cronómetro se ha expuesto en el Capítulo IX.

CAPITULO XV.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO GENERAL CONOCIENDO LA DISTANCIA ZENITAL DE UN ASTRO Y LA HORA DE LA OBSERVACIÓN.

248.—En el número 126 he dado una idea general del procedimiento por cuyo medio se obtiene la latitud, y que consiste en medir la distancia zenital de un astro á una hora conocida. Teniendo, en efecto, los datos z, h y δ, pueden aplicarse desde luego las fórmulas (6) de la página ~~citada~~ 479, que son:

$$\tan. M = \frac{\tan.\delta}{\cos. h} \qquad \cos.(M-\varphi) = \frac{\text{sen}. M}{\text{sen}.\delta}\cos. z \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Por la primera se determina el ángulo subsidiario M; la segunda da $M-\varphi$; y por consiguiente se obtendrá: $\varphi = M-(M-\varphi)$.

Este método es el más general y el que sirve de base á todos los que expondré en los Capítulos siguientes, por lo cual conviene investigar desde ahora las condiciones más ventajosas de la observación, desde el punto de vista de la menor influencia de los pequeños errores que pudieran tener los datos del problema. Siendo el del resultado una función de éstos, tendremos:

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dz}\Delta z + \frac{d\varphi}{dh}\Delta h + \frac{d\varphi}{d\delta}\Delta\delta$$

Las fórmulas (1) se derivan de la siguiente fundamental, que emplearemos para hallar los coeficientes diferenciales:

$$\cos. z = \text{sen}.\varphi\,\text{sen}.\delta + \cos.\varphi\cos.\delta\cos. h$$

Diferenciándola con relación á φ, y sucesivamente respecto de los tres elementos z, h y δ, obtendrémos por medio de sencillas transformaciones:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{-\text{sen}. z}{\cos.\varphi\,\text{sen}.\delta - \text{sen}.\varphi\cos.\delta\cos. h} = \frac{-\text{sen}. h}{\text{sen}.a(\cos.\varphi\tan.\delta - \text{sen}.\varphi\cos. h)} = -\frac{1}{\cos. a}$$

$$\frac{d\varphi}{dh} = \frac{\cos.\varphi\,\text{sen}. h}{\cos.\varphi\tan.\delta - \text{sen}.\varphi\cos. h} = \cos.\varphi\tan. a$$

$$\frac{d\varphi}{d\delta} = \frac{\cos.\varphi\tan.\delta\cos. h - \text{sen}.\varphi}{\cos.\varphi\tan.\delta - \text{sen}.\varphi\cos. h} = \frac{\cos.\varphi\tan. a}{\text{sen}. h}(\tan.\delta\cos. h - \tan.\varphi)$$

249.—Estos coeficientes manifiestan que, en general, la influencia de los errores decrece con el azimut del astro. El primero nunca es nulo; pero adquiere el menor valor posible cuando a es igual á 0° ó á 180°. En tales casos $\frac{d\varphi}{dz}$ será respectivamente igual á -1 ó á $+1$, lo cual significa que el error resultante en la latitud es el mismo que el que tenga la distancia zenital, siempre que se observe el astro en el momento de su culminación. En cualquier otro azimut, $\Delta\varphi$ resultará mayor que Δz, aunque siendo a pequeño ó muy próximo á 180°, puede suponerse que el coeficiente tiene la unidad por valor constante. De aquí se deduce que para que el error de la latitud no exceda del que pueda tener z, deben observarse los astros tan cerca del meridiano como sea posible, y nunca en las inmediaciones del primer vertical.

El segundo coeficiente se nulifica cuando a sea de 0° ó de 180°, lo cual recomienda igualmente que las observaciones que tengan por objeto la determinación de la latitud, se hagan en los momentos de la culminación del astro, ó por lo menos cuando sea pequeño su azimut.

El tercer coeficiente puede considerarse compuesto de dos factores: el primero $\frac{\cos.\varphi\tan. a}{\text{sen}. h}$, sólo puede ser nulo siéndolo $\tan. a$; pero como en tal caso también h es igual á 0° ó á 180°, resulta que ese factor se presentará bajo la forma de la indeterminación. Esto no obstante, será muy pequeño su valor siempre que sea poco considerable el azimut, y próximo á 90° el ángulo horario; circunstancias que se reunen en las circumpolares observadas cerca de sus elongaciones. El segundo factor tan. δ cos. h — tan. φ se reduce á 0 cuando es recto el ángulo paraláctico, pues entonces se tiene:

$$\text{cot.}\,\delta = \text{cot.}\,\varphi\ \text{cos.}\,h.$$

En consecuencia, del estudio de ambos factores se deduce que un pequeño error en la declinación del astro no tiene influencia sensible siendo éste una estrella circumpolar observada en los momentos de sus elongaciones.

Atendiendo á que

$$\frac{\text{tan.}\,a}{\text{sen.}\,h} = \frac{1}{\text{tan.}\,\delta\,\text{cos.}\,\varphi - \text{sen.}\,\varphi\,\text{cos.}\,h},$$

el mismo coeficiente puede ponerse bajo la forma:

$$\frac{d\,\varphi}{d\,\delta} = \frac{\text{cos.}\,\varphi\,\text{tan.}\,\delta\,\text{cos.}\,h - \text{sen.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi\,\text{tan.}\,\delta - \text{sen.}\,\varphi\,\text{cos.}\,h}$$

y por ella se ve que cuando $h = 0°$, ó bien $h = 180°$, resulta:

$$\frac{d\,\varphi}{d\,\delta} = +1 \quad \text{ó} \quad \frac{d\,\varphi}{d\,\delta} = -1 \ \text{respectivamente},$$

lo cual manifiesta que el error de la latitud es igual al que tenga la declinación, siempre que se observe el astro en los instantes de sus tránsitos por el meridiano. De aquí se infiere que observando una estrella cerca de la culminación, la influencia de $\varDelta\,\delta$ es mayor que cuando se observa con la proximidad de sus elongaciones ó digresiones; pero debe tenerse presente que como para determinar la latitud siempre se emplean estrellas cuyas posiciones son muy bien conocidas, tales como las llamadas *fundamentales*, que son las que constan en todas las Efemérides, pueden considerarse nulos los errores de sus declinaciones, y en consecuencia, prescindirse de la condición favorable á la menor influencia de este error, para atender preferentemente á las que se refieren á los otros errores $\varDelta z$ y $\varDelta h$, que

son los que puede cometer el observador, por ser los datos que obtiene por medidas directas. Así, pues, como resultado general del análisis precedente, estableceremos la regla de que cuando el objeto de las observaciones sea el de determinar la latitud, conviene tomar las distancias zenitales tan cerca del meridiano como sea posible.

250.—Es preciso tener presente que, en esas circunstancias, las variaciones de altura no pueden suponerse proporcionales á los intervalos de tiempo transcurridos entre las observaciones, al menos cuando sean algo considerables; y así es que tomando una serie de distancias zenitales, no deberá mirarse su promedio como correspondiente al de las horas respectivas, si la observación dura más de 4^m ó 5^m. Lo más conveniente, en tales casos, es agrupar los datos en series parciales, de manera que sus horas extremas no difieran sino unos cuantos minutos; ó bien calcular individualmente cada una de las observaciones, aplicando las fórmulas (1) con valores simultáneos de h y z, lo cual es fácil siempre que conociendo el efecto de la colimación vertical, pueda usarse el círculo en una sola posición. Lo es igualmente siempre que se trabaje con sextante; pero si se miden las distancias zenitales con círculo repetidor, lo que debe hacerse es procurar hacer pronto dobles observaciones, leyendo la graduación del círculo al fin de cada observación de orden par. Entonces la mitad del ángulo recorrido por la alidada, da la distancia zenital aparente del astro, que sin error de importancia, puede suponerse correspondiente al promedio de las dos indicaciones del cronómetro, siendo pequeña la diferencia de éstas. Por otra parte, en la página 105 y siguientes de mis *Nuevos Métodos Astronómicos* puede verse el modo de corregir el promedio de las horas para hacerlo corresponpondiente al de las distancias zenitales cuando sea algo considerable la duración de la serie de observaciones.

251.—Presentemos ahora algunos ejemplos de este método para determinar la latitud. El 26 de Mayo de 1857 observé en Mixcoac la estrella β *Ursæ minoris* fuera del meridiano, con un círculo repetidor y un cronómetro solar que, á la hora de la observación, tenía un adelanto de $2^m\,1^s.76$. La distancia zenital corregida por los errores del instrumento y por la refracción fué $z = 59° 50' 41''.2$ y la hora cronométrica la que va á continuación. La posición de la estrella era: $\alpha = 14^h\ 51^m\ 16^s.29$ y $\delta = +\ 74° 44' 18''.9$.

$t = 7^h 43^m 55^s.62$	tan. δ... 0.5640834	sen. M....... 9.9914547
$\Delta t = -2\ \ 1.76$	cos. h...$-$9.8658563	cos. z......... 9.7010015
		sen. δ.........$-$9.9844080
Hora media $= 7^h 41^m 53^s.86$	tan. M.. 0.6982271	
As. recta $= 4\ 17\ \ 5.50$		cos. $(M-\varphi)$.. 9.7080482
Acel. $= +\ 1\ 15.88$	$M = 78°40'16''.3$	
		$M-\varphi = 59° 17' 55''.5$
Hora sid. $= 12^h 00^m 15^s.24$		$M = 78\ 40\ 16.3$
$\alpha = 14\ 51\ 16.29$		
		$\varphi = 19° 22' 20''.8$
$h = \begin{cases} -\ 2^h 51^m\ 1^s.05 \\ -42°45'15''.7 \end{cases}$		

En la misma estación tomé el 23 de Junio de 1857 la distancia zenital de la estrella polar después de su tránsito inferior. Los datos corregidos como antes, fueron $z = 71° 52' 31''.0$ y la hora sideral correspondiente, $T = 15^h 10^m 56^s.96$. La posición de α *Ursæ minoris* era: $\alpha = 1^h 6^m 40^s.80$ y $\delta = 88° 32' 41''.5$. Se tendrá, pues:

$T = 15^h 10^m 56^s.96$	tan. δ... 1.5951249	sen. M........ 9.9998967
$\alpha = 1\ \ 6\ 40.80$	cos. h...$-$9.9327586$-$	cos. z.......... 9.4928812
		sen. δ..........$-$9.9998599
$h = \begin{cases} -\ \ 9^h 55^m 43^s.84 \\ -148°55'57''.6 \end{cases}$	tan. M.. 1.6623663$-$	
	$M = 91°14'47''.4$	cos. $(M-\varphi)$.. 9.4929180
	$M-\varphi = 71\ 52\ 25.3$	
	$\varphi = 19°22'22''.1$	

252.—Hemos visto que el coeficiente $\frac{d\varphi}{dz}$ es sensiblemente igual á -1 ó á $+1$, según que el azimut del astro se acerque á 0° ó á 180°; y de esto se infiere que un mismo error en la distancia zenital produce errores contrarios en la latitud, según que el astro observado esté al Norte ó al Sur del zenit; y por consiguiente, que el promedio de los resultados que se obtengan observando estrellas que culmi-

nen, unas hacia el Norte y otras hacia el Sur de aquel punto, puede suponerse independiente del error mencionado. Este principio se acerca tanto más á la verdad, cuanto menor sea la diferencia de las distancias zenitales de dos estrellas que se observen de esa manera; porque parece bien comprobado que, especialmente los instrumentos de grandes dimensiones, suelen producir pequeños errores angulares cuya magnitud depende del ángulo formado por el telescopio con el horizonte, los cuales se atribuyen á una ligera flexión del tubo, originada por el peso del objetivo. Según esto, para distancias zenitales iguales, adquiere el error el mismo valor numérico, y en consecuencia quedará completamente eliminado del promedio de los resultados obtenidos por dos estrellas que culminen á la misma altura próximamente, y hacia distintos lados respecto del zenit. La misma deducción debe hacerse respecto de los errores originados por alguna inexactitud en el valor de la refracción, y en general, respecto de cualquiera causa que tienda á alterar el elemento z en una cantidad, ya sea constante ó ya variable con su magnitud.

Para terminar lo relativo á este método diremos que por ser z, δ y h los elementos del problema, quiere decir, dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, su resolución corresponde en la trigonometría á un caso dudoso; pero como siempre se sabe con suficiente aproximación cuál debe ser el valor del resultado φ, me parece inútil entrar en la discusión de las circunstancias en que haya dos soluciones ó una sola; porque siempre se sabrá cuál de los valores de φ es el que debe admitirse.

253.—Las principales condiciones favorables al método de que tratamos para determinar la latitud, se cumplen observando el astro en el momento de su paso por el meridiano. Suponiendo, pues, $h=0°$ en las fórmulas (1), resulta $M=\delta$, y designando por ζ la distancia zenital meridiana de la estrella, hallaremos $\cos.(\delta-\varphi) = \cos.\zeta$, ecuación que queda satisfecha para $\zeta = \delta - \varphi$ y también para $\zeta = \varphi - \delta$. Por consiguiente, observando la distancia zenital meridiana, que ya corregida por refracción, nivel, etc., he designado por ζ, se obtendrá la latitud por las sencillísimas fórmulas que siguen:

Por las culminaciones al S. del zenit......... $\varphi = \delta + \zeta$ .... (2)
Por las culminaciones al N. del zenit......... $\varphi = \delta - \zeta$

En los tránsitos inferiores de las circumpolares se tiene $h = 180°$, en cuyo caso resulta por las fórmulas (1): tan. $M = -$ tan. δ, y por lo mismo $M = 180° - \delta$, de lo cual se infiere que $\zeta = 180° - (\delta + \varphi)$. Así, pues:

Por los tránsitos sub-polares......... $\varphi = 180° - (\delta + \zeta)$.......... (3)

Estos valores se obtienen también fácilmente por medio de la consideración del lugar que ocupe el astro respecto del zenit. Sea Z (fig. 49ª) este punto, P el polo y E la intersección del ecuador y del meridiano; una estrella que culmine en a al Sur de Z, tendrá por distancia zenital meridiana $\zeta = Za$, siendo su declinación $\delta = Ea$. Por consiguiente, la latitud $\varphi = EZ$ tiene por valor $\varphi = Ea + aZ = \delta + \zeta$. La misma fórmula se aplica si culmina la estrella en a', pues aunque la figura da: $\varphi = Za' - Ea'$, como en tal caso la declinación Ea' es negativa, se tendrá siempre algebraicamente: $\varphi = \delta + \zeta$ como antes.

Si el astro culmina en b, entre el zenit y el polo, su declinación es Eb, y así es que resulta: $EZ = Eb - Zb$, ó bien $\varphi = \delta - \zeta$.

Finalmente, en el caso del tránsito inferior de una circumpolar c, puesto que $EPc = 180° - \delta$, se tiene $EZ + Zc = 180° - \delta$, de donde $\varphi = 180° - (\delta + \zeta)$.

Este procedimiento, llamado de distancias zenitales meridianas, es independiente de la hora; pero su aplicación supone, sin embargo, muy bien conocida la cronométrica del tránsito, á fin de practicar la observación precisamente en ese instante. Por lo general, algunos segundos antes de la hora se corta la estrella con el hilo horizontal de la retícula, en el cual se mantiene por medio del movimiento del tornillo de aproximación del círculo vertical. Moviendo al mismo tiempo el del círculo horizontal, se hace de manera que en el momento del tránsito, señalado por el cronómetro, quede la estrella en la intersección de los hilos centrales, vertical y horizontal. La graduación que se obtenga, corregida por la colimación vertical, error del índice, niveles, etc., y en seguida por la refracción, suministra el valor de ζ para aplicar aquella de las fórmulas (2) y (3) que convenga al caso.

Ejemplo.—En 17 de Junio de 1857 obtuve $\zeta = 29° 47' 25''.0$ por distancia zenital meridiana de α *Virginis*, cuya declinación era........ $\delta = 10° 25' 4''.4$. La latitud del lugar será, en consecuencia, según esta observación:

$$\begin{aligned} \zeta &= \quad 29° \, 47' \, 25''.0 \\ \delta &= -10 \;\; 25 \;\; 4\,.4 \\ \hline \varphi &= \quad 19° \, 22' \, 20''.6 \end{aligned}$$

Para eliminar la influencia de algún pequeño error angular, observé la misma noche al Norte del zenit la estrella η *Ursæ majoris*, que tenía por declinación $\delta = + 50° \, 1' \, 43''.4$, habiendo obtenido $\zeta = 30° \, 39' \, 28''.6$. El resultado de esta observación, es, por consiguiente:

$$\begin{aligned} \delta &= +50° \;\; 1' \, 43''.4 \\ \zeta &= \quad 30 \;\; 39 \;\; 28\,.6 \\ \hline \varphi &= \quad 19° \, 22' \, 14''.8 \end{aligned}$$

El promedio de ambos resultados será, pues: $\varphi = 19° \, 22' \, 17''.7$, que podrá suponerse independiente del error angular, por ser casi iguales las distancias de las dos estrellas al zenit. La semidiferencia $2''.9$ representará el monto del error para $\zeta = 30°$ próximamente, y sería substractivo para las indicaciones del instrumento.

254.—El método de distancias zenitales meridianas es uno de los que se emplean de preferencia en los Observatorios permanentes, sirviéndose sobre todo de los dobles tránsitos de las circumpolares; porque de esa manera resulta la latitud independiente de las declinaciones de las estrellas, y, en consecuencia, de los leves errores que puedan tener sus posiciones tabulares. Observando, en efecto, una circumpolar en su tránsito superior, se obtiene según vimos:

$$\varphi = \delta - \zeta$$

y siendo ζ' la distancia zenital en su paso subpolar, se tendrá igualmente:

$$\varphi = 180° - (\delta' + \zeta')$$

En esta ecuación he representado por δ' la declinación de la estrella, en atención á que puede diferir algo de δ, que era su valor en el paso superior, cuando entre las observaciones transcurra un tiempo considerable. La semisuma de ambos valores de φ produce:

$$\varphi = 90° - \tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta') - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \quad\text{..................} \quad (4)$$

Esta fórmula manifiesta que, en el resultado medio, sólo figura la semidiferencia de las declinaciones de la estrella, cantidad siempre muy pequeña y que se obtiene exactamente de las Efemérides, aun cuando tengan algún error los valores de δ y δ'.

La observación de los dos tránsitos también suministra la ecuación:

$$\tfrac{1}{2}(\delta + \delta') = 90° - \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta)$$

que da á conocer la declinación de la estrella, ó con más propiedad, el promedio de sus valores; pero de éste se deduce:

$$\delta = 90° - \tfrac{1}{2}(\zeta' - \zeta) - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta).$$

Las ventajas de servirse de este procedimiento consisten, pues, en hallar la latitud sin necesidad de valerse de las posiciones de las estrellas determinadas en otros Observatorios, y en corregir á la vez las posiciones mismas que constan en las Tablas Astronómicas.

CAPITULO XVI.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE DISTANCIAS ZENITALES CIRCUNMERIDIANAS.

255.—El inconveniente que presentan las observaciones meridianas tales como antes se han expuesto, es el de no permitir la repetición de la medida de las distancias zenitales, puesto que la única que se obtiene corresponde á un instante determinado, que es el del tránsito del astro. Este inconveniente es más grave al operar con instrumentos portátiles, cuyas lecturas angulares no dan á veces la aproximación necesaria para proporcionar el valor de ζ exacto hasta los segundos en una sola observación. Por esta razón el método de distancias zenitales meridianas se emplea raras veces en las estaciones ú observatorios temporales, prefiriéndose generalmente el llamado de distancias zenitales circunmeridianas, por cuyo medio se deduce el valor de ζ de muchas observaciones del astro, ejecutadas antes y después de su paso por el meridiano. De esta manera, y en virtud del principio de que la repetición de medidas suministra siempre promedios más ó menos independientes de los pequeños errores accidentales, se tiene cierta seguridad de llegar á un valor de ζ suficientemente exacto, aun sirviéndose de instrumentos que sólo aproximen las lecturas á 10″.

Con el fin de desarrollar el cálculo necesario para la aplicación de este método, notemos que, tratándose de un tránsito superior, la distancia zenital meridiana ζ es menor que cualquiera otra distancia zenital z obtenida fuera del meridiano; y que, por el contrario, en un paso subpolar ζ es mayor que z. Si llamamos, pues, x la diferencia entre la distancia zenital medida z y la meridiana ζ, la primera podrá representarse por $\zeta + x$, y en el instante de la observación se tendrá la ecuación siguiente:

$$\cos.(\zeta + x) = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos.h$$

Sustituyendo $1 - 2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h$ en vez de $\cos.h$ resulta:

$$\cos.(\zeta + x) = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\varphi\cos.\delta - 2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}h$$

Los primeros términos del segundo miembro equivalen á $\cos.(\delta - \varphi)$ ó á $\cos.(\varphi - \delta)$, y como ambos arcos representan la distancia zenital meridiana, podremos escribir así la ecuación anterior:

$$\cos.(\zeta + x) = \cos.\zeta - 2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}h$$

Tratándose de un tránsito inferior, $\cos.h$ será negativo, en cuyo caso los dos términos mencionados equivalen á $-\cos.(\varphi + \delta)$; pero como también se tiene entonces $\zeta = 180° - (\varphi + \delta)$, se infiere que siempre aquellos representan el valor de $\cos.\zeta$. A fin de considerar á la vez los tránsitos superiores y los inferiores, tomaremos por ecuación general:

$$\cos.(\zeta + x) = \cos.\zeta \mp 2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}h$$

Desarrollando ahora el primer miembro, y teniendo presente que por ser x un ángulo siempre muy pequeño, se podrá hacer uso de los desarrollos de su seno y su coseno, se tendrá hasta los términos de segundo orden:

$$x\,\text{sen.}\,\zeta + \tfrac{1}{2}x^2\cos.\zeta = \pm 2\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}h$$

Resolveremos esta ecuación por el método de aproximaciones sucesivas, de modo que expresando en segundos el arco x se tendrá por primera aproximación:

$$x = \pm\frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta}\cdot\frac{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''}$$

y sustituído este valor, expresado en partes del radio, en el término de segundo orden de la ecuación anterior, resulta el más exacto, convertido en segundos:

$$x = \pm\frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta}\cdot\frac{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''} - \left(\frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta}\right)^2\cot.\zeta\cdot\frac{2\,\text{sen.}^4\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''}$$

256.—Este valor de x, llamado *reducción al meridiano*, suministra toda la precisión necesaria en las observaciones más delicadas. Si por abreviación hacemos:

$$C = \frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\,\zeta} \qquad m = \frac{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''} \qquad n = \frac{2\,\text{sen.}^4\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''} \;\ldots\ldots\ (1)$$

la reducción al meridiano tiene por expresión.

$$x = \pm\,Cm - C^2 n \cot.\zeta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

y como supusimos $z = \zeta + x$, el valor de la distancia zenital meridiana será:

$$\zeta = z \mp Cm + C^2 n \cot.\zeta \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

representando z la observada fuera del meridiano, aunque no muy léjos de este plano. El signo $(\mp)$ se toma para los tránsitos $\left(\begin{smallmatrix}\text{superiores.}\\ \text{inferiores.}\end{smallmatrix}\right)$

Debe advertirse que si bien ζ, que es precisamente la incógnita, figura en el valor de C y en el último término de la reducción, se hace uso de un valor puramente aproximativo, deducido de la latitud también aproximativa de la estación, pues se tiene (número 253):

Para los tránsitos al S. del zenit	....	$\zeta = \varphi - \delta$
" " " al N. "	....	$\zeta = \delta - \varphi$
" " " subpolares	....	$\zeta = 180° - (\delta + \varphi)$

Casi siempre se conoce la latitud con la aproximación suficiente para obtener de esta manera un valor de ζ que basta para suministrar el de x con toda la exactitud necesaria; y entonces la ecuación (3) dá á conocer la verdadera distancia zenital meridiana, por cuyo medio se calcula la latitud, aplicando las fórmulas (2) y (3) del Capítulo precedente, á saber:

En los pasos al S. del zenit.................... $\varphi = \delta + \zeta$
En los pasos al N. del zenit.................... $\varphi = \delta - \zeta$ ...(4)
En los pasos inferiores ó sub-polares....... $\varphi = 180° - (\delta + \zeta)$

Si acaso la latitud así obtenida fuere muy diferente de la supuesta al principio del cálculo, se repite éste haciendo uso del valor suministrado por el primero. La repetición, sin embargo, pocas veces es necesaria, por ser bastante raro que el astrónomo no conozca su latitud con 1′ ó 2′ de aproximación.

Los valores de m y de n se han reducido á Tabla, de la cual se toman con el pequeño ángulo h, expresado en tiempo, por argumento. Las Tablas V y VI del fin contienen estos valores.

257.—Por lo común no se hace una sola observación circunmeridiana, sino varias antes y después del tránsito del astro, anotando sus distancias al zenit y las horas cronométricas correspondientes. Estas, comparadas con la hora también cronométrica del paso, da á conocer los pequeños ángulos horarios h, con los cuales se toman los valores de m y n para aplicar las ecuaciones (1), (2), (3) y (4), según se ha explicado. Procediendo así, se reduce por separado cada una de las observaciones, lo cual tiene la ventaja de poder apreciar su concordancia; pero es más fácil ejecutar el cálculo con los promedios de los valores de z, tomando por m y n los promedios de los valores que corresponden á las diversas observaciones. Este último medio es el único que puede emplearse cuando es repetidor, y se usa como tal el instrumento angular, en atención á que el elemento que suministra es la distancia zenital media. Es claro que el valor de z que figura en nuestras ecuaciones, representa la distancia zenital verdadera, ó sea corregida por los errores instrumentales, por la refracción y por paralaje y semidiámetro (número 145) si estos ángulos son apreciables en el astro observado. En este caso se halla el sol, que es casi el único de los astros que tienen semidiámetro y paralaje apreciables, que se emplea con frecuencia para determinar la latitud por este método. El efecto del semidiámetro se elimina observando alternativamente, é igual número de veces, el borde superior y el inferior.

258.—Deducidos los valores de h de las indicaciones cronométri-

cas, es preciso atender á la marcha del instrumento, así como á la especie de tiempo que señala, á fin de obtener los verdaderos ángulos horarios convenientemente expresados, quiere decir, en tiempo solar si se observa el sol, y en tiempo sideral si se trata de una estrella. Para no verse en la necesidad de corregir uno á uno los ángulos horarios que da el cronómetro, es preferible emplearlos tales como resultan de la comparación de las indicaciones de este instrumento, respecto de la que corresponde al tránsito del astro, y llevar en cuenta la corrección de esta manera. El cronómetro, por la hipótesis, no señalando exactamente 24^h entre dos pasos sucesivos del astro, sea v la cantidad que atrasa en $24^h = 86400^s$, y h el ángulo horario que da. Se tiene, en consecuencia: $86400 - v : 86400 :: h : h'$. De aquí resulta:

$$\frac{h'}{h} = \frac{86400}{86400 - v} = \frac{1}{1 - \frac{v}{86400}} = \left(1 + \frac{v}{86400}\right)$$

Por consiguiente, el valor que debe entrar en el cálculo es el de h'; pero como por ser siempre pequeños los ángulos horarios, se tiene sensiblemente:

$$\frac{h'}{h} = \frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}h'}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}h},$$

resultará:

$$\frac{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h'}{\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h} = \left(1 + \frac{v}{86400}\right)^2$$

y representada por k esta relación, tendremos.

$$k = \left(1 + \frac{v}{86400}\right)^2 = 1 + 0.000023\,v \qquad \text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}h' = k\,\text{sen.}^2\,\tfrac{1}{2}h \;\ldots\ldots (5)$$

los logaritmos de k constan en nuestra Tabla VII, y tienen por argumento la variación diaria del cronómetro, desde $v = -30^s$ hasta $v = +30^s$, quiere decir, desde un adelanto de medio minuto hasta un atraso de la misma cantidad en 24^h.

Cuando se observa una estrella empleando cronómetro solar, es necesario considerar que, además de su variación diaria, atrasa......

$3^m 56^s$ en el día sideral; y así designando por i el valor de k correspondiente á $v=236^s$, se halla: $\log. i=0.00237$. Recíprocamente, si se observa el sol con cronómetro sideral, además del factor k que corresponda á su marcha, se le considerará un adelanto diario de 236^s respecto del día solar; y así, con $v=-236^s$, se encuentra........... $\log. i=9.99762$. Además de esto, como el día medio y el día verdadero difieren entre sí tanto como varía diariamente la ecuación del tiempo E, si ΔE es su incremento en 24^h, debemos suponer que $v-\Delta E$ es la marcha diaria del cronómetro respecto del día verdadero; y así el valor de k será:

$$k'=1+0.000023(v-\Delta E)$$

que se toma de la Tabla con el argumento $v-\Delta E$. En cuanto al signo de E, y por consiguiente de su incremento, véase el número 128. En resumen, siendo

$$C'=\frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\zeta},$$

el factor de m en la fórmula (3) será:

Para una estrella observada con cronómetro sideral...	$C=$	$C'k$
" " " " " " solar.....	$C=(0.00237)$	$C'k$
" el sol observado con cronómetro solar...........	$C=$	$C'k'$
" " " " " " sideral..........	$C=(9.99762)$	$C'k'$

Respecto de δ, que forma parte de las fórmulas (4), cuando se observa un astro que, como el sol, varía sensiblemente de declinación en el tiempo que duran las observaciones, se toma δ igual al promedio de las declinaciones correspondientes á las diversas horas anotadas, ó lo que es lo mismo, δ representa la declinación que corresponde al promedio de las horas de las observaciones.

Ejemplo.—Presentemos el siguiente para que se comprenda bien todo el procedimiento. El 1º de Mayo de 1860 observé la estrella polar (*α Ursæ minoris*) cerca de su tránsito inferior, sirviéndome de un cronómetro solar cuya variación diaria era de $-1^s.4$. El instrumento angular era un altazimut con micrómetros que daban los ángulos con aproximación de $1''$.

CRONÓMETRO.	ALTAZIMUT.	NIVEL. O_c	NIVEL. O_b
$10^h\ 18^m\ 57^s$	$b=72°\ 00'\ 10''.5$	69	61
" 22 11	$a=18\ \ 3\ 25\ .0$	70	60
" 25 26	$b=72\ \ 00\ 17\ .0$	64	67
" 28 21	$a=18\ \ 3\ 17\ .5$	62	68

Atendiendo al estado del cronómetro, su indicación en el instante del tránsito subpolar de la estrella, era $10^h 28^m 5^s$. Para hallar los valores de h, y por consiguiente los de m y n, dispondremos, pues, los datos como sigue:

Hora del paso = 10 h. 28 m. 5 s.		h	m (Tabla V)	n (Tabla VI)
Observaciones.........	$10^h 18^m 57$	$-9^m\ 8^s$	$163''.8$	$0''.1$
	" 22 11	$-5\ 54$	68 .3	0 .0
	" 25 26	$-2\ 39$	13 .8	0 .0
	" 28 21	$+0\ 16$	0 .1	0 .0
	Promedios...........		$m=61''.5$	$n=0''.0$

Como el altazimut daba distancias zenitales en la primera posición y alturas en la segunda, y además, cada división del nivel valía $1''$, las dos primeras y las dos últimas observaciones dan respectivamente por distancia zenital aparente de la estrella:

$$z'=71°\ 58'\ 22''.75+4''.50=71°\ 58'\ 27''.25$$
$$z'=71\ \ 58\ 29\ .75-2\ .25=71\ \ 58\ 27\ .50$$

Adoptemos el término medio $z'=71°\ 58'\ 27''.37$ de los dos resultados, puesto que también tomamos los promedios de los valores de m y n. Según las indicaciones del barómetro y del termómetro, y atendiendo al valor de z', la refracción (número 138) era $r=2'\ 16''.37$, por lo cual la distancia zenital verdadera de la estrella será:

$$z=z'+r=72°\ 00'\ 43''.7$$

El lugar de la observación es el extremo occidental de la base del Valle, y tiene por latitud $\varphi=19°\ 25'\ 23''$; pero para que se vea la poca influencia que tiene, en ciertos casos, un error en φ, tomemos

19° 20′ por latitud aproximativa para calcular el valor también aproximativo de ζ, que entra en la fórmula (3). La declinación de la estrella era $\delta = 88° 33' 51''.0$, y puesto que se trata de un tránsito subpolar, tendremos:

$$\begin{aligned} \delta &= 88° 33' 51'' \\ \varphi &= 19\ 20\ 00 \\ \hline \delta + \varphi &= 107° 53' 51'' \\ & \ 180 \\ \hline \zeta &= 72°\ 6'\ 9'' \end{aligned}$$

Calculemos ahora la reducción al meridiano por la ecuación (2), que se reduce en este caso á su primer término, puesto que $n = 0$; en seguida la distancia zenital meridiana por la (3), y finalmente la latitud por la última de las (4).

Const.	0.00237
k (Tabla VII)	9.99999
cos. φ	9.97479
cos. δ	8.39894
sen. ζ	−9.97846
C	8.39763
m	1.78887
x	0.18650

$$\begin{aligned} z &= 72° 00' 43''.7 \\ x &= \quad\quad + 1\ .5 \\ \hline \zeta &= 72° 00' 45''.2 \\ \delta &= 88\ \ 33\ \ 51\ .0 \\ \hline \delta + \zeta &= 160° 34' 36''.2 \\ & \ 180° \\ \hline \varphi &= 19° 25' 23''.8 \end{aligned}$$

Como el resultado del cálculo difiere más de 5′ de la latitud supuesta al principio, debe repetirse con $\varphi = 19°25'20''$ y $\zeta = 72°00'50''$ próximamente; pero en el caso actual, sin embargo, se obtendría el mismo resultado que antes, á causa de la pequeñez de C. No siempre sucede lo mismo, pues el error del supuesto tiene, en general, una influencia creciente á medida que disminuye la distancia zenital; pero en los casos más desfavorables la repetición del cálculo suministra el verdadero valor de x. Por otra parte, el error de la latitud supuesta nunca puede ser tan grande como el que admitimos en el ejemplo precedente; porque es claro que al calcular la reducción al meridiano, puede tomarse por ζ la menor de las distancias zenita-

les observadas, si se trata de pasos superiores, ó bien la mayor en los tránsitos subpolares. Así, en nuestro caso, suponiendo $\zeta = 72° 00' 44''$, hallaríamos $\varphi = 19° 25' 25''$ por latitud aproximativa para determinar la reducción x, quiere decir, valores casi exactos y que evitarían, en consecuencia, la repetición del cálculo.

259.—En la aplicación que antecede se adoptó el promedio de las distancias zenitales obtenidas por la observación, el cual se combinó también con la reducción al meridiano que resulta del promedio de los valores de m. Este procedimiento es, según dijimos, el que se sigue habitualmente cuando se opera con círculo repetidor, el cual sólo suministra la distancia zenital media; ó bien cuando operando con altazimut, no se conoce el efecto de la colimación vertical, y por consiguiente, no pueden deducirse las distancias zenitales que corresponden á cada una de las observaciones individuales. Cuando no es así, es también muy fácil obtener por separado la latitud que resulta de cada observación; porque basta para esto calcular una á una las reducciones con el mismo valor de C, y el de m que corresponda á cada ángulo horario. Haciéndolo así, hallaríamos para las cuatro observaciones de nuestro ejemplo:

$$x = +4''.1 \qquad x = +1''.7 \qquad x = +0''.3 \qquad x = 0''.0$$

Aunque de este modo es un poco más largo el cálculo, se tiene la ventaja de poder comparar entre sí los diversos resultados individuales, con el fin de desechar aquel ó aquellos que presenten una discordancia notable respecto de los demás.

260.—He indicado repetidas veces el modo de determinar la colimación vertical por medio de la observación de un objeto distante ó de la retícula de un colimador en las dos posiciones del círculo; pero también se consigue el mismo resultado observando un astro y reduciendo cada observación al meridiano por el método que nos ocupa. Sean, en efecto, b y a las indicaciones del altazimut en las posiciones en que da distancias zenitales y alturas respectivamente; c la colimación vertical, r y r' las refracciones, n y n' las inclinaciones que señala el nivel paralelo al círculo, esto es: $n = \frac{1}{2}(o - e)v$, y $n' = \frac{1}{2}(o' - e')v$, y finalmente x y x' las reducciones al meridiano. Las distancias zenitales meridianas que se deducen de las dos observaciones, serán:

$$\zeta = \qquad b + c + n + r \mp x$$
$$\zeta = 90^\circ - a - c + n' + r' \mp x'$$

que combinadas por adición y substracción, producen:

$$\zeta = 45^\circ + \tfrac{1}{2}(b-a) + \tfrac{1}{2}(n+n') + \tfrac{1}{2}(r+r') \mp \tfrac{1}{2}(x+x')$$
$$c = 45^\circ - \tfrac{1}{2}(b+a) + \tfrac{1}{2}(n'-n) + \tfrac{1}{2}(r'-r) \pm \tfrac{1}{2}(x-x')$$

De estas ecuaciones, la primera da á conocer la latitud combinando el valor de ζ con el de δ, como se ha hecho anteriormente; y la segunda suministra el valor de la colimación en el sentido vertical. Esta última cantidad permite el cálculo de la latitud por cada una de las observaciones, aplicándola con todas las demás correcciones á las lecturas a y b del círculo, según lo indican los valores primitivos de ζ.

En nuestro ejemplo de la estrella polar, habiéndose hecho dos observaciones en cada posición del círculo, podremos hallar el valor de c combinando la primera observación con la segunda y la tercera con la cuarta; de este modo, suponiendo la refracción igual en todas ellas:

	Primera y segunda.	Tercera y cuarta.
$45^\circ - \tfrac{1}{2}(b+a)$	$-\ 1'\ 47''.75$	$-\ 1'\ 47''.25$
$+\ \tfrac{1}{2}(n'-n)$	$+\ \ 0\ .50$	$-\ \ 0\ .75$
$-\ \tfrac{1}{2}(x-x')$	$-\ \ 1\ .20$	$-\ \ 0\ .15$
	$c = -\ 1'\ 48''.45$	$c = -\ 1'\ 48''.15$

Adoptando el término medio $c = -1'\ 48''.30$, y recordando que $r = 2'\ 16''.37$, se hallarán los siguientes resultados por cada una de las observaciones:

	Primera.	Segunda.	Tercera.	Cuarta.
b ó $90^\circ - a$.....	$72^\circ\ 00'\ 10''.5$	$71^\circ\ 56'\ 35''.0$	$72^\circ\ 00'\ 17''.0$	$71^\circ\ 56'\ 42''.5$
c.....	$-\ \ 1\ 48\ .3$	$+\ \ 1\ 48\ .3$	$-\ \ 1\ 48\ .3$	$+\ \ 1\ 48\ .3$
n.....	$+\ \ \ 4\ .0$	$+\ \ \ 5\ .0$	$-\ \ \ 1\ .5$	$-\ \ \ 3\ .0$
r.....	$+\ \ 2\ 16\ .4$	$+\ \ 2\ 16\ .4$	$+\ \ 2\ 16\ .4$	$+\ \ 2\ 16\ .4$
x.....	$+\ \ \ 4\ .1$	$+\ \ \ 1\ .7$	$+\ \ \ 0\ .3$	$+\ \ \ 0\ .0$
ζ.....	$72^\circ\ 00'\ 46''.7$	$72^\circ\ 00'\ 46''.4$	$72^\circ\ 00'\ 43''.9$	$72^\circ\ 00'\ 44''.2$
$180^\circ - \delta$.....	$91\ \ 26\ \ 9\ .0$	$91\ \ 26\ \ 9\ .0$	$91\ \ 26\ \ 9\ .0$	$91\ \ 26\ \ 9\ .0$
φ.....	$19^\circ\ 25'\ 22''.3$	$19^\circ\ 25'\ 22''.6$	$19^\circ\ 25'\ 25''.1$	$19^\circ\ 25'\ 24''.8$

La concordancia de todos estos resultados individuales manifiesta la precisión con que puede obtenerse la latitud por el método de circunmeridianas sirviéndose de un altazimut, aunque sea de los portátiles como el que se empleó en esta operación. No me parece aventurado asegurar que tomando varias series de distancias zenitales al Norte y al Sur del zenit, es posible obtener la latitud de una estación con menos de $1''$ de error, en unas cuantas noches de trabajo.

261.—Presentemos ahora un ejemplo de observaciones solares hechas últimamente en la ciudad de México con teodolito astronómico pequeño, cuyo círculo vertical tiene sólo $0^m.16$ de diámetro, y que da los ángulos con aproximación de $10''$. Las distancias zenitales están tomadas por el método de Mr. Quetelet (número 188) y son las del limbo inferior del sol.

CRONÓMETRO.	CÍRCULO.	NIVEL.	
		O a	O b
$11^h\ 27^m\ 10^s$	$b = 43^\circ\ 19'\ 10''$	29	28
„ 41 48	$a = 46\ \ 50\ \ 15$	29	28
„ 49 2	$b = 43\ \ \ 7\ \ 12$	33	24
„ 54 47	$a = 46\ \ 46\ \ 00$	27	29

La hora cronométrica del medio día verdadero era $11^h\ 44^m\ 26^s$, por lo cual los ángulos horarios, los valores de m y n y las distancias zenitales corregidas por el estado del nivel cuyas divisiones valían $8''$, son:

	Tránsito $11^h\ 44^m\ 26^s$	h	m	n	z'
Observaciones.	$11^h\ 27^m\ 10^s$	$17^m\ 16^s$	$585''.1$	$0''.8$	$43^\circ\ 19'\ 14''$
„	„ 41 48	2 38	13 .6	0 .0	„ 9 49
„	„ 49 2	4 36	41 .5	0 .0	„ 7 48
„	„ 54 47	10 21	210 .3	0 .1	„ 13 52
		Promedios.........	$m = 212''.6$	$n = 0\ .2$	$z' = 43^\circ 12' 40''.7$

El valor medio de z' resulta ya independiente de la colimación vertical, por haberse ejecutado las observaciones en las dos posiciones del círculo. Los datos para calcular la refracción dieron $r = 40''.9$, la paralaje de altura era $p = 6''.0$ y el semidiámetro del sol $s = 16'17''.9$; de donde el conjunto de correcciones para obtener la distancia zenital verdadera del centro (número 145) es: $r-p-s=-15'43''.0$, y se tiene, por consiguiente, $z=42°56'57''.7$.

Calculemos la reducción al meridiano tomando $\varphi=19°26'10''$ por latitud aproximativa, y siendo la declinación del sol en el instante medio de las observaciones, $\delta=-23°26'20''.3$. El cronómetro tenía un atraso diario de $7^s.8$ y la ecuación del tiempo variaba $+29^s.8$ en 24^h, por lo cual el argumento para tomar de la Tabla VII el logaritmo de k' es $v-\Delta E=-22^s$.

		k'...	9.99978				
$\varphi=$	19°26'10"	cos. φ...	9.97452				
$\delta=$	−23 26 20	cos. δ...	9.96260				
$\zeta=$	42°52'30"	sen. ζ...	−9.84079	cot. ζ....	0.032	$z=$	42°56'57".7
		C....	0.09611	C^2....	0.192	$x=$	−4 24 .9
		m...	2.32756	n....	9.301	$\zeta=$	42°52'32".8
			2.42367		9.525	$\delta=$	−23 26 20 .3
			−265".26		+0".33	$\varphi=$	−19°26'12".5

262.—Siempre que sea posible, debe procurarse hacer tantas observaciones antes como después del tránsito del astro, según lo manifiesta el ejemplo anterior; y si los ángulos horarios orientales dan casi la misma suma que los occidentales, no habrá que temer la influencia de algún pequeño error en la hora. La ventaja de no necesitarse mucha exactitud en este elemento es una de las mayores que presenta el método de circunmeridianas.

Nunca será prudente dar por definitiva la determinación de una latitud, sin haber hecho numerosas observaciones de estrellas al Norte y al Sur del zenit, tratando de combinarlas de manera que no difieran mucho sus distancias zenitales, pues hemos visto que este es el modo de obtener un promedio independiente de los pequeños errores angulares, constantes ó variables. Pondré á la vista los diversos resultados que me dieron varias estrellas al determinar la latitud de Mixcoac.

AL SUR DEL ZENIT.

Por 46 obser. de α *Virginis*........................	$\varphi=19°\ 22'\ 20''.4$
" 26 " α^2 *Libræ*........................	$\varphi=19\ \ 22\ \ 18\ .7$
" 34 " α *Scorpii*........................	$\varphi=19\ \ 22\ \ 20\ .8$
" 38 " β' *Scorpii*........................	$\varphi=19\ \ 22\ \ 22\ .4$
Por 144 obser. al Sur................................	$\varphi=16°\ 22'\ 20\ .7$

AL NORTE DEL ZENIT.

Por 16 obser. de γ *Ursæ maj*........................	$\varphi=19°\ 22'\ 16''.9$
" 10 " α *Ursæ maj*........................	$\varphi=19\ \ 22\ \ 15\ .4$
" 22 " η *Ursæ maj*........................	$\varphi=19\ \ 22\ \ 15\ .4$
Por 48 obser. al Norte................................	$\varphi=19°\ 22'\ 15''.9$

La constancia con que las determinaciones al Sur del zenit resultan mayores que las del Norte, indica claramente la existencia de un error en el instrumento, que era un círculo repetidor pequeño de Ertel. La latitud definitiva del lugar que ocupaba el instrumento, un poco al Sur del punto trigonométrico que se estableció en aquel pueblo, será, en consecuencia: $\varphi=19°\ 22'\ 18''.3$.

263.—Las aplicaciones que hemos hecho de la fórmula (3) indican la pequeñez del último término, que muchas veces puede omitirse sin inconveniente alguno, pues sólo adquiere valor apreciable siendo pequeña la distancia zenital meridiana ó considerables los ángulos horarios del astro. Cuando no tienen lugar tales circunstancias, podrá, pues, tomarse por reducción al meridiano:

$$x=\mp C\frac{2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}h}{\text{sen. }1''}$$

que siendo h muy pequeño puede escribirse así:

$$x=\mp\tfrac{1}{2}\,C\,\text{sen. }1''\,h^2$$

Si expresamos á h en segundos de tiempo, y hacemos................ $Q=\pm\frac{225}{2}\,C\,\text{sen. }1''$, la distancia zenital meridiana tendrá por expresión:

$$\zeta=z-Qh^2$$

y como Q es constante para la misma latitud y la misma estrella, esta ecuación demuestra que muy cerca del meridiano las variaciones $z - \zeta$ de distancia zenital son proporcionales á los cuadrados de los intervalos de tiempo respectivos.

En este principio se funda un procedimiento para determinar la latitud, que si no tiene toda la precisión del método estricto de circunmeridianas, ofrece en cambio las ventajas de no demandar el conocimiento de la latitud aproximativa y de poderse aplicar, sirviéndose de un simple reloj de segundos, las cuales lo hacen, por tanto, precioso para un viajero, que desee fijar la posición geográfica de los lugares de su tránsito con bastante aproximación, cuando no pueda disponer del tiempo y demás elementos necesarios para la aplicación de métodos más exactos. Consiste en medir tres distancias zenitales de un astro tan cerca como sea posible de su paso meridiano, anotando las indicaciones correspondientes de un cronómetro ó de un reloj cualquiera, con tal que su marcha sea regular durante algunos minutos, lo que en cualesquiera circunstancias me parece muy fácil de realizar. Sean z_1, z_2 y z_3 las tres distancias zenitales verdaderas, esto es, ya corregidas por nivel, refracción, paralaje, etc., y t_1, t_2 y t_3 las respectivas lecturas del reloj. Designando por T la indicación incógnita del mismo instrumento en el instante de la culminación del astro, y por ζ su distancia zenital meridiana, tendremos de acuerdo con el principio anterior:

$$\begin{aligned}\zeta &= z_1 - Q(t_1 - T)^2\\ \zeta &= z_2 - Q(t_2 - T)^2\\ \zeta &= z_3 - Q(t_3 - T)^2\end{aligned}$$

Se trata de determinar los valores de las tres incógnitas Q, ζ y T. Con este fin eliminemos á ζ restando la segunda ecuación de la primera y la tercera de la segunda, de lo que resulta:

$$2\,Q\,T = Q(t_1 + t_2) - \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

$$2\,Q\,T = Q(t_2 + t_3) - \frac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2}$$

Restando uno de otro estos dos valores, eliminaremos á T y obtendremos:

$$Q = \frac{\dfrac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2} - \dfrac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}}{t_3 - t_1} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Una vez determinado el coeficiente Q, cualquiera de las dos ecuaciones que anteceden da por valor de T:

$$T = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}(t_1 + t_2) - \dfrac{z_2 - z_1}{2\,Q(t_2 - t_1)} \\ \\ \frac{1}{2}(t_2 + t_3) - \dfrac{z_3 - z_2}{2\,Q(t_3 - t_2)} \end{matrix}\right\} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Finalmente, por cada una de las ecuaciones primitivas puede obtenerse el valor de ζ, á saber:

$$\zeta = \left\{\begin{matrix} z_1 - Q(t_1 - T)^2 \\ z_2 - Q(t_2 - T)^2 \\ z_3 - Q(t_3 - T)^2 \end{matrix}\right\} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Apliquemos este método á las siguientes observaciones del sol hechas con sextante. Al lado de las horas del reloj constan las distancias zenitales ya corregidas por los errores del instrumento y por refracción, paralaje, semidiámetro, etc.

$$\begin{aligned} t_1 &= 11^h\,15^m\,33^s & \qquad z_1 &= 41^\circ\,38'\;\;2''\\ t_2 &= \;,,\;\;\;22\;\;20 & z_2 &= \;,,\;\;\;36\;\;20\\ t_3 &= \;,,\;\;\;28\;\;29 & z_3 &= \;,,\;\;\;38\;\;\;7\end{aligned}$$

Con estos datos resulta:

$$\frac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2} = \frac{107''}{369^s} = +0.29 \qquad\qquad \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = -\frac{102''}{407^s} = -0.25$$

y en consecuencia el valor de Q es:

$$Q = \frac{0.29 + 0.25}{776^s} = +0.0007$$

Calculando ahora la hora T del tránsito, hallaremos:

$$T = 11^h 18^m 56^s.5 + \frac{0.25}{0.0014} = 11^h 18^m 56^s.5 + 2^m 58^s.6 = 11^h 21^m 55^s$$

$$T = 11^h 25^m 24^s.5 - \frac{0.29}{0.0014} = 11^h 25^m 24^s.5 - 3^m 27^s.2 = 11^h 21^m 57^s$$

La pequeña diferencia de los dos valores de T proviene de los errores inevitables en la aproximación numérica. Adoptando el término medio $11^h 21^m 56^s$, tendremos por distancia zenital meridiana.

$$\begin{aligned}
\zeta &= 41^\circ 38' \ 2'' - 0.0007\,(383)^2 = 41^\circ 36' 19''.3 \\
\zeta &= 41 \ \ 36 \ 20 \ - 0.0007\,(024)^2 = 41 \ \ 36 \ 19 \ .6 \\
\zeta &= 41 \ \ 38 \ \ 7 \ - 0.0007\,(393)^2 = 41 \ \ 36 \ 18 \ .9
\end{aligned}$$

La declinación del sol en el instante medio de las observaciones era la que va á continuación, que combinado con ζ determina la latitud:

$$\begin{aligned}
\zeta &= \ \ \ 41^\circ 36' 19''.3 \\
\delta &= -20 \ \ \ 6 \ 40 \ .7 \\
\hline
\varphi &= \ \ \ 21^\circ 29' 38''.6
\end{aligned}$$

Por una serie numerosa de observaciones, calculada por el método exacto de circunmeridianas, obtuve para el mismo punto, que es la hacienda de la Sauceda en el Estado de Guanajuato, la latitud $\varphi = 21^\circ 29' 33''.6$.

264.—Vimos en el número 235 que en las inmediaciones del meridiano el movimiento azimutal de los astros es proporcional al tiempo; y como según acabamos de ver, el movimiento ascensional en las mismas circunstancias es proporcional al cuadrado del tiempo, inferiremos que cerca del tránsito de un astro, sus cambios de altura son proporcionales á los cuadrados de las variaciones azimutales correspondientes. En este principio se funda un método para determinar la latitud, que ofrece mucha analogía con el que expuse en el número precedente, y cuya aplicación evita completamente el uso de un instrumento cronométrico. Al medir con un altazimut tres distancias zenitales de un astro en los momentos de su culminación, si se leen las indicaciones del círculo azimutal, podremos servirnos de estos datos en lugar de las horas de un reloj que demanda el otro

procedimiento. Sea, en efecto, A la indicación meridiana del círculo horizontal, y llamemos a_1, a_2 y a_3 las tres lecturas azimutales obtenidas al medir las distancias zenitales verdaderas z_1, z_2 y z_3. Las expresiones de la distancia zenital meridiana serán, según lo demostrado:

$$\begin{aligned}
\zeta &= z_1 - R(a_1 - A)^2 \\
\zeta &= z_2 - R(a_2 - A)^2 \\
\zeta &= z_3 - R(a_3 - A)^2
\end{aligned}$$

en las cuales R representa un coeficiente constante para cada estrella. Resolviendo estas ecuaciones por el método del número anterior, hallaremos las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
R &= \frac{\dfrac{z_3 - z_2}{a_3 - a_2} - \dfrac{z_2 - z_1}{a_2 - a_1}}{a_3 - a_1} \\
A &= \begin{cases} \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - \dfrac{z_2 - z_1}{2R(a_2 - a_1)} \\[2ex] \frac{1}{2}(a_2 + a_3) - \dfrac{z_3 - z_2}{2R(a_3 - a_2)} \end{cases} \\
\zeta &= \begin{cases} z_1 - R(a_1 - A)^2 \\ z_2 - R(a_2 - A)^2 \\ z_3 - R(a_3 - A)^2 \end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

El cálculo de estas fórmulas es tan semejante al de las que se aplicaron en el otro método, que juzgo innecesario presentar un ejemplo numérico. La observación es igualmente sencilla, y sólo es preciso, como en aquél, conocer la colimación vertical para usar el círculo en una sola posición. Luego que la estrella queda cortada por la intersección de los hilos, se leen las indicaciones de los círculos vertical y horizontal, las cuales corregidas por colimación, niveles, etc., y la primera por refracción, suministran los datos z y a que corresponden á cada observación.

Nótese que sin trabajo adicional alguno, es posible trazar aproximadamente el meridiano, puesto que la resolución da á conocer la graduación A que indicaría el círculo horizontal al coincidir el telescopio con aquel plano.

CAPITULO XVII.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO AMERICANO.

265.—En el número 253 vimos las relaciones que existen entre la latitud, la declinación de una estrella y su distancia zenital meridiana. Limitándonos á los tránsitos superiores, suponiendo que se observen dos estrellas y acentuando los datos que se refieren á la que culmina al Norte del zenit, aquellas expresiones dan:

$$\varphi=\delta+\zeta$$
$$\varphi=\delta'-\zeta'$$

cuya semisuma proporciona la latitud en función de la semidiferencia de las dos distancias zenitales meridianas, á saber:

$$\varphi=\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')+\tfrac{1}{2}(\zeta-\zeta')$$

A fin de dar á esta ecuación una forma más general, sean z y z' las distancias zenitales aparentes, tales como las da el instrumento, r y r' las refracciones, n y n' las inclinaciones que señale el nivel, y x y x' las reducciones al meridiano. Con estos elementos se tiene:

$$\zeta=z+r-x+n$$
$$\zeta'=z'+r'-x'+n'$$

valores que sustituídos en el de φ, y recordando que las inclinaciones n y n' son: $n=\frac{1}{2}(o-e)v$ y $n'=\frac{1}{2}(o'-e')v$, producen:

$$\varphi=\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')+\tfrac{1}{2}(z-z')+\tfrac{1}{2}(r-r')-\tfrac{1}{2}(x-x')+\tfrac{1}{4}[(o-o')-(e-e')]v\ldots\ldots(1)$$

Esta expresión manifiesta que, con excepción de las declinaciones, todos los demás elementos que las constituyen entran en ella por *diferencias*, la mayor parte muy pequeñas, y que, por consecuencia, al aplicarla se logra la eliminación más ó menos completa de los errores que podrían contener los valores absolutos de las cantidades que la forman.

En estas consideraciones está fundado el método del astrónomo norteamericano Mr. Talcott para determinar la latitud, midiendo directamente la diferencia $z-z'$. El autor ha dado á este procedimiento el más alto grado de perfección escogiendo las dos estrellas, de manera que $z-z'$ sea sólo de unos cuantos minutos, á fin de que no exceda de la amplitud angular del campo de un telescopio; y así sin variar la posición de éste respecto de su columna, se consigue que dirigiéndolo alternativamente hacia el Norte y hacia el Sur por medio de su movimiento azimutal, ambas estrellas se presenten en el campo. Entonces podrá medirse la diferencia de sus distancias zenitales sin servirse de círculos graduados, sino con un micrómetro situado en el ocular del telescopio, que permite la apreciación de pequeñas fracciones de segundo.

El método de Talcott, si bien demanda el uso de un instrumento de construcción especial, suministra en cambio resultados de una precisión extraordinaria, y es, por consiguiente, el que conviene emplear de preferencia para fijar la posición de un punto importante. El astrónomo mexicano D. José Salazar Ilarregui lo empleó al demarcar las líneas limítrofes entre México y los Estados Unidos, y fué también del que yo me serví para determinar la latitud de la ciudad de México. Después de describir el instrumento llamado telescopio *zenital*, con que se aplica el método riguroso de Talcott, veremos que puede emplearse, casi con el mismo éxito, el altazimut común y aun el telescopio de tránsitos. Lo que sigue está tomado casi textualmente de la exposición que hice de este procedimiento en mis *Nuevos Métodos Astronómicos.*

266. El telescopio zenital (fig. 50ª) consta esencialmente de una columna vertical sobre la que está situado el anteojo, cuyo poder óptico debe ser suficiente para poder observar estrellas hasta de quinta ó sexta magnitud, para lo cual es bastante una distancia focal de $0^m.75$ y una abertura libre, ó diámetro del objetivo, de $0^m.05$. El telescopio, unido á la columna por medio de un pequeño eje horizontal, puede moverse en un plano perpendicular al horizonte, á la vez que está dotado de un movimiento azimutal que se mide por medio de un círculo situado al pie de la columna. Esta disposición es del todo semejante á la de un teodolito.

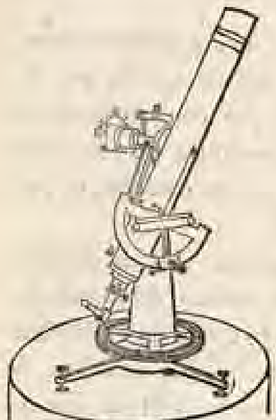


FIG. 50A

Invariablemente unido al tubo del telescopio hay un cuadrante dividido de 0° á 90°. El radio de este cuadrante que va á terminar á la división 0°, es perpendicular á la dirección del eje óptico del telescopio; y por consiguiente es paralelo á ella el que termina en la división 90°. A lo largo de la alidada hay un nivel muy sensible que se mueve con ella cuando se traslada de un punto á otro de la graduación; y si se fija la alidada en un punto conveniente, sirve también el nivel para arreglar la verticalidad de la columna, haciendo las correcciones necesarias con los tornillos del pie del instrumento, y procediendo como se ha explicado varias veces refiriéndonos al altazimut y al teodolito. De esta disposición del cuadrante y del nivel se deduce que estando vertical la columna, si se hace que el vernier de la alidada indique una graduación cualquiera g, y en seguida se mueve el telescopio en un plano vertical hasta que los extremos de la burbuja señalen divisiones iguales en su escala, el eje óptico del telescopio formará con el zenit un ángulo igual á g, ó lo que es lo mismo, tendrá g por distancia zenital. De esta manera se podrá fijar de antemano el instrumento en la posición con-

veniente para que una estrella cuya distancia zenital aproximativa se conozca, se presente en el campo.

En el ocular del telescopio hay un micrómetro de hilo móvil, que, como todos los de su especie, se compone de un tornillo de espiral muy fina cuya tuerca está en el interior del tubo, y cuya cabeza en el exterior está terminada por un pequeño círculo dividido generalmente en 100 partes. Fácilmente se comprenderá que por medio de este aparato pueden medirse pequeñas cantidades angulares dentro del campo del telescopio, luego que por alguno de los procedimientos que indicaré después, se haya determinado el número de segundos interceptados en la esfera celeste por dos posiciones del hilo, correspondientes á un número cualquiera de revoluciones del micrómetro. Se comprenderá también con igual facilidad que, si en la misma posición del telescopio respecto de su columna, se presentan sucesivamente dos ó más estrellas en el campo, se obtendrán las *diferencias* de sus distancias zenitales cortándolas con el hilo micrométrico en el instante en que atraviesen el hilo vertical de la retícula, y valuando después en segundos la diferencia de las lecturas suministradas por el micrómetro.

267.—Para determinar el valor angular de cada revolución del tornillo puede aplicarse desde luego el método expuesto en el número 167 del Tomo I, midiendo en revoluciones y partes del micrómetro un espacio cualquiera cuyo ángulo visual g sea conocido; pero es preferible que g sea un arco celeste. Si se mide, por ejemplo, en partes del micrómetro el diámetro vertical del sol, siendo g en este caso el diámetro que dan las Efemérides del astro, corregido si es necesario por la diferencia de refracciones de sus dos bordes, y N el número de revoluciones micrométricas que lo miden, el valor de cada una es: $R = \frac{g}{N}$.

También se determina R estableciendo el telescopio en el plano del meridiano y observando el tránsito de dos estrella cuyas declinaciones se conozcan con exactitud y sean poco diferentes, á fin de que las estrellas á que pertenecen se presenten en el campo sin que sea preciso alterar la posición del telescopio. Si al pasar cada una se corta con el hilo, anotando la indicación del micrómetro, la diferencia de esas indicaciones será N, y la de sus declinaciones, corregida por la diferencia de refracción, dará el valor de g. Debe procurarse que las estrellas difieran poco en ascensión recta para que transcurra poco tiempo entre las observaciones y no haya que temer alguna variación del instrumento. En todos casos es conveniente apuntar las indicaciones del nivel para corregir el valor de g si aquellas denuncian variación; puesto que g no viene á ser otra cosa más que la diferencia de distancias zenitales aparentes de las estrellas.

Los tránsitos de estrellas circumpolares, ya sea por el meridiano, ya por el punto de su mayor elongación oriental ú occidental, proporcionan la mejor oportunidad de determinar el valor angular del micrómetro, á causa de que permiten multiplicar las observaciones á fin de obtener un promedio más libre de error. Tratándose de un paso por el meridiano, se establece el telescopio cerca de este plano, y se hace girar todo el micrómetro 90° á fin de que su hilo quede vertical, teniendo el mayor cuidado de que permanezca bien arreglado el foco estelario. Colocando previamente el hilo de manera que el índice exterior señale revoluciones enteras, ó mejor medias revoluciones del tornillo, se observan los tránsitos de la estrella por cada una de las posiciones del hilo, anotando tanto la hora de la observación como la lectura del micrómetro. El primer dato sirve para hallar el ángulo horario de la estrella en el instante de cada tránsito, y como se conoce su declinación, podrá calcularse su distancia x al meridiano por la ecuación: $\text{sen.}\, x = \text{sen.}\, h \cos.\, \delta$. Como al observar muy cerca del meridiano, es x necesariamente muy pequeña, puede expresarse en segundos, y entonces:

$$x = \frac{\cos.\,\delta\, \text{sen.}\, h}{\text{sen.}\, 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Las diferencias de los diversos valores de x serán equivalentes al arco que antes se designó por g, que es la distancia angular comprendida entre dos posiciones cualesquiera del hilo, y las diferencias de las indicaciones correspondientes del micrómetro darán el equivalente de N, de modo que se tendrá en general:

$$R = \frac{x - x'}{M - M'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Es conveniente que el denominador $M - M'$ no sea muy pequeño, con el fin de que no tenga gran influencia el pequeño error que pudiera cometerse en las horas anotadas, y, por consiguiente, en los valores de x. Así es que si se observan, por ejemplo, 20 tránsitos por otras tantas posiciones del hilo, se obtendrán también 20 valores de x, que se pueden combinar el 1º con el 11º, el 2º con el 12º, el 3º con el 13º, etc., para terminar combinando el 10º con el 20º. Si se ha establecido el hilo en cada revolución entera del micrómetro, todos los denominadores serán iguales á 10 revoluciones, ó bien á 5 en el caso de que se hayan colocado de media en media vuelta.

Como para aplicar el telescopio zenital á la medida de la latitud debe usarse el hilo micrométrico en una posición horizontal, es fácil que al restablecerlo en ella después de determinado el valor angular, se altere algo el foco sideral, en cuyo caso el valor hallado puede quedar ligeramente erróneo, puesto que depende de la distancia focal. Este peligro se evita marcando cuidadosamente en el tubo del ocular la posición que corresponde al foco estelario; pero para mayor seguridad es preferible valerse de los tránsitos de una circumpolar por su mayor elongación, porque siendo en ese instante vertical su movimiento, no hay necesidad de variar el hilo micrométrico de la posición horizontal en que tiene que usarse. El procedimiento es absolutamente el mismo que antes, con la única diferencia de que los ángulos horarios h se cuentan desde la hora de la digresión ó elongación. Siendo T esta hora en tiempo sideral, el ángulo horario correspondiente á la elongación será $15\,(T - \alpha)$, expresado en arco, y se tendrá:

$$\cos.\, 15\,(T - \alpha) = \frac{\tan.\,\varphi}{\tan.\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

y la distancia zenital en que debe colocarse el telescopio para que el punto de elongación quede casi en el centro de su campo, se obtiene por la ecuación:

$$\cos.\, z = \frac{\text{sen.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Si se designa por t cualquiera de las horas siderales de las observaciones, el ángulo horario contado desde la elongación es .... $h=15(t-T)$, y si el cronómetro que se usa es solar, expresando T la hora que debe señalar en el instante en que la estrella llega á su mayor digresión, se convertirá la duración $t-T$ en tiempo sideral.

En este procedimiento debe atenderse á la refracción, que afecta directamente al valor de x, lo mismo que á los cambios de nivel respecto de su estado medio.

El telescopio zenital de que me serví para determinar la latitud de México, tenía $0^m.07$ de abertura y $1^m.2$ de distancia focal. Para hallar el valor de su micrómetro, hice, entre otras, las siguientes observaciones de la estrella polar en los momentos de su culminación. El *cero* del micrómetro se supone estar en el centro del campo, y sus indicaciones expresan revoluciones enteras.

MICRÓMETRO.	CRONÓMETRO.	MICRÓMETRO.	CRONÓMETRO.
−7.00	$6^h 40^m 36^s$	+1.00	$6^h 55^m 40^s$
6.00	„ 42 28	2.00	„ 57 30
5.00	„ 44 22	3.00	„ 59 22
4.00	„ 46 14	4.00	7 1 16
3.00	„ 48 8	5.00	„ 3 10
2.00	„ 50 2	6.00	„ 5 2
−1.00	„ 51 54	7.00	„ 6 57
0.00	„ 53 48	+8.00	„ 8 50

La hora cronométrica del paso era $T=6^h 54^m 36^s$. En lugar de contar los ángulos horarios desde este instante, haremos desde luego las combinaciones de la 1ª observación con la 9ª; de la 2ª con la 10ª, etc.; lo que nos dará por divisor común 8 revoluciones del micrómetro:

1ª y 9ª	$15^m 4^s$
2ª y 10ª	„ 2
3ª y 11ª	„ 0
4ª y 12ª	„ 2
5ª y 13ª	„ 2
6ª y 14ª	„ 0
7ª y 15ª	„ 3
8ª y 16ª	„ 2
Promedio	$15^m 1^s.87$

Este promedio, que en tiempo sideral es de $15^m 4^s.34$ y en arco de $3^\circ 46' 5''$, será el equivalente de h, y como se tenía $\delta=88^\circ 33' 10''$, obtendremos:

sen. h	8.81768	
cos. δ	8.40237	
sen. $1''$	−4.68557	
$8R$	2.53448	$8R=342''.4$

Dividiendo este resultado por 8, da $R=42''.8$. La misma cantidad se obtuvo por la combinación de otras observaciones ejecutadas con el mismo objeto; y como el círculo del micrómetro estaba dividido en 100 partes, el valor de cada una resulta de $0''.428$.

268.—El método que se sigue para hacer las observaciones de latitud es éste. Se eligen dos estrellas que culminen la una al N. y la otra al S. del zenit, y cuyas declinaciones sean tales que la diferencia de sus alturas meridianas sea menor que la amplitud angular del campo del telescopio, para lo cual puede hacerse uso de la fórmula $\delta+\delta'=2\varphi-(z-z')$ en la que no importa conocer á φ más que con la aproximación de $2'$ ó $3'$, siendo $z-z'$ el mayor valor que se crea conveniente medir con el micrómetro, y que por lo común no excede de $15'$. El Catálogo de estrellas publicado por la Sociedad Británica (*British Association Catalogue*), que contiene 8,377 estrellas, y el del Observatorio de Greenwich (*Greenwich Twelve-year Catalogue*), que contiene 2,156, pueden proporcionar, por lo menos, para cada noche y cualquiera latitud, de 6 á 12 pares de estrellas convenientes. Al elegirlas deben preferirse aquellas cuyas coordenadas, especialmente las declinaciones, sean más dignas de confianza, para lo cual conviene consultar las notas del mismo Catálogo.

Después de bien nivelado el instrumento, se sitúa el telescopio próximamente en el meridiano, valiéndose de la hora conocida de la culminación de una estrella cualquiera, ó bien trazando el meridiano por cualquier otro método. De esta manera se conocerán con la aproximación de $8'$ ó $10'$, que es lo bastante, las indicaciones meridianas m y $180^\circ+m$ del círculo azimutal, según que el telescopio se dirija al Norte ó al Sur, y estas indicaciones servirán por todo el tiempo que duren las observaciones de latitud, puesto que el instrumento es por sí mismo bastante estable y que en aquéllas no se necesita mucha precisión.

Con la alidada del cuadrante se señala con aproximación de 1′ ó 2′ la distancia zenital media de cada par de estrellas, que es........ $\frac{1}{2}(z+z')=\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$, y en seguida moviendo verticalmente el telescopio hasta que el nivel quede sensiblemente horizontal, se tendrá establecido á la altura conveniente para que ambas estrellas se presenten en el campo. Por último, se mueve en azimut hasta que el círculo señale m ó $180° + m$, según que la estrella del Norte pase por el meridiano antes ó después que la del Sur.

Luego que la primera estrella se presenta en el campo, se mueve el micrómetro para que el hilo móvil la corte exactamente en el instante en que pasa por el hilo vertical de la retícula, anotando la hora correspondiente del cronómetro. Inmediatamente después se apuntan las indicaciones ocular y objetiva del nivel, y la lectura del micrómetro, con lo cual queda terminada la primera parte de la operación.

Sin tocar el telescopio á fin de que no varíe el ángulo que forma con el nivel, se hace que el círculo azimutal señale la otra graduación meridiana para esperar la segunda estrella, que se observa absolutamente lo mismo que la primera.[1] Si el instrumento se ha arreglado bien desde el principio, la indicación del nivel después de la inversión no debe diferir mucho de la que señalaba antes; pero en el caso contrario, puede moverse un poco alguno de los tornillos del pie, cuidando de no hacer la corrección con el tornillo de la alidada, porque se alteraría el ángulo formado por el nivel con el eje óptico del telescopio, ángulo cuya invariabilidad constituye la condición esencial de este procedimiento.

Es conveniente que las dos estrellas que forman cada par, difieran en ascensión recta sólo lo bastante para que el observador tenga

1. Al cortar las dos estrellas con el hilo no debe perderse de vista la conveniencia de mover el micrómetro en el mismo sentido, con el objeto de evitar el error que originaría en $z-z'$ el punto muerto del tornillo (Véase el número 46). Lo mismo debe hacerse al determinar el valor angular de sus revoluciones.

tiempo de variar 180° el azimut del instrumento; porque una diferencia demasiado grande daría lugar á temer algún cambio en su estado. Como mínimum me parecen suficientes 2^m, y de 15^m á 20^m como máximum. De la última estrella de un par á la primera del siguiente, deben transcurrir 3^m ó 4^m por lo menos, á fin de que haya tiempo de establecer el telescopio en la nueva posición en que se necesita.

También es de importancia procurar que la estrella meridional tenga su distancia zenital unas veces mayor y otras menor que la septentrional, con el fin de que siendo alternativamente positiva y negativa la cantidad $z-z'$ medida con el micrómetro, tenga poca influencia en el promedio final algún pequeño error que haya en el valor angular de sus revoluciones, pues es evidente que la latitud resultaría independiente de R, si fuese nula la suma algebraica de las $z-z'$ en el conjunto de pares combinados.

269.—Antes de presentar un ejemplo del cálculo, ocupémonos separadamente de cada uno de los términos de la fórmula (1). Si M y M' son las indicaciones del micrómetro para las estrellas meridional y septentrional respectivamente, se tiene $\frac{1}{2}(z-z')=\frac{1}{2}(M'-M)\,R$. Como este término es sólo de algunos minutos, la diferencia de refracciones $r-r$ se calcula con suficiente exactitud suponiendo igual á la unidad el factor que depende de los instrumentos meteorológicos, lo cual equivale á tomar por $r-r'$ la diferencia de refracciones medias $\rho-\rho'$, cuyos logaritmos suministra la Tabla I; pero para no verse en la necesidad de tomar para la distancia zenital de cada una de las estrellas de valor de ρ que le corresponde, y atendiendo á que en el método de Talcott casi nunca se observa á más de 30° del zenit, he formado la pequeña Tabla que pongo en seguida, de la variación $\Delta\rho$ de la refracción por 1′ de cambio de altura. No siendo constante $\Delta\rho$ para todas las distancias zenitales, en la Tabla se indica la que conviene á cada una.

z	$\Delta\rho$	z	$\Delta\rho$
0°	0''.0170	15°	0''.0182
5	0 .0171	20	0 .0191
10	0 .0174	25	0 .0207
15	0 .0182	30	0 .0225

Con la distancia zenital media $\frac{1}{2}(z+z')=\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$ por argumento, se toma el valor de $\Delta\rho$, y expresando en minutos á $\frac{1}{2}(z-z')$, se obtiene: $\frac{1}{2}(r-r')=\frac{1}{2}(z-z')\,\Delta\rho$.

Finalmente, las reducciones al meridiano se calculan por la fórmula:

$$x=\frac{\cos.\varphi\cos.\delta}{\text{sen.}\zeta}\,m$$

adoptando valores aproximativos de φ y de ζ, y tomando el de m de la Tabla V con el argumento h, que es la diferencia entre las horas cronométricas de las observaciones, y de la culminación de cada estrella.

Ejemplo.—El 20 de Enero de 1857 observé, entre otros, el siguiente par de estrellas, cuyos números son los que tienen en el Catálogo de la Sociedad Británica:

ESTRELLAS.	CRONÓMETRO.	NIVEL.		MICRÓMETRO.
		o	e	
1624 al S.	$9^h\,13^m\,43^s$	46	46	+4.82
1648 al N.	9 17 28	47	45	−5.82

Las posiciones aparentes tomadas del mismo Catálogo, eran:

1624.................. $\alpha=5^h\;8^m\,8^s.66$ $\qquad\delta=+11°\,10'44''.3$

1648.................. $\alpha'=5\;12\;1.94$ $\qquad\delta'=+27\;\;48\,38\;.4$

Las horas medias de sus tránsitos son $9^h\,6^m\,19^s$ y $9^h\,10^m\,12^s$, y como el cronómetro tenía un adelanto de $7^m\,20^s$, las horas cronométricas de las culminaciones fueron $9^h\,13^m\,39^s$ y $9^h\,17^m\,32^s$ respectivamente, de modo que para las reducciones al meridiano, se tiene h y h' de 4^s, y por consiguiente, $m=0''.01$. Cada división del nivel valía $0''.98$, y una revolución del micrómetro $42''.8$. Calculemos los diversos términos de la fórmula (1):

$$\begin{array}{rcc}
M=+\;4.82 & o=\;46 & e=\;46\\
M'=-\;5.82 & o'=\;47 & e'=\;45\\
\hline
M'-M=-10.64 & o-o'=-\;1 & e-e'=+\;1\\
\frac{1}{2}(M'-M)R=-3'47''.69 & \frac{1}{2}[(o-o')-(e-e')]v=-0''.49 &
\end{array}$$

Tomando por distancia zenital media $\frac{1}{2}(\delta'-\delta)=8°\,19'=8°.3$, se halla $\Delta\rho=0''.0173$, de donde resulta que la corrección por refracción es:

$$-0''.0173\times 3'.8=-0''.066$$

Para la reducción al meridiano, suponiendo $\varphi=19°\,26'$, se tiene:

$$\begin{array}{lrlrr}
 & 9.9745\ldots\ldots\ldots & \cos.\varphi\ldots\ldots & 9.9745 & \\
\cos.\delta\ldots\ldots\ldots\ldots & 9.9917 & \cos.\delta'\ldots\ldots & 9.9467 & \\
 & 8.0000\ldots\ldots\ldots & m\ldots\ldots & 8.0000 & x=0''.064\\
\text{sen.}\zeta\ldots\ldots\ldots\ldots & -9.1568 & \text{sen.}\zeta'\ldots\ldots & -9.1637 & x'=0\;.057\\
\hline
x\ldots\ldots\ldots\ldots & 8.8094 & x'\ldots\ldots & 8.7575 & \frac{1}{2}(x-x')=0''.003
\end{array}$$

Con los anteriores elementos se obtiene por último:

$$\begin{array}{rl}
\delta= & 11°\,10'\,44''.3\\
\delta'= & 27\;\;48\;\;38\;.4\\
\hline
\frac{1}{2}(\delta+\delta')= & 19°\,29'\,41''.35\\
\frac{1}{2}(z-z')= & -\;\;3\;\;47\;.69\\
\hline
 & 19°\,25'\,53''.66\\
\text{Refracción}= & -\;\;0\;.066\\
\text{Nivel}= & -\;\;0\;.490\\
\text{Reducción}= & -\;\;0\;.003\\
\hline
\varphi= & 19°\,25'\,53''.10
\end{array}$$

El promedio de 17 pares de estrellas que observé la misma noche, dió $\varphi = 19° 25' 54''.0$.

Tal es, en resumen, el sencillísimo método americano ó de Talcott; método cuya perfección no tiene casi más límite que el grado de exactitud con que se conozcan las declinaciones de las estrellas, y por eso conviene elegir las más dignas de confianza. Con el fin de lograr, hasta donde es posible, la compensación de errores originados por los que puedan existir en las declinaciones, es útil valerse de diferentes pares de estrellas, más bien que hacer muchas observaciones del mismo par; y se nota, en efecto, que los resultados medios de distintos pares presentan, por lo común, mayor discordancia que el promedio obtenido en una sola noche de trabajo, con tal que se hayan observado varios pares diferentes. Para determinar la latitud de México hice 333 observaciones empleando 43 pares de estrellas, y el resultado final para el lugar en que estaba el instrumento, fué $19° 25' 53''.07$, latitud que referida geodésicamente [número 70, ecuación (2)] á la Escuela de Ingenieros, da para este punto............. $\varphi = 19° 26' 12''.03$. Si se desechan de la combinación los dos pares cuyos resultados difieren más de los restantes, se obtiene por 308 observaciones que la latitud de la Escuela es $\varphi = 19° 26' 12''.33$.

Por vía de ejercicio pongo á la vista los datos referentes á las observaciones del 24 de Diciembre de 1856. El telescopio estaba tan cerca del meridiano, que fueron sensiblemente nulas las reducciones á este plano, y por eso no constan las horas de observación.

ESTRELLAS.	DECLINACIONES.	NIVEL.		MICRÓMETRO.	LATITUD.
		o	e		
672 S.	7° 54′ 00″.1	45.5	49.0	+7.30	19° 25′ 52″.67
752 N.	31 9 37 .7	46.0	48.5	−9.33	
798 S.	11 49 39 .7	46.5	48.0	+0.03	19 25 52 .82
831 N.	27 5 58 .9	47.0	47.5	−5.40	
971 S.	18 14 44 .3	48.0	46.5	−7.87	19 25 52 .43
999 N.	20 30 52 .2	47.0	48.0	+1.21	
1055 N.	21 32 5 .2	48.0	47.0	−2.97	19 25 55 .64
1096 S.	17 21 48 .1	50.0	45.5	−0.08	

270.—Si el lector se ha formado una idea exacta del telescopio zenital, comprenderá fácilmente que el método de Talcott puede aplicarse con cualquier instrumento provisto de micrómetro y de un buen nivel, ya sea que su inversión se verifique en virtud de una semi-revolución azimutal, ó ya quitándolo de sus apoyos, como sucede en el telescopio común de tránsitos. La única circunstancia que se requiere es que, en sus dos posiciones, permanezca invariable el ángulo formado por el nivel y el anteojo, y desde este punto de vista, hay muchos instrumentos que pueden emplearse ventajosamente para aplicar este procedimiento, el altazimut entre otros.

El altazimut portátil no tiene á veces micrómetro en el ocular, en cuyo caso no puede aplicarse en rigor el método de Talcott, porque será preciso medir con la graduación del círculo vertical la cantidad $z - z'$ que entra en la fórmula. Sin embargo, si es pequeña la diferencia $z - z'$, creo que pueden obtenerse resultados tan exactos como con el telescopio zenital, con tal que las lecturas del círculo puedan aproximarse á 1″, y esto es bastante común en el altazimut, que, por lo general, tiene microscopios micrométricos en lugar de vernieres para estimar las fracciones de la graduación (número 44).

Con el altazimut de esta construcción, y aun con el círculo vertical común, puede medirse la latitud siguiendo el mismo plan de Talcott, si no con todas las ventajas que provienen del uso del telescopio zenital, al menos con la de lograr la eliminación más ó menos completa de los errores angulares constantes; pues es evidente que en la cantidad $z - z'$ sólo quedará la diferencia de los errores peculiares á los puntos cuyas graduaciones sean z y z', y la parte de error accidental, como es el de lectura, aproximación, etc. Si se procura que $z - z'$ no sea considerable, hay en general fundamento para creer que su valor resulte sensiblemente exacto.

El modo de observar con estos instrumentos consistirá en dirigir el anteojo á la primera estrella cerca del meridiano, y luego que se tenga en la intersección de los hilos, anotar la hora, las indicaciones del nivel y la graduación del limbo. En seguida, dejando fijo el círculo, hacerlo girar 180° en azimut al derredor de la columna vertical, dirigiendo después el telescopio, por medio de su movimiento independiente, á la segunda estrella, con el fin de recoger los nuevos datos de hora, nivel y graduación. Procediendo de esta manera, las indicaciones z y z' se obtienen en puntos del limbo no muy distantes uno de otro, y por consiguiente, con más probabilidad de exactitud.

Siguiendo el mismo principio se obtienen muy buenos resultados aun con el sextante, á pesar de que en este instrumento no se puede eliminar el error de excentricidad en cada lectura, por no tener más que un vernier, y de ser este error á veces muy diverso en puntos de la graduación bastante próximos, según se ha indicado en el número 166. Pongo en seguida las últimas observaciones de este género que hice en San Luis Potosí, las cuales, aunque son en rigor dos series completas de alturas circunmeridianas, se pueden reducir ó calcular con menos trabajo combinándolas de acuerdo con el procedimiento americano, para obtener desde luego el mismo resultado medio que se obtendría por su reducción independiente.

ABRIL 30 DE 1867.

γ Ursæ majoris.	Sextante.	*α Virginis.*	Sextante.
$9^h\ 23^m\ 6^s.5$	115° 29′ 25″	$10^h\ 43^m\ 4^s.5$	114° 36′ 00″
„ 27 22.7	„ 28 00	„ 44 20.5	„ 39 10
„ 29 22.0	„ 26 20	„ 45 21.7	„ 41 20
„ 31 48.0	„ 23 35	„ 46 40.0	„ 43 20
„ 33 16.5	„ 22 5	„ 48 3.7	„ 45 5
		„ 50 27.0	„ 48 15
		„ 52 25.2	„ 48 20
	115° 25′ 53″		114° 43′ 4″

La indicación del barómetro era $0^m.617$; la del termómetro libre cuando se observó la primera estrella fué 22°.5, y cuando se observó la segunda 22°.0. Aunque estos datos deberían servir para el cálculo de las refracciones, en el caso que considero no hay inconveniente en adoptar la diferencia de refracciones medias prescindiendo de temperatura y presión, á causa de la corta diferencia de altura que tenían las estrellas.

Las horas cronométricas de los tránsitos eran $9^h\ 22^m\ 42^s$ para *γ Ursæ* y $10^h\ 53^m\ 49^s$ para *α Virginis*, por lo cual se halla que las reducciones al meridiano son 103″.3 y 177″.3 respectivamente.

Como la cuarta parte de la diferencia de indicaciones del sextante representa la cantidad $\frac{1}{2}(z - z')$, y las declinaciones de las estrellas eran: $\delta = -10°\ 28'\ 7''.1$ y $\delta' = +54°\ 26'\ 5''.2$, tendremos:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\delta+\delta') &= 21°\ 58'\ 59''.0\\ \tfrac{1}{2}(z-z') &= +\ \ 10\ 42\ .2\\ \tfrac{1}{2}(r-r') &= +\qquad 0\ .2\\ \tfrac{1}{2}(x-x') &= -\qquad 37\ .0\\ \hline \varphi &= 22°\ \ 9'\ \ 4''.4\end{aligned}$$

Si con la corrección inicial del sextante, que esa noche fué $\varepsilon_0 = 1'45''$, se reducen las anteriores observaciones como circunmeridianas, lo que necesariamente aumenta el trabajo, se encontrará:

Por *γ Ursæ maj*.......................... $\varphi = 22°\ 9'\ 24''$
Por *α Virginis*.......................... $\varphi = 22\ \ 8\ \ 45$

cuyo promedio reproduce la latitud obtenida antes, y cuya semidiferencia 19″.5 proviene, al menos en su mayor parte, del error del sextante, que produce efectos contrarios en las observaciones al Norte y al Sur del zenit. La corrección que indica es $\Delta G = -39''$.

CAPITULO XVIII.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE LITTROW.

271.—Si se mide la distancia zenital z de una estrella circumpolar en un punto cualquiera del círculo que describe al derredor del polo, este valor de z diferirá de la colatitud de la estación tanto menos cuanto más pequeña sea la distancia polar $d = 90° - \delta$ de la estrella. Se comprende fácilmente este principio, recordando que la colatitud no es otra cosa más que la distancia zenital del mismo polo. Según esto, llamando x la diferencia que existe entre la colatitud y la distancia zenital z de una circumpolar, podremos establecer la ecuación: $z + x = 90° - \varphi$, ó bien:

$$\varphi = 90° - (z + x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Por otra parte, siendo d la distancia polar y h el ángulo horario de la estrella en el instante de la observación, se tendrá:

$$\cos. z = \text{sen.}\,\varphi \cos. d + \cos.\varphi\,\text{sen.}\,d \cos. h$$

y sustituyendo el valor (1) de φ, y desarrollando, resulta:

$$1 = (\text{sen.}\,d \cos. h - \cos. d \tan. z)\,\text{sen.}\,x + (\cos. d + \text{sen.}\,d \cos. h \tan. z) \cos. x \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Si d fuese nulo, lo sería también x, de manera que podremos considerar que esta última cantidad es una función de la primera, de la forma:

$$x = A d + B d^2 + C d^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Suponiendo ahora que se trate de una estrella muy inmediata al polo, tal como α ó δ *Ursæ minoris*, el valor de x será siempre muy pequeño, y así limitándonos á los términos de tercer orden en el desarrollo de su seno y de su coseno, hallaremos:

$$\text{sen.}\,x = x - \tfrac{1}{6} x^3 = A d + B d^2 + (C - \tfrac{1}{6} A^3) d^3$$
$$\cos. x = 1 - \tfrac{1}{2} x^2 = 1 - \tfrac{1}{2} A^2 d^2 - A B d^3$$

Introduciendo estos valores en la ecuación (2) y desarrollando el seno y el coseno de d, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} [(d - \tfrac{1}{6} d^3) \cos. h - (1 - \tfrac{1}{2} d^2) \tan. z]\,[A d + B d^2 + (C - \tfrac{1}{6} A^3) d^3] \\ + [1 - \tfrac{1}{2} d^2 + (d - \tfrac{1}{6} d^3) \cos. h \tan. z]\,[1 - \tfrac{1}{2} A^2 d^2 - A B d^3] \end{array}\right\} = 1$$

Ejecutando las multiplicaciones hasta los términos de tercer orden, reduciendo y ordenando respecto de las potencias de d, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} (\cos. h \tan. z - A \tan. z)\, d \\ + (A \cos. h - B \tan. z - \tfrac{1}{2} A^2 - \tfrac{1}{2})\, d^2 \\ + \left(\begin{array}{l} B \cos. h + \tfrac{1}{2} A \tan. z - \tfrac{1}{6} \cos. h \tan. z - \tfrac{1}{2} A^2 \cos. h \tan. z \\ - A B + \tfrac{1}{6} A^3 \tan. z - C \tan. z \end{array}\right) d^3 \end{array}\right| = 0$$

Según la forma de esta ecuación, es indispensable que sean nulos separadamente los coeficientes de las diversas potencias de d, por lo que tendremos las siguientes relaciones para la determinación de A, B y C:

$$\cos. h - A = 0$$
$$A (\cos. h - \tfrac{1}{2} A) - \tfrac{1}{2} - B \tan. z = 0$$
$$\tfrac{1}{2} A (1 - A \cos. h + \tfrac{1}{3} A^2) \tan. z + B \cos. h - \tfrac{1}{6} \cos. h \tan. z - A B - C \tan. z = 0$$

De la primera resulta:

$$A = \cos. h$$

y este valor introducido en la segunda produce:

$$B = -\tfrac{1}{2}\,\text{sen.}^2 h \cot. z$$

Por último, sustituyendo ambos valores en la tercera, se obtiene:

$$C = \tfrac{1}{3} \cos. h\,\text{sen.}^2 h$$

En consecuencia, la expresión (3) será, expresando en segundos los pequeños arcos d y x:

$$x = d\cos.h - \tfrac{1}{2}d^2\text{sen.}^2h\cot.z\,\text{sen.}1'' + \tfrac{1}{3}d^3\cos.h\,\text{sen.}^2h\,\text{sen.}^21''$$

Sustituído el valor de x en la ecuación (1), dará finalmente por expresión de la latitud:

$$\varphi = 90^\circ - z - d\cos.h + \tfrac{1}{2}(d\,\text{sen.}h)^2\cot.z\,\text{sen.}1'' - \tfrac{1}{3}(d\cos.h)(d\,\text{sen.}h)^2\text{sen.}^21'' \ldots (4)$$

Esta serie se debe á Mr. Littrow, Director del Observatorio de Viena, y constituye uno de los mejores procedimientos para determinar la latitud por observaciones de estrellas circumpolares muy próximas al polo. Sus principales ventajas consisten en que puede aplicarse en un instante cualquiera; en que no demanda el conocimiento previo de la latitud aproximativa, y en que llena siempre las condiciones favorables á la observación que resultan de las investigaciones del Capítulo XV. Según dije al principio, las estrellas que se emplean generalmente en este método son la polar y la δ *Ursæ minoris*, por ser aquellas cuya distancia al polo es bastante pequeña para que la serie sea muy convergente, y ser también fácilmente observables con instrumentos portátiles.

Cuando se observa alguna de estas estrellas en las inmediaciones de sus mayores elongaciones, no hay inconveniente en repetir por algún tiempo las medidas de z, pues en tales circunstancias, el movimiento ascensional varía proporcionalmente á las duraciones transcurridas; pero en otra posición, con especialidad cerca de sus tránsitos, importa no invertir mucho tiempo, porque no existe esa proporcionalidad; y así es que deberán agruparse las observaciones en series parciales, como se indicó en el número 250.

Ejemplo.—Calculemos por medio de la fórmula de Littrow las observaciones de la polar que constan en el número 251, y cuyos datos son:

$$z = 71^\circ 52' 31''.0 \qquad h = -148^\circ 55' 57''.6 \qquad d = 1^\circ 27' 18''.5$$

Expresando en segundos la distancia polar, tendremos $d = 5238''.5$, y el cálculo será, en consecuencia:

		$\tfrac{1}{2}$ sen. 1″	4.38454	$\tfrac{1}{3}$ sen.² 1″	8.8940
d.....	3.7192069	....	3.71921	d cos. h.........	3.6520—
cos. h.....	9.9327586—	sen. h.........	9.71269—	(d sen. h)²......	6.8638
	3.6519655—	d sen. h.......	3.43190—		9.4098—
		cot. z..........	9.51498		
	−4487.″1				−0″.2
			0.76332		
			+5″.8		

$90^\circ - z =$		18° 7′ 29″.0
Primer término	$= +$	1 14 47 .1
Segundo „	$= +$	5 .8
Tercer „	$= +$	0 .2
$\varphi =$		19° 22′ 22″.1

Por esta aplicación se ve la pequeñez del tercer término de la serie, que puede omitirse en aquellos casos en que no se crea indispensable la mayor precisión, ó bien cuando el instrumento que haya servido para medir á z no corresponda á ese grado de exactitud, como sucede con el sextante.

El método de Littrow, empleado exclusivamente para la determinación de una latitud, ofrecería á veces el inconveniente de no prestarse á la eliminación de los errores angulares, por ser sólo aplicable á las circumpolares; pero puede usarse combinado con el más general de distancias zenitales circunmeridianas, procurando que estas últimas se refieran á estrellas australes que culminen casi á la misma altura que aquéllas. Por otra parte, haciendo uso de un altazimut, y en general, de un buen instrumento cuyas correcciones se hayan determinado con anterioridad, puede decirse que no hay que temer aquel inconveniente.

272.—Cuando se conoce el valor aproximativo de la latitud, lo cual se consigue después de las primeras observaciones, hallo muy conveniente el método de cálculo que sigue, y que he aplicado con el mejor éxito, no sólo á la Polar, sino á todas las circumpolares, aun cuando sus distancias al polo excedan de 10° á 12°. Consiste en reducir las distancias zenitales que comprenda cada serie, á un instante común, escogido propiamente; y de esa manera todos los resultados son inmediatamente comparables, aun antes de proceder al cálculo de la latitud. El mismo método se presta á la determinación de la indicación zenital ó á la de la horizontal del círculo, cuando éste se haya empleado en dos posiciones inversas.

Sea T la hora sideral á la que deben reducirse todas las observaciones, y llamemos respectivamente ζ y θ la distancia zenital y el ángulo horario de la estrella en ese instante. Si designamos, además, por t la hora sideral de una observación cualquiera, y por z y h la distancia zenital y el ángulo horario en este momento, tendremos las dos ecuaciones:

$$\cos.\zeta = \operatorname{sen.}\varphi \operatorname{sen.}\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos.\theta$$
$$\cos.z = \operatorname{sen.}\varphi \operatorname{sen.}\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos.h$$

de cuya substracción resulta la que sigue, siendo $x = \zeta - z$ la reducción al instante T.

$$\operatorname{sen.}\tfrac{1}{2}x = \frac{\cos.\varphi \cos.\delta \operatorname{sen.}\frac{1}{2}(\theta+h) \operatorname{sen.}\frac{1}{2}(\theta-h)}{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(\zeta+z)} \quad \ldots\ldots (5)$$

Esta reducción es, en muchos casos, bastante pequeña para que pueda tomarse el arco en segundos por su seno, y entonces:

$$x = \frac{2\cos.\varphi \cos.\delta \operatorname{sen.}\frac{1}{2}(\theta+h) \operatorname{sen.}\frac{1}{2}(\theta-h)}{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(\zeta+z)\operatorname{sen.}1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Debe notarse que en ambas fórmulas entra el valor de ζ; pero indicaremos el modo de calcularlo con la aproximación suficiente en los diversos casos que vamos á considerar.

Si por T se toma el instante del paso de la estrella por el meridiano, se tendrá $\theta = 0°$, y por tanto:

$$x = -\frac{2\cos.\varphi \cos.\delta \operatorname{sen.}^2\frac{1}{2}h}{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(\zeta+z)\operatorname{sen.}1''}$$

que da "la reducción al meridiano" (número 256), aunque con la ventaja de quedar expresada por un solo término. En este caso deberá emplearse:

$$\zeta = \delta - \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{al Norte del zenit}$$
$$\zeta = \varphi - \delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{al Sur del zenit}$$

La misma fórmula puede aplicarse á los tránsitos inferiores ó subpolares, con tal de que se cuente h desde el meridiano inferior y de que cambie el signo de x; pero si se cuentan siempre los ángulos horarios desde la culminación superior, se tiene $\theta = 180°$, y entonces:

$$x = +\frac{2\cos.\varphi \cos.\delta \cos.^2\frac{1}{2}h}{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(\zeta+z)\operatorname{sen.}1''}$$

siendo $\zeta = 180° - (\varphi + \delta)$ para los tránsitos subpolares.

Apliquemos este método á la observación de la polar, que se ha calculado por la serie de Littrow en el párrafo precedente; y tomemos por latitud aproximativa $\varphi = 19°\,22'\,00''$, esto es: supongámosle intencionalmente un error de más de $20''$.

	2..........	0.301030	$x = +0°\,12'\,25''.4$
$\varphi = 19°\,22'\,00''.0$	cos. φ.....	9.974703	$z = 71\;\;52\;\;31\;.0$
$\delta = 88\;\;32\;\;41\;.5$	cos δ......	8.404736	$z + x = 72°\;\;4'\,56''.4$
$\varphi + \delta = 107°\,54'\,41''.5$	cos. $\frac{1}{2}h$....	9.427818	$\delta = 88\;\;32\;\;41\;.5$
$\zeta = 72\;\;\;5\;\;18\;.5$	"	9.427818	$180° - \varphi = 160°\,37'\,27''.9$
$z = 71\;\;52\;\;31\;.0$		7.536105	$\varphi = 19\;\;22\;\;22\;.1$
$\frac{1}{2}(\zeta+z) = 71°\,58'\,54''.7$	...sen.........	−9.978161	
	sen. 1''....	−4.685575	
	x.....	2.872369	

Vemos que este resultado concuerda con el del párrafo anterior, ó que el valor correcto $\zeta = z + x$ se ha obtenido exacto, no obstante el error de $22''$ que tenía el aproximativo.

En vez de tomar por instante común T el de la culminación de la estrella, tomemos ahora el de su mayor digresión. En este caso se calcularán θ y ζ por las ecuaciones:

$$\cos.\theta = \frac{\tan.\varphi}{\tan.\delta} \qquad \cos.\zeta = \frac{\operatorname{sen.}\varphi}{\operatorname{sen.}\delta}$$

que suministrarán ambos elementos con suficiente exactitud, aun cuando haya un pequeño error en la latitud supuesta. Con ellos procederemos al cálculo de x, y una vez hallado el valor correcto $\xi = z + x$, se obtendrá la verdadera latitud por la segunda de estas ecuaciones, á saber:

$$\text{sen.}\,\varphi = \text{sen.}\,\delta \cos.(z + x)$$

También puede calcularse la corrección de la latitud por la fórmula:

$$\varDelta\varphi = -\tan.\varphi \tan.\xi \,.\, \varDelta\xi$$

que proviene de la diferenciación de cos. ξ, siendo $\varDelta\xi = z + x - \xi$, ó bien la diferencia entre los valores correcto y supuesto de ξ. La latitud correcta será $\varphi + \varDelta\varphi$.

Apliquemos al mismo ejemplo, suponiendo siempre $\varphi = 19°\,22'$, y dando á θ el signo negativo por hallarse la estrella al Este del meridiano.

$\tan.\varphi$ 9.545928	$\text{sen.}\,\varphi$ 9.520631	$2\cos.\varphi\cos.\delta$ 8.680469
$\tan.\delta$ 1.595125	$\text{sen.}\,\delta$ 9.999861	$\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\theta+h)$ 9.940931—
$\cos.\theta$ 7.950803	$\cos.\xi$ 9.520770	$\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\theta-h)$ 9.695302
$\theta = -\ 89°29'18''.2$	$\xi = 70°36'36''.7$	8.316702—
$h = -148\ 55\ 57\ .6$	$z = 71\ 52\ 31\ .0$	$\text{sen.}\tfrac{1}{2}(\xi+z)$ —9.976321
$\tfrac{1}{2}(\theta+h) = -119°12'37''.9$	$\tfrac{1}{2}(\xi+z) = 71°15'\ 3''.8$	sen. 1″...... —4.685575
$\tfrac{1}{2}(\theta-h) = +\ 29\ 43\ 19\ .7$		x......... 3.654806—

$x = -\ 1°15'16''.5$		
$z = \ 71\ 52\ 31\ .0$	$\tan.\varphi$.... 9.5459	
$z + x = \ 70°37'14''.5$	$\tan.\xi$..... 0.4539	
$\varDelta\xi = \ -\ 22\ .2$...............	1.3463—	$\varphi = 19°22'00''.00$
	$\varDelta\varphi$...... 1.3461—	$\varDelta\varphi = \ +22\ .18$
		$\varphi + \varDelta\varphi = 19°22'22''.2$

Si tomamos por instante común aquel en que la altura de la estrella es igual á la latitud, instante que no difiere mucho del de la

máxima digresión, su distancia zenital será entonces $90° - \varphi$, y tendremos:

$$\text{sen.}\,\varphi = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\varphi \cos.\delta \cos.\theta$$

de donde resulta:

$$\cos.\theta = \tan.\varphi \frac{1 - \text{sen.}\,\delta}{\cos.\delta} = \tan.\varphi \tan.(45° - \tfrac{1}{2}\delta)$$

Con este valor de θ, que se obtiene también con la exactitud necesaria aun cuando la latitud supuesta contenga un pequeño error, y el valor de $\xi = 90° - \varphi$, se procede al cálculo de x, determinándose en seguida la latitud correcta por la relación $\varphi = 90° - (z + x)$, puesto que $z + x$ expresa entonces la verdadera colatitud.

Por este nuevo método, y tomando siempre $\varphi = 19°\,22'$, nuestro ejemplo dará:

$\theta = -\ \ 89°\,44'\,39''.3$	$\xi = 70°\,38'\,00''.0$
$h = -148\ \ 55\ \ 57\ .6$	$z = 71\ \ 52\ \ 31\ .0$
$\tfrac{1}{2}(\theta + h) = -119°\,20'\,18''.4$	$\tfrac{1}{2}(\xi + z) = 71°\,15'\,15''.5$
$\tfrac{1}{2}(\theta - h) = +\ \ 29\ \ 35\ \ 39\ .1$	

Con estos datos el cálculo, semejante al anterior, produce:

$$\begin{aligned} x &= -\ \ 1°\,14'\,53''.1 \\ z &= \ \ \ 71\ \ 52\ \ 31\ .0 \\ 90° - \varphi &= \ \ \ 70°\,37'\,37''.9 \\ \varphi &= \ \ \ 19\ \ 22\ \ 22\ .1 \end{aligned}$$

Se habrá notado sin duda que este último caso equivale, en cierta manera, al cálculo de la serie de Littrow, puesto que ésta reduce las observaciones al polo mismo, que es un punto cuya altura es también igual á la latitud. La única diferencia consiste en que nuestro método las reduce al punto del círculo de declinación de la estrella que se halla en el almicantarat que pasa por el polo.

También se habrá notado en los dos últimos casos, sobre todo para las circumpolares muy inmediatas al polo, que los valores de θ difieren poco de 90°. Por lo mismo, en tales circunstancias, pueden calcularse esos ángulos expresando en segundos las respectivas ecuaciones, á saber:

$$\theta = 90° - \frac{\tan.\varphi \cot.\delta}{\text{sen.}\,1''} \qquad \theta = 90° - \frac{\tan.\varphi \tan.(45° - \frac{1}{2}\delta)}{\text{sen.}\,1''}$$

Sin embargo, cuando las distancias polares pasen de 5° ó 6°, es preferible servirse de las fórmulas primitivas, y aun de la (5) en vez de la (6) para calcular la reducción x.

Adoptemos, finalmente, por momento T aquel en que θ es de 90°. La distancia zenital y el valor de x se obtendrán, en tal caso, por las ecuaciones:

$$\cos.\zeta = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta \qquad x = \frac{\cos.\varphi \cos.\delta \cos.h}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}(\zeta + z)\,\text{sen.}\,1''}$$

que, aplicadas á nuestro ejemplo, dan:

$\zeta =$	70° 38′ 23″.2	$\cos.\varphi\cos.\delta$..........	8.379439
$z =$	71 52 31 .0	$\cos.h$..................	9.932759–
$\frac{1}{2}(\zeta + z) =$	71° 15′ 27″.1......	sen....................	–9.976337
		sen. 1″................	–4.685575
$x =$	– 1 14 29 .8	x......................	3.650286–
$z + x =$	70 38 1 .2		

Hallado así el valor correcto $z + x$, la primera de las ecuaciones anteriores, ó la diferenciación de la misma, suministran el valor de φ ó de su corrección, esto es:

$$\text{sen.}\,\varphi = \frac{\cos.(z + x)}{\text{sen.}\,\delta} \qquad \Delta\varphi = -\tan.\varphi \tan.\zeta \,.\, \Delta\zeta$$

Siendo, en nuestro caso, $\Delta\zeta = z + x - \zeta = -22''.0$, esta misma cantidad, con signo contrario, será la corrección de φ, pues el coeficiente $\tan.\varphi \tan.\zeta$ casi siempre difiere muy poco de la unidad. Se tendrá, pues, 19° 22′ 22″ por latitud correcta.

La elección del instante T es casi indiferente cuando se trata de estrellas muy próximas al polo, y cualquiera es aceptable con tal de que se puedan determinar fácilmente los valores simultáneos de θ y ζ; pero, en general, y para que x resulte pequeña, debe seguirse la regla de

reducir de preferencia al meridiano siempre que el ángulo horario h, correspondiente al instante t de la observación, y contado desde el tránsito más inmediato, no exceda de 4^h, ó sea de 60°. Desde 4^h hasta 6^h es más pequeña la reducción á la hora de la máxima digresión, á la del tránsito por el almicantarat polar, ó la que corresponde á $\theta = 90°$.

Dijimos que cuando se hayan hecho diversas observaciones, su reducción á un solo instante común, no sólo permite la comparación de todos los valores de $z + x$, que deben resultar sensiblemente iguales, sino que se presta, además, á la determinación del punto de partida de la graduación vertical del instrumento, si éste se ha empleado en sus dos posiciones. Aunque en el número 260 indicamos ya el modo de determinar así la colimación de un altazimut graduado por cuadrantes, expongamos ahora el de hallar la lectura zenital de un círculo numerado de 0° á 360°, quiere decir, la lectura g_0 que se obtendría cuando el telescopio, invariablemente unido al círculo, estuviese dirigido exactamente hacia el zenit. Siendo:

g y g' las lecturas del círculo en las dos posiciones,
n y n' " nivel "
r y r' las refracciones,
x y x' las reducciones al instante común, se tendrá en la primera y segunda posiciones respectivamente.

$$\zeta = g - g_0 + n + r + x$$
$$\zeta = g_0 - g' + n' + r' + x'$$

ecuaciones que, combinadas por adición y substracción, suministrarán los valores de ζ y g_0, á saber:

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(g - g') + \tfrac{1}{2}(n + n') + \tfrac{1}{2}(r + r') + \tfrac{1}{2}(x + x')$$
$$g_0 = \tfrac{1}{2}(g + g') + \tfrac{1}{2}(n - n') + \tfrac{1}{2}(r - r') + \tfrac{1}{2}(x - x')$$

Las cantidades x y x' deben emplearse con el signo que les corresponda, según lo hemos visto en los ejemplos que anteceden. De esta manera cada par de observaciones, ejecutadas en dos posiciones inversas del círculo, debe darse el mismo valor de g_0, al menos mientras no se toquen los nonius ó los micrómetros, de cuya posición dependen las lecturas.

Cuando se observe un objeto terrestre muy distante, x y x' son nulos, y como las refracciones serán iguales, se tendrá:

$$g_0 = \tfrac{1}{2}(g+g') + \tfrac{1}{2}(n-n')$$

Una vez bien determinada esta constante por cualquiera de los métodos que preceden, no habrá inconveniente en usar el instrumento en una sola posición.

CAPITULO XIX.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE DOS ESTRELLAS.

273.—La eliminación inmediata de los errores angulares, que acaso son los que más directamente influyen en las observaciones de latitud, se consigue observando dos estrellas en el momento en que adquieren la misma distancia zenital aparente. Conviene escogerlas de tal manera que el promedio de sus declinaciones sea próximamente igual á la latitud que se busca, y además, que no difieran mucho en ascensión recta; porque de ese modo pueden observarse cerca del meridiano para no temer la influencia de algún pequeño error en la hora, y para terminar toda la operación en poco tiempo.

Una vez hecha la elección conveniente, se dirige el telescopio del instrumento á la que culmine primero, ya sea la del Norte ó la del Sur, y luego que se tiene en la intersección de los hilos, si el telescopio tiene retícula, ó que se confunden las dos imágenes si se emplea el sextante ó cualquier otro instrumento de reflexión, se anota la hora y se deja el instrumento fijo en la posición que tenía, á fin de esperar el instante en que la otra estrella adquiere la misma altura para anotar la hora correspondiente. Siendo estas horas los únicos datos que debe recoger el observador, es innecesario apuntar la indicación del instrumento angular, á no ser por pura precaución para conocer algún cambio accidental que pudiera sufrir en el tiempo que transcurre de una observación á otra.

Siendo t y t' las horas anotadas y Δt y $\Delta t'$ las correspondientes correcciones del cronómetro, las horas exactas serán: $T = t + \Delta t$ y $T' = t' + \Delta t'$. Entonces las fórmulas (6) del número 191 no contendrán más incógnitas que φ, y recordando que $\omega = \varepsilon + \psi$, podrán calcularse en el orden siguiente para determinar la latitud, introduciendo en ella las horas exactas:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta = \tfrac{1}{2}(T - T') + \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha)\\
&\varepsilon = \tfrac{1}{2}(T - T') - \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')\\
&\tan.\psi = \tan.\tfrac{1}{2}(\delta - \delta')\tan.\tfrac{1}{2}(\delta + \delta')\cot.\theta\\
&\tan.\varphi = \frac{\text{sen.}(\varepsilon + \psi)\,\text{sen.}\,\theta}{\tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta')\cos.\psi} = \frac{\text{sen.}(\varepsilon + \psi)\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos.\theta}{\text{sen.}\,\psi}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(1)$$

Si es solar el cronómetro de que se sirve el observador, se convierten en siderales la duración $(T - T')$ y la hora media $\frac{1}{2}(T + T')$.

Ejemplo.—Apliquemos las fórmulas á las siguientes observaciones que, entre otras, hice en San Luis Potosí el 27 de Abril de 1867, con sextante y un cronómetro solar cuyo adelanto á las 9^h de la noche era de $10^m 7^s.64$, y su variación diaria de $-3^s 87$. Esta marcha es bastante pequeña para que pueda suponerse nula sin error de importancia en intervalos cortos, al menos en esta clase de observaciones en que la lentitud del movimiento ascensional de las estrellas, por estar cerca del meridiano, da lugar á una incertidumbre en las horas de las observaciones, evidentemente superior al error que se cometería desechando la corrección por la marcha del cronómetro. Sin embargo, llevaré en cuenta la variación á fin de presentar un tipo de cálculo más general y completo.

α Ursæ maj. al N.	Sextante.	*α Virginis* al S.
$9^h\ 1^m\ 43^s.0$	99° 10′	$9^h\ 28^m\ 9^s.5$
„ 7 22 .0	99 00	„ 27 33 .0
„ 18 35 .5	98 30	„ 25 53 .0

Las posiciones de las estrellas eran:

α *Ursæ majoris*...... $\alpha = 10^h 55^m 31^s.12$.......... $\delta = +62° 28' 9''.2$
α *Virginis*............ $\alpha' = 13\ 18\ 13.49$.......... $\delta' = -10\ 28\ 7\ .1$

Habiéndose observado tres alturas iguales de cada estrella, obtendremos otras tantas determinaciones de la latitud. Apliquemos el cálculo á los datos de la primera, que corresponde á la graduación 99° 10′ del sextante:

$\frac{1}{2}(\delta - \delta') = 36° 28' 8''.1$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(\delta + \delta') = 26° 00' 1''.0$

$\frac{1}{2}(t - t') =$	$0^h 13^m 13^s.25$	$\frac{1}{2}(t + t') =$	$9^h 14^m 56^s.25$
Marcha =	0 .03	Corrección =	− 10 7 .64
Acel. =	2 .17	Hora media =	$9^h\ 4^m 48^s.61$
$\frac{1}{2}(T - T') =$	$-\ 0^h 13^m 15^s.39$	Ascen. recta =	2 21 7 .17
$\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) =$	1 11 21 .18	Acel. =	1 29 .50
$\theta =$	$\begin{cases} 0^h 58^m\ 5^s.79 \\ 14° 31' 26''.8 \end{cases}$	$\frac{1}{2}(T + T') =$	$11^h 27^m 25^s.28$
		$\frac{1}{2}(\alpha - \alpha') =$	12 6 52 .30
		$\varepsilon =$	$\begin{cases} -0^h 39^m 27^s.02 \\ -9° 51' 45''.3 \end{cases}$

$\tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta')$..........	9.8687160	$\text{sen.}(\varepsilon + \psi)$..........	9.8451605
$\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')$..........	9.6881871	....	9.6881871
$\cot.\theta$....................	0.5865886	$\cos.\theta$....................	9.9858943
$\tan.\psi$....................	0.1434917		9.5192419
		$\text{sen.}\,\psi$..................	−9.9095880
$\psi =$	54° 17′ 51″.6		
$\varepsilon =$	− 9 51 45 .3	$\tan.\varphi$....................	9.6096539
$\omega = \varepsilon + \psi =$	44° 26′ 6″.3		$\varphi = 22° 8' 56''.6$

Haciendo el cálculo con los datos de la segunda observación, se obtiene $\varphi = 22° 8' 54''.4$, y con los referentes á la tercera $\varphi = 22° 9' 4''.2$. El promedio de los tres resultados, será, pues: $\varphi = 22° 8' 58''.4$.

En la página 105 y siguientes de los *Nuevos Métodos Astronómicos* puede verse la corrección que es preciso hacer á las horas cuando se desea hallar desde luego la latitud valiéndose del promedio de una serie de observaciones, en vez de determinarla por cada una de ellas, como se ha hecho en el ejemplo anterior. Sirviéndose de los promedios, es acaso un poco más breve el cálculo; pero ofrece en cambio el inconveniente de que, no conociéndose los resultados individuales, tampoco se puede juzgar acerca de su concordancia; y fácilmente se comprende que basta que sea defectuosa una sola de las observaciones para que vicie todo el resultado, lo cual no sucede cuando se calculan una á una, puesto que al tomar su término medio, se desechan de la combinación aquel ó aquellos resultados que, respecto de los demás, presenten una discordancia que se crea superior al error posible de observación. Por otra parte, el cálculo individual de las observaciones no es tan dilatado como parece á primera vista, en atención á que son constantes todas aquellas cantidades que dependen de la posición de las dos estrellas. Por todas estas razones no he creído de gran utilidad la exposición del método de cálculo basado en el uso de los promedios de las horas, con el fin de hacerlo correspondiente al de las distancias zenitales observadas.

En el hecho de ser las fórmulas (1) independientes de la indicación del instrumento angular, se concibe que también el resultado lo será del error del elemento z; y que se evita el uso de los instrumentos meteológicos por no necesitarse el conocimiento de la refracción atmosférica, al menos si no transcurre mucho tiempo entre las observaciones de las dos estrellas y sus distancias zenitales no son muy considerables. Todas estas ventajas del método son muy importantes para un viajero, que á veces no puede disponer de todos los elementos indispensables para la aplicación de otros procedimientos.

Como puede suceder que á consecuencia del estado de los niveles del instrumento, de la diferencia de refracción cuando entre las observaciones transcurre un tiempo considerable, ó por cualquiera otra causa, las alturas de las dos estrellas no sean exactamente iguales, se hará en tales casos una pequeña corrección á una de las horas. Sea Δz la diferencia de distancias zenitales, en la cual supongo incluídas todas las cantidades que la producen, y x la corrección correspondiente. Siendo Δz siempre muy pequeña, lo será también x, y tendremos:

$$x = \frac{d\,h}{d\,z}\,\Delta z$$

Sustituyendo el valor de $\frac{d\,h}{d\,z}$, (número 177), y expresando en segundo de tiempo el de x, resulta:

$$x = \frac{\text{sen.}\,z\,\Delta z}{15\cos.\varphi\cos.\delta\,\text{sen.}\,h} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

En esta corrección se introducen valores aproximativos de φ y de z; teniendo cuidado con el juego de los signos. Así, por ejemplo, si la segunda estrella se observa á una altura demasiado grande, Δz será positiva para esa estrella, de modo que si está al Oeste, siendo entonces también h positivo, lo será x, y la hora correspondiente á la igualdad de alturas es $T+x$, que es la que debe emplearse en el cálculo de la latitud.

274.—Cuando se conozca la latitud aproximativa de la estación, puede hacerse el cálculo de este otro modo. Determinando á θ, ε y ψ por las tres primeras fórmulas, se tendrá: $\omega = \varepsilon + \psi$. Sea ahora φ la latitud aproximativa y $\Delta\varphi$ su corrección: si con φ se calcula el valor de ω, se tendrá un resultado inexacto ω' por la ecuación:

$$\text{sen.}\,\omega' = \frac{\tan.\frac{1}{2}(\delta-\delta')\tan.\varphi\cos.\psi}{\text{sen.}\,\theta} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

y la diferencia $\omega - \omega'$ será debida únicamente al error que tenga la latitud supuesta, el cual se ha designado por $\Delta\varphi$. Haciendo........... $\omega - \omega' = \Delta\omega$, se tendrá:

$$\Delta\varphi = \frac{d\,\varphi}{d\,\omega'}\,\Delta\omega$$

y diferenciando el valor de sen. ω' con relación á φ, resulta:

$$\frac{d\,\varphi}{d\,\omega'} = \frac{\text{sen.}\,2\,\varphi}{2\tan.\,\omega'},$$

por lo cual se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\text{sen.}\,2\,\varphi}{2\tan.\,\omega'}(\omega-\omega') \\ \text{Latitud correcta} &= \varphi + \Delta\varphi \end{aligned}\right\} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

En nuestro ejemplo hallamos: $\omega = 44^\circ\,26'\,6''.3$. Si suponiendo $\varphi = 22^\circ\,10'$ calculamos el valor de ω', se tiene:

$\tan.\frac{1}{2}(\delta-\delta')$	9.8687160	$\frac{1}{2}$	9.69897
$\tan.\varphi$	9.6100359	$\text{sen}.2\varphi$	9.84437
$\cos.\psi$	9.7660961	$\omega-\omega'$	2.25050—
$\text{sen}.\theta$	—9.3993057	$\tan.\omega'$	—9.99219
$\text{sen}.\omega'$	9.8455423	$\Delta\varphi$	1.80165—

$$\omega' = 44^\circ\ 29'\ 4''.2 \qquad \Delta\varphi = -\ 1'\ 3''.3$$
$$\omega = 44\ \ 26\ \ 6\ .3 \qquad \varphi = 22^\circ\ 10'\ 00''.0$$
$$\omega - \omega' = -\ 2'\ 57''.9 = -177''.9 \qquad \text{Latitud} = 22^\circ\ \ 8'\ 56''.7$$

Si por haber sido muy errónea la latitud supuesta, resulta muy considerable el valor de su corrección $\Delta\varphi$, debe repetirse la operación tomando por φ el resultado del primer cálculo.

275.—Digamos para terminar, que luego que se haya obtenido el valor definitivo de la latitud del lugar, puede aplicarse el método del número 195 para determinar la corrección ΔG que corresponde á los puntos de la graduación que sirvieron en las observaciones, si es que se tuvo ocasión de anotar las indicaciones del barómetro y del termómetro para calcular la refracción. El método es aun más conveniente en este caso, en atención á que en las observaciones ejecutadas á poca distancia del meridiano, tiene menos influencia un pequeño error en la hora que cuando el astro está cerca del primer vertical. Aplicando el procedimiento á las alturas del 27 de Abril que han servido de ejemplo, y habiendo sido de 0.614 la presión atmosférica, de 20°.5 la temperatura del aire, de 22°.0 la del barómetro, y de 1′ 50″ el error inicial del sextante, resulta la refracción $r = 38''.7$, y en término medio $\Delta G = -45''$. Esta corrección puede suponerse que es la que corresponde á la graduación 99° próximamente del sextante.

CAPITULO XX.

DETERMINACIÓN DE LA LATITUD.—MÉTODO DE BESSEL.

276.—En el Capítulo que precede hemos dado un procedimiento para hallar la latitud sin necesidad de conocer la distancia zenital de la estrella, eliminando así esta magnitud angular y, por consiguiente, todos los errores que podrían afectarla. La misma ventaja se consigue con la aplicación del método trazado por el astrónomo Bessel, que elimina igualmente el elemento angular, sustituyéndolo con un elemento de tiempo.

Consiste este procedimiento en observar el doble paso de una estrella por el primer vertical del lugar, habiendo fijado de antemano, en la dirección de Oriente á Poniente, un telescopio de tránsitos, ó el de un altazimut, cuyo eje de rotación, perfectamente horizontal, quedará así establecido en coincidencia con el meridiano.

Para dar al telescopio la posición conveniente, el mejor medio consiste en calcular la hora del paso de una estrella por el primer vertical, y en hacer coincidir con ella, en ese instante, el hilo vertical del centro de la retícula, cuyo pequeño error de colimación suponemos muy bien conocido, si es que no se ha podido nulificar completamente. Esta hora se determina con facilidad, pues si en la ecuación fundamental del número 125 se supone $a = 90^\circ$, resulta $\cos.\varphi \tan.\delta - \text{sen}.\varphi \cos.h = 0$, de donde:

$$\cos.h = \frac{\tan.\delta}{\tan.\varphi}$$

obteniéndose también la distancia zenital de la estrella en ese instante por la ecuación:

$$\cos. z = \frac{\text{sen.}\,\delta}{\text{sen.}\,\varphi}$$

En ambas fórmulas se usa un valor aproximativo de la latitud, y una vez conocido el de h, las horas siderales correspondientes serán: $\tau = \alpha \pm h$, siendo α la ascensión recta de la estrella. De estos instantes de los tránsitos por el primer vertical, al Este y al Oeste respectivamente, se deducen las horas cronométricas á las cuales debe hacerse coincidir el hilo central con la estrella; de modo que si se conoce con suficiente aproximación el estado del cronómetro, se habrá logrado establecer así el telescopio muy cerca del primer vertical, sobre todo si por comodidad se ha escogido una estrella cuya declinación sea de 5° á 6°, por lo menos, menor que la latitud, á fin de que su tránsito por aquel círculo no tenga lugar á mucha altura respecto del horizonte.

Admitamos ahora por un momento que, mediante esta operación preliminar, sea exactamente de 90° el azimut del telescopio; y que bien fijo y bien nivelado el eje de rotación, á fin de que el eje óptico describa exactamente, en su movimiento, el primer vertical, se hayan observado en seguida las horas siderales T' y T á las cuales otra estrella pasa por el hilo vertical del centro al Este y al Oeste del meridiano respectivamente. El intervalo $T - T'$ será doble de su ángulo horario en cualquiera de esos instantes; y siendo, por consiguiente, $h = \frac{1}{2}(T - T')$, se expresará esta cantidad en arco, y nuestra primera ecuación dará la latitud, á saber:

$$\tan. \varphi = \frac{\tan.\,\delta}{\cos.\,h}$$

Tanto con el fin de terminar en poco tiempo toda la operación, como con el de disminuir el efecto de cualquier pequeño error en las horas, conviene elegir una estrella cuya declinación sea muy poco menor que la latitud, algunos minutos solamente si es posible. De ese modo h es poco considerable, y lo son igualmente las variaciones de su coseno, de suerte que casi no tendrán influencia alguna los pequeños errores de observación.

277.—Tal es el método de Bessel en toda su sencillez; pero como por lo común no puede establecerse desde luego el instrumento con la perfección que he supuesto, voy á indicar la manera de proceder cuando el eje óptico no describa con toda precisión el primer vertical, sino que, dirigido hacia el Oeste, tenga un azimut $a = 90° - u$, muy poco diferente de un cuadrante, lo que equivale á decir que el extremo septentrional del eje de rotación, en lugar de coincidir con el meridiano, se desvía hacia el Este la pequeña cantidad u, que supongo sólo de unos cuantos minutos.

En tales condiciones los dos tránsitos observados no han tenido lugar en el primero, sino en otro plano vertical muy poco distante de él, y nuestra ecuación del número 125 dará respectivamente al Este y al Oeste:

$$\cos.\varphi \tan.\delta - \text{sen.}\,\varphi \cos.\,h' = \tan.\,u\,\text{sen.}\,h'$$
$$\cos.\varphi \tan.\delta - \text{sen.}\,\varphi \cos.\,h = \tan.\,u\,\text{sen.}\,h$$

de donde se obtiene por substracción la que sigue, siendo $\varepsilon = \frac{1}{2}(h + h')$:

$$\tan.\,u = \text{sen.}\,\varphi \tan.\,\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Esta fórmula da á conocer el verdadero azimut del instrumento, puesto que teniéndose $h' = T' - \alpha$ y $h = T - \alpha$, resulta en tiempo:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(h + h') = \varepsilon = \frac{1}{2}(T + T') - \alpha \\ \frac{1}{2}(h - h') = \theta = \frac{1}{2}(T - T') \end{array}\right\} \text{ ó bien: } \begin{array}{l} h = \varepsilon + \theta \\ h' = \varepsilon - \theta \end{array}$$

Si se sustituye el valor de $\tan.\,u$ en la segunda de las ecuaciones que anteceden, hallaremos: $\cot.\,\varphi \tan.\,\delta = \cos.\,h + \text{sen.}\,h \tan.\,\varepsilon$, ó bien: $\cot.\,\varphi \tan.\,\delta \cos.\,\varepsilon = \cos.\,\theta$, y por último:

$$\tan.\,\varphi = \frac{\cos.\,\varepsilon}{\cos.\,\theta} \tan.\,\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ecuación que determina la latitud.

278.—Por lo general no se limita la observación al paso por el hilo central, sino que se observa el tránsito oblicuo de la estrella por todos los hilos verticales de la retícula, anotando las horas correspondientes. En tal caso se reducen al hilo del centro, ó con más generalidad al eje óptico del telescopio, las observaciones hechas en los laterales, ó bien se calcula por separado la observación de cada hilo. Indicaré este último procedimiento, que me parece menos laborioso que el primero. [1]

A fin de tomar en cuenta todas las circunstancias más frecuentes, supondremos que el hilo del centro tiene un pequeño error c de colimación, de suerte que siendo i el intervalo ecuatorial de cualquier otro hilo respecto del central, será $c+i$ su distancia angular al eje óptico. Admitamos, además, que el nivel montante, el cual debe consultarse inmediatamente después de terminadas las observaciones, tanto al Este como al Oeste, indique que el eje de rotación tiene la pequeña inclinación b, que supondré positiva cuando el extremo Norte del eje sea el más elevado. Por b debe tomarse el promedio de las indicaciones que dé el nivel.

Establecido esto, reflexionemos que si b y u fuesen nulos, la prolongación del eje de rotación iría á encontrar la esfera celeste exactamente en el punto Norte del horizonte, que es el polo del primer vertical. Como este punto se halla en la intersección del meridiano con el horizonte, es comparable á la posición de una estrella cuyo ángulo horario, contado desde el meridiano superior, fuese de 180°, y cuya distancia polar fuese igual á la latitud φ. En la misma hipótesis sería nulo el valor de ε, pues esta cantidad no es más que la pequeña diferencia entre $\frac{1}{2}(T+T')$ y a, esto es: entre la hora del tránsito por el plano horario que pasa por el eje de rotación y la hora del tránsito por el meridiano. Existiendo, pues, los errores b y u, la prolongación del eje encontrará á la esfera en un punto que será el polo del círculo que describe realmente el eje óptico del telescopio, y este punto tendrá $180°+\varepsilon$, por ángulo horario y sensiblemente $\varphi-b$ por distancia polar. El plano horario que lo contiene es el que forma el ángulo θ con los de la estrella en los instantes de las observaciones, ó el que divide en dos partes iguales el espacio comprendido entre ellos.

Sin necesidad de recurrir á una figura, designemos por N' este

[1] La reducción al hilo central puede verse en la página 150 de mis *Nuevos Métodos Astronómicos*.

punto, por P el polo del mundo y por E la posición de la estrella en el momento en que pasa por un hilo cuya distancia al eje óptico sea $c+i$. En el triángulo PEN' tendremos, pues:

$$N'E = 90° + (c+i), \qquad N'P = \varphi - b, \qquad PE = 90° - \delta$$

y el ángulo en P suplemento del que hemos llamado θ refiriéndonos al hilo central; pero que distinguiremos con un acento para referirlo al hilo lateral que ahora consideramos. Se tendrá, en consecuencia:

$$-\text{sen.}(c+i) = \cos.(\varphi-b)\,\text{sen.}\,\delta - \text{sen.}(\varphi-b)\cos.\delta\cos.\theta'$$

Si designamos por φ' la latitud aproximativa que se obtiene con θ' por la ecuación (2), hallaremos:

$$\tan.\varphi' = \frac{\cos.\varepsilon}{\cos.\theta'}\tan.\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

y sustituyendo el valor de cos. θ' en la anterior y multiplicando por sen. φ', resultará:

$$\text{sen.}(c+i)\,\text{sen.}\,\varphi' = [\text{sen.}(\varphi-b)\cos.\varphi'\cos.\varepsilon - \cos.(\varphi-b)\,\text{sen.}\,\varphi']\,\text{sen.}\,\delta$$

Como el ángulo ε es muy pequeño siempre que se haya establecido el instrumento conforme lo hemos indicado, se tendrá sensiblemente cos. $\varepsilon = 1$, y entonces:

$$\text{sen.}(c+i)\frac{\text{sen.}\,\varphi'}{\text{sen.}\,\delta} = \text{sen.}(\varphi - b - \varphi')$$

ó bien en segundos á causa de la pequeñez de los arcos:

$$\varphi = \varphi' + b + (c+i)\frac{\text{sen.}\,\varphi'}{\text{sen.}\,\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Así, pues, la fórmula (3) dará la latitud aproximativa, que se corrige en seguida por la (4).

Los valores de i deben tomarse con signo contrario para los hilos que queden hacia el Sur del eje óptico, y que en virtud de la inversión de imágenes que produce el telescopio, serán los que atraviese la estrella *antes* del central en la observación del Este, y *después* en la del Oeste. Para el hilo del centro se tiene $i=0$, y c será positivo ó negativo según que este hilo quede al Norte ó al Sur del eje óptico.

Tomemos, por ejemplo, las siguientes observaciones de δ *Arietis* que hice en Tacubaya, en un lugar cuya latitud es próximamente de $19^\circ\,24'\,10''$.

HILOS.				NIVEL.	
	I.	II.	III.	*Norte.*	*Sur.*
Paso oriental...	$9^h24^m18^s.0$	$9^h26^m\ 7^s.0$	$9^h28^m00^s.5$	65	64
				64	65
„ occidental.	10 37 35 .0	10 35 43 .5	10 33 48 .0	66	66
				67	65

El cronómetro, de tiempo medio, tenía un adelanto de $4^m\,23^s.18$ en el instante de la culminación de la estrella, y una marcha casi nula en poco más de una hora que duró la observación. Esta tuvo lugar en tres hilos de un altazimut, de los cuales el central tenía $c=-2''$ por colimación, y sus distancias al primero y al tercero eran $76''$ y $84''$ respectivamente. Cada división del nivel valía $1''$, de modo que el valor medio de sus indicaciones será: $b=+\,0''.25$. Se tiene según esto:

Para el primer hilo................	$c+i=$	$-78''$
„ „ segundo „	„ $=$	$-\ \ 2$
„ „ tercer „	„ $=$	$+82$

La posición de la estrella era:

$$\alpha=3^h\,3^m\,35^s.65 \qquad \delta=+\,19^\circ\,11'\,38''.2$$

Preparemos detalladamente los elementos ε y θ sólo para el primer hilo:

$\tfrac{1}{2}(t+t')=$	$10^h\,00^m\,56^s.50$	$\tfrac{1}{2}(t-t')=$	$0^h\,36^m\,38^s.50$
$\Delta t_0=$	$-4\ \ 23\ .18$	Aceleración$=$	$6\ .02$
Hora media $=$	$9^h\,56^m\,33\ .32$	$\theta=$	$\begin{cases}0^h\,36^m\,44^s.52\\ 9^\circ\,11'\ \ 7''\ .8\end{cases}$
Tiempo sideral $=$	$17\ \ 4\ \ 57\ .08$		
Aceleración $=$	$1\ \ 38\ .01$		
$\tfrac{1}{2}(T+T')=$	$3\ \ 3\ \ \ 8\ .41$		
$\alpha=$	$3\ \ 3\ \ 35\ .65$		
$\varepsilon=$	$\begin{cases}-\,0^m\,27^s.24\\ -\,6'\,48''.6\end{cases}$		

Haciendo los mismos cálculos para los demás hilos, se hallarán los siguientes resultados por cada uno de ellos.

ε............................	$-6'48''.6$	$-7'\ \ 7''.5$	$-7'22''.6$
θ............................	$9\ 11\ \ 7\ .8$	$8^\circ\,43\ 29\ .5$	$8^\circ\,14\ 47\ .2$
φ'............................	$19^\circ\,25'28''.81$	$19^\circ\,24'\ \ 6''.89$	$19^\circ\,22'46''.40$
b............................	$+0\ .25$	$+0\ .25$	$+0\ .25$
$(c+i)\,\dfrac{\text{sen.}\,\varphi'}{\text{sen.}\,\delta}$	$-1\ 18\ .91$	$-2\ .02$	$+1\ 22\ .76$
φ............................	$19^\circ\,24'10''.1$	$19^\circ\,24'\ \ 5''.1$	$19^\circ\,24'\ \ 9''.4$

Los errores que pudieran cometerse en la medida de los intervalos de los hilos, en la colimación, así como la pequeña desigualdad que puede existir en los muñones del eje horizontal, y que influiría en el valor de b, se eliminan observando dos noches diferentes en posiciones inversas del telescopio, ó bien haciendo la inversión en la misma noche de la manera que vamos á explicar. Después de observado el paso oriental por los hilos que preceden al del centro, se invierte rápida y cuidadosamente el instrumento para proseguir la observación en los mismos hilos en la nueva posición que ocupan. Se deja en ella el telescopio para observar el paso occidental por los primeros hilos, y se vuelve á invertir para seguir observándolo en los mismos así restablecidos en su posición primitiva. El valor de b que debe emplearse es el promedio de las cuatro indicaciones que, de dos en dos, se obtienen antes y después de cada uno de los tránsitos oriental y occidental.

En cuanto al pequeño azimut del eje horizontal, se obtiene por la ecuación (1), que casi siempre puede aplicarse bajo la forma $u = \varepsilon \,\text{sen.}\, \varphi$. En nuestro ejemplo, con el valor medio de ε, resulta $u = -2'\,21''.6$.

279.—El método de Bessel ha hallado muy buena acogida entre los astrónomos, y da, en efecto, excelentes resultados en las altas latitudes de Europa. Por mi propia experiencia juzgo, sin embargo, que en nuestros países intertropicales es menos favorable, á causa de la notable incertidumbre con que se observan los tránsitos por el primer vertical cuando, como sucede en las bajas latitudes, la senda aparente de las estrellas tiene muy poca inclinación respecto de aquel plano. Sucede entonces que el movimiento vertical es tan rápido y el azimutal tan lento, que la estrella parece moverse durante varios segundos en la dirección misma de los hilos, lo cual hace necesariamente incierta la apreciación de los instantes precisos en que los atraviesa, instantes de los que depende el valor de θ. En el ejemplo precedente podrá notarse que aunque me había yo servido de hilos, colocados expresamente para esta observación, á muy corta distancia del central, los intervalos de tiempo son casi de dos minutos; y que difieren algo entre sí los correspondientes á los mismos hilos. El efecto de la incertidumbre se nota también en los valores de ε, á consecuencia de que los de $\frac{1}{2}(T + T')$ no resultan sensiblemente iguales, como deberían resultar si los tránsitos hubieran sido más instantáneos. Creo, por lo expuesto, que este método, tan perfecto en teoría y no obstante la sencillez de las operaciones que demanda, no es de recomendarse en latitudes inferiores á 20° ó 25°.

CAPITULO XXI.

DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE LA LATITUD Y DE LA HORA.

280.—Cuando no se reflexiona detenidamente acerca de la influencia relativa de los elementos que contribuyen á la determinación de una cantidad cualquiera, parece indispensable la completa exactitud de aquéllos para que resulte la incógnita con el mismo grado de precisión. Esta condición es ciertamente necesaria en teoría; pero como, por una parte, en la práctica todas nuestras apreciaciones tienen inevitablemente un límite más allá del cual es inútil pretender llevar la exactitud, y por otra, la combinación de los datos que han de producir la cantidad que se busca, es generalmente de tal naturaleza ó de tal forma, que hace muy variables las influencias de los elementos conocidos, se infiere desde luego que modificando convenientemente y hasta donde sea posible aquella combinación, somos dueños, hasta cierto punto, de eliminar el efecto de un elemento inexacto. Así, por ejemplo, hemos visto en el número 179, que por la simple elección de la figura del triángulo astronómico, se destruye casi del todo la influencia de un pequeño error de la latitud, pudiéndose obtener la hora con suficiente exactitud práctica, aunque este último elemento no se conozca más que aproximadamente, con sólo observar el astro cerca del primer vertical de la estación. De una manera análoga vimos en el número 249 que puede determinarse, con la misma exactitud práctica, la latitud de un lugar sin que influya un pequeño error de la hora, con sólo ejecutar la observación en los momentos del tránsito del astro.

Con estos ejemplos se comprenderá toda la importancia de las investigaciones dirigidas á estudiar la influencia relativa de los datos de un problema. Precisamente en el caso que he citado, dependiendo la hora de la latitud y ésta de aquélla, parecería imposible la determinación exacta de ambos elementos sin el estudio previo del efecto que cada uno de ellos ejerce en la resolución de los dos problemas; pero habiéndose expuesto ampliamente en los Capítulos VII, VIII, IX y X la pequeña influencia de la latitud en la determinación de la hora, y en los que preceden á éste, desde el XV inclusive, el efecto igualmente insignificante que tiene en la latitud un pequeño error de la hora, se comprenderá sin dificultad que sujetándose á las prescripciones que resultan de aquel estudio, es posible hallar ambas cantidades partiendo de datos puramente aproximativos.

Lo que precede es quizá suficiente para que el observador guíe en todos casos sus operaciones de la manera más eficaz para la determinación de los dos importantes elementos, hora y latitud; pero no me parece inútil trazarle una marcha sistemática que le dé brevemente el mismo resultado, pues al ocupar por la primera vez una estación para emprender una serie de trabajos astronómicos, hay veces que se ignora del todo el valor aproximativo de aquellas cantidades. El método que me parece más sencillo para determinarlas con el grado de aproximación bastante para que en seguida se pueda proceder á su corrección definitiva, consiste en medir las distancias zenitales de dos estrellas, situada la una cerca del meridiano, y la otra tan inmediata al primer vertical como sea posible, anotando las horas cronométricas correspondientes. Para estimar la dirección de ambos planos basta el conocimiento de algunas constelaciones, con especialidad de las próximas al polo, y sobre todo el de la estrella polar, cuyo azimut nunca llega á 2° en nuestras regiones.

La estrella observada cerca del meridiano dará una distancia zenital que difiera muy poco, acaso sólo algunos segundos, de su distancia zenital meridiana, por ser tan lento el movimiento ascensional de los astros en los momentos de sus tránsitos. En consecuencia,

las fórmulas del número 253 suministran un valor de la latitud suficientemente exacto para que pueda emplearse sin inconveniente alguno en la determinación de la hora, sirviéndose al efecto de la distancia zenital de la estrella observada cerca del primer vertical y aplicando el método del Capítulo VII. La poca influencia que entonces tiene el error de la latitud, da por resultado que se hallará la hora casi con entera exactitud.

Los dos elementos así determinados bastarán generalmente para aplicar en seguida cualquier otro procedimiento con el fin de corregir la latitud; pero cuando no se tiene oportunidad de practicar nuevas observaciones, como sucede al hacer una rápida exploración, importa sacar el mejor partido posible de las únicas que hayan podido ejecutarse. En tal caso, la hora hallada se emplea en reducir al meridiano la distancia zenital de la primera estrella, aplicando el método del Capítulo XVI, ó bien en determinar con más precisión la latitud por el procedimiento del Capítulo XV, pues en cualquiera de los dos no tiene casi influencia alguna el pequeñísimo error que pudiera existir en el estado del cronómetro, en virtud de haberse empleado un valor inexacto de la latitud al calcular la hora por la segunda estrella. Por otra parte, la comparación del resultado más exacto, con el valor de φ supuesto al principio, da á conocer si la diferencia es de tal importancia que exija la repetición del cálculo de la hora, en cuyo caso se procede á hacer una nueva corrección siguiendo el mismo método, aunque raras veces es necesario. De esta manera he podido determinar con mucha aproximación, y viajando con rapidez, las latitudes de varios lugares, cuando apenas contaba con unas cuantas horas de permanencia en ellos. Es claro que la precisión de los resultados depende en gran parte del grado de exactitud con que puedan medirse las distancias zenitales, é importa, por lo mismo, emplear un instrumento bien conocido, así como barómetro y termómetro para calcular la refracción. Por lo general, en mis exploraciones me he servido de un hipsómetro en vez del primero de aquellos instrumentos, pues por su medio es fácil determinar la presión atmosférica (Tomo I, número 288). También siempre que ha sido posible, he determinado la hora por alturas iguales (Capítulos VIII y IX) con el fin de eliminar el elemento angular y sus correcciones.

281.—Cuando se conocen aproximadamente la latitud y el estado del cronómetro, pueden formarse ecuaciones de condición para corregir los valores aproximativos, sirviéndose al efecto de las observaciones de dos ó más estrellas. Las ecuaciones se forman de este modo: sea z la distancia zenital de cualquiera de las estrellas, y φ la latitud supuesta; si con estos elementos y la declinación se calcula el ángulo horario de la estrella, se obtendrá, en general, un valor de h erróneo, á causa del error que tenga φ. Por otra parte, la hora de la observación, combinada con la corrección que se supone al cronómetro y con la ascensión recta de la estrella, suministrará otro valor de h también aproximativo, puesto que no se sabe con precisión cuál sea el verdadero estado del cronómetro. Los dos valores de h, obtenidos por uno y otro medio, resultarán más ó menos discordes, y entonces estableceremos algebraicamente la condición de que, tomando en cuenta las correcciones de todos los elementos de que dependen uno y otro valor de h, deben éstos resultar iguales.

Con φ, z y δ se calcula h por la ecuación:

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}h = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(z-\varphi+\delta)}{\cos.\,\varphi\cos.\,\delta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Sea ahora $\Delta\varphi$ la corrección que demanda el valor de φ, y Δh la correspondiente al ángulo horario. Se tendrá:

$$\Delta h = \frac{d\,h}{d\,\varphi}\,\Delta\varphi\ ,$$

y calculando el coeficiente diferencial por medio de la ecuación...... $\cos.\,z = \text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\delta + \cos.\,\varphi\cos.\,\delta\cos.\,h$, se halla sin dificultad:

$$\frac{d\,h}{d\,\varphi} = \frac{\tan.\,\delta}{\text{sen.}\,h} - \frac{\tan.\,\varphi}{\tan.\,h}$$

Expresando á Δh en segundos de tiempo, y haciendo para abreviar:

$$B = \frac{1}{15}\left(\frac{\tan.\,\delta}{\text{sen.}\,h} - \frac{\tan.\,\varphi}{\tan.\,h}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

la expresión correcta del valor de h deducido del cálculo es:

$$h + B\,\Delta\varphi$$

Para hallar otro valor, deducido de la observación, sea c la corrección supuesta al cronómetro á una hora cualquiera T, y llamemos v su variación en la unidad de tiempo. En cualquier otro instante t, que supongo ser su indicación al medir z, se tendrá:

$$\Delta t = c + \Delta c + v(t - T)$$

siendo Δc la corrección que necesita c. La expresión del ángulo horario será, pues:

$$t + c + \Delta c + v(t - T) - a$$

Igualando este valor con el precedente, y haciendo:

$$\tau = (a + h) - [t + c + v(t - T)] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

la ecuación de condición será:

$$B\,\Delta\varphi - \Delta c + \tau = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Para cada una de las estrellas se calculan las fórmulas (1), (2), (3) y (4), y en seguida se resuelven las ecuaciones de condición resultantes. Como las incógnitas son únicamente $\Delta\varphi$ y Δc, bastan las observaciones de dos estrellas para determinarlas; pero si se han observado en mayor número, pueden combinarse todas las ecuaciones por el método de los mínimos cuadrados (nota del número 34).

Ejemplo.—El 13 de Mayo de 1867, entre otras observaciones, hice las siguientes con sextante. La indicación común del instrumento fué 114° 00′, y el cronómetro solar de que me servía atrasaba $0^s.2$ por hora.

Estrellas.	Cronómetro.	Ascen. rectas.	Declinaciones.
α *Leonis* al O......	$8^h 58^m 24^s.74$	$10^h\ 1^m 18^s.14$	$+12° 36′ 48″.0$
α *Virginis* al S.....	9 41 16 .50	13 18 13 .47	−10 28 7 .1

Tomemos $\varphi = 22° 9′$ por latitud aproximativa, y admitamos, atendiendo al estado del cronómetro en los días anteriores y á su marcha conocida, que en el instante de la observación de α *Leonis* su corrección fuese $c = -9^m 50^s.00$. Las dos estrellas se observaron á la misma distancia zenital, que corregida por los errores instrumentales y por la refracción fué $z = 33° 1' 30''$. Como el cálculo, si bien muy sencillo, es largo, sólo desarrollaré el que se refiere á *α Virginis* para que sirva de tipo.

$$
\begin{aligned}
z &= \;\;33°\ 1'\,30''.0 \\
\varphi &= \;\;22\ \ 9\ 00\ .0 \\
\delta &= -10\ 28\ \ 7\ .1 \\
\hline
a &= \;\;32°\,49'\,18''.5 \ldots\ldots \text{sen} \ldots\ldots\ 9.7340218 \\
b &= \;\;\;\;0\ 12\ 11\ .5 \ldots\ldots \text{sen} \ldots\ldots\ 7.5497881 \\
& \qquad\qquad \cos.\varphi \ldots\ -9.9667048 \\
& \qquad\qquad \cos.\delta \ldots\ -9.9927101 \\
\hline
& \qquad\qquad \text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} h \ldots\ 7.3243950 \qquad \tfrac{1}{2} h = -2°\,37'\,59'' \\
& \qquad\qquad \text{sen.} \tfrac{1}{2} h \ldots\ 8.6621975 \qquad h \begin{cases} = -5\ 15\ 58 \\ = -0^h\,21^m\ 3^s.91 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
 & 8.8239 \ldots \tfrac{1}{15} \ldots & 8.8239 & \\
\tan.\delta \ldots & 9.2666- \quad \tan.\varphi \ldots & 9.6097 & \\
\text{sen.}h \ldots & -8.9628- \quad \tan.h \ldots & -8.9646- & \\
\hline
 & 9.1277 & 9.4690 & \\
 & +0.1342 & & \\
 & +0.2944 & & \\
\hline
 & B = +0.4286 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
t &= \;\;9^h\,41^m\,16^s.50 \\
c + v(t - T) &= -\ \ 9\ \ 49\ .86 \\
\hline
\text{Hora media} &= \;\;9^h\,31^m\,26^s.64 \\
\text{Asc. recta} &= \;\;3\ 24\ 12\ .00 \\
\text{Acel.} &= +\ 1\ 33\ .87 \\
\hline
\text{Hora sideral} &= 12^h\,57^m\,12^s.51 \\
a + h &= 12\ 57\ \ 9\ .56 \\
\hline
r &= \quad -\ 2^s.95
\end{aligned}
$$

El ángulo horario se ha tomado negativo, porque la estrella todavía no pasaba por el meridiano cuando se observó; y por ser solar el cronómetro, se convirtió $t + c + v(t - T)$ en hora sideral. La hora T á que se refiere la corrección supuesta al cronómetro, puede ser un instante cualquiera, y por comodidad he tomado por T la hora de la observación de la primera estrella. La ecuación de condición para *α Virginis* será, en consecuencia:

$$+0.429\,\Delta\varphi - \Delta c - 2^s.95 = 0$$

Haciendo un cálculo semejante para *α Leonis*, se obtendrá la ecuación que le corresponde y es la primera que va en seguida, de modo que se combinarán las dos siguientes:

$$
\begin{aligned}
-0.014\,\Delta\varphi - \Delta c - 1^s.68 &= 0 \\
+0.429\,\Delta\varphi - \Delta c - 2^s.95 &= 0
\end{aligned}
$$

Restando una de otra se tiene: $0.443\,\Delta\varphi = 1.27$, de donde resulta: $\Delta\varphi = +2''.9$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones de condición, se obtendrá: $\Delta c = -1^s.72$, de manera que la latitud y la corrección del cronómetro verdaderas que se deducen de estas observaciones, son:

$$
\begin{aligned}
\varphi + \Delta\varphi &= 22°\,9'\,00'' + 2''.9 = 22°\,9'\ 2''.9 \\
c + \Delta c &= -\ 9^m\,50^s - 1^s.72 = -\ 9^m\,51^s.72
\end{aligned}
$$

La pequeñez de las correcciones indica que, en este ejemplo, los supuestos fueron casi exactos; pero no hay inconveniente en adoptarlos más distantes de la verdad. Lo que siempre debe procurarse es observar una de las estrellas cerca del meridiano y la otra cerca del primer vertical, á fin de que difieran bastante los dos coeficientes de $\Delta\varphi$. En la Sec. II, Cap. III de los *Nuevos Métodos Astronómicos* puede verse el método semejante que conviene seguir para determinar la corrección del instrumento angular, á la vez que la de la latitud y la del estado del cronómetro, lo cual supone la observación de tres estrellas, por lo menos, á la misma altura. Esta última circunstancia no es indispensable en el procedimiento que acabo de exponer, aunque sí lo es el conocimiento exacto de las dos distancias zenitales.

282.—Otro método que no exige el conocimiento aproximativo de la latitud ni de la hora, y que es al mismo tiempo independiente del elemento angular z, consiste en observar tres estrellas diferentes á la misma altura, aplicando en seguida las ecuaciones (1) del Capítulo precedente. Para evitar equivocaciones, convengamos en designar sin acento las cantidades que se refieren á la estrella más occidental; con un acento las que corresponden á la estrella intermedia; y con dos acentos los relativos á la más oriental, que es aquella que tiene mayor ascensión recta. Siendo, además, Δt la corrección incógnita del cronómetro á la hora t, y v su variación horaria, las que corresponden á las horas t' y t'' son:

$$\Delta t' = \Delta t + v(t' - t) \qquad \Delta t'' = \Delta t + v(t'' - t)$$

Establecido esto, la combinación sucesiva de la estrella occidental con las otras dos, dará dos valores de θ y de ψ, que serán:

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \frac{1}{2}(t - t') + \frac{1}{2}v(t - t') + \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \\ \theta' = \frac{1}{2}(t - t'') + \frac{1}{2}v(t - t'') + \frac{1}{2}(\alpha'' - \alpha) \\ \\ \tan.\psi = \tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta')\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cot.\theta \\ \tan.\psi' = \tan.\frac{1}{2}(\delta - \delta'')\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta'')\cot.\theta' \end{array}\right| \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

Como no puede conocerse el valor de $\omega = \varepsilon + \psi$, en atención á que ε es función de las correcciones del cronómetro, se tendrán dos incógnitas en la ecuación

$$\tan.\varphi = \frac{\text{sen.}(\varepsilon + \psi)\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos.\theta}{\text{sen.}\psi},$$

por lo cual no puede calcularse directamente bajo esa forma sino del modo siguiente.

El ángulo horario de la primera estrella sería $h = \varepsilon + \theta$, de donde resulta: $\varepsilon = h - \theta$, ó bien $\varepsilon + \psi = h - \theta + \psi$. Si hacemos $Q = \theta - \psi$, y además

$$q = \frac{\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos.\theta}{\text{sen.}\psi},$$

se tendrá: $\tan.\varphi = q\,\text{sen.}(h - Q)$. Una combinación semejante de la primera y tercera estrellas daría ecuaciones de la misma forma, de modo que para determinar las dos incógnitas h y φ, se tiene:

$$\tan.\varphi = q\,\text{sen.}(h - Q) \qquad \tan.\varphi = q'\,\text{sen.}(h - Q')$$

La eliminación de $\tan.\varphi$ y el desarrollo de la ecuación resultante producen la siguiente, que determina á h:

$$\tan.h = \frac{q\,\text{sen.}\,Q - q'\,\text{sen.}\,Q'}{q\cos.\,Q - q'\cos.\,Q'}$$

Conociendo el valor de h cualquiera de las ecuaciones anteriores suministra el de φ, siendo también fácil calcular el de Δt, puesto que se tiene la relación: $h = t + \Delta t - \alpha$.

En resumen, después de calculados los valores de θ, θ', ψ y ψ' por las fórmulas (5), se calculan las que siguen:

$$\left.\begin{array}{ll} q = \dfrac{\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta')\cos.\theta}{\text{sen.}\psi} & q' = \dfrac{\tan.\frac{1}{2}(\delta + \delta'')\cos.\theta'}{\text{sen.}\psi'} \\ Q = \theta - \psi & Q' = \theta' - \psi' \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\tan.h = \dfrac{q\,\text{sen.}\,Q - q'\,\text{sen.}\,Q'}{q\cos.\,Q - q'\cos.\,Q'}} \\ \multicolumn{2}{c}{\tan.\varphi = q\,\text{sen.}(h - Q) = q'\,\text{sen.}(h - Q')} \\ \multicolumn{2}{c}{\Delta t = h + \alpha - t} \end{array}\right| \cdots (6)$$

Ejemplo.—El 9 de Mayo de 1867 hice las siguientes observaciones sirviéndome de un cronómetro solar, cuya variación era casi insensible en intervalos cortos, por lo que supondré $v = o$. La indicación común del sextante fué $G = 113^\circ\,15'$.

α *Leonis*......	$t = 9^h\,15^m\,58^s.3$	$\alpha = 10^h\ \ 1^m\,18^s.19$	$\delta = +12^\circ\,36'\,47''.7$
γ *Ursæ maj*..	$t' = 9\ \ 32\ \ 23\ .0$	$\alpha' = 11\ \ 46\ \ 50\ .65$	$\delta' = +54\ \ 26\ \ \ 7\ .0$
α *Bootis*......	$t'' = 8\ \ 46\ \ 42\ .1$	$\alpha'' = 14\ \ \ 9\ \ 37\ .62$	$\delta'' = +19\ \ 52\ \ 31\ .9$

No desarrollo todo el cálculo por ser tan semejante á otros que se han detallado en los Capítulos precedentes, y sólo indicaré los principales resultados para que, al desarrollarlo el lector, encuentre puntos de rectificación.

$$\begin{array}{rlrl} \theta = & 11^\circ\ \ 8'\ \ 8''.1 & \theta' = & 34^\circ\,42'\,33''.1 \\ \psi = & -52\ \ \ 7\ 50\ .3 & \psi' = & -\ 1\ \ 31\ \ 44\ .8 \\ Q = & 63\ \ 15\ 58\ .4 & Q' = & 36\ \ 14\ \ 17\ .9 \\ \log.q = & 9.9156238- & \log.q' = & 0.9530755- \\ q\,\text{sen.}\,Q = & -0.73541 & q\cos.\,Q = & -0.37041 \\ q'\,\text{sen.}\,Q' = & -5.30603 & q'\cos.\,Q' = & -7.23961 \\ \hline \text{Numerador} = & +4.57062 & \text{Denominador} = & +6.86920 \end{array}$$

El resto del cálculo es como sigue:

Num.	0.6599751
Den.	−0.8369062
tan. h	−9.8230689

$h = +33^\circ\,38'\,20''.2$	$+33^\circ\,38'\,20''.2$
$Q = +63\ \ 15\ \ 58\ .4$	$Q' = +36\ \ 14\ \ 17\ .9$
$h - Q = -29^\circ\,37'\,38''.2$	$h - Q' = -\ 2^\circ\,35'\,57''.7$

q	9.9156238−	q	0.9530755−
sen. $(h-Q)$	9.6940396−	sen. $(h-Q)$	8.6565950−
tan. φ	9.6096634	tan. φ	9.6096705
	$\varphi = 22^\circ\,8'\,58''.2$		$\varphi = 22^\circ\,8'\,59''.4$

La pequeña diferencia de los dos valores de φ proviene de los ligeros errores inevitables de la aproximación logarítmica, y el promedio $\varphi = 22^\circ\,8'\,58''.8$ es el que, en general, convendrá adoptar. Para la corrección del cronómetro tendremos:

$h =$	$+\ 2^h\,14^m\,33^s.35$
$a =$	$10\ \ 1\ \ 18\ .19$
Hora sideral $=$	$12^h\,15^m\,51^s.54$
Asc. recta $=$	$3\ \ 8\ \ 25\ .78$
	$9^h\ \ 7^m\,25^s.76$
Reduc. $= -$	$1\ \ 29\ .68$
Hora media $=$	$9^h\ \ 5^m\,56^s.08$
$t =$	$9\ \ 15\ \ 58\ .30$
$\Delta t = -$	$10^m\ \ 2\ .22$

Una vez hallada la hora y la latitud, podría determinarse la corrección del sextante aplicando el método expuesto en el número 195, sin más elementos adicionales que el error inicial y la refracción.

CAPITULO XXII.

DETERMINACIÓN SIMULTÁNEA DE LA LATITUD Y DE LA HORA.—MÉTODO MEXICANO.

283.—Varias veces he indicado la dificultad de medir con toda exactitud los ángulos verticales. Hay, en efecto, tantas circunstancias diferentes que tienden á alterar la precisión de esas medidas, como son la flexión de los telescopios, la incertidumbre de las refracciones, la deformación de los círculos verticales de los instrumentos por la acción de la pesantez, etc., que cuando se desea determinar la latitud con toda la exactitud que en muchos casos es necesaria, se prefiere á veces recurrir á procedimientos más ó menos independientes de las distancias zenitales.

Consideraciones de este género son las que me condujeron á imaginar el nuevo método que forma el objeto de este Capítulo, y que tiene por base la sustitución de un ángulo horizontal, en lugar del vertical que generalmente se emplea en los demás procedimientos. Suponiendo que se observe una estrella con el altazimut, ó cualquier otro instrumento que permita la medida de ángulos horizontales, sean h y a su ángulo horario y su azimut respectivamente. La ecuación general del número 125 dará:

$$\cos.\varphi\tan.\delta - \operatorname{sen}.\varphi\cos.h = \cot.a\operatorname{sen}.h \quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

que puede calcularse fácilmente por logaritmos, por medio de un ángulo subsidiario M á saber:

$$\tan.M = \frac{\tan.\delta}{\cos.h} \qquad \operatorname{sen}.(M-\varphi) = \cos.M\tan.h\cot.a \quad\ldots\ldots(2)$$

Una vez calculados M y $M - \varphi$, su diferencia da la latitud φ que se busca.

Los datos h y a pueden obtenerse por la observación de esta manera: siendo G la lectura del círculo azimutal cuando se corta la estrella con el hilo central del telescopio, y m la lectura meridiana, esto es, su indicación cuando el telescopio está dirigido al punto Norte del horizonte, tendremos: $a = m - G$. Suponemos que la graduación del instrumento esté numerada de izquierda á derecha, y que G esté ya corregido por los errores de los micrómetros, de los niveles, de la colimación, etc. (número 52).

En cuanto al ángulo horario, siendo t la hora cronométrica de la observación, Δt la corrección del cronómetro en el mismo instante y α la ascensión recta de la estrella, sabemos que se tiene en tiempo: $h = t + \Delta t - \alpha$.

284.—Este método, tal como hasta aquí lo he expuesto, presenta el inconveniente de suponer determinados, por medio de observaciones preliminares, los valores de m y Δt. Trazaré en seguida el procedimiento mucho más cómodo, que es independiente de estos datos y aun permite su determinación; pero antes de hacerlo, examinemos brevemente la ecuación fundamental para deducir las condiciones más ventajosas de la observación. Suponiendo, en general, que los tres elementos h, a y δ tengan los pequeños errores Δh, Δa, $\Delta \delta$, el del resultado será de la forma:

$$\Delta \varphi = \frac{d\varphi}{dh}\Delta h + \frac{d\varphi}{da}\Delta a + \frac{d\varphi}{d\delta}\Delta \delta$$

Diferenciando la fórmula (1) con relación á φ, y sucesivamente con relación á h, a y δ, se obtendrá sin dificultad, por simples sustituciones, y siendo z la distancia zenital de la estrella en el momento de la observación:

$$\frac{d\varphi}{dh} = (\text{sen.}\,\varphi \tan.\,a - \cot.\,h)\cos.\,a \tan.\,z$$

$$\frac{d\varphi}{da} = \frac{\tan.\,z}{\text{sen.}\,a}$$

$$\frac{d\varphi}{d\delta} = \frac{\cos.\,\varphi}{\cos.\,\delta \cos.\,z}$$

Se ve por estas expresiones que el coeficiente del error del ángulo horario se nulifica cuando sea recto el ángulo paraláctico, puesto que se tiene entonces $\text{sen.}\,\varphi = \cot.\,a \cot.\,h$; y que el mismo coeficiente será muy pequeño siempre que el azimut de la estrella no difiera mucho de 90°. En las mismas circunstancias será también muy pequeño el coeficiente del error azimutal, sobre todo si la observación tiene lugar no muy lejos del zenit. En cuanto al coeficiente de $\Delta \delta$, será el menor posible, para valores dados de φ y δ, siempre que sea poco considerable la distancia zenital de las estrellas.

El resultado general de este examen indica, pues, la conveniencia de observar estrellas que puedan tener un gran azimut á la vez que una distancia zenital pequeña; y para llenar ambas condiciones deben elegirse aquellas cuyas declinaciones no difieran mucho de la latitud del lugar. Observándolas á poca distancia del meridiano, se obtendrán siempre resultados casi independientes de los pequeños errores de observación.

285.—A fin de dar al instrumento la posición conveniente y de conocer la hora de la observación, se calcula la distancia zenital ó el azimut de la estrella, asignando el valor que se quiera á uno de estos elementos y empleando una latitud aproximativa. Así, con φ, z y δ se tendrá el azimut por las fórmulas:

$$p = \tfrac{1}{2}(z + \varphi + \delta) \qquad q = \tfrac{1}{2}(z + \varphi - \delta) \qquad \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos.\,p\,\text{sen.}\,q}{\cos.\,\varphi\,\text{sen.}\,z}}$$

Si se fija a en primer lugar, tendremos con φ y δ:

$$\tan.\,N = \frac{\tan.\,\varphi}{\cos.\,a} \qquad \text{sen.}\,(N + z) = \frac{\text{sen.}\,N\,\text{sen.}\,\delta}{\text{sen.}\,\varphi}$$

fórmulas que dan z. Finalmente, para la hora de la observación, se calcula el ángulo horario por la ecuación: $\text{sen.}\,h \cos.\,\delta = \text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,z$, de donde se deduce la hora media ó sideral. Todos estos cálculos, no debiendo ser más que aproximativos, se ejecutan con logaritmos de cuatro ó cinco cifras.

286.—Pasemos ahora á exponer el modo de operar sin conocer ni la lectura meridiana m ni la corrección Δt del cronómetro, lo cual exige la doble observación de la estrella á la misma altura, de ambos lados del meridiano. Admitamos también, para mayor generalidad, que no sean exactamente iguales las dos distancias zenitales; que la columna vertical del instrumento y su eje horizontal tengan pequeños errores indicados por los niveles; y por último, que exista igualmente un pequeño error de colimación en el hilo central de la retícula.

Sea, pues, Δz el número de segundos que la distancia zenital occidental es menor que la oriental; si designamos por g la lectura del círculo vertical, por n la del nivel que le es paralelo, por r la refracción, y si distinguimos con acentos los mismos elementos al Este del meridiano, siendo g_0 la indicación zenital del telescopio, las dos distancias zenitales verdaderas de la estrella serán:

$$z = g' - g_0 + n' + r'$$
$$z - \Delta z = g - g_0 + n + r$$

ecuaciones de las cuales resulta:

$$\Delta z = (g' - g) + (n' - n) + (r' - r) \text{.....................} \quad (3)$$

Las expresiones de n y n' son:

$$n = \tfrac{1}{2}(o - e)v \qquad n' = \tfrac{1}{2}(o' - e')v$$

representando o y e respectivamente las indicaciones de los extremos *ocular y objetivo* de la burbuja, y v el valor angular de una división de la escala.

Cuando Δz es pequeña, puede suponerse $r = r'$, ó al menos tomar por $r' - r$ la diferencia de las refracciones tabulares, sin atender á las indicaciones de los instrumentos meteorológicos. Si se observa en la posición inversa del telescopio, esto es: en aquella en que g_0 es mayor que g ó g', se tomará $g - g'$ en lugar de $g' - g$.

Los efectos de Δz en la hora t y en la lectura azimutal G correspondientes á la observación occidental, serán (números 178 y 232):

$$\left.\begin{aligned} \Delta h &= \frac{dh}{dz}\,\Delta z = \frac{\Delta z}{15 \cos.\varphi \operatorname{sen.} a} \\ \Delta G &= \frac{da}{dh}\cdot\frac{dh}{dz}\,\Delta z = \frac{\cot. h \cos. a - \operatorname{sen.}\varphi \operatorname{sen.} a}{\cos.\varphi}\,\Delta z \end{aligned}\right\} \text{......} \quad (4)$$

El primero se ha dividido por 15 para que Δh resulte desde luego expresado en tiempo. El segundo puede también reemplazarse por el siguiente (número 239):

$$\Delta G = \frac{da}{dz}\,\Delta z = \left(\cot. a \cot. z - \frac{\tan.\varphi}{\operatorname{sen.} a}\right)\Delta z$$

puesto que sólo se necesita un valor aproximativo de z.

Con estas correcciones, que reducen la observación occidental á la misma altura que la oriental, se tiene al Este y al Oeste del meridiano:

$$-h = t' + \Delta t_0 - u(t_0 - t') - \alpha$$
$$+h = t + \Delta t_0 + u(t - t_0) - \alpha + \Delta h$$

siendo Δt_0 la corrección del cronómetro en el instante medio t_0 de las observaciones, ó sea en el de la culminación de la estrella, y u la marcha del instrumento en la unidad de tiempo. Ambas cantidades son positivas cuando el cronómetro atrase.

De estas ecuaciones se deduce:

$$\left.\begin{aligned} h &= \tfrac{1}{2}(t - t') + \tfrac{1}{2}(t - t')u + \tfrac{1}{2}\Delta h \\ \Delta t_0 &= \alpha - \tfrac{1}{2}\Delta h - \tfrac{1}{2}(t + t') \end{aligned}\right\} \text{...............} \quad (5)$$

relaciones que dan á conocer el ángulo horario de la estrella, expresado en tiempo, y el estado del cronómetro. Si este instrumento señala tiempo medio, debe reducirse á sideral la duración $t - t'$; y hacerse uso de la hora media del tránsito en lugar de la sideral α.

Procediendo de una manera análoga respecto del azimut, siendo b la indicación del nivel montante y c la colimación del hilo vertical del centro, tendremos al Este y al Oeste:

$$-a = m - \left(G' + b' \cot. z + \frac{c}{\operatorname{sen.} z}\right)$$
$$+a = m - \left(G + b \cot. z + \frac{c}{\operatorname{sen.} z} - \Delta G\right)$$

de donde resulta:

$$\left.\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}(G' - G) + \tfrac{1}{2}(b' - b)\cot. z + \tfrac{1}{2}\Delta G \\ m &= \tfrac{1}{2}(G + G') + \tfrac{1}{2}(b + b')\cot. z - \tfrac{1}{2}\Delta G + \frac{c}{\operatorname{sen.} z} \end{aligned}\right\} \text{......} \quad (6)$$

Las lecturas b y b' tienen por expresión (número 48):

$$b = \tfrac{1}{4}[(i+i') - (d+d')]\,\omega$$

en la que i é i' representan las indicaciones de la extremidad izquierda de la burbuja en las dos posiciones del nivel, d y d' las de la extremidad derecha y ω el valor angular de las divisiones.

Una vez determinados así los valores correctos de h y a, se calculará la latitud por las fórmulas (2). Debe notarse que estos dos datos principales tienen la ventaja fundamental de estar expresados en función de las *diferencias* de las indicaciones instrumentales, y que, por consiguiente, resultan independientes de los errores constantes de los instrumentos ó del observador. [1]

287.—El modo de practicar la observación es bastante sencillo, y se deduce fácilmente de todo lo que hemos dicho. Se escoge una estrella de posición bien conocida, que culmine cerca del zenit y antes de su paso por el meridiano se le dirige el telescopio, fijado de antemano á la altura que se haya juzgado conveniente. Se establece su coincidencia con el hilo vertical del centro, y se mantiene en ella por medio del tornillo de aproximación del círculo azimutal, cuyo movimiento se suspende en el momento en que la estrella atraviesa el hilo horizontal del centro. Se anota la hora t' de ese instante, la indicación n' del nivel paralelo al círculo vertical, y en seguida la lectura g' de éste, así como la G' del círculo horizontal. Por último, se coloca el nivel montante sobre el eje horizontal, y se apuntan las indicaciones de la burbuja en las dos posiciones de este instrumento, para determinar la inclinación b'. La lectura del círculo vertical no es realmente necesaria más que cuando se hacen varias observaciones de la misma estrella á distintas alturas, á fin de poder colocar el telescopio en las posiciones correspondientes del otro lado del meridiano; pero es útil para dar á conocer desde luego el valor aproxi-

1 Insisto en señalar esta ventaja, porque en una publicación científica de Alemania que hace referencia á mi método, parece indicarse que él demanda la medida de los azimutes absolutos, á la vez que la de las distancias zenitales iguales. Se ve que esta apreciación es inexacta, pues ambos elementos pueden ser bastante desiguales, y la distancia zenital no figura más que en los pequeños términos de corrección.

mativo de z, que sirve para corregir el azimut por el error de horizontalidad del eje de rotación.

Cuando, después de su paso por el meridiano, se aproxima la estrella á la altura de la última observación oriental, se procede de la misma manera, habiendo fijado el telescopio en la posición correspondiente á esta altura. Con el tornillo tangencial del círculo azimutal se conserva el hilo vertical en coincidencia con la estrella, hasta el instante en que atraviesa el hilo horizontal del centro. Se apunta la hora t, las lecturas n del nivel g del círculo vertical y G del azimutal; y finalmente, se toma la inclinación b del eje de rotación del telescopio, procediendo conforme se dijo antes.

De una manera idéntica se ejecutan la segunda, la tercera, etc., observaciones al Oeste, que respectivamente corresponden á la penúltima, á la antepenúltima, etc., al Este del meridiano.

En cuanto á los cálculos, para que se comprenda bien su ejecución, expondré un ejemplo completamente detallado, comenzando por escribir en su orden las fórmulas que deben aplicarse:

$$\Delta z = (g'-g) + (n'-n) + (r'-r)$$

$$\Delta h = \frac{\Delta z}{15 \cos.\varphi \operatorname{sen}.a}$$

$$\Delta G = \frac{\cot.h \cos.a - \operatorname{sen}.\varphi \operatorname{sen}.a}{\cos.\varphi}\,\Delta z$$

$$h = \tfrac{1}{2}(t-t') + \tfrac{1}{2}(t-t')u + \tfrac{1}{2}\Delta h$$

$$a = \tfrac{1}{2}(G'-G) + \tfrac{1}{2}(b'-b)\cot.z + \tfrac{1}{2}\Delta G$$

$$\Delta t_0 = a - \tfrac{1}{2}\Delta h - \tfrac{1}{2}(t+t')$$

$$\tan.M = \frac{\tan.\delta}{\cos.h}$$

$$\operatorname{sen}.(M-\varphi) = \cos.M \tan.h \cot.a$$

La siguiente es la última observación de la estrella ε *Tauri* que hice en la ciudad de México. Las horas son las del péndulo sideral de mi Observatorio privado, y las indicaciones angulares expresan los promedios de todos los micrómetros, tanto del círculo vertical como del horizontal del altazimut.

Al Este del meridiano.

t'	g'	n' e'	G'	r' d'
$4^h\,7^m\,15^s.0$	93° 00′ 6″.0	55 54	102° 7′ 46″.0	59 63
				55 67

Al Oeste del meridiano.

t	g	n e	G	r d
$4^h\,32^m\,15^s.0$	93° 00′ 6″.0	55 55	262° 24′ 13″.7	57 62
				53 68

Se tenia, además, $v = 1''{,}04$ y $w = 1''{,}27$. El péndulo tenía un atraso diario de 6^s, ó sea de $0^s.25$ por hora. La posición de la estrella, según el Almanaque Náutico americano, era:

$$\alpha = 4^h\,21^m\,8^s.55 \qquad y \qquad \delta = +\,18°\,53'\,41''.0$$

Para calcular las pequeñas correcciones $\varDelta h$ y $\varDelta G$, pueden emplearse los valores aproximativos $\varphi = 19°\,26'$, $a = \frac{1}{2}(G' - G) = 99°\,52'$, $h = \frac{1}{2}(t - t') = 3°\,7'$, y $z = g - g_0 = 3°\,00'$, con los que ordenaremos el cálculo como sigue:

$g' - g =$	00″.00	$\varDelta z$.........	9.7160+	$\frac{1}{2}(b' - b)$.....	9.7781+
$n' - n = +$	0 .52	$\frac{1}{15}$ sec. φ..	8.8494	cot. z.........	1.2806
$r' - r =$	0″.00	sen. a.....	−9.9935		1.0587+
$\varDelta z = +$	0 .52				
		$\varDelta h$.........	8.5719+	Nivel = +	11″.45
		$\varDelta h$ ...=	$+0^s.04$		

---

cot. h..............	1.2640	sen. φ.......	9.5221	
cos. a..............	9.2339−	sen. a........	9.9935	
	0.0255.........	sec. φ........	0.0255	− 1″.74
	9.7160+.......	$\varDelta z$...........	9.7160+	− 0 .18
	0.2394−		9.2571+	$\varDelta G = -\,1''.92$

$\frac{1}{2}(t - t') = 0^h\,12^m\,30^s.00$	$\frac{1}{2}(G' - G) = 99°51'46''.15$	$\frac{1}{2}(t + t') = 4^h\,19^m\,45^s.00$
Marcha = + 0 .05	Nivel = + 11 .45	$\frac{1}{2}\varDelta h =$ + 0 .02
$\frac{1}{2}\varDelta h =$ + 0 .02	$\frac{1}{2}\varDelta G =$ − 0 .96	$4^h\,19^m\,45^s.02$
$h = \begin{cases} 0^h\,12^m\,30^s.07 \\ 3°\ 7'\,31''.0 \end{cases}$	$a = 99°51'56''.6$	$\alpha = 4\ 21\ \ 8\ .55$
		$\varDelta t_0 = +\ 1^m\,23^s.53$

---

tan. δ.........	9.5343735	tan. h......	8.7371970	
cos. h.........	9.9993536	cos. M.....	9.9758761	$M = 18°\,55'\,15''.1$
tan. M........	9.5350199	cot. a......	9.2403284−	$M - \varphi =$ 0 30 52 .8−
		sen. $(M - \varphi)$.	7.9534015−	$\varphi = 19°\,26'\ 7''.9$

Cinco observaciones de esta estrella, hechas en la misma noche, entre 3° y 15° de distancia zenital, me dieron en término medio $\varDelta t_0 = 1^m\,23^s.47$ y $\varphi = 19°\,26'\,7''.52$. Por toda la serie, que comprende 22 observaciones de ε *Tauri*, obtuve $\varphi = 19°\,26'\,7''.54$; y otra serie de 18 observaciones de la estrella β *Aridis*, que también culmina cerca del zenit de México, me dió $\varphi = 19°\,26'\,7''.93$ por término medio. La concordancia de estos resultados manifiesta la gran precisión con que es posible obtener, en poco tiempo, la latitud por el método mexicano.

CAPITULO XXIII.

DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE DISTANCIAS LUNARES.

288.—El principio general en que se funda la determinación de la longitud geográfica se ha expuesto en el número 127, y consiste en comparar las horas locales que se cuentan en dos estaciones, en el momento en que se produce un fenómeno instantáneo, como es aquel en que un astro adquiere cierta posición en la esfera celeste. Por lo regular la hora del primer meridiano, ó sea del meridiano de las Efemérides, es susceptible de calcularse de antemano, y la observación directa es la que da á conocer, en otra estación cualquiera, la hora que corresponde al fenómeno en cuestión.

Se comprende desde luego la importancia de que el astro cuya posición debe servir para la medida de la longitud, tenga un movimiento rápido sobre la esfera; porque debiéndose suponer siempre algún error en la observación, es claro que influirá en el resultado, tanto más cuanto más pequeña sea la variación que sufra la posición del astro con relación al tiempo. De todos los astros, la luna es la que por su proximidad á la tierra, se mueve aparentemente con más rapidez respecto de las estrellas fijas, y es, por lo mismo, la que sirve para la determinación de las longitudes. La variación de su ascensión recta excede generalmente poco de 2^m por hora; pero aun suponiéndola de 144^s en una hora media, sería $\frac{1}{25}$ del tiempo, y en consecuencia, cada segundo de error que se cometiera al determinar su ascensión recta por la observación, produciría otro de 25^s en la

longitud deducida. Como es tan irregular el movimiento de la luna, hay veces que sólo llega á unos 100^s por hora, en cuyo caso el error ε de la medida directa originaria es de $36\ \varepsilon$ en el resultado. Adoptando la variación media de la luna en ascensión recta para hacer las consideraciones que preceden, resulta próximamente 27.5 por coeficiente medio del error de observación.

Estos guarismos indican la gran trascendencia que tiene aquel error, y ponen de manifiesto la dificultad de determinar exactamente la longitud por observaciones celestes, aun sirviéndose del astro cuyas circunstancias son más favorables al problema. Es cierto que en una operación delicada no es de creerse que el error de observación llegue á 1^s, pues acaso siempre sea posible reducirlo á menos de $0^s.2$; pero también hay que tomar en cuenta el hecho de que las Tablas de la luna tienen á veces errores que exceden de $0^s.5$, y que éstos producen el mismo efecto que los de observación. Los errores tabulares pueden, sin embargo, eliminarse haciendo uso de las observaciones directas ejecutadas en el primer meridiano, ó en otro cuya longitud se conozca exactamente, en lugar de servirse de las posiciones de la luna tomadas de las Efemérides; pero este medio de corrección, de que presentaré algún ejemplo en los Capítulos siguientes, no siempre puede aplicarse, por falta de observaciones correspondientes á la que se desee comparar con ellas.

Todas estas generalidades son aplicables á cualquiera de los procedimientos en que se observa la luna para determinar una longitud geográfica; y á ellas debe añadirse la de que siempre se supone conocido un valor aproximativo de la misma longitud, de manera que por lo regular el problema se reduce á calcular la corrección que necesita el primer supuesto. La longitud aproximativa se llama *estima*, y para que se comprenda la necesidad de su conocimiento, basta indicar que como, en una estación cualquiera, la medida de la posición de la luna no puede ser por lo general directa, sino calculada con ayuda de otros varios elementos, que son los que suministra directamente la observación, es preciso tomar ciertos datos de las Efemérides para la hora del primer meridiano que corresponde al mismo instante físico en que se practicó aquélla, y para esto es indispensable la estima. Podría creerse, á primera vista, que el error de ésta, influyendo necesariamente en los elementos calculados por interpolación, y suministrando, en consecuencia, sólo sus valores aproximativos, debería originar en las operaciones del cálculo otro error de importancia; pero tal conclusión deja de admitirse luego que se reflexiona en las pequeñas variaciones que tienen todos ó la mayor parte de los elementos tabulares, respecto del tiempo. Un error de 1^m, por ejemplo, en la estima respecto del valor de la verdadera longitud, es bastante considerable, pues generalmente se conoce aquélla con más aproximación; pero aun en ese caso se tendría con el mismo error la hora del meridiano de las Efemérides, y en tan corto tiempo casi no tienen variación apreciable muchos de sus elementos. Suponiendo, sin embargo, que éstos resultasen sensiblemente erróneos, si se procura que sea pequeña su influencia en la combinación que de ellos debe hacerse, eligiendo convenientemente las condiciones de la observación, es claro que por su medio se hallará un valor de la longitud más exacto que la estima supuesta al principio; y que si aún queda algún error en el resultado, se hará desaparecer repitiendo los cálculos con la nueva estima que se deduzca de los primeros. En resumen, la determinación de la longitud, considerada bajo este punto de vista, no viene á ser más que una aplicación del método de aproximaciones sucesivas, en la cual el error originado por cada supuesto inexacto, decrece con tal rapidez, que hace generalmente innecesaria la repetición del cálculo, al menos cuando una simple observación preliminar haya dado á conocer la estima con aproximación de unos cuantos segundos de tiempo.

289.—Concretémonos ahora al método que forma el objeto de este Capítulo. Los Almanaques Náuticos traen en las últimas páginas correspondientes á cada mes, las distancias angulares del centro de la luna al del sol, al de varios planetas y á algunas de las principales estrellas fijas. Estas distancias están calculadas de 3^h en 3^h del meridiano de Greenwich, y son geocéntricas ó tales como se verían desde el centro de la tierra. Si, pues, un observador mide, en una estación cualquiera, la distancia angular entre la luna y alguno de aquellos astros, anotando la hora media correspondiente, y reduce su obser-

vación á lo que sería vista desde el centro de la tierra, podrá hallar en seguida, por interpolación, á qué hora de Greenwich tenía lugar aquella distancia, sirviéndose al efecto de las que constan en las Efemérides. La comparación de esta hora con la local de la observación, le dará por diferencia la longitud de su estación respecto del meridiano de aquel Observatorio, puesto que ambas corresponden al instante físico en que tuvo la luna determinada posición en el cielo.

Siendo α y α', δ y δ' las ascensiones rectas y las declinaciones de la luna y del otro astro respectivamente, las distancias lunares de las Efemérides están calculadas por la ecuación:

$$\cos. d = \text{sen.}\,\delta\,\text{sen.}\,\delta' + \cos.\delta\cos.\delta'\cos.(\alpha-\alpha') \qquad (1)$$

puesto que en el triángulo formado por el polo y los centros de ambos astros se conocen dos lados y el ángulo comprendido $\alpha - \alpha'$.

La observación se hace comunmente con sextante ó cualquier otro instrumento de reflexión, por ser los que mejor se prestan á colocarse en el plano de los objetos; y como sólo es visible el borde iluminado de la luna, lo que se mide directamente es la distancia de este limbo al otro astro. Para más generalidad, supondré que el observador tome el ángulo comprendido entre los bordes de los dos astros, y así, siendo D' la distancia que obtenga, la comprendida entre sus centros será:

$$D = D' \pm S \pm s \qquad (2)$$

representando S el semidiámetro aparente ó aumentado de la luna (núm. 144), s el del otro astro, y debiéndose tomar los signos superiores cuando el ángulo medido sea entre los bordes más inmediatos. Siempre que se observe la distancia lunar respecto de una estrella fija, se tendrá $s = o$.

Como la refracción y la paralaje alteran las posiciones de los astros, el valor de D es la distancia aparente tal como se ve desde la superficie de la tierra; y es la que debe reducirse en seguida al centro para hacerla comparable con los datos de las Efemérides. Sea L (fig. 51ª) la posición geocéntrica de la luna y A la del otro astro; puesto que es tan considerable el valor de la paralaje de la luna, su efecto que es el de hacerla parecer más baja, excede al efecto contrario de la refracción que la hace parecer más elevada, de manera

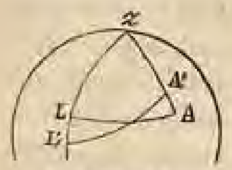


FIG. 51A

que desde la superficie de la tierra se verá en L'. En el otro astro el efecto de la refracción será superior al de su pequeña paralaje, y así es que lo veremos en A'. En consecuencia, el ángulo obtenido por la observación será........ $D = A'L'$, mientras que el que se trata de hallar es el geocéntrico $d = AL$. Con el fin de tener los datos necesarios para la reducción, supongamos conocidas las distancias zenitales aparentes $ZL' = Z'$ y $Z'A = z'$, así como las verdaderas $ZL = Z$ y $ZA = z$, que no difieren de las anteriores más que por el efecto combinado de la refracción y de la paralaje de altura. El triángulo aparente $L'ZA'$ da la ecuación siguiente, en la cual M representa la diferencia de azimutes $L'ZA'$:

$$\cos. D = \cos. Z' \cos. z' + \operatorname{sen}. Z' \operatorname{sen}. z' \cos. M$$

En el triángulo verdadero LZA es el mismo el ángulo M, y por consiguiente se tendrá:

$$\cos. d = \cos. Z \cos. z + \operatorname{sen}. Z \operatorname{sen}. z \cos. M$$

Eliminando á $\cos. M$ entre las dos ecuaciones, resulta:

$$\frac{\cos. D - \cos. Z' \cos. z'}{\operatorname{sen}. Z' \operatorname{sen}. z'} = \frac{\cos. d - \cos. Z \cos. z}{\operatorname{sen}. Z \operatorname{sen}. z}$$

Añadiendo la unidad á cada miembro de esta ecuación y reduciendo, se halla:

$$\frac{\cos. D - \cos. (Z' + z')}{\operatorname{sen}. Z' \operatorname{sen}. z'} = \frac{\cos. d - \cos. (Z + z)}{\operatorname{sen}. Z \operatorname{sen}. z}$$

que también puede escribirse de este modo:

$$\frac{\operatorname{sen}. \frac{1}{2}(Z' + z' + D) \operatorname{sen}. \frac{1}{2}(Z' + z' - D)}{\operatorname{sen}. Z' \operatorname{sen}. z'} = \frac{\operatorname{sen}.^2 \frac{1}{2}(Z + z) - \operatorname{sen}.^2 \frac{1}{2} d}{\operatorname{sen}. Z \operatorname{sen}. z}$$

de la cual se obtiene, haciendo $m = \frac{1}{2}(Z' + z' + D)$:

$$\operatorname{sen}.^2 \tfrac{1}{2} d = \operatorname{sen}.^2 \tfrac{1}{2}(Z + z) - \frac{\operatorname{sen}. Z \operatorname{sen}. z}{\operatorname{sen}. Z' \operatorname{sen}. z'} \operatorname{sen}. m \operatorname{sen}. (m - D)$$

Para hacer esta ecuación fácilmente calculable por logaritmos hagamos uso de un ángulo subsidiario N, sujeto á la condición:

$$\operatorname{sen}.^2 N = \frac{\operatorname{sen}. Z \operatorname{sen}. z}{\operatorname{sen}. Z' \operatorname{sen}. z'} \frac{\operatorname{sen}. m \operatorname{sen}. (m - D)}{\operatorname{sen}.^2 \frac{1}{2}(Z + z)} \quad \text{..........} \quad (3)$$

y se tendrá sustituyendo:

$$\operatorname{sen}. \tfrac{1}{2} d = \operatorname{sen}. \tfrac{1}{2}(Z + z) \cos. N \quad \text{....................} \quad (4)$$

fórmula que da la distancia reducida.

290.—Las distancias zenitales aparentes y verdaderas de los dos astros se obtienen, ó por la medida directa, ó por el cálculo. En el primer caso se toman las alturas ó las distancias zenitales aparentes al mismo tiempo que se mide la distancia D, lo cual demanda el concurso de tres observadores trabajando simultáneamente, ó bien la repetición de la medida de Z' y z' por un sólo observador, á fin de hallar por interpolación sus valores correspondientes al instante en que se haya medido el arco D. Si hay tres observadores, mientras uno de ellos toma la distancia del astro á la luna, los otros dos miden sus dobles alturas con horizontes artificiales, manteniendo las imágenes en contacto por medio del tornillo de aproximación, hasta que el primer observador les indica que paralicen el movimiento, cuando con su sextante haya establecido el contacto de los bordes de ambos astros. Apuntada la hora cronométrica que corresponde á ese instante, los tres observadores leen las indicaciones de sus respectivos instrumentos, dos de las cuales dan las dobles alturas y la tercera la distancia aparente de los astros, después de corregidas por los errores de los sextantes.

Si una sola persona ha de practicar toda la observación, debe comenzar por medir la altura del sol, del planeta ó de la estrella, anotando la hora correspondiente; y en seguida la de la luna, apuntando también la hora cronométrica. Hecho esto, mide la distancia angular de los dos astros con su hora respectiva; y por último, vuelve á tomar las alturas, comenzando por la luna en esta segunda vez. Como todas estas operaciones no duran mucho, se supone proporcional al tiempo el movimiento ascensional de los dos astros, y puesto que se tienen dos alturas de cada uno y las horas cronométricas correspondientes, podrá hallarse por una simple proporción el valor de las alturas para el instante de la medida de la distancia, comparando la diferencia de aquellas con el tiempo transcurrido. La hipótesis de proporcionalidad entre el ascenso ó descenso y el tiempo, es sensiblemente exacta, excepto cuando alguno de los astros esté muy inmediato al meridiano; pero aun en este caso, se sigue el mismo procedimiento, por no ser indispensable mucha precisión en los datos Z' y z', y lo único que debe hacerse es procurar invertir poco tiempo en toda la operación. Las distancias zenitales aparentes, corregidas por refracción y paralaje, suministran las verdaderas Z y z. En caso de observarse una estrella fija, sólo se corrige z' por la refracción, puesto que su paralaje es nula.

Finalmente, puede prescindir el observador de la medida directa de Z' y z', y calcular las distancias zenitales verdaderas Z y z para la hora de la observación por las fórmulas (3) del número 124, interpolando al efecto, para el mismo instante, la ascensión recta y la declinación de la luna con ayuda de la estima ó longitud aproximativa, por medio de las fórmulas (3) del número 158. Designando en seguida por R, r y P, p las refracciones y paralajes de altura de la luna y el astro respectivamente, se tendrá: $Z' = Z - R + P$ y...... $z' = z - r + p$, puesto que las correcciones deben aplicarse con signo contrario á las distancias zenitales verdaderas, para obtener las aparentes. Aquí conviene advertir que como las Tablas de refracción tienen la distancia zenital aparente por argumento, deberá hacerse uso del valor aproximativo $Z' = Z - \mu + P$ para calcular el de R, determinando á P por la fórmula (4) del número 142. Se ve que la operación de gabinete es más laboriosa cuando se calculan las distancias zenitales verdaderas, en vez de medirse directamente las aparentes; pero muchas veces es preferible este procedimiento por ser quizá más exacto cuando haya poco error en la estima.

Al tomar la distancia D, deben tenerse presentes las reglas para

el manejo del sextante expuestas en el Capítulo VI, especialmente las que se refieren á la intensidad de las imágenes. Por lo común se dirige el telescopio al astro menos luminoso, á fin de que el más brillante sea el que sufra la doble reflexión; así es que cuando se observe la luna con el sol, se visará la primera directamente, y si se observa otro astro cualquiera con la luna, aquel será el que se vise. Si á pesar de haber alejado el telescopio del limbo, con el fin de dar la misma intensidad á las imágenes, fuese la luz de la luna demasiado fuerte respecto de la del planeta ó de la estrella, se pondrá uno de los vidrios menos obscuros delante del espejo mayor. Tratándose del sol, se hará uso de la combinación de helioscopios que se juzgue más conveniente.

Importa también cerciorarse de la exactitud de la distancia D' de los bordes, haciendo oscilar ligeramente el sextante al derredor del eje del telescopio, á fin de que la imagen refleja se mueva hacia un lado y otro de la directa. Con el tornillo de aproximación deben irse haciendo las correcciones, hasta que en ese leve movimiento, el borde de la luna toque solamente al del sol ó del planeta, ó bien á la estrella en su caso. Para encontrar pronto las imágenes de los dos astros en el campo del telescopio, puede ponerse de antemano la alidada en la distancia lunar aproximativa que indiquen las Efemérides para aquella hora, pues aunque ésta es geocéntrica, nunca difiere mucho de la aparente, y se evita también de este modo el peligro de tomar equivocadamente el ángulo de la luna con otra estrella. Diré, por último, que siguiendo la regla general de visar directamente el astro menos luminoso, hay necesidad á veces de tener el sextante con la graduación hacia abajo.

291.—Antes de presentar una aplicación numérica de la determinación de la longitud por el método de distancias lunares, indiquemos dos pequeñas correcciones que generalmente no pueden omitirse sin error. Cuando los astros están poco elevados sobre el horizonte, la diversa refracción que obra en sus bordes superior é inferior, da al disco una apariencia elíptica, contrayendo sensiblemente el diámetro vertical. Resulta de aquí que el semidiámetro tabular sólo corresponde al horizontal del astro, y como por lo regular el arco medido D' está en un plano inclinado, deberán introducirse en la ecuación (2) los semidiámetros que convienen al punto de los discos por donde pasa aquel plano. Las contracciones que les corresponden se calculan fácilmente en función de los ángulos $Q = Z L' A'$ y $q = Z A' L'$, cuyos valores no se necesitan con mucha exactitud. En el número 8 hemos visto que la expresión del radio de una elipse en función del semi-eje mayor a, es $a(1 - \frac{1}{2} e^2 \text{sen.}^2 \varphi)$; y atendiendo á que $\frac{1}{2} e^2$ es casi igual á $\frac{a-b}{a}$ (número 8), el valor precedente equivale á este otro: $a - (a - b)\,\text{sen.}^2 \varphi$. Puede tomarse por φ el ángulo formado por el radio con el eje a, y como este ángulo es complementario de los que ahora designo por q y Q, si llamamos C y c las contracciones de los semidiámetros verticales, deberán emplearse en la fórmula (2) los siguientes en lugar de S y s:

$$S - C\cos.^2 Q \qquad s - c\cos.^2 q \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Los ángulos Q y q se calculan con la aproximación suficiente por las ecuaciones que siguen, haciendo uso del valor de D suministrado por la fórmula (2) y empleando logaritmos de cuatro ó cinco cifras:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen.}\,\tfrac{1}{2} Q &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}(z' + D - Z')\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(z' + Z' - D)}{\text{sen.}\,D\,\text{sen.}\,Z'}} \\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2} q &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}(Z' + D - z')\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(Z' + z' - D)}{\text{sen.}\,D\,\text{sen.}\,z'}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

En cuanto á las contracciones C y c, se determinan calculando las refracciones que corresponden á la distancia zenital del centro del astro, más el semidiámetro, y á la misma distancia zenital, menos el semidiámetro. La diferencia de ambas refracciones da la contracción del diámetro vertical, y, por consiguiente, la semidiferencia será la que corresponde al semidiámetro. Por lo general, no hay inconveniente en servirse sólo de las refracciones medias ρ, cuyos logaritmos constan en la Tabla I del fin. Cuando las distancias zenitales de los astros no exceden de 45° ó 50°, son sensiblemente nulos los valores de las contracciones.

La segunda corrección proviene de que referidas las distancias ze-

nitales de la luna al zenit verdadero y no al geocéntrico, también la paralaje, por cuyo medio se convierte Z' en Z, debe reducirse al extremo de la normal terrestre (número 150). Según esto, la fórmula (4) da la distancia lunar tal como se vería desde este último punto, y, en consecuencia, es preciso hacerle una pequeñísima corrección para reducirla al centro de la tierra. Sea P (fig. 52ª) el polo de la esfera celeste, L' el lugar que ocupa la luna vista desde el extremo de la normal y L la posición en que se ve desde el centro, siendo $u = L L'$ la diferencia de declinaciones geocéntrica y reducida al extremo de la normal. El valor de u consta en el número 150, fórmula (22), á saber: $u = A\,\text{sen.}\,\varphi$.

FIG. 52A

El arco $A L'$ es el que he designado por d, puesto que el otro astro, á causa de su gran distancia, se ve en A, ya sea que se suponga observado desde el centro de la tierra ó desde el punto en que la normal corta al eje polar. El arco $A L = d'$ será, pues, la distancia lunar geocéntrica que tratamos de calcular. Llamando δ y δ' las declinaciones geocéntricas de la luna y del otro astro respectivamente, se tiene: $P L = 90° - \delta$, $P A = 90° - \delta'$ y el triángulo $A P L$ da:

$$\text{sen.}\,\delta' = \text{sen.}\,\delta \cos.\,d' + \cos.\,\delta\,\text{sen.}\,d' \cos.\,L$$

En el triángulo $A L L'$ se tendrá igualmente:

$$\cos.\,d = \cos.\,d' \cos.\,u + \text{sen.}\,d'\,\text{sen.}\,u \cos.\,L$$

Eliminando á $\cos.\,L$ y tomando la unidad por el coseno, y el arco por el seno del pequeño ángulo u, resulta:

$$\cos.\,d - \cos.\,d' = \frac{u}{\cos.\,\delta}\,(\text{sen.}\,\delta' - \text{sen.}\,\delta \cos.\,d')$$

Como d y d' difieren muy poco, pueden tomarse una por otra en el segundo miembro, así como $(d' - d)\,\text{sen.}\,d$ en lugar del primero, con lo cual se obtiene:

$$d' - d = \frac{u}{\cos.\,\delta}\left(\frac{\text{sen.}\,\delta'}{\text{sen.}\,d} - \frac{\text{sen.}\,\delta}{\tan.\,d}\right)$$

y sustituyendo el valor de u se halla finalmente:

$$d' = d + \frac{A\,\text{sen.}\,\varphi}{\cos.\,\delta}\left(\frac{\text{sen.}\,\delta'}{\text{sen.}\,d} - \frac{\text{sen.}\,\delta}{\tan.\,d}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

292.—Teniendo ya la distancia geocéntrica d', no queda más que compararla con las de las Efemérides para obtener la hora correspondiente del primer meridiano. A este fin, llamando d_1 la que más se aproxime á d', τ la hora que le corresponde y v la variación de distancia que dan las Tablas por el tiempo constante de 3^h, se tendrá $x = \frac{10800^s}{v}(d' - d_1)$ por corrección de la hora τ. Según esto, la hora del primer meridiano en que era d' la distancia lunar, tendrá por expresión:

$$T' = \tau + \frac{10800^s}{v}(d' - d_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

y llamando T la hora local de la observación, la longitud del lugar será:

$$L = T' - T \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

Cono el valor de v es algo variable, conviene calcularlo para un instante intermedio entre τ y T', lo que exigiría la determinación aproximativa de esta última hora. Sin embargo, las Efemérides dan los logaritmos de $\frac{10800}{v}$ con el título de *Log. proporcional de la diferencia*, los cuales constan al lado de cada una de las distancias; de manera que lo que puede hacerse es calcular la fórmula (8) con el logaritmo que den las Tablas, y en seguida corregir el primer resultado interpolando aquel logaritmo para el instante intermedio de que hemos hablado, si es que se cree de alguna importancia tal corrección. En lugar de proceder de esta manera, sería más exacto calcular la hora T' atendiendo á las diferencias segundas por medio de la fórmula (4) del número 159, en la que $y - a$ representa la diferencia que ahora he designado por $d' - d_1$.

Ejemplo.—El 21 de Diciembre de 1861 tomé cerca de la ciudad de Mexico una serie de cuatro distancias de Aldebarán (*α Tauri*) al limbo más lejano de la luna. El promedio, corregido por los errores del sextante, fué $D' = 79°\ 42'\ 20''$, y la hora media correspondiente,

$T = 10^h\ 30^m\ 54^s.8$. La latitud del lugar era $\varphi = 19°\ 25'\ 53''$ y la estima $L = 6^h\ 36^m\ 23^s$. No habiendo medido las distancias zenitales aparentes, calculé las verdaderas por las fórmulas (3) del número 124, tomando los datos para la hora $T + L$ de Greenwich, y reduciendo la declinación de la luna al extremo de la normal. De este modo obtuve:

$$Z = 76°\ 53'\ 46'' \qquad z = 3°\ 29'\ 24''$$

La paralaje horizontal de la luna, corregida por latitud y altura [número 150 fórmula (21)] fué $\pi = 56'\ 59''.6$, y el semidiámetro aparente (número 144), $S = 15'\ 36''.6$. Calculando la paralaje de altura por la fórmula (4), número 142, hallé $P = 55'\ 42''.7$. Para determinar la refracción se tenía: presión $0^m.590$ á 0° de temperatura, é indicación del termómetro libre, 5°. Calculando el valor de R con estos datos y $Z + P = 77°\ 49'.5$ resultó $209''$, y repitiendo el cálculo con $Z + P - R = 77°\ 46'$ encontré $207''.7$, por lo que la distancia zenital aparente será: $Z' = 77°\ 46'\ 1''$. De una manera análoga resulta para la estrella $z' = 3°\ 29'\ 21''$.

Con Z', z' y $D = D' - S = 79°\ 26'\ 43''$, la primera de las fórmulas (6), calculada con logaritmos de cuatro decimales, produce...... $Q = 3°\ 7'\ 16''$ próximamente; y calculando la refracción para $Z' + S$ y $Z' - S$, se halla $212''.2$ y $203''.5$, de donde se infiere que la contracción del semidiámetro vertical de la luna es $C = 4''.3$. Con C y Q la primera de las fórmulas (5) da $15'\ 32''$ por semidiámetro corregido, y asi la distancia lunar aparente es $D = 79°\ 26'\ 48''$. Calculemos ahora las ecuaciones (3) y (4) recordando que $m = \frac{1}{2}(Z' + z' + D)$.

$D = 79°\ 26'\ 48''$	sen. Z........	9.9885413		
$Z' = 77\ \ 46\ \ 1$	sen. z..........	8.7844342		
$z' = \ 3\ \ 29\ \ 21$	sen. m........	9.9938127		
	sen. $(m-D)$.	8.1983746		
$m = 80°\ 21'\ \ 5''$	sen. Z'..........	-9.9900252		
$m - D = \ 0\ \ 54\ \ 17$	sen. z'..........	-8.7843306		
	sen.$^2\frac{1}{2}(Z+z)$.	-9.6196108	cos. N.........	9.9917555
			sen. $\frac{1}{2}(Z+z)$.	9.8098054
	sen.^2N........	8.5711962		
			sen. $\frac{1}{2}d$........	9.8015609
	sen. N........	9.2855981		
			$\frac{1}{2}d = 39°\ 17'\ 19''$	
	$N = 11°\ 7'\ 44''$		$d = 78\ \ 34\ \ 38$	

Para calcular la reducción al centro de la tierra, se tienen los datos:

$$\delta = +8^\circ 38' 46''.8 \qquad \tau = 57' \qquad \delta' = +16^\circ 13' 48''.2$$

Con los dos primeros se halla log. $A = 1.354$ en la Tabla del número 150, y así:

A	1.354				
sen. φ	9.522				
cos. δ	-9.995			Primer término	$2''.2$
	0.881		0.881	Segundo „	-0.2
sen. δ'	9.446	sen. δ	9.177	$d'-d=$	$+2''.0$
tan. d	-9.991	tan. d	-0.695	$d=$	$78^\circ 34' 38.0$
	0.336		9.363	$d'=$	$78^\circ 34' 40''$

Refiriéndonos ahora al Almanaque americano, hallamos que el 21 de Diciembre de 1861, á 15^h y á 18^h de Greenwich las distancias geocéntricas de α *Tauri* al centro de la luna, eran:

A 15^h .... $d_1 = 77^\circ 25' 41''$
„ 18 .... $d_1 = 79 \quad 2 \; 56$

La que más se aproxima á la observada d' es la segunda, y así tomaremos $\tau = 18^h$, $d_1 = 79^\circ 2' 56''$ y $v = 1^\circ 37' 15'' = 5835''$ para obtener:

$$\begin{array}{lr}
d' = 78^\circ 34' 40'' & \\
d_1 = 79 \quad 2 \; 56 & \\
\hline
 & 10800^s \ldots\ldots \; 4.0334238 \\
d' - d_1 = -\,28' 16'' = -1696'' \ldots\ldots & 3.2294258- \\
v = 1 \; 37 \; 15 = \;\; 5835 \ldots\ldots & -3.7660409 \\
\hline
 & \left\{\begin{array}{r} 3.4968087- \\ -\,3139^s.1 = -\,0^h 52^m 19^s.1 \end{array}\right. \\
 & \tau = \;\; 18 \;\; 00 \;\; 00.0
\end{array}$$

Hora media de Greenwich .... $T' = \; 17^h \; 7^m 40^s.9$
„ „ local .... $T = \; 10 \; 30 \; 54.8$

Longitud .... $L = \; 6^h 36^m 46^s.1$

Entre 18^h y 21^h de Greenwich la variación de la distancia es $14''$ mayor, á saber, $v = 5849''$. Para proceder con la posible exactitud debería hacerse uso del valor de v correspondiente al instante medio $17^h.6$ entre τ y T'; y como el empleado en el cálculo puede suponerse que corresponde á $16^h.5$, variando á razón de $14''$ por 3^h, hallaremos proporcionalmente $v = 5840''$ para $17^h.6$. Repitiendo el cálculo con este valor se encuentra $L = 6^h 36^m 48^s.8$ por longitud según esta observación.

293.—El resultado excede en más de 20^s á la estima ó longitud supuesta al principio, y como ésta es casi exacta, debe atribuirse la diferencia al efecto combinado de los pequeños errores de observación y de los que pueden existir en la posición tabular de la luna. Los primeros, obrando directamente sobre d', producen en la hora T' de Greenwich, y por consiguiente en la longitud, el efecto...... $\frac{10800^s}{v} \Delta G$, según lo manifiesta la fórmula (8), siendo ΔG la corrección que necesite la graduación del instrumento en el punto en que se haya hecho la lectura angular. Los segundos dan por resultado un valor inexacto de la distancia tabular d_1, calculada por la ecuación (1). Determinemos los coeficientes de estos errores, suponiendo que $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$ son las correcciones que necesitan la ascensión recta y la declinación de la luna que constan en las Efemérides. Diferenciando la ecuación (1) respecto de α y de δ sucesivamente, hallaremos:

$$\frac{\mathrm{d}\,d_1}{\mathrm{d}\,\alpha} = \frac{\cos.\delta \cos.\delta' \operatorname{sen.}(\alpha-\alpha')}{\operatorname{sen.} d_1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,d_1}{\mathrm{d}\,\delta} = \frac{\operatorname{sen.}\delta \cos.\delta' \cos.(\alpha-\alpha') - \cos.\delta \operatorname{sen.}\delta'}{\operatorname{sen.} d_1}$$

Multiplicando por 15 el primer coeficiente diferencial, con el objeto de poder introducir á $\Delta\alpha$ en segundos de tiempo, la corrección de la distancia tabular será:

$$\Delta d_1 = \frac{15 \cos.\delta \cos.\delta' \operatorname{sen.}(\alpha-\alpha')}{\operatorname{sen.} d_1} \Delta\alpha + \frac{\operatorname{sen.}\delta \cos.\delta' \cos.(\alpha-\alpha') - \cos.\delta \operatorname{sen.}\delta'}{\operatorname{sen.} d_1} \Delta\delta \cdot$$

y como según lo manifiesta la ecuación (8), esta corrección debe quedar multiplicada por $\frac{10800^s}{v}$, produciendo el efecto de disminuir, cuando es positiva, la hora T' y por tanto la longitud, hallaremos que la corrección de L por los errores del instrumento y de las coordenadas de la luna, tiene por expresión:

$$\left.\begin{aligned}\Delta L = \frac{10800}{v}\Delta G - \frac{162000}{v} \cdot \frac{\cos.\delta\cos.\delta'\,\text{sen.}\,(\alpha-\alpha')}{\text{sen.}\,d_i}\Delta\alpha \\ + \frac{10800}{v} \cdot \frac{\cos.\delta\,\text{sen.}\,\delta' - \text{sen.}\,\delta\cos.\delta'\cos.\,(\alpha-\alpha')}{\text{sen.}\,d_i}\Delta\delta\end{aligned}\right\}\cdots(10)$$

En nuestro ejemplo, á la hora de la observación se tenía:

Luna..............	$\alpha = 9^h 50^m 11^s.15$	$\delta = +\ 8°38'46''.8$
α *Tauri*.........	$\alpha' = 4\ 28\ \ 2.69$	$\delta' = +16\ 13\ 48\ .2$

Calculando con estos elementos los coeficientes de los errores, para lo cual bastan logaritmos de tres ó cuatro decimales, se halla:

$$\Delta L = 1.8\,\Delta G - 26.5\,\Delta\alpha + 0.5\,\Delta\delta$$

ecuación que permite corregir el primer resultado luego que se conocen las correcciones de graduación y posición tabular de la luna. En nuestro caso, habiéndose corregido desde un principio la lectura angular por los errores del instrumento, tendremos $\Delta G = 0$. Con el fin de aplicar esta fórmula, y á falta de observaciones correspondientes de la luna, tomaré por posición correcta el término medio de las que le asignan los Almanaques inglés y americano el día de la observación, á saber:

A 17^h de Greenwich	(Almanaque amer.)....	$\alpha = 9^h 49^m 56^s.50$	$\delta = 8°40'18''.5$
" "	(Almanaque inglés)...	$\alpha = 9\ 49\ \ 57\ .37$	$\delta = 8\ 40\ 12\ .5$
	Promedios..............	$\alpha = 9^h 49^m 56^s.93$	$\delta = 8°40'15''.5$

Habiendo tomado del primero todos los datos del cálculo, sus correcciones respecto de los promedios serán: $\Delta\alpha = +\,0^s.43$ y......... $\Delta\delta = -\,3''.0$. Sustituyendo resultará:

$$\Delta L = -11^s.4 - 1^s.5 = -12^s.9$$

y la longitud correcta será: $L + \Delta L = 6^h 36^m 35^s.9$.

En la práctica el método de distancias lunares no corresponde generalmente á su rigor teórico, á causa de la dificultad de medir exactamente los arcos celestes con instrumentos de reflexión, cuyo poder óptico es siempre pequeño; pues aunque por su medio se obtienen las lecturas angulares con aproximación de 5'', es evidente que en la apreciación de los contactos puede cometerse un error más considerable, y cada segundo de error en el ángulo produce otro de 2^s en la longitud con poca diferencia. En cuanto á los errores instrumentales de excentricidad, etc., se eliminarán en su mayor parte observando distancias de estrellas situadas tanto al Este como al Oeste de la luna, porque aquellos errores producirán efectos contrarios, y en consecuencia, un promedio independiente de los mismos, sobre todo si las distancias medidas son poco diferentes. No obstante estos defectos, el método de distancias lunares es casi el único que pueden aplicar los marinos, de modo que bajo este punto de vista es de la mayor importancia, suministrando siempre la longitud con la aproximación bastante para las necesidades usuales de la navegación. Para evitarse trabajo de gabinete, en lugar de calcular las distancias zenitales verdaderas, toman por lo regular los marinos las alturas aparentes, sirviéndose del horizonte del mar y corrigiéndolas por la depresión (Tomo I, número 262). Con esto y con el auxilio de varias Tablas preparadas al efecto, que constan en todos los tratados de navegación, se abrevia el cálculo notablemente. El Profesor norteamericano Mr. Chauvenet en su *Manual of spherical and practical Astronomy*, presenta un método abreviado para reducir las distancias lunares, que á la exactitud práctica necesaria reune mucha facilidad para la ejecución de los cálculos.

CAPITULO XXIV.

DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE DISTANCIAS ZENITALES DE LA LUNA.

294.—Determinando por medio de la observación directa el ángulo horario de la luna, y conociendo la hora media ó sideral de la misma observación, será fácil hallar en seguida la ascensión recta por la combinación de ambos elementos (número 121). Entonces se podrá calcular la hora del primer meridiano que corresponda á la ascensión recta obtenida, y comparándola con la hora local de la observación, se hallará por diferencia la longitud del lugar.

Para determinar el ángulo horario se mide la distancia zenital del borde visible de la luna, que corregida por refracción, paralaje de altura y semidiámetro, da á conocer la distancia zenital verdadera de su centro. Este dato, la latitud de la estación y la declinación de la luna reducida al extremo de la normal terrestre, permiten calcular el ángulo horario por las ecuaciones usuales. El último de estos elementos se toma de las Efemérides por interpolación con diferencias segundas, sirviéndose al efecto de la *estima* ó longitud aproximativa, y se reduce después por la fórmula (22) del número 150.

Debemos advertir que como el centro de la esfera celeste se supone entonces en el extremo de la normal del observador, es preciso reducir al mismo punto la paralaje horizontal, procediendo como se ha explicado en el párrafo citado; y de esta manera podrá emplearse la latitud geográfica del lugar en vez de la geocéntrica.

Reducidos así todos los elementos al extremo de la normal terrestre, es claro que se obtendrá el mismo ángulo horario que si se hubieran empleado los elementos geocéntricos, puesto que aquel punto se halla sobre el eje de la tierra, y por consiguiente en el meridiano del observador. Según esto, sea z' la distancia zenital aparente de uno de los bordes de la luna, tal como la da el instrumento después de corregida por sus errores de índice, micrómetro, excentricidad, niveles, etc., y r la refracción. Entonces $z' + r$ será la distancia zenital aparente del mismo borde, tal como se verá desde el lugar de la observación sin la existencia de la atmósfera, y si con esta cantidad se calcula la paralaje de altura por la ecuación:

$$\text{sen.}\, p = \text{sen.}\, \pi \, \text{sen.}\, (z' + r),$$

tendremos que $z' + r - p$ representará la distancia zenital del limbo observado, tal como se vería desde el extremo de la normal terrestre, siendo π la paralaje horizontal ecuatorial adicionada por las dos pequeñas correcciones relativas á latitud y altura, que suministran las Tablas del número 141, de acuerdo con lo expuesto en el 150. Designando ahora por s el semidiámetro geocéntrico ó tabular de la luna, la distancia zenital verdadera de su centro será: $z = z' + r - p \pm s$, evitándose así la necesidad de tomar en cuenta el aumento del semidiámetro. Se usará el signo $\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$ cuando se haya observado el limbo $\left\{ \begin{matrix} \text{superior.} \\ \text{inferior.} \end{matrix} \right\}$

Llamando T la hora sideral exacta á la cual se midió z', M la hora media simultánea ó correspondiente y L la estima, tenemos que la hora del primer meridiano es $M + L$, siendo ésta la que sirve para tomar de las Efemérides la paralaje horizontal ecuatorial π_0, el semidiámetro s y la declinación geocéntrica d de la luna. La declinación reducida δ se obtendrá por la fórmula $\delta = d + A\, \text{sen.}\, \varphi$, tomando el log. A de la Tabla del número 150.

Conocidos los tres elementos φ, z y δ se tiene:

$$a = \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2}(\varphi - \delta) \qquad b = \tfrac{1}{2} z - \tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)$$

$$\text{sen.}\, \tfrac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\text{sen.}\, a \, \text{sen.}\, b}{\cos.\, \varphi \cos.\, \delta}} \qquad \alpha = T - h$$

Para hallar la hora del primer meridiano á la cual la luna tiene α por ascensión recta, sea α' la que más se aproxima á α en las Efemérides y τ la hora correspondiente. Designando por m la variación horaria de la ascensión recta, la hora media de Greenwich que corresponde al instante físico de la observación, es:

$$M' = \tau + \frac{3600}{m}(\alpha - \alpha')$$

y en consecuencia, la longitud será:

$$\lambda = M' - M$$

295.—Las fórmulas precedentes contienen la resolución del problema en la hipótesis de la exactitud de todos sus elementos; pero tal exactitud no puede admitirse por lo general. Prescindiendo de los errores puramente de observación, que afectan directamente á T y á z, hay otros que provienen del que tenga la estima, la cual sirve para tomar los datos d, τ_0 y δ. Si la estima no es exacta, la hora de Greenwich resulta puramente aproximativa, y los elementos tabulares interpolados para ese instante quedarán necesariamente más ó menos erróneos, siendo sus errores funciones del que exista en la longitud supuesta. En tal concepto, el valor de λ obtenido por la última fórmula, no debe considerarse más que como la primera aproximación, que importa corregir en seguida.[1]

Además del error que proviene de la estima, hay que tener en cuenta los de las Tablas astronómicas, y que en este método, como en todos los que se refieren á observaciones de la luna, no se pueden eliminar más que valiéndose de las ejecutadas el mismo día en algún Observatorio permanente cuya posición se conozca con exactitud. Como estas correcciones de las Efemérides, por lo general, no se pueden conseguir inmediatamente, se ejecutan los cálculos suponiendo exactos los elementos tabulares, y determinando los coeficientes de sus errores hipotéticos, con el fin de hacer las correspon-

[1] De acuerdo con lo expuesto en el Capítulo XXIII podría repetirse el cálculo empleando por nueva estima el valor de λ; pero es más breve llevar de una vez en cuenta las correcciones, como se explicará en el texto, que está tomado del Capítulo IV, Sec. I de mis *Nuevos Métodos Astronómicos*.

dientes correcciones al primer resultado luego que se obtienen las de las Tablas lunares. Considerando, según esto, que la corrección de λ es una función de las que necesitan los elementos de que depende, vamos á determinar su forma, admitiendo para más generalidad que fueron incorrectos todos los datos empleados en la resolución.

Sea L la estima, y $L + \Delta L$ la longitud correcta que se busca. Como los elementos tabulares se tomaron para la hora $M + L$ del meridiano de las Efemérides, han debido resultar con el error que proviene de la omisión de ΔL, puesto que en este pequeño espacio de tiempo todos varían más ó menos. Si se sustituye el valor de α en el de M', y éste en el de λ, se obtiene:

$$\lambda = \tau + \frac{3600}{m}(T - h - \alpha') - M$$

En el supuesto de que no existiese error alguno en los elementos, el resultado anterior debería ser igual á $L + \Delta L$, de suerte que introducidas sus correcciones, se tendrá:

$$L + \Delta L = \tau + \frac{3600}{m}(T - h - \alpha' + \Delta T - \Delta h - \Delta \alpha') - M - \Delta M$$

y abreviando con ayuda del valor de λ, resulta:

$$\Delta L = \lambda - L + \frac{3600}{m}(\Delta T - \Delta h - \Delta \alpha') - \Delta M$$

La corrección del ángulo horario depende de las de sus elementos z, φ y δ, y como la del último proviene por una parte del error de las Tablas, y por otra del error de la estima, si designamos por ν la variación de declinación en un segundo de tiempo sideral, la corrección de δ será $\Delta\delta + \nu\Delta L$, en la que designo por medio de la característica Δ la parte que proviene del error tabular. Según esto, la corrección del ángulo horario es:

$$\Delta h = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}\Delta z + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi}\Delta\varphi + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\delta}(\Delta\delta + \nu\Delta L)$$

valor que sustituido en la última ecuación, produce despejando:

$$\varDelta L=\frac{\lambda-L+\frac{3600}{m}\left(\varDelta T-\varDelta a-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}\varDelta z-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi}\varDelta\varphi-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\delta}\varDelta\delta\right)-\varDelta M}{1+\frac{3600}{m}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}}\cdot$$

Por abreviación he suprimido el acento de a'; pero téngase presente que $\varDelta a$ representa la corrección de la ascensión recta tabular de la luna. En cuanto á los coeficientes diferenciales, constan en el número 177, y son:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}=\frac{\text{sen. }z}{\text{cos. }\varphi\text{ cos. }\delta\text{ sen. }h}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\text{tan. }\delta}{\text{sen. }h}-\frac{\text{tan. }\varphi}{\text{tan. }h}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\delta}=\frac{\text{tan. }\varphi}{\text{sen. }h}-\frac{\text{tan. }\delta}{\text{tan. }h}$$

los cuales deben dividirse por 15, puesto que $\varDelta h$ se necesita en segundos de tiempo. En cuanto al valor de ν, se deduce de la variación n de la declinación en una hora de tiempo medio, ó sea en 3610^{s} de tiempo sideral, por la relación:

$$\nu=\frac{n}{3610}=0.000277\,n$$

Los logaritmos de ν constan en la Tabla VIII, cuyo argumento es n.

296.—Establecidas todas las fórmulas de este método, haremos su resúmen reduciéndolo á las siguientes reglas prácticas. Con la hora media M de la observación y la estima L, la hora media aproximativa del meridiano á que se refieran las Efemérides, es: $M+L$. Para este instante tómense de las Tablas la declinación geocéntrica d interpolada con diferencias segundas, y la paralaje horizontal ecuatorial π_0. En cuanto al semidiámetro, puede tomarse también de las Efemérides, ó de la pequeña Tabla que sigue, cuyo argumento es π_0

π_0	s	π_0	s	π_0	s	$\Delta\pi_0$	Δs	$\Delta\pi_0$	Δs
53′00″	14′28″.1	56′00″	15′17″.3	59′00″	16′ 6″.5	1″	0″.27	7″	1″.91
53 30	„ 36 .8	56 30	„ 25 .5	59 30	„ 14 .7	2	0 .55	8	2 .18
54 00	„ 44 .5	57 00	„ 33 .7	60 00	„ 22 .9	3	0 .82	9	2 .46
54 30	„ 52 .7	57 30	„ 41 .9	60 30	„ 31 .1	4	1 .09	10	2 .73
55 00	15 0 .9	58 00	„ 50 .1	61 00	„ 39 .3	5	1 .36	20	5 .46
55 30	„ 9 .1	58 30	„ 58 .3	61 30	„ 47 .5	6	1 .64	30	8 .19

En seguida con π_0 y d por argumentos se toma de la Tabla del número 150 el log. A para corregir la declinación por la fórmula: $\delta=d+A\,\text{sen. }\varphi$. Después se corrige la paralaje por latitud y altura añadiéndole las dos pequeñas cantidades que suministran las Tablas del número 141, con lo cual se obtiene π para calcular las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{sen. }p=\text{sen. }\pi\text{ sen. }(z'+r) & z=z'+r-p\pm s\\ a=\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta) & b=\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)\\ \text{sen. }\tfrac{1}{2}h=\sqrt{\dfrac{\text{sen. }a\text{ sen. }b}{\text{cos. }\varphi\text{ cos. }\delta}} & \alpha=T-h\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

en las que r es la refracción y T la hora sideral correspondiente á la media M. En el valor de z se dará á s el signo $+$ cuando se haya observado el limbo superior de la luna, y $-$ en el caso contrario. El ángulo horario h se tomará positivo al Oeste del meridiano y negativo al Este, siendo en el último caso $T+h$ la ascensión recta observada.

En las Efemérides horarias de la luna se toma la ascensión recta α' que más se aproxime á α, la hora τ correspondiente y también los movimientos horarios m y n en ascensión recta y declinación. No hay inconveniente en tomar estos últimos para la hora τ, en cuyo caso los valores de m y n serán los términos medios de las diferencias de ascensión recta y de declinación respectivamente entre τ y la hora que precede, y τ y la hora que sigue. En seguida con el argumento n se toma el log. ν de la Tabla VIII, y se calculan las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda&=\tau+\frac{3600}{m}(\alpha-\alpha')-M\\
P&=\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,z}=\frac{\text{sen.}\,z}{\cos.\,\varphi\cos.\,\delta\,\text{sen.}\,h}\\
Q&=\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,\varphi}=\frac{\tan.\,\delta}{\text{sen.}\,h}-\frac{\tan.\,\varphi}{\tan.\,h}\\
R&=\frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,\delta}=\frac{\tan.\,\varphi}{\text{sen.}\,h}-\frac{\tan.\,\delta}{\tan.\,h}\\
F&=\frac{240}{m}\\
\Delta L&=\frac{\lambda-L+15F(\Delta T-\Delta\alpha)-FP.\Delta z-FQ.\Delta\varphi-FR.\Delta\delta-\Delta M}{1+FR\nu}
\end{aligned}\right\}\dots(2)$$

Como por lo regular se hace uso de los valores más exactos que es posible obtener de los elementos T, M, φ y z, se evita el cálculo de P y Q, lo cual reduce la última fórmula á la siguiente:

$$\Delta L=\frac{1}{1+FR\nu}(\lambda-L-15F.\Delta\alpha-FR.\Delta\delta)$$

A pesar de esto, siempre es útil calcular los coeficientes de las demás correcciones para poder estimar la influencia de los errores posibles de los elementos. En el valor de Δz supongo incluidas las correcciones de la paralaje de altura, del semidiámetro, etc.; y aunque en todo rigor, deberían haberse llevado en cuenta las partes de esas correcciones que provienen de ΔL, lo mismo que se ha hecho respecto de la declinación, en la práctica es innecesario atendida la pequeña variación horaria de la paralaje y del semidiámetro, de manera que aunque la estima tenga un error de uno ó dos minutos de tiempo, estos elementos se toman con suficiente exactitud de las Efemérides.

Dependiendo en gran parte la precisión del resultado de la exactitud con que se obtenga el ángulo horario de la luna, parece inútil recomendar la conveniencia de observarla cerca del primer vertical, ó al menos cuando no sea pequeño su azimut, según lo demostrado

en el Capítulo VII. Pongamos á la vista una aplicación numérica completamente detallada.

Ejemplo.—El 2 de Mayo de 1860 hice las siguientes observaciones del limbo superior de la luna al Este, con un altazimut establecido en el monumento que fija la extremidad occidental de la base del Valle. En las dos posiciones del instrumento se observó el tránsito del borde por los cinco hilos horizontales de la retícula.

Primera posición.		Segunda posición.	NIVEL.	
			Oc	Ob
$6^h\,31^m\,22^s.00$		$6^h\,34^m\,25^s.75$	—	—
„ 31 44 .25		„ 34 58 .50	58	58
„ 32 5 .50		„ 35 18 .50	58	58
„ 32 26 .50		„ 35 40 .50		
„ 32 48 .50		„ 36 2 .75		
			$\beta=58°\,15'\,24''.0$	
$6^h\,32^m\,5^s.35$......	Promedios......	$6^h\,35^m\,19^s.20$	$\alpha=32\;\;28\;\;8\;.0$	

Como resulta nula la corrección por el nivel, se tiene $z'=57°53'38''.0$. Con este dato y las indicaciones del barómetro y del termómetro, se obtuvo $r=1'\,9''.4$. El cronómetro solar adelantaba $2^m\,11^s.07$ en el instante de la observación, por lo que las horas media y sideral correspondientes son:

$$\begin{aligned}
t&=6^h\,33^m\,42^s.27\\
\Delta t&=-\;\;2\;\;11\;.07\\
\hline
M&=6^h\,31^m\,31^s.20\\
\text{Asc. recta}&=2\;\;43\;\;33\;.71\\
\text{Acel.}&=+\;\;1\;\;\;4\;.32\\
\hline
T&=9^h\,16^m\;\;9^s.23
\end{aligned}$$

La latitud del lugar es $\varphi=19°\,25'\,23''.0$ y su longitud $6^h\,36^m\,19^s.1$ pero tomemos por estima $L=6^h\,37^m\,28^s.8$ para obtener...... .... $M+L=13^h\,9^m\,00^s$ por hora aproximativa de Greenwich, á fin de interpolar los elementos d y π_0. Haciendo la interpolación y adoptando los promedios de los valores que suministran los Almanaques inglés y americano, se halla: $d=-\,9°\,6'\,56''.0$ y $\pi_0=60'\,2''.1$. Calculemos á δ, á π y á s; este último por la Tabla precedente.

$$\begin{array}{lll}
A \ldots\ldots\ldots\ldots & 1.375 & \\
\text{sen. } \varphi \ldots\ldots\ldots & 9.522 & d = -\,9^\circ\,6'\,56''.0 \\
\hline
 & 0.897 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & +\;7\;.9 \\
\hline
 & & \delta = -\,9^\circ\,6'\,48''.1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl|lr}
\pi_0 = & 60'\;\;2''.1 & \text{Por } 60'\,00'' \ldots\ldots & 16'\,22''.9 \\
\text{Correc. por } \varphi = & +1\;.3 & \;\;\;{}_{''}\;\;\;\;2 & 0\;.55 \\
\text{Correc. por } n = & +1\;.2 & \;\;\;{}_{''}\;\;\;\;0.1 & 0\;.03 \\
\hline
\pi = & 60'\;\;4''.6 & & s = 16'\,23''.5
\end{array}$$

Con estos datos procedamos al cálculo del ángulo horario y de la ascensión recta de la luna.

$$\begin{array}{ll|ll|ll}
z' = & 57^\circ\,53'\,38''.0 & & & & \\
r = & +\;1\;\;9\;.4 & & & & \\
p = & -\,50\;53\;.9 & \text{sen. } \pi \ldots\ldots & 8.2424098 & \varphi = & 19^\circ\,25'\,23''.0 \\
s = & +\,16\;23\;.5 & \text{sen. } (z'+r) \ldots\ldots & 9.9280085 & \delta = - & 9\;\;6\;48\;.1 \\
\hline
z = & 57^\circ\,20'\,17''.0 & \text{sen. } p \ldots\ldots & 8.1704183 & \varphi - \delta = & 28^\circ\,32'\,11''.1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlll}
\tfrac{1}{2}z = & 28^\circ\,40'\;\;8''.5 & & \\
\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta) = & 14\;\;16\;\;5\;.5 & & \\
\hline
a = & 42^\circ\,56'\,14''.0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{sen} \ldots\ldots\ldots & 9.8332725 \\
b = & 14\;\;24\;\;3\;.0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{sen} \ldots\ldots & 9.3956827 \\
\hline
\tfrac{1}{2}h = & -\,25^\circ\,14'\,53''.5 & & 9.2289552 \\
h = & -\;3^h\,21^m\,59^s.13 & \cos.\,\varphi \ldots\ldots & -9.9745527 \\
T = & \;\;9\;\;16\;\;9\;.23 & \cos.\,\delta \ldots\ldots & -9.9944829 \\
\hline
\alpha = & 12^h\,38^m\;\;8^s.36 & & 9.2599196 \\
 & & \text{sen. } \tfrac{1}{2}h \ldots & 9.6299598
\end{array}$$

El promedio de las Efemérides inglesas y americanas da por ascensión recta de la luna: $\alpha' = 12^h\,37^m\,51^s.41$ á la hora de Greenwich $\tau = 13^h$. Para esa hora tenemos $m = 133^s.83$ y $n = -\,933''.5$.

$$\begin{array}{rl|lr}
\alpha = & 12^h\,38^m\;\;8^s.36 & & \\
\alpha' = & 12\;\;37\;\;51\;.41 & & \\
\hline
 & & 3600 \ldots\ldots\ldots\ldots & 3.55630 \\
\alpha - \alpha' = & +\;16^s.95 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 1.22917+ \\
 & & m \ldots\ldots\ldots\ldots & -\,2.12655 \\
\tau = & 13^h\,00^m\,00^s.00 & & \\
 & +\;7\;\;35\;.95 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 2.65892+ \\
\hline
M' = & 13^h\;\;7^m\,35^s.95 & & \\
M = & 6\;\;31\;\;31\;.20 & & \\
\hline
\lambda = & 6^h\,36^m\;\;4^s.75 & & \\
L = & 6\;\;37\;\;28\;.80 & & \\
\hline
\lambda - L = & -\;\;1^m\,24^s.05 = -84^s.05 & &
\end{array}$$

Tomando ahora de la Tabla VIII el log. ν con $n = -\,933.''5$ y calculando los coeficientes diferenciales P, Q y R, se halla:

$\text{Log. } P = 0.0688-$ $\quad \text{Log. } Q = 9.6979+$ $\quad \text{Log. } R = 9.7705-$ $\quad \text{Log. } \nu = 9.4126-$

con los cuales procederemos al cálculo de las últimas fórmulas (2).

$$\begin{array}{ll|ll|ll|ll}
240 \ldots & 2.3802 & F \ldots\ldots & 0.2537 & \lambda - L \ldots\ldots & 1.9245- & 15 \ldots\ldots\ldots & 1.1761 \\
m \ldots\ldots & -2.1265 & R \ldots\ldots & 9.7705- & 1+FR\nu. & -0.1050 & F \ldots\ldots\ldots & 0.2537 \\
\hline
F \ldots\ldots & 0.2537 & \nu \ldots\ldots & 9.4126- & & & 1+FR\nu.. & -0.1050 \\
 & & & \left\{\begin{array}{l} 9.4368 \\ +0.2734 \end{array}\right. & & \left\{\begin{array}{l} 1.8195- \\ -66^s.00 \end{array}\right. & & \left\{\begin{array}{l} 1.3248 \\ +\,21^s.12 \end{array}\right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
F \ldots\ldots\ldots\ldots & 0.2537 \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0.2537 \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0.2537 & & \\
P \ldots\ldots\ldots\ldots & 0.0688- & Q \ldots & 9.6979 & R \ldots\ldots & 9.7705- & & \\
1+FR\nu \ldots & -0.1050 \ldots\ldots\ldots\ldots & & -0.1050 \ldots\ldots\ldots\ldots & & -0.1050 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0.1050 \\
\hline
 & \left\{\begin{array}{l} 9.2175- \\ -1.65 \end{array}\right. & & \left\{\begin{array}{l} 9.8466 \\ +0.70 \end{array}\right. & & \left\{\begin{array}{l} 9.9192- \\ -\,0.83 \end{array}\right. & & \left\{\begin{array}{l} 9.8950 \\ +0.79 \end{array}\right.
\end{array}$$

En consecuencia, la verdadera corrección de la estima L, es:

$$\Delta L = -1^m 6^s 00 + 21.12\,\Delta T - 21.12\,\Delta\alpha + 1.65\,\Delta z - 0.70\,\Delta\varphi + 0.83\,\Delta\delta - 0.79\,\Delta M$$

Estos coeficientes sirven para apreciar la influencia de los errores que podría contener cada uno de los elementos; así, en nuestro ejemplo, un error de $10''$ en la distancia zenital habría originado el de

16ˢ.5 en la longitud, mientras que el mismo error de 10″ en la latitud, hubiera producido el de 7ˢ. Debe notarse que la magnitud del coeficiente del error de la hora y de la ascensión recta indica que en este método, como en casi todos los que se refieren á observaciones de la luna, es de la mayor importancia conocer el tiempo con mucha precisión, y hacer uso de las correcciones de las Tablas determinadas en algún Observatorio fijo. Un error de 1ˢ en T, que sería sensiblemente el mismo para M, daría por resultado el de 20ˢ.33 en la longitud. Por el contrario, los otros coeficientes son generalmente pequeños y mudan de signo observando la luna á distintos lados del meridiano, de lo que se infiere que el promedio de dos observaciones ejecutadas el mismo día al Este y al Oeste, resulta casi independiente de los demás errores, sobre todo si se procura que tengan lugar en condiciones semejantes de azimut y altura. En las páginas 178 y siguientes de mis *Nuevos Métodos Astronómicos* puede verse un procedimiento basado en la observación de alturas iguales de la luna, así como en la página 169 otro modo de calcular la longitud cuando sólo se ha medido su distancia zenital á un lado del meridiano.

Estando seguros de la exactitud de la hora, de la medida angular y de la latitud, como sucede en nuestro caso, se abrevia mucho el cálculo reduciéndolo al de los coeficientes de $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$. En el ejemplo anterior se tendrá, pues, por longitud correcta:

$$L+\Delta L = 6^h 36^m 28^s.8 - 21.12\,\Delta\alpha + 0.83\,\Delta\delta$$

que quedaría completamente determinada conociendo las correcciones de las Efemérides. El día de la observación las Tablas inglesas y las americanas difieren 0ˢ.85 en la ascensión recta de la luna y 11″.7 en su declinación, y por eso á falta de mejores datos he empleado los promedios, que según toda probabilidad, le asignan una posición sensiblemente exacta. Suponiendo nulas las pequeñas correciones que aún necesiten estos promedios, se tendría $6^h 36^m 22^s.8$ por longitud, que sólo difiere cosa de 3ˢ.7 de la que obtuve para la misma estación por un gran número de observaciones diferentes, y calculadas por medio de las correspondientes de Greenwich y Cambridge.

297.—En los cálculos anteriores supuse intencionalmente un error de más de 1ᵐ en la estima, y esto fué con el objeto de hacer palpable su pequeña influencia, y con el de facilitar la interpolación de la declinación, haciendo que la hora $M+L=13^h 9^m$ de Greenwich tuviera un número de minutos entero y múltiplo de 3. Como se tiene necesidad de interpolar este elemento con diferencias segundas, es cómodo servirse de la pequeña Tabla que pongo á continuación, y que contiene los coeficientes de las diferencias primeras y segundas, obtenidos de este modo. Si en la fórmula de interpolación del número 158 se sustituyen los valores de A y B, resulta:

$$y = a + t\Delta_1 + \tfrac{1}{2}t(1-t)\Delta_2$$

y haciendo $t' = \frac{1}{2}t(1-t)$, se tiene:

$$y = a + t\Delta_1 - t'\Delta_2 \quad \text{.........................} \quad (3)$$

Según esto, cuando se desea interpolar un elemento para H horas y m minutos del primer meridiano, se tendrá para las Efemérides horarias:

$$t = \frac{m}{60} \qquad\qquad t' = \frac{m(60-m)}{7200},$$

que son los valores que he reducido á Tabla, calculándolos de 3ᵐ en 3ᵐ. Como t y t' son números pequeños, se hace con su ayuda la interpolación con mucha facilidad sin el uso de los logaritmos.

m	t	t'	m	t	t'	m	t	t'
0ᵐ	0.00	0.00	21ᵐ	0.35	0.11	42ᵐ	0.70	0.10
3	.05	.02	24	.40	.12	45	.75	.09
6	.10	.04	27	.45	.12	48	.80	.08
9	.15	.06	30	.50	.12	51	.85	.06
12	.20	.08	33	.55	.12	54	.90	.04
15	.25	.09	36	.60	.12	57	.95	.02
18	0.30	0.10	39	0.65	0.11	60	1.00	0.00

Recordemos que en la fórmula anterior, a representa la coordenada ó elemento que se busca, á la hora H, de modo que............ $y-a=t\Delta_1-t'\Delta_2$ es su corrección por el transcurso de los m minutos. Para aplicar la Tabla calculemos la declinación de la luna el 2 de Mayo de 1860 á la hora $H+m=13^h 9^m$ de Greenwich. Los Almanaques suministran, en término medio, los elementos siguientes:

A 12^h.........	$-8^\circ 49'\ 1''.0$		
		$-15'35''.0$	
„ 13	$a=-9\ \ 4\ 36\ .0$		$+3''.0$
		$\Delta_1=-15\ 32\ .0$	
„ 14	$-9\ 20\ \ 8\ .0$		$+3\ .3$
		$-15\ 28\ .7$	
„ 15	$-9\ 35\ 36\ .7$		

Para $m=9^m$ la Tabla da $t=0.15$ y $t'=0.06$, y puesto que se tiene $\Delta_1=-932''.0$ y $\Delta_2=+3''.1$, resultará:

$$
\begin{array}{rl}
t\Delta_1= & -2'19''.8 \\
t'\Delta_2= & -\quad 0\ .2 \\
\hline
\text{Correc.}= & -2'20''.0 \\
a= & -9^\circ 4\ 36\ .0 \\
\hline
d= & -9^\circ 6'56''.0
\end{array}
$$

Esta fué, en efecto, la declinación geocéntrica que después se redujo al extremo de la normal en nuestro ejemplo. Siempre puede tomarse por $M+L$ la hora más inmediata á alguno de los minutos enteros de la Tabla, adoptando por estima: $L=H+m-M$, cuyo error en ningún caso llegará á $1^m 30^s$.

CAPITULO XXV.

DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE ALTURAS IGUALES DE LA LUNA Y DE UNA ESTRELLA.

298.—El procedimiento del Capítulo anterior supone conocida con exactitud la indicación del instrumento angular, así como los datos necesarios para calcular la refracción atmosférica. En el que voy á exponer ahora se eliminan aquellos elementos por medio de la observación de una ó más estrellas, á la misma distancia zenital aparente que el borde visible de la luna. Esta circunstancia, que trae consigo la ventaja de no ser indispensables los instrumentos meteorológicos, y la de poderse operar con un clisímetro incorrecto, da á este método una gran superioridad respecto del otro, especialmente para el viajero.

La observación se reduce á tomar una serie de distancias zenitales de la luna y de la estrella, poniendo el instrumento angular en cualesquiera graduaciones, con tal de que sean las mismas para los dos astros, anotando las horas correspondientes. Operando con sextante es cómodo poner graduaciones equidistantes, de 10′ en 10′ ó de 20′ en 20′ por ejemplo; y si se opera con altazimut ú otro círculo cualquiera, pueden observarse los tránsitos de ambos astros por todos los hilos horizontales sin alterar la posición del telescopio, siendo sólo necesario mover el instrumento en azimut, después de observar el paso del primer astro, para dirigirlo al segundo. Conviene elegir una estrella cuya posición no difiera mucho de la de la luna, á fin de que sin que transcurra mucho tiempo, puedan ejecutarse ambas observaciones hacia la misma región del cielo y lo más cerca que sea posible del primer vertical.

En cuanto al cálculo es muy semejante al del Capítulo anterior, pues la única diferencia consiste en que se determina la distancia zenital aparente valiéndose de la observación de la estrella. En efecto, con la hora sideral de esta observación y la ascensión recta, se conoce el ángulo horario; y con este dato, la latitud del lugar y la declinación, puede calcularse la distancia zenital de la estrella por las fórmulas (3) del número 124. Llamando Z el resultado, tendremos que esta cantidad será equivalente á la que designé por $z'+r$ en el Capítulo precedente, puesto que ambas indican la distancia zenital, ya corregida por el efecto de la refracción. Entonces podrá procederse al cálculo de las demás ecuaciones (1) y (2) del mismo Capítulo, con la ventaja de no haber sido necesario conocer ni la indicación del instrumento ni el valor de la refracción. Las fórmulas siguientes, en las que he acentuado los elementos referentes á la posición de la estrella, representan, por consiguiente, el método de cálculo.

$$\tan. M = \frac{\tan. \delta'}{\cos. h'} \qquad \cos. Z = \frac{\operatorname{sen}. \delta'}{\operatorname{sen}. M} \cos. (M-\varphi)$$

$$\operatorname{sen}. p = \operatorname{sen}. \pi \operatorname{sen}. Z \qquad z = Z - p \pm s$$

$$a = \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} (\varphi - \delta) \qquad b = \tfrac{1}{2} z - \tfrac{1}{2} (\varphi - \delta)$$

$$\operatorname{sen}. \tfrac{1}{2} h = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. b}{\cos. \varphi \cos. \delta}} \qquad \alpha = T - h$$

debiéndose aplicar en seguida las ecuaciones (2) del Capítulo anterior.

Ejemplo.—El 11 de Mayo de 1867 hice en San Luis Potosí las siguientes observaciones sirviéndome de un cronómetro solar que atrasaba $0^s.1$ por hora.

Sextante.	*α Bootis* al E.	*α Leonis* al Oeste.	Limbo inf. de la luna al O.
111° 00′......	$8^h 33^m 52^s.5$......	$9^h 12^m 57^s.5$	
„ 30	„ 34 58 .5	„ 11 50 .7	
112 00	„ 36 1 .7	„ 10 44 .7......	$9^h 28^m 8^s.5$
„ 30	„ 37 6 .5	„ 9 39 .5	„ 26 57 .7
113 00	„ 38 13 .0	„ 8 34 .0	„ 25 47 .7
„ 30	„ 39 16 .5	„ 7 28 .0	„ 24 37 .0
114 00	„ 40 22 .0	„ 6 22 .5	„ 23 26 .7
„ 30	„ 41 25 .0	„ 5 15 .7	„ 22 16 .5
115 00	„ 42 31 .0	„ 4 10 .1	„ 21 5 .7
„ 30	„ 43 36 .0	„ 3 4 .7	„ 19 54 .5
116 00	„ 44 39 .5	„ 1 58 .0......	„ 18 43 .5
„ 30	„ 45 43 .5	9 00 52 .5	
117 00......	„ 46 49 .5......	8 59 46 .0	
Promedios.. 114° 00′......	$8^h 40^m 21^s.17$......	$9^h 6^m 21^s.87$......	$9^h 23^m 26^s.42$

Si se determina el estado del cronómetro por medio de las dos estrellas, aplicando el método del Capítulo VIII, se halla que á $8^h 53^m$ su corrección era $\Delta t = -9^m 56^s.23$, y siendo de $3^h 16^m 18^s.89$ el tiempo sideral á medio día de San Luis, resultan las siguientes horas exactas, que van acompañadas de las posiciones de las estrellas:

	Horas medias.	Horas siderales.	Ascensiones rectas.	Declinaciones.
α Bootis.....	$8^h 30^m 24^s.92$.....	$11^h 48^m 7.66$.....	$14^h 9^m 37^s.62$......	$+19° 52' 32''.3$
α Leonis....	8 56 25 .66.....	12 14 12.67.....	10 1 18 .17......	+12 36 47 .9
Luna	9 13 30 .24.....	12 31 20.06		

La altura de la ciudad sobre el nivel del mar es de 1880^m próximamente; la latitud del lugar en que se hicieron las observaciones, $\varphi = 22° 8' 58''.7$ y su longitud $6^h 43^m 48^s$; pero tomemos por estima $L = 6^h 43^m 29^s.76$, á fin de interpolar los datos para $15^h 57^m$ de Greenwich. El Almanaque Náutico Americano da para ese instante:...... $d = +7° 52' 31''.5$, $\pi_0 = 57' 30''.5$ y $s = 15' 42''.0$, de los que resultan: $\delta = +7° 52' 40''.1$ y $\pi = 57' 33''.1$. Como se han aplicado ya varias veces las fórmulas anteriores, no me parece necesario escribir todo el cálculo, y sólo pondré á la vista sus principales resultados.

Las primeras ecuaciones dan:

Por α *Bootis*........................ $Z = 33° \, 1' \, 40''.6$
Por α *Leonis*....................... $Z = 33 \;\; 1 \;\; 40 \; .0$

Adoptando $Z = 33° \, 1' \, 40''.3$, se halla por las demás:

$$z = 32° \, 14' \, 36''.3 \qquad h = +2^h \, 00^m \, 12^s.91 \qquad \alpha = 10^h \, 31^m \, 7^s.15$$

En las Efemérides horarias de la luna, á $\tau = 16^h$ de Greenwich se halla: $\alpha' = 10^h \, 31^m \, 13^s.34$ y $m = 128^s.85$, por lo que las fórmulas (2) del Capítulo precedente, dan: $\lambda = 6^h \, 43^m \, 36^s.81$, ó bien............ $\lambda - L = +7^s.05$.

Finalmente, á la misma hora de Greenwich se halla $n = -574''$, por lo cual, calculando sólo el coeficiente $R = \frac{dh}{d\delta}$, en atención á que los demás elementos se conocian con precisión, deberá obtenerse:

$$\Delta L = +8^s.49 - 33.66 \, \Delta\alpha - 1.29 \, \Delta\delta$$

y por consiguiente la expresión de la longitud correcta es:

$$L + \Delta L = 6^h \, 43^m \, 38^s.25 - 33.66 \, \Delta\alpha - 1.29 \, \Delta\delta$$

que ya no dependerá de otra cosa más que de las correcciones tabulares.

Cuando transcurra un tiempo considerable entre las observaciones de la estrella y de la luna, de modo que pueda temerse que hayan variado las condiciones atmosféricas, de las cuales depende el valor de la refracción, deben tomarse en cuenta las indicaciones del termómetro libre para calcular la diferencia de refracciones, como se ha dicho en el número 209. Tanto por esta causa de error, como por los que podría producir algún cambio en el estado de los niveles, el cual indicaría una leve variación en la distancia zenital de la luna, sería preciso hacer las pequeñas correcciones correspondientes por cualquiera de los métodos que voy á indicar. Siendo, como antes, Z la distancia zenital verdadera de la estrella; si se ha reconocido, en virtud de las causas antes mencionadas, que al observar la luna la distancia zenital era $Z + \Delta z$, podrá corregirse el ángulo horario h, ó

si se quiere, la ascensión recta obtenida α, restando con su signo á ésta ó sumando á aquél, el valor de x dado por la fórmula del número 273, á saber:

$$x = \frac{\text{sen.}\, z}{15 \cos.\, \varphi \cos.\, \delta \, \text{sen.}\, h} \, \Delta z = \frac{1}{15} P . \Delta z$$

para cuya aplicación se tendrán todos los elementos necesarios luego que se haya determinado el valor de h por medio de las ecuaciones que constan al principio de este Capítulo. Entonces se proseguirá el cálculo con $\alpha - x$ en lugar de α.

También puede tomarse en cuenta la corrección Δz calculando su coeficiente, que forma parte del valor de ΔL en las fórmulas (2) del Capítulo precedente, é introduciendo en seguida el valor numérico de Δz con el signo que le corresponda. Aplicando este método á nuestro ejemplo, se halla que el coeficiente de Δz es:

$$-\frac{FP}{1 + FR^{\nu}} = -2.60$$

Supongamos, para aplicarlo, que se creyese más conveniente adoptar por Z el valor que suministró la estrella α *Leonis*. Como el cálculo se hizo tomando el promedio de los dos valores de Z, si queremos emplear sólo el de α *Leonis* tendremos $\Delta z = -0''.3$. Entonces la corrección de la longitud por esta causa será: $2.6 \times 0.3 = +0^s.78$.

Si por el contrario, se prefiere corregir el valor de α, hallaremos:

$$\frac{1}{15} P = 0.077$$

y por consiguiente, $x = -0.077 \times 0.3 = -0^s.0.23$, de modo que la ascensión recta, en vez de ser la que consta arriba, sería:............. $\alpha - x = 10^h \, 31^m \, 7^s.173$. El cálculo hecho con esta cantidad originaría también un aumento de unos $0^s.78$ en la longitud; pero debe notarse que es mucho más fácil aplicar el otro método atendiendo á que en éste, por ser siempre muy pequeño el valor de x respecto de la corrección que se busca, sería necesario llevar la aproximación de α hasta la tercera decimal para obtener la misma precisión que en aquél. Por otra parte, como la diminución de α produce el mismo efecto que el aumento de la ascensión recta tabular a', podría multiplicarse x por el coeficiente de Δa. En nuestro ejemplo este coeficiente es de -33.66, y en consecuencia, resultaría

$$33.66 \times 0^s023 = +0^s.77,$$

que es sensiblemente el mismo valor hallado por los otros dos métodos.

Parece inútil advertir que sólo deben aplicarse estos medios de corrección cuando se descubra el error después de hecho todo ó la mayor parte del cálculo, porque sería más dilatado repetirlo; pero si se conocieren de antemano, es evidentemente preferible corregir directamente el valor de Z antes de proceder á la aplicación de las fórmulas.

CAPITULO XXVI.

DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE CULMINACIONES LUNARES.

299.—En los dos Capítulos que anteceden se ha visto que una vez hallada, por la observación, la ascensión recta de la luna, es muy fácil calcular la hora correspondiente del primer meridiano, y en consecuencia la longitud del lugar. El medio más directo de obtenerla consiste en observar el tránsito del astro por el meridiano, puesto que aquella coordenada no es otra cosa más que la hora sideral de la observación. Es cierto que no se puede observar el paso meridiano del centro de la luna, sino únicamente el de su limbo iluminado; pero de este dato se deduce fácilmente la ascensión recta de aquel punto, y entonces la misma hora sideral, convertida en hora media, podrá compararse con la del primer meridiano que corresponda á la ascensión recta obtenida por la observación directa.

Esta manera general de considerar la cuestión supone conocidas las correcciones del telescopio de tránsitos ó del altazimut que se emplee, así como la del cronómetro, y todas ellas con la mayor precisión; porque ya he tenido ocasión de indicar que en la determinación de la longitud por observaciones de la luna, los errores cometidos en la hora guardan con los del resultado la relación de 1 á 30 próximamente. Bajo este punto de vista, podría creerse que sólo en los Observatorios permanentes, en donde son grandes la perfección y la estabilidad de los instrumentos, sería posible obtener resultados exactos por medio de este procedimiento; pero veremos que no hay necesidad de ceñirse únicamente á la observación de la luna, sino que se puede combinar la de esta con la de una ó más estrellas inmediatas, á fin de eliminar casi del todo el efecto de los errores instrumentales. De este modo, en lugar de horas absolutas, entrarán como datos para la resolución, simples *diferencias* de tiempo, que generalmente pueden suponerse exentas de error.

En las Tablas que llevan por título "*Culminaciones de la Luna,*" los Almanaques Náuticos ingleses dan, para cada día del año, la ascensón recta del limbo visible en el momento de su tránsito por el meridiano de Greenwich. Los almanaques americanos indican la hora media del paso del centro de la luna por el meridiano de Washington; pero unos y otros dan las ascensiones rectas y las declinaciones de varias estrellas cercanas á la luna, y que por esta razón se llaman "*culminantes con la luna.*" Por lo general son cuatro las estrellas, dos de las cuales pasan por el meridiano antes que la luna, y dos después. Observados sus tránsitos con el de este astro, cada una de las observaciones dará lugar á una relación, como la que consta en el número 219, entre las correcciones instrumentales y la ascensión recta del objeto observado, de modo que para el borde visible de la luna, se tendrá:

$$a = t + \Delta t + Aa + Bb + Cc$$

y para cualquiera de las estrellas:

$$a' = t' + \Delta t' + A'a + B'b + C'c$$

La diferencia de ambas ecuaciones da:

$$a - a' = t - t' + (\Delta t - \Delta t') + (A - A')a + (B - B')b + (C - C')c$$

Esta expresión manifiesta que para obtener la diferencia exacta de ascensiones rectas, no es necesario conocer las correcciones absolutas del guarda-tiempo, sino únicamente su marcha en el pequeño intervalo cronométrico $t - t'$; y que aunque no se conozca el valor exacto de las constantes instrumentales a, b y c, el resultado no tendrá error de importancia, en atención á que sólo quedan multiplicadas por las diferencias de los coeficientes A, B y C, los cuales, dependiendo de la latitud y de las declinaciones de los astros, tienen casi el mismo valor para la luna que para las estrellas culminantes con ella, puesto que sus declinaciones son muy poco diferentes.

Si se adopta la forma de la expresión que consta en el número 227, siendo t la hora cronométrica ya corregida por el error de colimación, se tiene para la luna:

$$a = t + \Delta t + m + n \tan. \delta$$

y acentuando siempre los elementos referentes á las estrellas, se tendrá igualmente:

$$a' = t' + \Delta t' + m + n \tan. \delta'$$

de donde resulta:

$$a - a' = t - t' + (\Delta t - \Delta t') + n(\tan. \delta - \tan. \delta')$$

ecuación en la que también figura solamente la marcha del cronómetro, y en la que el valor de la constante instrumental n sólo multiplica á la diferencia ($\tan. \delta - \tan. \delta'$) cuya pequeñez se comprende desde luego por el hecho de diferir muy poco las declinaciones. Así, pues, siguiendo uno ú otro método de reducción, admitiremos que puede obtenerse con mucha exactitud la *diferencia* de ascensiones rectas; de manera que designándola por γ, y llamando a' la ascensión recta de cualquiera de las estrellas, la del borde visible de la luna será:

$$a = a' + \gamma \quad \text{..............................} \quad (1)$$

y debiendo suministrar cada una de las estrellas observadas el mismo resultado, se adoptará por a el promedio de todos los valores obtenidos, á fin de eliminar en lo posible los pequeños errores de observación.

300.—Antes de ocuparnos en el modo de hallar la ascensión recta del centro de la luna, indiquemos la manera de reducir al hilo medio sus tránsitos incompletos, cuando por cualquiera circunstancia no hayan podido observarse en todos los de la retícula. En tales casos es preciso tomar en cuenta dos correcciones: la una debida á la paralaje, y la otra al movimiento propio de la luna en ascensión recta. En el número 221 vimos que el tránsito incompleto de una estrella se reduce por la fórmula $I=\frac{i}{\cos.\delta}$, en la que i representa el promedio de los intervalos ecuatoriales de los hilos en que se haya observado el paso; pero tratándose de la luna, cuando su distancia, en tiempo, al hilo medio, que supondré en el plano del meridiano, es aparentemente I, su distancia real es $I-\beta$, representando β la paralaje de ascensión recta, cuyo efecto es aumentar el valor numérico del ángulo horario I. En este caso especial, atendida la pequeñez de I, la expresión de β [número 147, ecuación (11)] será:

$$\beta=\frac{\pi\cos.\varphi\,\text{sen.}\,1''}{\cos.\delta}\,I$$

por lo cual la verdadera distancia del limbo observado al meridiano es:

$$\left(1-\frac{\pi\cos.\varphi\,\text{sen.}\,1''}{\cos.\delta}\right)\frac{i}{\cos.\delta}$$

Esta expresión daría el tiempo que invertiría la luna en pasar del hilo lateral al medio, si no tuviera variación en ascensión recta; pero si representamos por μ esta variación en 1^s de tiempo sideral, es claro que mientras una estrella fija describe 1^s en el sentido del ecuador en virtud del movimiento diurno, la luna sólo describirá $1^s-\mu$; y como para igualdad de espacios los tiempos están en razón inversa de las velocidades, el tiempo que emplea la luna en llegar al hilo medio será:

$$I'=\left(\frac{1-\dfrac{\pi\cos.\varphi\,\text{sen.}\,1''}{\cos.\delta}}{1-\mu}\right)\frac{i}{\cos.\delta}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Los logaritmos de $1-\mu$ pueden tomarse de nuestra Tabla IX con el movimiento horario en ascensión recta por argumento.

El 30 de Noviembre de 1857, por ejemplo, sólo pude observar el limbo de la luna en el cuarto hilo, cuya distancia al hilo medio era $i=-16^s.125$. La latitud del lugar es $\varphi=19°\,26'$, y la paralaje, la

declinación y el movimiento horario eran respectivamente: $\pi=3687''$, $\delta=26°\,3'$ y $m=167^s.1$.

i..............	1.2075–	π............	3.5667
$\cos.\delta$.........	–9.9535	$\cos.\varphi$......	9.9745
$1-\mu$.........	–9.9794	sen. 1''......	4.6856
		$\cos.\delta$.......	–9.9535
	1.2746–........................		1.2746–
	$-18^s.82$		9.5479–
	$+\ 0\ .35$		
Reducción...	$I'=-18^s.47$		

La reducción sólo habría sido de $-17^s.95$ para una estrella de igual declinación. Cuando el eje del telescopio está sensiblemente desviado del plano del meridiano, sería preciso en todo rigor multiplicar también la corrección azimutal a, y en general, todas las correcciones instrumentales, por el mismo factor de $\frac{i}{\cos.\delta}$ en la fórmula anterior; pero como habitualmente son aquellas pequeñas, es suficientemente exacto aumentarlas en su cuarentava parte; porque calculando el coeficiente con valores medios de π, φ, δ y m da próximamente $1.025=1+\frac{1}{40}$.

En cuanto á los cálculos necesarios para prepararse á observar una culminación de la luna, se reducen á determinar la hora media del tránsito del centro del astro por el meridiano del lugar con ayuda de la estima. Los Almanaques ingleses y americanos dan en la cuarta página correspondiente á cada mes, la hora media del paso por el meridiano de Greenwich, aproximada hasta un décimo de minuto, que es lo bastante. Los Almanaques americanos traen también el mismo dato respecto del meridiano de Washington, acompañado de su diferencia por una hora de longitud. En uno y otro caso se calcula la hora del tránsito para cualquier otro lugar por una simple proporción, esto es: siendo L la estima contada desde el meridiano á que se refieran las Efemérides, H' la hora del paso en el mismo meridiano y v la variación ó diferencia horaria, se tendrá: $H=H'+Lv$. El valor de v debería interpolarse para $\frac{1}{2}L$, á fin de proceder con más exactitud; pero no es necesario hacerlo así cuando el cálculo sólo tiene por objeto prepararse á observar la culminación. La estima debe expresar horas y fracciones, puesto que v se refiere á la misma unidad. Si el Almanaque no contuviese el valor de v, podrá tomarse $v = \frac{d}{24}$, siendo d la diferencia de horas del tránsito de un día al siguiente. Entonces la hora que se busca será:

$$H = H' + \frac{L}{24} d$$

El día 1º de Enero de 1871, por ejemplo, pasó la luna por Greenwich á $8^h 13^m.20$; si se desea saber la hora de su culminación en México, tendremos $L = 6^h.608$ y $v = 1^m.8$; por consiguiente:

$$\begin{aligned} H' &= 8^h 13^m.20 \\ Lv &= \quad 11\ .89 \\ \hline H &= 8^h 25^m.09 \end{aligned}$$

Si hubiéramos tomado por H' la hora del paso en Washington, tendríamos $L = 1^h.47$, que es próximamente la longitud de México respecto de ese meridiano. El valor de H da el tránsito del centro de la luna, y para obtener el de sus bordes se añadirá $\mp 1^m$, que es, con poca diferencia, lo que invierte en pasar el semidiámetro, tomando el signo — para el limbo primero ú occidental y + para el segundo ú oriental. Las estrellas que hayan de observarse con la luna se preparan como dijimos en el número 230.

Los Almanaques americanos no traen en la actualidad las posiciones *aparentes* de las estrellas culminantes con la luna, sino sus posiciones *medias*, ó sea sin las correcciones por nutación, precesión y aberración; y aunque esto no impide que su preparación sea suficientemente exacta haciendo uso de las ascensiones rectas medias, por ser tan pequeñas esas correcciones, debe tenerse presente que para el cálculo de la longitud sí es preciso corregirlas, y á este fin el Almanaque suministra los datos y explicaciones necesarias. Otro tanto debe decirse de las estrellas que se tomen de los Catálogos, pues éstos sólo contienen las posiciones medias. Suele suceder, sin

embargo, que algunas de las 200 estrellas próximamente, cuyas posiciones aparentes da el Almanaque americano, están favorablemente situadas respecto de la luna, en cuyo caso pueden observarse como culminantes con este astro, evitándose las correcciones que he mencionado.

301.—Indiquemos ahora los principales métodos para calcular la longitud por medio de las culminaciones de la luna. La cantidad que he designado por α, á la vez que representa la ascensión recta del limbo visible de este astro, es también la hora sideral de la observación, la cual convertida en hora media designaré por M; y como las Efemérides horarias se refieren al centro del astro, tendremos que, para calcular la hora correspondiente M' del primer meridiano, será preciso deducir de la cantidad observada α, la ascensión recta del centro de la luna. Reflexionemos para esto que en el instante α ó M en que el borde se halla en el meridiano, la distancia angular de su centro á este plano es precisamente igual al semidiámetro geocéntrico s; y que el triángulo formado por el polo, el centro de la luna y el punto de su disco que está en contacto con el meridiano, siendo rectángulo en este último punto, da por valor del pequeño ángulo horario de la luna en segundos de tiempo:

$$h = \frac{s}{15 \cos. \delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

En consecuencia, la ascensión recta del centro en el instante M en que la del borde es α, tiene por expresión:

$$a = \alpha \pm h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

debiéndose tomar el signo superior durante la primera semilunación, quiere decir, desde la neomenia hasta el plenilunio, que es cuando el limbo iluminado es el primero que pasa por el meridiano. De los elementos s y δ, el primero varía con mucha lentitud, y como el segundo sólo se necesita aproximado hasta los minutos, ambos pueden tomarse con la estima y la hora M, sin necesidad de hacer la interpolación con diferencias segundas.

Siendo ahora a' la ascensión recta que más se acerca á la observada a, y τ la hora correspondiente del meridiano de las Efemérides, se tendrá:

$$L = \tau + \frac{3600}{m}(a - a') - M$$

fórmula en la cual m representa el movimiento horario de la luna en ascensión recta, calculado para el instante intermedio $\frac{1}{2}(\tau + M + L)$, entre τ y la hora aproximativa $M + L$ obtenida con ayuda de la estima. Para tomar en cuenta el error tabular, que no permite hallar desde luego el verdadero resultado, la expresión general de la longitud correcta es:

$$L + \Delta L = \tau + \frac{3600}{m}(a - a') - M - \frac{3600}{m}\Delta a \quad \text{..........} \quad (5)$$

en la cual Δa representa la corrección de las Tablas.

Ejemplo.—Tomemos una de las culminaciones que observé en Tacubaya en 1858. Las posiciones de las estrellas están tomadas del Almanaque inglés para el día de la observación, y la declinación aproximativa de la luna se calculó para la hora local del tránsito. El cronómetro solar tenía una marcha de $0^s.06$ por hora. Las horas de las observaciones están ya corregidas por el pequeño error de colimación, ó indican, por consiguiente, los instantes cronométricos de los tránsitos por el plano de colimación del telescopio.

Las cuatro estrellas que van acompañadas de un asterisco son las que señala ese día el Almanaque como culminantes con la luna; yo añadí otras y observé algunas más para determinar las correcciones instrumentales. Para obtener el valor de n (número 227) combiné η *Piscium* con α *Eridani*, y también α *Eridani* con α *Arietis*. De la primera combinación resulta $n = -0^s.07$ y de la segunda........... $n = -0^s.06$, por lo cual adopté $n = -0^s.065$. El término medio de todas las lecturas del nivel da $b = -0^s.08$, de lo que resulta $m = -0^s.062$; pero atendiendo á sus fuertes diferencias, me ha parecido más conveniente calcular, con cada una de sus indicaciones, el valor correspondiente de m é interpolar en seguida para cada estrella.

Tacubaya, Noviembre 19 de 1858.—Culminaciones.—Luz al Oeste.

ESTRELLAS.	CRONÓMETRO.	NIVEL.	ASCEN. RECTAS.	DECLINACIONES.
η *Piscium*............	$9^h32^m57^s.22$		$1^h23^m57^s.49$	$+14°37'$
α *Eridani*............	9 41 28 .44	$-0^s.23$	1 32 30 .25	-57 57
γ^1 *Arietis* (*)........	9 54 45 .02		1 45 48 .98	$+18$ 36
ι *Arietis* (*).........	9 58 35 .87	-0 .17	1 49 40 .33	$+17$ 7
α *Arietis*............	10 8 8 .88		1 59 14 .97	$+22$ 48
67 *Ceti*................	10 18 50 .01		2 9 58 .34	$-$ 7 4
ξ^2 *Ceti*................	10 29 31 .26	-0 .03	2 20 41 .13	$+$ 7 50
γ *Ceti*................	10 44 48 .51		2 36 1 .06	$+$ 2 39
Luna—1 *Limbo*..	10 54 19 .68			$+21$ 3
ε *Arietis* (*).........	10 59 55 .53	$+0$ .10	2 51 10 .60	$+20$ 46
ζ *Arietis* (*).........	11 15 31 .73		3 6 49 .38	$+20$ 31

Determinemos el valor de γ, y por consiguiente el (1) de a, valiéndonos de la primera estrella culminante con la luna.

γ^1 *Arietis.*		Luna.—1 *Limbo.*	
n...............	8.8129—	n...............	8.8129—
tan. δ...........	9.5270	tan. δ...........	9.5853
n tan. δ.........	8.3399—	n tan. δ.........	8.3982—
n tan. δ =	$-0^s.022$	n tan. δ =	$-0^s.025$
m =	-0 .165	m =	$+0$ .091
Cronómetro =	$9^h 54^m 45$ .02	Cronómetro =	$10^h54^m19^s.68$
	$9^h 54^m 44^s.83$		$10^h54^m19^s.75$

Estas son las horas cronométricas de los tránsitos por el meridiano, y como el cronómetro era solar, procederemos así:

$$\begin{array}{lr}
\gamma^1\ \textit{Arietis}\ldots\ldots\ldots\ldots & 9^h\,54^m\,44^s.83 \\
1\ \textit{Limbo}\ldots\ldots\ldots\ldots & 10\ \ 54\ \ 19\ .75 \\
\hline
\text{Intervalo cronométrico} = & 59^m\,34\ .92 \\
\text{Marcha} = & +\ \ 0\ .06 \\
\text{Aceleración} = & +\ \ 9\ .88 \\
\hline
\gamma = & +\ 59^m\,44^s.86 \\
\alpha' = & 1\ \ 45\ \ 48\ .98 \\
\hline
\alpha = & 2^h\,45^m\,33^s.84
\end{array}$$

Haciendo el mismo cálculo para todas las estrellas que siguen á ésta, se obtienen los resultados que pongo á continuación.

ESTRELLAS.	TRÁNSITOS.	m	γ	α
γ^1 *Arietis*.........	$9^h54^m44^s.83$	$-0^s.165$	$+59^m44^s.86$	$2^h45^m33^s.84$
ν *Arietis*.........	9 58 35 .69	−0 .157	+55 53 .26	„ „ 33 .59
α *Arietis*.........	10 8 8 .74	−0 .117	+46 18 .65	„ „ 33 .62
67 *Ceti*............	10 18 49 .96	−0 .057	+35 35 .65	„ „ 33 .99
ξ^2 *Ceti*...........	10 29 31 .24	−0 .009	+24 52 .61	„ „ 33 .74
γ *Ceti*...........	10 44 48 .56	+0 .055	+ 9 32 .76	„ „ 33 .82
ε *Arietis*.........	10 59 55 .63	+0 .129	− 5 36 .81	„ „ 33 .79
ζ *Arietis*.........	11 15 31 .85	+0 .139	−21 15 .60	„ „ 33 .78
Promedio..				$\alpha = 2^h45^m33^s.77$

Para obtener el valor medio de α es conveniente, en general, limitarse á las estrellas señaladas en el Almanaque; pero en este ejemplo, por la confianza que tenía en la observación y por la pequeñez de las correcciones instrumentales, me he valido también de otras que difieren notablemente de la luna en declinación.

Apliquemos ahora las fórmulas (3), (4) y (5), tomando todos los datos del Almanaque americano,[1] y comenzando por hallar la hora media equivalente á la sideral α.

1 En la página 209 y siguientes de mis *Nuevos Métodos Astronómicos* constan estas mismas observaciones calculadas con los datos del Almanaque inglés, los cuales difieren bastante de los del americano; pero los errores de éste eran ese día menores que los de aquél, y por eso me ha parecido mejor adoptar los datos americanos.

$$\begin{array}{rr}
\alpha = & 2^h\,45^m\,33^s.77 \\
\text{Asc. recta} = & 15\ \ 53\ \ 59\ .51 \\
\hline
 & 10^h\,51^m\,34^s.26 \\
\text{Reducción} = & -\ \ 1\ \ 46\ .74 \\
\hline
M = & 10^h\,49^m\,47^s.52
\end{array}$$

Con esta hora y la estima $6^h\,36^m\,40^s$ hallamos que la hora de Greenwich es $17^h.44$, y para este instante se encuentra $s = 16'\,22''.1$ y $\delta = 21°\,3'$.

$$\begin{array}{lr}
\frac{1}{15}\ldots\ldots & 8.82391 \\
s\ldots\ldots & 2.99216 \\
\cos.\delta\ldots\ldots & -9.97001 \\
\hline
h\ldots\ldots & 1.84606
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\alpha = & 2^h45^m33^s.77 \\
h = & +\ 1\ 10\ .16 \\
\hline
\alpha = & 2^h46^m43^s.93 \\
\alpha' = & 2\ 45\ 38\ .57 \\
\hline
\alpha-\alpha' = & 65^s.36 \\
\tau = 17^h & \\
m = & 147^s.66
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
3600\ldots\ldots & 3.5563025 \\
\alpha-\alpha'\ldots\ldots & 1.8153120+ \\
m\ldots\ldots & -2.1692629 \\
\hline
 & \left\{\begin{array}{r} 3.2023516+ \\ +26^m33^s.50 \end{array}\right. \\
\hline
M' = & 17^h\,26^m\,33^s.50 \\
M = & 10\ \ 49\ \ 47\ .52 \\
\hline
L = & 6^h\,36^m\,45^s.98
\end{array}$$

El movimiento horario se ha calculado para $17^h.22$ de Greenwich, que es el medio entre $\tau = 17^h.0$ y $M + L = 17^h.44$. Al efecto se tienen los datos:

$$\begin{array}{lll}
\text{A } 17^h\ldots\ldots\ \alpha' = 2^h\,45^m\,38^s.57 & & \\
 & \Delta_1 = 147^s.81 & \\
„\ 18\ldots\ldots\ „ = 2\ \ 48\ \ \ 6\ .38 & & \Delta_2 = +\,0^s.52 \\
 & 148\ .33 & \\
„\ 19\ldots\ldots\ „ = 2\ \ 50\ \ 34\ .71 & &
\end{array}$$

y aplicando la fórmula (6) del número 160, para lo cual se tiene...... $t = 0.22$, resulta:

$$\begin{array}{rr}
\Delta_1 = & 147^s.81 \\
(t-0.5)\times 0.52 = & -0\ .15 \\
\hline
m = & 147^s.66
\end{array}$$

La longitud que se deduce de esta observación será, pues:

$$L + \Delta L = 6^h\,36^m\,45^s.98 - 24.38\,\Delta\alpha$$

302.—La corrección tabular $\varDelta \alpha$ se determina, según he dicho varias veces, por observaciones meridianas hechas en un lugar cuya longitud se conozca exactamente; porque entonces en la correspondiente ecuación, semejante á la que precede, todo será conocido con excepción de $\varDelta \alpha$. Una vez determinada esta cantidad, pueden corregirse las Efemérides, ó bien introducirse como corrección en el valor de $L + \varDelta L$, puesto que se tiene calculado su coeficiente. También la observación correspondiente, comparada con la que se desea reducir, suministra la diferencia de longitudes de los dos lugares con la eliminación casi completa del error de las Tablas; y por consiguiente, si se conoce con precisión la longitud absoluta de una de las estaciones que se comparen, queda determinada la de la otra.

El mismo día que hice en Tacubaya las observaciones que sirven de ejemplo, se ejecutaron las siguientes en el Observatorio de Cambridge (Massachussets), las cuales tuvo la bondad de remitirme su Director Mr. W. C. Bond con otras muchas correspondientes á las que hice en aquella época.

Cambridge, Noviembre 19 de 1858.—Culminaciones.

ESTRELLAS.	Ascens. rectas observadas.	γ	α
γ^1 *Arietis*............	$1^h\ 45^m\ 48^s.95$	$+54^m 58^s.81$	$2^h\ 40^m\ 47^s.79$
ι *Arietis*............	1 49 40 .28	+51 7 .48	" " 47 .81
α *Arietis*............	1 59 15 .04	+41 32 .72	" " 47 .69
ξ^2 *Ceti*..............	2 20 41 .15	+20 6 .61	" " 47 .74
Luna.—I *Limbo*...	2 40 47 .76		
ε *Arietis*............	2 51 10 .60	−10 22 .84	" " 47 .76
ζ *Arietis*............	3 6 49 .46	−26 1 .70	" " 47 .68
Promedio..			$\alpha = 2^h\ 40^m\ 47^s.74$

La segunda columna contiene las horas del péndulo sideral del Observatorio, ya corregidas por todos los errores instrumentales; pero con el fin de adoptar las mismas ascensiones rectas de las estrellas con que reduje mis observaciones, formé la tercera columna de los

valores de γ, que no son más que las diferencias entre la hora del tránsito de la luna y los de las estrellas. Estas diferencias, sumadas con su signo á las ascensiones rectas tabulares de las estrellas, que constan en las observaciones de Tacubaya dan los valores de la ascensión recta del primer limbo, cuyo promedio, por otra parte, difiere apenas del que se obtuvo directamente.

A fin de determinar la corrección tabular y aplicarla á la longitud de Tacubaya, calculemos las observaciones de Cambridge por las mismas fórmulas (3), (4) y (5).

$$\begin{aligned} \alpha &= 2^h\ 40^m\ 47^s.74 \\ \text{Tiempo sideral} &= 15\ \ 53\ \ 41\ .08 \\ \hline & \ 10^h\ 47^m\ \ 6^s.66 \\ \text{Reduc.} &= -\ 1\ \ 46\ .01 \\ \hline M &= 10^h\ 45^m\ 20\ .65 \end{aligned}$$

Con esta hora media de aquel Observatorio y su longitud exacta, que es $L = 4^h 44^m 30^s.66$, se halla $M + L = 15^h.50$ de Greenwich, y para este instante el Almanaque americano da: $s = 16' 21''.3$ y $\delta = 20° 40'$. Calculando, además, el movimiento horario m para $15^h.25$, término medio entre $M + L$ y el valor de τ que se pondrá en seguida, tendremos:

$\frac{1}{15}$............	8.82391	$a =$	$2^h 40^m 47^s.74$	3600............	3.5563025
s............	2.99180	$h =$	$+1\ \ 9.92$	$a - a'$..........	2.8637391+
cos. δ........	−9.97111			m................	−2.1661043
		$a =$	$2^h 41^m 57^s.66$		
$h.\frac{1}{4}$........	1.84460	$a' =$	2 40 44 .59		{ 3.2539373+
		$a - a' =$	$+\ 73^s.07$		{ $+29^m 54^s.47$
		$\tau =$	15^h		
		$m =$	$146^s.59$	$M' =$	$15^h 29^m 54^s.47$
				$M =$	10 45 20 .65
				$L =$	$4^h 44^m 33^s.82$

Según esta observación, la longitud de Cambridge será:

$$L + \varDelta L = 4^h\ 44^m\ 33^s.82 - 24.56\ \varDelta \alpha$$

mas como su valor exacto es $4^h 44^m 30^s.66$, se tendrá sustituyéndolo en el primer miembro de esta ecuación:

$$3^s.16 = 24.56\,\varDelta\alpha$$

de donde resulta: $\varDelta\alpha = +0^s.13$. Introduciendo esta corrección en la longitud de Tacubaya, obtendremos:

$$L + \varDelta L = 6^h 36^m 45^s.98 - 24.38 \times 0^s13 = 6^h 36^m 42^s.81$$

Comparando directamente los dos meridianos, se halla:

Tacubaya...............	$6^h 36^m 45^s.98 - 24.38\,\varDelta\alpha$
Cambridge...............	$4\ 44\ 33.82 - 24.56\,\varDelta\alpha$
Tacubaya al Oeste de Cambridge............	$1^h 52^m 12^s.16 + 0.18\,\varDelta\alpha$
Cambridge al Oeste de Greenwich...........	$4\ 44\ 30.66$
Tacubaya al Oeste de Greenwich............	$6^h 36^m 42^s.82 + 0.18\,\varDelta\alpha$

Se ve que también de esta manera queda casi eliminado del todo el error tabular, pues aunque llegara á 1^s apenas tendría efecto en las decimales de la longitud.

Por la triangulación del Valle, la diferencia geodésica de meridianos entre Tacubaya y la Escuela de Ingenieros, que fué el punto á que referí la longitud de México, es de $+11^s.4$; y en consecuencia, resultaría de esta observación $6^h 36^m 31^s.4$ por longitud de la Escuela, que difiere menos de 3^s de la que obtuve en 1856 y 1857 por muchas observaciones comparadas con las correspondientes de Greenwich, que me remitió el Astrónomo Real de Inglaterra, Mr. G. B. Airy.

Las Efemérides americanas dan directamente la variación v de la ascensión recta en 1^m de tiempo medio, la cual puede emplearse en vez del movimiento horario m, de manera que el factor $\frac{3600}{m}$ de la fórmula (5) se cambia en $\frac{60}{v}$. Así lo haré al aplicar á nuestro ejemplo el otro método de cálculo que paso á exponer.

303.—En lugar de reducir las observaciones del borde de la luna á su centro por la adición de $\pm h$, puede hallarse la hora sideral del tránsito del mismo centro por el meridiano, sumando con su signo á la cantidad observada α, el tiempo que invierte el semidiámetro

en pasar por aquel plano. Como h representa el pequeño ángulo horario del centro del astro en el instante en que su limbo se halla en el meridiano, resultará evidentemente, según lo expuesto en el número 300, que en virtud de la variación de ascensión recta, el tiempo que emplea la luna en describir este ángulo, es:

$$\theta = \frac{h}{1-\mu} = \frac{s}{15\,(1-\mu)\cos.\delta} \quad \text{.................} \quad (6)$$

y así, designando por A la ascensión recta del centro de la luna en el momento del tránsito de este punto, se tiene:

$$A = \alpha \pm \theta \quad \text{.....................................} \quad (7)$$

Siendo ahora H la hora media correspondiente á la sideral A, se procede al cálculo de la ecuación (5) con A y H en lugar de α y M, absolutamente de la misma manera que en el primer método.

Apliquemos el mismo ejemplo. Para Tacubaya se encuentra con $M + L = 17^h.44$, el movimiento horario $m = 147^s.79$, que sirve de argumento para tomar de la Tabla IX el log. $(1-\mu)$.

h.........	1.84606	$\alpha =$	$2^h 45^m 33^s.77$	$A =$	$2^h 46^m 46^s.92$
$1-\mu$.....	−9.98185	$\theta =$	$+\ 1\ 13.15$	Tiempo sid. $=$	$15\ 53\ 59.51$
θ.........	1.86421	$A =$	$2^h 46^m 46^s.92$		$10^h 52^m 47^s.41$
		$A' =$	$2\ 45\ 38.57$	Reduc. $=$	$-\ 1\ 46.94$
	$73^s.15$				
		$A-A' =$	$+\ 68^s.35$	$H =$	$10^h 51^m 00^s.47$
		$\tau = 17^h$			
		$v =$	2^s4609	60...............	1.7781513
				$A - A'$........	1.8347385+
		$H' =$	$17^h 27^m 46^s.46$	v...............	−0.3910940
		$H =$	$10\ 51\ 00.47$		3.2217958+
		$L =$	$6^h 36^m 45^s.99$		$+27^m 46^s.46$

$$L + \varDelta L = 6^h 36^m 45^s.99 - 24.38\,\varDelta\alpha$$

El valor de v se ha interpolado para $17^h.23$ de Greenwich, término medio entre $H + L = 17^h.46$ y $\tau = 17^h$. Hé aquí los elementos para la interpolación:

A 16^h	$2^s.4501$
" 17	2 .4589
" 18	2 .4676
" 19	2 .4764

y siendo sensiblemente nulas las diferencias segundas, ó constantes las primeras, se tiene: $v = 2^s.4589 + 0.0087 \times 0.23 = 2^s.4609$.

Hagamos los mismos cálculos para Cambridge, tomando el argumento m de log. $(1-\mu)$ para $M + L = 15^h.50$ próximamente, con lo que se halla $m = 146^s.72$.

h........	1.84460	$\alpha =$	$2^h\,40^m\,47^s.74$	$A =$	$2^h\,42^m\,00^s.62$
$1-\mu$.....	-9.98198	$\theta =$	$+\;1\;12.88$	Tiempo sid. $=$	15 53 41.08
θ........	1.86262	$A =$	$2^h\,42^m\,00^s.62$		$10^h\,48^m\,19^s.54$
		$A' =$	2 43 11.31	Reduc. $=$	-1 46.21
	$72^s.88$				
		$A-A' =$	$-70^s.69$	$H =$	$10^h\,46^m\,33^s.33$
		$\tau =$	16^h		
		$v =$	$2^s.4475$	60..............	1.7781513
				$A-A'$........	1.8493580$-$
		$H' =$	$15^h\,31^m\;7^s.05$	v..............	-0.3887227
		$H =$	10 46 33.33		3.2387866$-$
			$4^h\,44^m\,33^s.72$		$-28^m\,52^s.95$

$$L + \Delta L = 4^h\,44^m\,33^s.72 - 24.51\,\Delta\alpha$$

En este caso se ha calculado v para $15^h.76$ de Greenwich, que es el instante medio entre $H + L = 15^h.52$ y $\tau = 16^h$, pues á esta última hora es á la que la ascensión recta de la luna se aproxima más á la observada A en Cambridge.

Haciendo la comparación y desechando el pequeño residuo que proviene de la corrección tabular, se tiene:

Tacubaya....................	$6^h\,36^m\,45^s.99 - 24.38\,\Delta\alpha$
Cambridge..................	$4\;44\;33.72 - 24.51\,\Delta\alpha$
Tacubaya al Oeste de Cambridge............	$1^h\,52^m\,12^s.27$
Cambridge al Oeste de Greenwich...........	4 44 30.66
Tacubaya al Oeste de Greenwich............	$6^h\,36^m\,42^s.93$

Si en cada caso fuera necesario calcular directamente el valor de θ, este método de reducción presentaría un trabajo adicional respecto del primero, cual es el de tomar el movimiento horario m que sirve de argumento para la Tabla IX; pero este aumento en manera alguna es necesario. El Almanaque Náutico inglés, con el título de *Tiempo sideral del paso del semidiámetro*, da directamente los valores de θ para los instantes de los tránsitos superior é inferior de la luna por el meridiano de Greenwich, esto es: para cada 12^h de longitud; y por consiguiente, puede interpolarse por las fórmulas (3) del número 158, en la que será $t = \frac{L}{24}$, expresando L la estima en horas. El Almanaque americano suministra actualmente el mismo dato para cada tránsito superior por el meridiano de Washington, ó sea para intervalos de 24^h de longitud. Al hacer, pues, la interpolación con estas Efemérides, deberá tomarse $t = \frac{L}{24}$, contando la estima L respecto de Washington. Así en nuestro ejemplo, siendo próximamente $L = 1^h.47$ la longitud de Tacubaya al O. de este meridiano, se tendrá $t = 0.06$. Interpolemos con los siguientes datos:

1858.—Nov. 18........ $\theta = 69^s.52$		
" 19........ " $= 72.95$	$3^s.43$	$-0^s.09$
" 20........ " $= 76.29$	$\Delta_1 = 3.34$	-1.10
" 21........ " $= 78.53$	2.24	

Con $\Delta_1 = 3^s.34$ y $\Delta_2 = -0^s.60$, se obtiene $\theta = 73^s.17$ para el momento del paso por el meridiano de Tacubaya, que es sensiblemente el mismo valor hallado por la fórmula (6).

304.—En las páginas 213 y 218 de los *Nuevos Métodos Astronómicos* pueden verse otros procedimientos de cálculo para hallar la longitud por medio de las culminaciones de la luna, que como los precedentes, son aplicables sea cual fuese el valor de esta coordenada. Voy ahora á ocuparme de los más sencillos que pueden aplicarse siempre que se comparen las observaciones ejecutadas en dos meridianos cuya diferencia de longitud no exceda de 2^h. El Almanaque inglés, bajo el título de *Variación de la ascensión recta por una hora de longitud*, da el incremento que sufre la ascensión recta del borde visible de la luna, en el tiempo que transcurre entre sus pasos por dos meridianos distantes 15° ó 1^h. Este dato, que es variable, está calculado para los instantes de sus tránsitos superior é inferior por el meridiano de Greenwich, y por interpolación puede obtenerse para cualquiera longitud contada desde aquel. El uso á que está destinado es muy importante para reducir las observaciones practicadas en dos lugares no muy distantes en longitud, en atención á que todo el cálculo se reduce á una sencilla proporción.

Sean L y L' las longitudes de dos lugares en que se hayan observado las ascensiones rectas α y α' del borde de la luna, y V la variación por una hora de longitud, interpolada para la longitud media $\frac{1}{2}(L+L')$. Entonces la diferencia de meridianos $\lambda = L - L'$ se calculará por la fórmula:

$$\lambda = \frac{3600}{V}(\alpha - \alpha') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

y una vez determinado el valor de λ, se tiene $L = L' + \lambda$, de modo que conociendo exactamente una de las longitudes se hallará fácilmente la otra.

Apliquemos este método á las observaciones de Tacubaya y Cambridge, tomando del Almanaque inglés los datos siguientes:

Nov. 18. (Paso inf.).........	$V = 142^s.68$		
„ 19. (Paso sup.).........	„ $= 149.60$	$6^s.92$	$+0^s.24$
„ 19. (Paso inf.).........	„ $= 156.76$	$\Delta_1 = 7.16$	-0.21
„ 20. (Paso sup.).........	„ $= 163.71$	6.95	

Como la longitud media es en este caso $\frac{1}{2}(L+L') = 5^h.6767$ y el intervalo de las Tablas es de 12^h, tendremos $t = \frac{5.6767}{12} = 0.473$. De estos elementos resulta $V = 152^s.98$, y el cálculo de λ será, en consecuencia:

$$\begin{array}{rll}
\alpha = & 2^h\,45^m\,33^s.77 & \\
\alpha' = & 2\ \ 40\ \ 47.74 & \\
\hline
 & & 3600\ldots\ldots\ \ 3.5563025 \\
\alpha - \alpha' = & +4^m\,46^s.03\ldots\ldots & \quad\quad\quad\ \ 2.4564116+ \\
V = & 152.98\ldots\ldots & \quad\quad\ -2.1846347 \\
\hline
\lambda = & +1^h\,52^m\,11^s.00 & \lambda\ldots\ldots\ \ 3.8280794+ \\
L' = & 4\ \ 44\ \ 30.66 & \\
\hline
L = & 6^h\,36^m\,41^s.66 &
\end{array}$$

Dijimos que este procedimiento tan sencillo se aplica, sin error, siempre que λ no exceda de 2^h, y en la República puede ser de la mayor utilidad para reducir las observaciones que se practiquen en nuestras ciudades, comparándolas con las de su capital ó con las de los Observatorios de los Estados Unidos.

305.—Cuando se usa el Almanaque americano no puede aplicarse el procedimiento anterior, porque no da directamente los valores de V; pero con un ligero aumento de trabajo se puede aplicar el que sigue, muy semejante á aquél. El Almanaque americano suministra los valores de θ, que interpolados para las dos longitudes L y L', sirven para corregir las ascensiones rectas α y α' del borde y obtener las del centro A y A', como en el método del número 303. Si llamamos además m la variación de la ascensión recta en una hora de tiempo medio, ó bien en $3609^s.86$ de tiempo sideral, y calculada para el instante intermedio $\frac{1}{2}(H + L + H' + L')$, tendremos que la duración sideral S transcurrida entre las dos culminaciones, es:

$$S = \frac{3609.86}{m}(A - A')$$

Determinemos otro valor de S en función de λ por la siguiente consideración: Si la luna no tuviera movimiento propio en ascensión recta, el tiempo sideral físicamente transcurrido entre sus tránsitos por los dos meridianos cuyas longitudes son L y L', sería precisamente λ, pues este es el que invierte cualquiera estrella fija; pero creciendo la ascensión recta de la luna la cantidad $A - A'$ entre ambos tránsitos, pasará por el segundo meridiano $A - A'$ segundos después de la hora en que debería culminar sin la existencia de su movimiento propio, que la dirige continuamente hacia el Este. En consecuencia, la duración físicamente transcurrida es en tiempo sideral:

$$S = \lambda + (A - A')$$

Igualando este valor con el precedente, se obtiene con facilidad:

$$\lambda = \frac{3609.86 - m}{m}(A - A') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Sirviéndose de la variación v por 1^m de tiempo medio, ó por...... $60^s.1643$ de tiempo sideral, hallaríamos en virtud de consideraciones semejantes á las anteriores:

$$\lambda = \frac{60.1643 - v}{v}(A - A') \text{ .... } (10)$$

Cualquiera de estas nuevas fórmulas se emplea casi con igual ventaja. Apliquemos la última á nuestro ejemplo, tomando los valores de A y A' del número 303. Calculando el de v para $16^h.49$, promedio entre $H + L = 17^h.46$ y $H' + L' = 15^h.52$, se encuentra:...... $v = 2^s.4544$.

$$\begin{array}{rl} A = & 2^h\,46^m\,46^s.92 \\ A' = & 2\;\;42\;\;00\;.62 \\ \hline A - A' = & +\;4^m\,46^s.30 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} 57^s.7099\text{.........} & 1.7612503 \\ A - A'\text{..........} & 2.4568213+ \\ v\text{.................} & -0.3899453 \\ \hline \lambda\text{...........} & 3.8281263+ \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \lambda = & +\,1^h\,52^m\,11^s.72 \\ L' = & 4\;\;44\;\;30\;.66 \\ \hline L = & 6^h\,36^m\,42^s.38 \end{array}$$

También este método sólo debe aplicarse cuando sea poco considerable la diferencia de meridianos λ, condición en que se encuentra la mayor parte de nuestro país respecto de las ciudades americanas en que se hacen observaciones con regularidad.

El método de culminaciones lunares es uno de los más exactos para la determinación de la longitud, y debe notarse que es casi independiente de la estima, puesto que esta cantidad sólo se emplea para tomar de las Efemérides algunos elementos que varían muy poco, ú otros cuyo valor no se necesita con mucha precisión, como es la declinación de la luna. Algunos astrónomos creen que los telescopios de pequeñas dimensiones producen un aumento anormal del semidiámetro de aquel astro, lo cual originaría cierto error en las longitudes obtenidas por la observación de un solo limbo; pero el modo de eliminarlo consiste en observar tanto antes como después del plenilunio, porque influyendo el error supuesto de una manera igual y contraria en las longitudes que se obtengan por los dos bordes, el

promedio debe resultar independiente de él, sobre todo si se combina el mismo número de unas y de otras. Un centenar de culminaciones de los dos limbos de la luna, reducidas con las correspondientes de algún Observatorio de posición bien conocida, me parece suficiente para determinar la longitud de una estación con todo el grado de exactitud de que es susceptible este método. Muchas veces no pueden conseguirse observaciones correspondientes á todas las que se hayan practicado en el lugar cuya longitud se trata de determinar; pero basta que se consigan algunas ejecutadas durante las mismas lunaciones, para que se puedan corregir las Efemérides, aplicando un sencillo procedimiento debido al Profesor americano M. Peirce, que puede verse en la página 225 de mis *Nuevos Métodos Astronómicos.*

Para terminar lo relativo á observaciones de la luna, diré que los eclipses del sol y las ocultaciones de estrellas proporcionan acaso los mejores medios de determinar una longitud absoluta; pero por desgracia la teoría general de los eclipses es demasiado vasta para que pudiera adaptarse al plan de mi libro. El lector que lo desee debe consultar los tratados especiales de Astronomía práctica, como el de Chauvenet y el de Loomis, ó los escritos de Challis y Woolhouse, inserto el primero en el Almanaque inglés de 1854, y traducido el segundo por el astrónomo mexicano D. Francisco Jiménez. En los dos Capítulos que siguen expondré los procedimientos, tan exactos como sencillos, que se aplican para medir la diferencia de longitudes entre lugares no muy distantes. Ambos están tomados casi textualmente de los *Nuevos Métodos* antes citados, en los que también puede verse la parte práctica de la predicción de ocultaciones y de la determinación de la longitud por la observación de estos fenómenos.

CAPITULO XXVII.

DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE SEÑALES INSTANTÁNEAS.

306. Puesto que la diferencia de meridianos de los lugares no es otra cosa más que la diferencia de horas, ya sean siderales ó medias, que se cuenta en ellos en un mismo instante físico, la observación de cualquier fenómeno instantáneo permitirá comparar las horas locales de su producción, y por consiguiente, dará á conocer la diferencia de longitudes de los puntos en que se hayan hecho las observaciones.

Los fenómenos instantáneos que se observan con este fin son celestes ó terrestres. Entre los primeros pueden contarse los eclipses de la luna y de los satélites de Júpiter, y entre los segundos las señales luminosas y las telegráficas. Los eclipses de la luna, además de ser muy poco frecuentes, no proporcionan la exactitud necesaria á causa de la incertidumbre que ocasiona el efecto de la penumbra, de manera que hoy casi no se hace uso de este método, si no es para obtener simplemente una ruda aproximación. Los eclipses de los satélites de Júpiter, producidos por la sombra del planeta, sus ocultaciones detrás del disco y sus tránsitos sobre el mismo, se verifican con bastante frecuencia y sirven algo mejor para la determinación de la longitud, sobre todo cuando se comparan las observaciones directas á fin de eliminar los errores tabulares y los de apreciación de los instantes en que se verifican aquellos fenómenos. En los Alma-

naques hallará el lector amplias explicaciones respecto de la *configuración* ó posición relativa del planeta y sus satélites, así como las horas exactas de los eclipses y las aproximativas de los tránsitos y ocultaciones, para prepararse á la observación. Siendo H' la hora del primer meridiano, la local será $H' - L$ para la estación cuya estima sea L, contada desde el mismo meridiano.

Una vez hecha la observación á la hora local H, la longitud será $L = H' - H$. Debe tenerse presente, sin embargo, que el resultado depende mucho de la potencia del telescopio con que se practique la observación, porque como al eclipsarse un satélite, va desapareciendo gradualmente, permanecerá visible por un tiempo tanto más largo cuanto mayor sea el poder del telescopio. En la reaparición de un satélite eclipsado, sucederá, por el contrario, que se vea su salida de la sombra algún tiempo antes con un telescopio poderoso que con otro débil. Para eliminar esta causa de error lo que conviene hacer es tomar el término medio de los resultados que den la *inmersión*, ó sea el principio del eclipse, y la *emersión* ó su fin; porque los efectos del error de apreciación serán contrarios y casi iguales numéricamente. Si dos astrónomos desde sus respectivas estaciones observan estos fenómenos con telescopios del mismo poder y en condiciones atmosféricas semejantes, obtendrán generalmente con bastante precisión su diferencia de meridianos. El primer satélite es el que merece la preferencia, porque sus eclipses, á la vez que más frecuentes, son también más instantáneos. Respecto de la observación, como no difiere esencialmente de la de señales terrestres, que se prestan á mayor exactitud, me detendré en indicar la manera de practicar la observación de éstas.

307.—Las señales luminosas se hacen en uno ó más lugares intermedios, y comunmente elevados, entre los puntos cuya diferencia de longitud se desea obtener. Consisten en la explosión de una cantidad de pólvora proporcionada á las distancias, ó bien en la producción y desaparición alternativa de una luz cualquiera, con tal que sea suficientemente intensa y rápida en aparecer y desaparecer. Según las experiencias del astrónomo mexicano D. Francisco Jiménez, son bastantes 60 gramos de pólvora para percibir á la simple vista su explosión, en la transparente atmósfera de la mesa central, á una distancia de 48 kilómetros.

El modo de hacer la observación es muy sencillo. La persona encargada de hacer las señales las produce á intervalos regulares, por ejemplo de cinco en cinco minutos, y los astrónomos estacionados en los puntos que han de compararse, anotan en sus cronómetros, arreglados de antemano á sus respectivos meridianos, los instantes en que se verifica cada señal. La comparación de las horas anotadas, corregidas por los errores de los cronómetros y expresadas en la misma especie de tiempo, suministra tantos resultados independientes como señales se hayan observado en ambos puntos. Siendo t y t' las horas cronométricas en que se vió una de las señales desde las estaciones occidental y oriental respectivamente, Δt y $\Delta t'$ las correcciones de los cronómetros, y puesto que en la estación oriental debe contarse la hora más avanzada, se tiene desde luego:

$$\lambda = (t' + \Delta t') - (t + \Delta t) \text{ .... } (1)$$

y el promedio de los diversos valores de λ se adopta como diferencia definitiva de meridianos.

Tal es el método en toda su sencillez; pero para alcanzar toda la precisión de que es susceptible es preciso tomar ciertas precauciones. En primer lugar, la determinación previa del error y marcha de cada cronómetro debe hacerse con la mayor exactitud, aplicando los mejores procedimientos y eliminando toda causa de error constante. Así, por ejemplo, si se determina la hora por pasos meridianos, debe medirse cuidadosamente el error de colimación, ó mejor aún, invertir frecuentemente el telescopio observando en cada posición varias estrellas fundamentales. Siempre que sea posible se valdrán ambos observadores de las mismas estrellas para determinar las correcciones instrumentales, y harán con la frecuencia necesaria las lecturas del nivel para conocer con exactitud la inclinación del eje.

308.—Además de estos procedimientos generales para la buena determinación de las horas locales, los dos astrónomos deben medir su error relativo ó *ecuación personal*, como se denomina generalmente. Sea á consecuencia del estado nervioso especial de cada individuo,

sea por el hábito que cada cual contrae de hacer sus apreciaciones de una manera determinada, ó lo que me parece más probable, por la dificultad de concentrar la atención simultáneamente en los sentidos de la vista y del oído, es un hecho casi universal que dos ó más personas que observan un mismo fenómeno y que anotan el instante de su producción, hallan diferencias que verdaderamente sorprenden. Aun entre observadores que tienen mucha práctica, llega á veces la diferencia hasta 1^s y más, á pesar de que cada uno cree haber anotado la hora con aproximación de $0^s.1$.

Se comprende desde luego que la ecuación personal no puede dejar de tomarse en cuenta siempre que se trate de comparar la hora determinada por dos observadores diferentes. La manera de conocer su magnitud es bien sencilla. Admitamos en cada observador cierto error fisiológico particular, sea cual fuere la causa que se le atribuya, que le hace notar la percepción de un fenómeno en un instante diverso de aquel en que tuvo realmente lugar. Siendo t la hora que anota, τ el instante incógnito en que se verificó el fenómeno, y x el error fisiológico, se tiene: $\tau = t + x$. Para otro observador será...... $\tau = t' + x'$, y designando por ϵ la ecuación personal, ó la diferencia de errores fisiológicos de los dos observadores, obtendremos:

$$\epsilon + t' - t = 0$$

de donde resulta:

$$\epsilon = t - t' \text{ .... } (2)$$

Esta fórmula manifiesta que para hallar el error relativo debe tomarse la diferencia de las horas anotadas por dos observadores al percibir un mismo fenómeno. Por lo general, éste consiste en el tránsito de una estrella por el hilo medio de la retícula de un telescopio meridiano, para lo cual cada uno de los observadores anota el paso por uno ó varios de los hilos laterales, y reduce su observación al hilo medio con ayuda de los intervalos ecuatoriales según la regla del número 221. Los dos resultados t y t' suministran el valor de ϵ. Este procedimiento seguimos el Sr. Barroso, que era mi ayudante en el Observatorio que existió en Chapultepec, y yo. La retícula del telescopio tenía siete hilos; el Sr. Barroso observaba el paso en los tres primeros y yo en los tres últimos, anotando cada uno las horas en el péndulo sideral del Observatorio. Después con la estrella que seguía, yo observaba en los primeros hilos y el Sr. Barroso en los últimos. El promedio de varias estrellas observadas con el mismo objeto, dió: $e = D - B = -0^s.13$, por lo cual aparece que el Sr. Barroso observaba los tránsitos $0^s.13$ después que yo, y por consiguiente, para comparar sus determinaciones del tiempo con las mías, será preciso restarles esa cantidad.

La ecuación personal de dos observadores no permanece siempre constante, sino que suele sufrir notables variaciones con el transcurso del tiempo, lo que sin duda depende de cierta modificación gradual en el modo de observar de cada uno; y en efecto, la ecuación es por lo común tanto más variable, aun en intervalos cortos, cuanto menor es la práctica de los observadores.

309.—Para medir la diferencia de longitud por el método de señales, los dos astrónomos deben determinar su error relativo antes y después de la observación de aquéllas, adoptando el término medio de los resultados para reducir la horas anotadas por el uno á lo que serían anotadas por el otro. Es sin duda más seguro, siguiendo la regla general de variar las circunstancias de las observaciones á fin de que ciertos errores constantes obren en diverso sentido, que después de observar algunas noches cambien los astrónomos de estaciones, pasando á la oriental el que ocupaba la occidental y vice versa. De este modo la ecuación personal producirá efectos contrarios, suministrando un promedio independiente de ella.

Como ejemplo de la determinación de la diferencia de meridianos por la observación de señales luminosas, tomamos de una Memoria del Sr. Jiménez las observaciones hechas el 9 de Abril de 1865 con el objeto de medir la longitud de San Juan Teotihuacán, respecto de la Escuela de Ingenieros de México.[1] El Sr. Jiménez observaba en la Escuela y el Sr. Almaraz en Teotihuacán. El cronómetro del Sr. Jiménez á las $8^h 00^m$ P. M. tenía un atraso de $9^m 51^s.17$, aumen-

[1] Reproduzco esta parte del trabajo del Sr. Jiménez con tanto más agrado, cuanto que me proporciona la ocasión de corregir algunas equivocaciones con que resultó en la página 234 de los *Nuevos Métodos*.

tándose $3^s.345$ en 24^h, ó bien $+0^s.139$ por hora. El del Sr. Almaraz á las $8^h 40^m$ (tiempo de Teotihuacán) tenía un adelanto de........ $19^m 17^s.19$ y una marcha horaria de $-1^s.892$. Las señales de esa noche, ejecutadas en el cerro de Chiconautla, se observaron á las siguientes horas cronométricas:

	EN MÉXICO	EN TEOTIHUACÁN.
1ª señal	$8^h\ 3^m\ 10^s.25$	$8^h\ 33^m\ 22^s.50$
2ª "	" 9 9.00	" 39 21.50
3ª "	" 12 11.00	" 42 23.50
4ª "	" 15 7.75	" 45 20.50
5ª "	" 18 6.50	" 48 18.50

En la determinación de las correcciones de los cronómetros se tomó ya en cuenta la ecuación personal, que era de $0^s.41$ aditiva á los tránsitos observados por el Sr. Almaraz. Hagamos el cálculo de la diferencia de longitud con los datos relativos á la primera señal.

EN MÉXICO.	EN TEOTIHUACÁN.
$t = 8^h\ 3^m\ 10^s.25$	$t' = 8^h\ 33^m\ 32^s.50$
$\Delta t = +\ 9\ 51.18$	$\Delta t' = -19\ 16.98$
Hora media $= 8^h\ 13^m\ 1^s.43$	Hora media $= 8^h\ 14^m\ 5^s.52$

Hora media de México............ $= 8^h\ 13^m\ 1^s.43$
" de Teotihuacán...... $= 8\ 14\ 5.52$

$\lambda = 0^h\ 1^m\ 4^s.09$

Haciendo los mismos cálculos para las demás señales, se hallan los resultados siguientes:

Señales.	HORAS MEDIAS DE México.	Teotihuacán.	λ
1ª	$8^h\ 13^m\ 1^s.13$	$8^h\ 14^m\ 5^s.52$	$1^m\ 4^s.09$
2ª	" 19 00.19	" 20 4.33	" 4.14
3ª	" 22 2.20	" 23 6.23	" 4.03
4ª	" 24 58.96	" 26 3.14	" 4.18
5ª	" 27 57.71	" 29 1.05	" 3.34

El término medio que calculó el Sr. Jiménez por 24 señales, observadas en cinco noches diferentes, aunque sin cambiar de estaciones, es $\lambda = 1^m 4^s.46$. En consecuencia, la longitud absoluta de Teotihuacán será:

Longitud de la Escuela al O. de Greenwich...............	$6^h 36^m 28^s.6$
" de Teotihuacán al E. de la Escuela.............	$-\ 1\ \ 4.46$
" de Teotihuacán al O. de Greenwich............	$6^h 35^m 24^s.14$

310.—Cuando los lugares que se comparan están de tal manera distantes que las señales luminosas, hechas en un solo punto, no puedan verse desde ellos á la vez, se eligen una ó más estaciones intermedias, en cada una de las cuales se establece un observador, y la operación se hace por partes. En rigor, las personas que ocupan las estaciones intermedias, no tienen necesidad de conocer con precisión las correcciones absolutas de sus cronómetros, sino solamente su marcha en un corto intervalo de tiempo.

$$\begin{array}{ccccc} A & \quad m \quad & & \quad n \quad & B \\ & & E & & \end{array}$$

Sean, en efecto, A y B las estaciones extremas y E una de las intermedias. Los observadores que se hallen en A y E, al ver la señal que se produce en m, anotan las horas t y τ respectivamente, por lo que su diferencia de meridianos es:

$$\lambda_1 = (\tau + \Delta\tau) - (t + \Delta t)$$

Algunos minutos después se produce la señal en n, que anotan los observadores de E y B á las horas τ' y t' respectivamente. Su diferencia de longitud será, pues:

$$\lambda_2 = (t' + \Delta t') - (\tau' + \Delta\tau')$$

La suma de este valor y del precedente dará por diferencia de meridianos entre A y B:

$$\lambda = (t' + \Delta t') - (t + \Delta t) + \theta \text{.......................} (3)$$

representando θ el intervalo $(\tau - \tau') + (\Delta\tau - \Delta\tau')$, que no es otra cosa más que la diferencia de horas anotadas en la estación intermedia, corregida por la marcha del cronómetro.

311.—La transmisión de señales por medio del telégrafo electro-magnético proporciona el método más sencillo y exacto de comparar las horas locales de dos ó más estaciones. La idea de aplicar el telégrafo á la determinación de las diferencias de longitud parece que fué sugerida por el profesor americano Morse desde 1839; pero la primera aplicación práctica de este método fué ejecutada por el Capitán Wilkes entre Washington y Baltimore en Junio de 1844. Desde esa fecha los numerosos experimentos hechos en América y Europa han dado resultados de una precisión muy superior á la que se obtiene por los procedimientos directamente astronómicos. En la República de México el Sr. Balbontín y yo hicimos la primera operación de este género en 1855 para determinar la longitud de Querétaro respecto de la Capital. En Marzo de 1866 el profesor Jiménez, auxiliado por los Sres. Ponce de León y Almaraz, midió de este modo la longitud de Cuernavaca. Por medio de 120 señales cambiadas en 6 noches, halló que esta ciudad está á $0^m.25^s.30$ al Oeste de México, y en consecuencia, á $6^h 36^m 53^s.9$ al Oeste de Greenwich. En Agosto de 1869 cambié cerca de 200 señales telegráficas entre México y Puebla, ayudado por los Sres. Fernández é Iglesias.

Para la mejor inteligencia del procedimiento, detengámonos algunos instantes en echar una rápida ojeada sobre las máquinas telegráficas. Estas se componen de dos aparatos esencialmente distintos; el primero, llamado *manipulador*, sirve para transmitir las señales, ya sean letras ó cualesquier otros signos convencionales. El segundo, llamado *receptor*, ó también *registro*, reproduce los signos que le comunica el manipulador. En toda estación telegráfica existen, por consiguiente, los dos aparatos, el uno para enviar y el otro para recibir los mensajes.

Aunque varios mecanismos diversos llenan igualmente bien las funciones de cada una de estas partes de la máquina, todo manipulador está dispuesto de manera que el telegrafista, por el simple movimiento de un botón ó manecilla, pueda á su voluntad interrumpir ó restablecer instantáneamente el circuito eléctrico. Recíprocamente, todo receptor denuncia las interrupciones y restablecimientos de la corriente eléctrica, por la repulsión ó atracción de la armadura de su electro–imán, que es su parte más esencial. Uno de los extremos del hilo de las bobinas comunica con la batería, el otro con el alambre telegráfico; y en el paso de la corriente eléctrica, desarrollado por su influencia el magnetismo del electro–imán, es atraída la barra de hierro que está delante de él. Por el contrario, durante la ruptura del circuito cesa el magnetismo del electro–imán, y la barra cediendo á la fuerza de un resorte de que está provista, vuelve á su posición primitiva. Este movimiento alternativo de la barra produce un sonido muy perceptible cuando la corriente es algo intensa, y por tanto proporciona una señal audible, que produciéndose en el mismo instante en que el operador de otra estación lejana toca su manipulador, podrá servir directamente para comparar las horas locales de ambas estaciones. Si la corriente es poco enérgica, puede no ser muy perceptible el choque de la barra contra el electro–imán; pero en uno y otro caso su movimiento de vaivén se comunica por un juego conveniente de palancas á una aguja ó punzón, el cual graba los signos telegráficos sobre una tira de papel que se mueve uniformemente por medio de una combinación de relojería. El punzón suministra de esa manera una señal audible ó visible, propia para la comparación de las horas.

Concebida esta disposición general de los aparatos telegráficos, se comprenderá el modo de operar, que es muy sencillo. El astrónomo de una de las estaciones, con el botón de su manipulador, establece la corriente á intervalos regulares de diez, quince ó veinte segundos, anotando en su cronómetro los instantes en que toca el botón; y el de la otra estación, contando los segundos de su cronómetro, apunta la hora al escuchar el choque de la barra de su receptor, producido por el paso instantáneo de la corriente eléctrica. Cambiadas así algunas señales, se invierte el orden de la operación; el astrónomo de la segunda estación, que las había recibido, comienza á darlas con intervalos de 10^s á 20^s, y el de la primera las recibe, anotando ambos el instante preciso de su producción en sus respectivos cronómetros, absolutamente lo mismo que antes. De esta manera se obtienen, por cada señal observada, los valores de t y t' que con las correcciones de los cronómetros en esos instantes, permiten la aplicación de

la fórmula (1). Se entiende, por supuesto, que las horas determinadas por uno de los astrónomos deben corregirse por su error relativo, según se dijo al principio, aunque siempre debe procurarse cambiar de estaciones.

Ejemplo.—Tomemos las dos primeras series de señales cambiadas entre México y Puebla en la noche del 11 de Agosto de 1869. El cronómetro de México tenía un adelanto de $5^m\,30^s.56$ á las $7^h\,36^m$ P. M., y una marcha horaria de $-0^s.12$. El de Puebla adelantaba $0^s.32$ á las $7^h 40^m$, con una variación horaria de $-0^s.05$. En México el Sr. Fernández ó yo dábamos señales á cada 10^s, 15^s ó 20^s de nuestro cronómetro, y los Sres. Iglesias y Tagle las recibían en Puebla. Después de transmitidas así cosa de diez señales, comenzaba á enviarlas el Sr. Iglesias á intervalos iguales de su cronómetro, y nosotros las anotábamos en el nuestro.

EN MÉXICO. Enviadas.	EN MÉXICO. Recibidas.	EN PUEBLA. Enviadas.	EN PUEBLA. Recibidas.
$7^h 35^m 40^s$	$7^h 27^m 49^s.2$	$7^h 26^m 00^s$	$7^h 33^m 51^s.0$
„ 36 00	„ 28 8 .5	„ „ 20	„ 34 10 .5
„ „ 20	„ „ 29 .2	„ „ 40	„ „ 30 .5
„ „ 40	„ „ 49 .2	„ 27 00	„ „ 50 .5
„ 37 00	„ 29 9 .5	„ „ 20	„ 35 10 .5
„ „ 20	„ „ 29 .5	„ „ 40	„ „ 30 .5
„ „ 30	„ „ 49 .5	„ 28 00	„ „ 40 .5
„ „ 50	„ 30 9 .5	„ „ 20	„ 36 0 .5
„ 38 10	„ „ 29 .5	„ „ 40	„ „ 20 .5
	„ „ 49 .5	„ 29 00	

Para no reducir individualmente las observaciones, hagamos el cálculo con el promedio de las 9 señales enviadas de México.

EN MÉXICO.	EN PUEBLA.
$t = 7^h\,36^m\,56^s.67$	$t' = 7^h\,35^m\,7^s.22$
$\Delta t = -\;5\;\;36.56$	$\Delta t' = -\;0.32$
Hora media $= 7^h\,31^m\,20^s.11$	Hora media $= 7^h\,35^m\,6^s.90$

Hora media de México............... $= \;\; 7^h\,31^m\,20^s.11$

„ de Puebla............... $= -7\;\;35\;\;\;6.90$

$\lambda = -\,0^h\;\;3^m\,46^s.79$

Haciendo el mismo cálculo con las 10 señales enviadas de Puebla, resulta: $\lambda = -0^h 3^m 46^s.93$. El promedio de las dos series dará, pues, $3^m 46^s.86$ por longitud de Puebla al Este de México, ó sea $6^h 32^m 41^s.74$ al Oeste de Greenwich. Este es casi el mismo resultado que obtuvimos por gran número de señales, cambiadas en aquella noche y en las siguientes.

312.—La transmisión de señales telegráficas se presta á tanta exactitud, que en los Estados Unidos, donde tuvo su origen el método, se ha procurado llevarlo á toda la perfección de que es susceptible. Tal como lo he presentado hasta aquí, tiene el inconveniente de que los astrónomos se ven alternativamente obligados á apreciar al oído las fracciones de segundo de sus respectivos cronómetros. En efecto, el que transmite las señales, lo hace en coincidencia con los segundos de su cronómetro, y, por consiguiente, no tiene que estimar fracción alguna; pero el que las recibe, percibirá, por lo general, el choque de la barra entre dos golpes ó sonidos consecutivos del volante de su cronómetro, y tendrá que apreciar la fracción de segundo transcurrida entre el ruido del electro-imán y el último del cronómetro. Ahora bien, en esta clase de apreciaciones hay sin duda alguna un error personal, que acaso sea diferente del determinado por la observación de tránsitos meridianos; porque en este último caso se hace uso simultáneamente de la vista y del oído, mientras que en la apreciación del tiempo que transcurre entre las percepciones de dos sonidos inmediatos, sólo se hace uso del oído. Podría acaso evitarse esta causa de error haciendo los dos observadores algunas experiencias directas para determinar esta nueva ecuación personal y corregir con ella los resultados. Para ello deberían anotar, en un mismo cronómetro, las horas en que perciben el choque de la barra contra el electro-imán, y adoptar como error relativo el término medio de todas las diferencias que hallaren.

Me parece, sin embargo, preferible ponerse á cubierto del error de apreciación procediendo de esta manera. Si se emplean dos cronómetros que tengan una variación diaria muy diferente, sucederá que con frecuencia coincidan los sonidos ó golpes de sus volantes, y si al cambiar las señales telegráficas, sólo se aprovechan aquellas que,

transmitidas en coincidencia con los golpes de uno de los cronómetros, se reciben también en coindencia con los del otro, resultará que ninguno de los astrónomos tendrá que estimar fracciones. Esto puede conseguirse usando en una de las estaciones un cronómetro sideral y en la otra uno solar. En efecto, el cronómetro sideral adelanta respecto del solar cosa de $9^s.8$ por hora, ó sea casi 1^s en seis minutos, de manera que si ambos marcan segundos, deben coincidir sus sonidos cada 6^m, y si marcan medios segundos, que es lo más frecuente, coincidirán cada 3^m. Hay cronómetros de bolsa que dan 25 golpes en 10^s, por lo que cada sonido representa $0^s.4$, y si uno de esta especie se compara con otro que marque $0^s.5$ se obtendrá una coincidencia cada dos segundos.

Para evitar equivocaciones, conviene primero determinar la diferencia aproximativa de longitud por el cambio de algunas señales apreciando al oído las fracciones de segundo como se ha explicado antes. En seguida uno de los observadores comienza á transmitir las señales sin interrupción, en coincidencia con cada segundo de su cronómetro, y continúa enviándolas por espacio de diez á quince minutos. El de la otra estación las cuenta; pero sólo anota la hora de las que se producen en consonancia con los golpes de su cronómetro, y luego que ha logrado tres ó cuatro coincidencias, avisa al primer observador por medio de una señal convenida de antemano. Después de esto comienza á su vez á transmitir señales cada segundo, durante el mismo espacio de tiempo poco más ó menos, hasta que el primer observador le participe haber logrado apuntar las horas de algunas coincidencias. Como cada astrónomo tiene cuidado de anotar la hora á la cual comienza á enviar sus señales, y el otro las cuenta, es muy fácil saber en seguida cuáles son las indicaciones de ambos cronómetros en cada coincidencia. Parece inútil advertir que las dos horas, después de corregidas, deben expresarse en la misma especie de tiempo, ya sea solar ó sideral. Repitiendo la misma operación durante varias noches, y si es posible cambiando de estaciones, se obtienen resultados, si bien en más corto número que por el otro método, por lo común más acordes y sobre todo más dignos de confianza.

313.—Se ha dado más perfección todavía al método de señales telegráficas con la introducción de los electro-cronógrafos, que como su nombre lo indica, son instrumentos destinados á representar, por medio de la electricidad, la medida del tiempo con signos ó caracteres visibles. El aparato telegráfico común de Morse, que representa por medio de puntos ó líneas el paso de la corriente eléctrica sobre un papel que se mueve uniformemente, puede servir muy bien como cronógrafo, y lo único que se necesita es que sus signos se produzcan á iguales intervalos de tiempo. A este fin se coloca dentro del circuito un péndulo astronómico común, cuyas oscilaciones interrumpan y restablezcan alternativamente la corriente, á fin de que en cada segundo señale el punzón del receptor una línea pequeña en el papel telegráfico. De esta manera un solo péndulo hace marcar el tiempo en todas las estaciones comunicadas por el conductor, y en cada una de ellas se obtiene una tira de pápel cuyas líneas equidistantes representan segundos; y si un observador desea anotar el instante en que se produce un fenómeno cualquiera, basta que toque la manecilla de su manipulador, el cual enlazado con el circuito eléctrico, producirá una señal semejante á las del péndulo. La distancia de aquélla á la última de éste, se podrá apreciar en seguida por medio de una escala, y comparada con la distancia constante de las líneas originadas por las oscilaciones del péndulo, dará con mucha exactitud la correspondiente fracción de segundo.

En las páginas 241 y siguientes de los *Nuevos Métodos Astronómicos* puede verse la descripción de los cronógrafos y la manera de emplearlos en la determinación de las longitudes, limitándome aquí á decir que su uso se presta á tal precisión, que permite medir la velocidad de la corriente eléctrica. El conjunto de experiencias practicadas con este objeto en los Estados Unidos, le asignan cosa de 6200 leguas por segundo en los alambres telegráficos comunes, de modo que al comparar las horas locales de dos estaciones que disten entre sí 100 ó 200 leguas, puede suponerse rigurosamente instantánea la transmisión de las señales.

CAPITULO XXVIII.

DETERMINACIÓN DE LA LONGITUD.—MÉTODO DE TRANSPORTE DE CRONÓMETROS.

314.—La comparación de las horas locales de dos ó más estaciones puede efectuarse transportando de la una á la otra un cronómetro cuya variación sea conocida, y cuyo error absoluto pueda determinarse respecto de cada uno de los meridianos, bien sea por medio de observaciones directas, ó bien por su comparación inmediata con los cronómetros ó péndulos establecidos en cada estación, y arreglados de antemano á sus respectivos meridianos.

Supongamos por un momento que sea nula la variación diaria del cronómetro que va á transportarse, y que en el punto de partida A,

X. A. B.

cuya longitud absoluta designaré por L, se ha hallado que su corrección es Δt en un instante cualquiera, siendo Δt positiva cuando el instrumento esté atrasado respecto del tiempo local. Es evidente entonces que para otro punto X, cuya longitud respecto de A sea Δt segundos, el guarda-tiempo no tendrá error alguno, ó estará perfectamente arreglado al meridiano de X cuya longitud absoluta es $l = L + \Delta t$. Admitamos ahora que el cronómetro se traslade á otra estación B, cuya longitud absoluta sea L', y que comparado allí con el tiempo local, se encuentre que su corrección es $\Delta t'$. Como por la hipótesis es nula su variación diaria, el cronómetro habrá seguido marcando el tiempo exacto del meridiano X, y la longitud de este mismo punto respecto de B será $\Delta t'$, y como antes, tendremos:...... $l = L' + \Delta t'$. Igualando los dos valores de l, resulta:

$$L - L' = \Delta t' - \Delta t$$

ecuación que manifiesta que la diferencia de longitud de dos estaciones A y B, es igual á la diferencia de las correcciones del cronómetro determinadas en cada una de ellas.

Aunque en general no puede admitirse la hipótesis de una variación nula, por perfecta que sea la construcción de los guarda-tiempos, se comprende desde luego que subsiste la ecuación anterior con tal que se lleve en cuenta la variación v en la unidad de tiempo, ya sea ésta el día ó la hora. En efecto, si en el punto de partida A es t la indicación del cronómetro cuando se halló que su corrección era Δt, y en el punto B señalaba t' cuando su corrección respecto de este nuevo meridiano era $\Delta t'$, es claro que el tiempo transcurrido entre las dos comparaciones es $t' - t$, y que en el instante t' de la segunda comparación, la corrección del cronómetro, en la estación A, sería $\Delta t + v(t' - t)$. Sustituyendo este valor por Δt en la ecuación precedente, se tendrá:

$$L - L' = \Delta t' - \Delta t - v(t' - t) \text{ .... } (1)$$

He supuesto que el cronómetro partiendo de A se transportó á B; pero admitiendo lo contrario, y conservando los acentos para indicar las cantidades referentes á B, se hallará:

$$L - L' = \Delta t' - \Delta t + v(t - t') \text{ .... } (2)$$

de manera que, en general, la diferencia de meridianos es igual á la de las correcciones del cronómetro, reducidas al mismo instante físico, con ayuda de su variación en la unidad de tiempo.

315.—Este modo de operar supone, sin embargo, que la variación diaria ú horaria del guarda-tiempo, determinada, por ejemplo, en la primera estación, permanezca constante durante el viaje; pero esto nunca ó casi nunca tiene lugar. Los cronómetros de mejor construcción, sean cuales fueren las precauciones que se tomen para trans-

portarlos, se resienten en su marcha, ya sea solamente á causa del movimiento, ya por los cambios de temperatura que sufren á veces sin poderse evitar. El resultado es que su variación durante el transporte, casi siempre es distinta de la que tienen cuando permanecen en reposo, y siendo necesario hacer uso de aquella para aplicar las fórmulas precedentes, veamos cómo puede determinarse.

Basta para esto hacer el doble viaje de ida y vuelta, y comparar el estado del cronómetro antes de partir con el que guarda después de terminada la expedición, tomando en cuenta solamente el tiempo que dure el transporte. Conviniendo siempre en acentuar los elementos que se refieren á la estación oriental, designemos por c, c', C' y C las cuatro correcciones determinadas en este orden: al partir de la estación A y cuando el cronómetro señale la hora t, sea c su corrección. Al llegar á la estación B se determina la corrección c' respecto de este meridiano cuando el instrumento indique la hora t'. En seguida, antes de partir de B, sea C' la corrección á la hora T' del guarda-tiempo; y por último, al llegar de nuevo á A, sea C la corrección y T la hora. Este orden se comprenderá mejor bajo la forma siguiente, en que las flechas indican la dirección de los viajes:

EN A.			EN B.	
Cronómetros.	Correcciones.		Cronómetros.	Correcciones.
t	c	$\longrightarrow$	t'	c'
T	C	$\longleftarrow$	T'	C'

Es evidente que la duración del primer viaje es $t' - t$; y la del segundo $T - T'$. Respecto de las correcciones, su cambio total es $C - c$; pero excluyendo de él la parte $C' - c'$, que corresponde al tiempo $T' - t'$ que estuvo en reposo el cronómetro en la estación B, quedará $(C - c) - (C' - c')$ por marcha total en la duración $(T - T') + (t' - t)$ de los dos viajes. Entonces la variación durante el transporte será:

$$v = \frac{(C - c) - (C' - c')}{(T - t) - (T' - t')} \text{ .... } (3)$$

El valor de v indica la variación diaria ú horaria, según que los intervalos de tiempo expresen días ú horas. La diferencia de longitud $\lambda = L - L'$ tendrá, pues, por expresión:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{En el primer viaje.. ....} & \lambda = c' - c - v(t' - t) \\ \text{,, segundo ,, ...} & \lambda = C' - C + v(T - T') \end{array}\right\} \cdots\cdots (4)$$

Ejemplo.—El siguiente está tomado de la expedición cronométrica hecha por Mr. Struve entre los Observatorios de Altona y Pulkowa en 1843. Mr. Struve partió de Pulkowa, que es la estación oriental, el 19 de Mayo y volvió el 31 del mismo mes. Las fechas están expresadas en días y fracciones.

ALTONA.		PULKOWA.	
$t = 24^d.94$......	$c = -1^h 14^m 39^s.92$	$t' = 19^d.89$.........	$c' = +6^m 38^s.10$
$T = 26.45$......	$C = -1\ 14\ 36.77$	$T' = 31.00$.........	$C' = +7\ \ 9.58$

Para calcular la variación del cronómetro durante el viaje, se tiene:

$$\begin{array}{rl} C - c = & +\ 3^s.15 \\ -(C' - c') = & -\ 31.48 \\ \hline \text{Numerador} = & -\ 28^s.33 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} T - t = & +\ 1^d.51 \\ -(T' - t') = & -\ 11.11 \\ \hline \text{Denominador} = & -\ 9^d.60 \end{array}$$

$$v = \frac{28.33}{9.60} = +\ 2^s.951$$

Con esta variación diaria calculemos la diferencia de meridianos por los datos que corresponden á cada viaje.

$$\begin{array}{rr} c' = & +\ 0^h\ 6^m 38^s.10 \\ c = & -\ 1\ 14\ 39.92 \\ \hline c' - c = & 1^h 21^m 18^s.02 \\ -v(t' - t) = & +\ 14.90 \\ \hline \lambda = & 1^h 21^m 32^s.92 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} C' = & +\ 0^h\ 7^m\ 9^s.58 \\ C = & -\ 1\ 14\ 36.77 \\ \hline C' - C = & 1^h 21^m 46^s.35 \\ v(T - T') = & -\ 13.43 \\ \hline \lambda = & 1^h 21^m 32^s.92 \end{array}$$

De este modo se hicieron 17 viajes entre Altona y Pulkowa, y el resultado final obtenido por 68 cronómetros que se emplearon en la expedición, fué $\lambda = 1^h 21^m 32^s.50$.

La expedición cronométrica más extensa de que tengo noticia es la emprendida desde 1844 entre Boston y Liverpool, con el fin de determinar la longitud del Observatorio americano de Cambridge respecto del de Greenwich. En esta expedición, continuada por muchos años, excede de 400 el número de cronómetros que se han transportado de un puerto al otro en los viajes periódicos de los vapores de la línea de Cunard. Luego que llega el buque á Liverpool ó á Boston, se desembarcan los cronómetros y se comparan con el péndulo del Observatorio de Liverpool ó con el de Cambridge, cerca de Boston. Los principales resultados son los que siguen: En 1848 por el transporte de 116 cronómetros en 34 viajes, se obtuvo......... $4^h 44^m 30^s.50$ por longitud de Cambridge al Oeste de Greenwich. En 1849 se hicieron otras 87 comparaciones, y el resultado obtenido por 373 cronómetros fué $4^h 44^m 30^s.92$. El promedio calculado por Mr. Bond, valiéndose de 175 cronómetros de su confianza, es........ $4^h 44^m 30^s.10$. El resultado de los viajes de 1855 da $4^h 44^m 31^s.89$. Por último, el valor final adoptado es $4^h 44^m 30^s.66$, que según me escribió Mr. Bond, es el más digno de confianza. Recientemente, y bajo la dirección del Dr. Gould, acaba de hacerse otra determinación de la longitud de Cambridge, por medio del cable telegráfico trasatlántico, siendo $4^h 44^m 30^s 85$ el resultado.

Los valores de las correcciones c, c', C' y C que entran en las fórmulas (3) y (4) se determinan, según dije al principio, ó por observaciones directas ejecutadas poco antes de partir de cada estación, é inmediatamente después de llegar, ó bien comparando el cronómetro que puede llamarse móvil, con los cronómetros ó péndulos establecidos en ambas estaciones y previamente arreglados á sus respectivos meridianos. El primer procedimiento es indudablemente el más practicable, atendidas las circunstancias en que, por lo general, se encuentra un viajero, al menos cuando no cuenta más que con sus propios recursos; pero es evidente que nunca proporciona tan buenos resultados como el segundo. Sin embargo, uno ó dos buenos cronómetros, transportados con las precauciones necesarias para asegurar la regularidad de su marcha, y haciendo por lo menos un doble viaje, me parece que pueden proporcionar resultados muy útiles para nuestra naciente Geografía. Sería de desearse, ciertamente, que siquiera las principales poblaciones de los Estados se fijaran de esa manera, ó por el método de señales luminosas, respecto de sus capitales; pues enlazadas la mayor parte de éstas con la de la República por medio de las extensas líneas telegráficas que hoy tenemos, se reunirían en breve muy buenos datos para la formación de una carta general.

A falta de telégrafo, la determinación de la diferencia de longitud de dos puntos importantes debe hacerse como se ha visto en el ejemplo antes citado, referente á la expedición cronométrica entre Pulkowa y Altona. La operación ejecutada así demanda el concurso de tres observadores por lo menos, á saber: los estacionados en los puntos que se trate de comparar y el que transporte los cronómetros. Los primeros, provistos de instrumentos meridianos, deben determinar las correcciones de sus respectivos péndulos, de acuerdo con las prescripciones que varias veces he tenido ocasión de indicar, como son: invertir con frecuencia el telescopio, valerse sólo de estrellas fundamentales, y de las mismas si es posible, medir su ecuación personal, etc., etc. En cuanto al observador viajero, deberá tener cuidado de comparar diariamente todos los cronómetros entre sí, así como con los péndulos al llegar á cada estación y al partir de ella, á fin de deducir la corrección que corresponda á cada uno. Las comparaciones deberán hacerse por el método de coincidencia de sonidos, tal como se explicó en el número 312, con el objeto de evitar el error originado por la apreciación de las fracciones de segundo; y para corregirlo sin gran trabajo, aun siendo muchos los cronómetros, conviene que el observador se sirva de un reloj cuya variación diaria sea muy diferente de la de aquéllos.

Las precauciones generales para el manejo de los cronómetros, aun cuando estén estacionarios, son las siguientes: 1ª Debe dárseles cuerda á intervalos regulares, de modo que cuando, por ejemplo, se les dé diariamente, se procurará que sea siempre á la misma hora con poca diferencia. Algunos cronómetros marinos tienen cuerda para 8 ó más días; pero en todos casos creo más conveniente darles sólo la necesaria para 24^h, á fin de que sea siempre la misma la par-

te del resorte que obra como motor. 2ª Al darles cuerda debe procurarse que el cronómetro permanezca inmóvil y que sólo la llave sea la que gire. 3ª Todo movimiento brusco, sobre todo si es circular, se evitará con el mayor esmero; y se procurará que el cronómetro conserve siempre la misma posición, ya sea vertical ú horizontal, aunque esta última es la más conveniente. 4ª También se evitará que sufra cambios bruscos de temperatura; y por consiguiente, nunca debe tenerse un cronómetro expuesto á corrientes de aire, ni mucho menos á los rayos directos del sol. 5ª Cerca de un cronómetro nunca debe haber substancias magnéticas, que influirían muchísimo en su marcha. 6ª Es también conveniente que un guarda–tiempo no esté parado, á fin de que los aceites conserven su fluidez y no estén expuestas sus piezas á oxidarse.

En cuanto á la mejor manera de transportar los cronómetros, sólo diré que aunque durante el viaje no se pueden cumplir por lo general todas las prescripciones anteriores, debe escogerse cuidadosamente el medio de transporte más adecuado á las circunstancias especiales de cada caso, y que mejor se avenga con las reglas antes establecidas. En buenos caminos, un carruaje de muelles me parece bastante á propósito para la conducción; pero en terrenos muy desiguales acaso sea preferible hacerlos conducir por hombres que viajan á pie.

La circunstancia que principalmente caracteriza á un buen guarda-tiempo, no es tanto la pequeñez de su variación diaria como la igualdad de esta variación. Es sin duda conveniente que sea pequeña la marcha en la unidad de tiempo; pero se comprende que tal ventaja es muy secundaria respecto de la fundamental, que consiste en la uniformidad de la variación; y por consiguiente, ésta es la que debe fijar de preferencia la atención del astrónomo al hacer la elección de sus cronómetros.

TABLAS.

TABLA I.—Refracciones astronómicas.

Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1'	Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1'
00°00'	−∞		6°00'	0.7882	12.0
„ 10	9.2303	301.1	„ 10	.8002	11.6
„ 20	9.5315	176.1	„ 20	.8118	11.4
„ 30	9.7076	124.9	„ 30	.8232	11.1
„ 40	9.8325	96.9	„ 40	.8343	10.8
„ 50	9.9294	79.1	„ 50	.8451	10.6
1 00	0.0085	67.0	7 00	0.8557	10.2
„ 10	.0755	58.0	„ 10	.8659	10.1
„ 20	.1335	51.2	„ 20	.8760	9.9
„ 30	.1847	45.7	„ 30	.8859	9.7
„ 40	.2304	41.4	„ 40	.8956	9.5
„ 50	.2718	37.9	„ 50	.9051	9.3
2 00	0.3097	34.7	8 00	0.9144	9.0
„ 10	.3444	32.2	„ 10	.9234	8.9
„ 20	.3766	30.1	„ 20	.9323	8.7
„ 30	.4067	28.0	„ 30	.9410	8.5
„ 40	.4347	26.3	„ 40	.9495	8.4
„ 50	.4610	25.0	„ 50	.9579	8.4
3 00	0.4860	23.5	9 00	0.9663	8.0
„ 10	.5095	22.4	„ 10	.9743	8.0
„ 20	.5319	21.1	„ 20	.9823	7.8
„ 30	.5530	20.3	„ 30	.9901	7.7
„ 40	.5733	19.3	„ 40	0.9978	7.6
„ 50	.5926	18.6	„ 50	1.0054	7.5
4 00	0.6112	17.8	10 00	.0129	7.2
„ 10	.6290	17.1	„ 10	.0201	7.2
„ 20	.6461	16.5	„ 20	.0273	7.1
„ 30	.6626	15.8	„ 30	.0344	7.0
„ 40	.6784	15.3	„ 40	.0414	6.9
„ 50	.6937	14.9	„ 50	.0483	6.9
5 00	0.7086	14.2	11 00	1.0552	6.6
„ 10	.7228	13.9	„ 10	.0618	6.6
„ 20	.7367	13.5	„ 20	.0684	6.6
„ 30	.7502	13.1	„ 30	.0750	6.5
„ 40	.7633	12.7	„ 40	.0815	6.4
„ 50	.7760	12.2	„ 50	.0879	6.2
6 00	0.7882		12 00	1.0941	

TABLA I.—Refracciones astronómicas.

Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1'	Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1'
12°00'	1.0941	6.2	18°00'	1.2784	4.2
„ 10	.1003	6.1	„ 10	.2826	4.2
„ 20	.1064	6.0	„ 20	.2868	4.2
„ 30	.1124	6.0	„ 30	.2910	4.2
„ 40	.1184	5.8	„ 40	.2952	4.2
„ 50	.1242	5.8	„ 50	.2994	4.2
13 00	1.1300	5.7	19 00	1.3036	3.9
„ 10	.1357	5.7	„ 10	.3075	4.1
„ 20	.1414	5.5	„ 20	.3116	4.1
„ 30	.1469	5.5	„ 30	.3157	4.0
„ 40	.1524	5.4	„ 40	.3197	4.0
„ 50	.1578	5.4	„ 50	.3237	4.0
14 00	1.1632	5.4	20 00	1.3277	3.8
„ 10	.1686	5.4	„ 10	.3315	3.9
„ 20	.1740	5.3	„ 20	.3354	3.9
„ 30	.1793	5.2	„ 30	.3393	3.8
„ 40	.1845	5.2	„ 40	.3431	3.8
„ 50	.1897	5.0	„ 50	.3469	3.8
15 00	1.1947	5.1	21 00	1.3507	3.7
„ 10	.1998	5.0	„ 10	.3544	3.8
„ 20	.2048	5.0	„ 20	.3582	3.7
„ 30	.2098	4.9	„ 30	.3619	3.7
„ 40	.2147	4.8	„ 40	.3656	3.7
„ 50	.2195	4.6	„ 50	.3693	3.6
16 00	1.2241	4.6	22 00	1.3729	3.7
„ 10	.2287	4.7	„ 10	.3766	3.6
„ 20	.2334	4.6	„ 20	.3802	3.6
„ 30	.2380	4.6	„ 30	.3838	3.6
„ 40	.2426	4.6	„ 40	.3874	3.5
„ 50	.2472	4.7	„ 50	.3909	3.6
17 00	1.2519	4.5	23 00	1.3945	3.6
„ 10	.2564	4.5	„ 10	.3981	3.4
„ 20	.2609	4.4	„ 20	.4015	3.4
„ 30	.2653	4.4	„ 30	.4049	3.5
„ 40	.2697	4.3	„ 40	.4084	3.4
„ 50	.2740	4.4	„ 50	.4118	3.3
18 00	1.2784		24 00	1.4151	

TABLA I.—Refracciones astronómicas.

Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′
24°00′	1.4151		30°00′	1.5279	
,, 10	.4185	3.4	,, 10	.5308	2.9
,, 20	.4219	3.4	,, 20	.5337	2.9
,, 30	.4253	3.4	,, 30	.5366	2.9
,, 40	.4286	3.3	,, 40	.5395	2.9
,, 50	.4319	3.3	,, 50	.5423	2.8
25 00	1.4352	3.3	31 00	1.5452	2.9
,, 10	.4385	3.3	,, 10	.5481	2.9
,, 20	.4418	3.3	,, 20	.5510	2.9
,, 30	.4451	3.3	,, 30	.5538	2.8
,, 40	.4483	3.2	,, 40	.5566	2.8
,, 50	.4515	3.2	,, 50	.5594	2.8
26 00	1.4547	3.2	32 00	1.5622	2.8
,, 10	.4579	3.2	,, 10	.5650	2.8
,, 20	.4611	3.2	,, 20	.5678	2.8
,, 30	.4643	3.2	,, 30	.5707	2.9
,, 40	.4674	3.1	,, 40	.5735	2.8
,, 50	.4706	3.2	,, 50	.5762	2.7
27 00	1.4736	3.0	33 00	1.5790	2.8
,, 10	.4768	3.2	,, 10	.5818	2.8
,, 20	.4799	3.1	,, 20	.5845	2.7
,, 30	.4829	3.0	,, 30	.5873	2.8
,, 40	.4860	3.1	,, 40	.5900	2.7
,, 50	.4890	3.0	,, 50	.5927	2.7
28 00	1.4921	3.1	34 00	1.5934	2.7
,, 10	.4952	3.1	,, 10	.5981	2.7
,, 20	.4982	3.0	,, 20	.6009	2.8
,, 30	.5013	3.1	,, 30	.6036	2.7
,, 40	.5043	3.0	,, 40	.6063	2.7
,, 50	.5073	3.0	,, 50	.6090	2.7
29 00	1.5102	2.9	35 00	1.6116	2.6
,, 10	.5133	3.1	,, 10	.6134	2.7
,, 20	.5162	2.9	,, 20	.6170	2.7
,, 30	.5192	3.0	,, 30	.6197	2.7
,, 40	.5221	2.9	,, 40	.6223	2.6
,, 50	.5250	2.9	,, 50	.6250	2.7
30 00	1.5279	2.9	36 00	1.6276	2.6

TABLA I.—Refracciones astronómicas.

Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′
36°00	1.6276		42 00	1.7207	
,, 10	.6303	2.7	,, 10	.7232	2.5
,, 20	.6330	2.7	,, 20	.7257	2.5
,, 30	.6356	2.6	,, 30	.7283	2.6
,, 40	.6382	2.6	,, 40	.7308	2.5
,, 50	.6408	2.6	,, 50	.7333	2.5
37 00	1.6435	2.7	43 00	1.7358	2.5
,, 10	.6461	2.6	,, 10	.7383	2.5
,, 20	.6487	2.6	,, 20	.7409	2.6
,, 30	.6513	2.6	,, 30	.7434	2.5
,, 40	.6539	2.6	,, 40	.7459	2.5
,, 50	.6565	2.6	,, 50	.7485	2.6
38 00	1.6591	2.6	44 00	1.7510	2.5
,, 10	.6617	2.6	,, 10	.7535	2.5
,, 20	.6643	2.6	,, 20	.7560	2.5
,, 30	.6669	2.6	,, 30	.7586	2.6
,, 40	.6695	2.6	,, 40	.7611	2.5
,, 50	.6720	2.5	,, 50	.7636	2.5
39 00	1.6746	2.6	45 00	1.76611	2.5
,, 10	.6772	2.6	,, 10	.76863	25.2
,, 20	.6798	2.6	,, 20	.77115	25.2
,, 30	.6824	2.6	,, 30	.77367	25.2
,, 40	.6850	2.6	,, 40	.77619	25.2
,, 50	.6876	2.6	,, 50	.77871	25.2
40 00	1.6901	2.5	46 00	1.78123	25.2
,, 10	.6927	2.6	,, 10	.78375	25.2
,, 20	.6952	2.5	,, 20	.78628	25.3
,, 30	.6978	2.6	,, 30	.78880	25.2
,, 40	.7004	2.6	,, 40	.79132	25.2
,, 50	.7029	2.5	,, 50	.79385	25.3
41 00	1.7055	2.6	47 00	1.79637	25.2
,, 10	.7080	2.5	,, 10	.79890	25.3
,, 20	.7106	2.6	,, 20	.80143	25.3
,, 30	.7131	2.5	,, 30	.80396	25.3
,, 40	.7156	2.5	,, 40	.80649	25.3
,, 50	.7182	2.6	,, 50	.80902	25.3
42 00	1.7207	2.5	48 00	1.81155	25.3

TABLA I.—Refracciones astronómicas.

Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1'	Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1'
48°00'	1.81155	25.4	54°00'	1.90440	26.5
„ 10	.81409	25.4	„ 10	.90705	26.5
„ 20	.81663	25.3	„ 20	.90970	26.6
„ 30	.81916	25.4	„ 30	.91236	26.6
„ 40	.82170	25.4	„ 40	.91502	26.7
„ 50	.82424	25.4	„ 50	.91769	26.7
49 00	1.82678	25.5	55 00	1.92036	26.8
„ 10	.82933	25.5	„ 10	.92304	26.9
„ 20	.83188	25.5	„ 20	.92573	26.8
„ 30	.83443	25.5	„ 30	.92841	27.1
„ 40	.83698	25.5	„ 40	.93112	27.1
„ 50	.83953	25.5	„ 50	.93383	27.0
50 00	1.84208	25.6	56 00	1.93653	27.1
„ 10	.84464	25.7	„ 10	.93924	27.2
„ 20	.84721	25.6	„ 20	.94196	27.3
„ 30	.84977	25.7	„ 30	.94469	27.3
„ 40	.85234	25.6	„ 40	.94742	27.4
„ 50	.85490	25.7	„ 50	.95016	27.5
51 00	1.85747	25.8	57 00	1.95291	27.5
„ 10	.86005	25.9	„ 10	.95566	27.7
„ 20	.86264	25.8	„ 20	.95843	27.7
„ 30	.86522	25.9	„ 30	.96120	27.7
„ 40	.86781	25.8	„ 40	.96397	27.9
„ 50	.87039	25.9	„ 50	.96676	27.9
52 00	1.87298	26.0	58 00	1.96955	28.0
„ 10	.87558	26.1	„ 10	.97235	28.1
„ 20	.87819	26.1	„ 20	.97516	28.1
„ 30	.88080	26.1	„ 30	.67797	28.3
„ 40	.88341	26.0	„ 40	.98080	28.2
„ 50	.88601	26.2	„ 50	.98362	28.4
53 00	1.88863	26.2	59 00	1.98646	28.5
„ 10	.89125	26.2	„ 10	.98931	28.5
„ 20	.89387	26.3	„ 20	.99216	28.7
„ 30	.89650	26.3	„ 30	.99503	28.7
„ 40	.89913	26.3	„ 40	1.99790	28.9
„ 50	.90176	26.4	„ 50	2.00079	28.9
54 00	1.90440		60 00	2.00368	

TABLA I.—Refracciones astronómicas.

Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1'	Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1'
60°00'	2.00368	29.0	66°00'	2.11555	33.7
„ 10	.00658	29.1	„ 10	.11892	33.9
„ 20	.00949	29.2	„ 20	.12231	34.0
„ 30	.01241	29.4	„ 30	.12571	34.2
„ 40	.01535	29.4	„ 40	.12913	34.5
„ 50	.01829	29.5	„ 50	.13258	34.5
61 00	2.02124	29.6	67 00	2.13603	34.8
„ 10	.02420	29.8	„ 10	.13951	34.9
„ 20	.02718	29.8	„ 20	.14300	35.2
„ 30	.03016	30.0	„ 30	.14652	35.4
„ 40	.03316	30.1	„ 40	.15006	35.5
„ 50	.03617	30.1	„ 50	.15361	35.8
62 00	2.03918	30.3	68 00	2.15719	35.9
„ 10	.04221	30.4	„ 10	.16078	36.2
„ 20	.04525	30.5	„ 20	.16440	36.4
„ 30	.04830	30.7	„ 30	.16804	36.7
„ 40	.05137	30.8	„ 40	.17171	36.8
„ 50	.05445	30.9	„ 50	.17539	37.1
63 00	2.05754	31.0	69 00	2.17910	37.3
„ 10	.06064	31.2	„ 10	.18283	37.5
„ 20	.06376	31.2	„ 20	.18658	37.8
„ 30	.06688	31.5	„ 30	.19036	38.1
„ 40	.07003	31.5	„ 40	.19417	38.3
„ 50	.07318	31.7	„ 50	.19800	38.5
64 00	2.07635	31.8	70 00	2.20185	38.8
„ 10	.07953	32.0	„ 10	.20573	39.0
„ 20	.08273	32.1	„ 20	.20963	39.3
„ 30	.08594	32.3	„ 30	.21356	39.6
„ 40	.08917	32.4	„ 40	.21752	39.8
„ 50	.09241	32.6	„ 50	.22150	40.2
65 00	2.09567	32.7	71 00	2.22552	40.4
„ 10	.09894	33.0	„ 10	.22956	40.7
„ 20	.10224	33.0	„ 20	.23363	41.0
„ 30	.10554	33.2	„ 30	.23773	41.3
„ 40	.10886	33.4	„ 40	.24186	41.7
„ 50	.11220	33.5	„ 50	.24603	41.9
66 00	2.11555		72 00	2.25022	

TABLA I.—Refracciones astronómicas.

Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′
72°00′	2.25022	42.3	78°00′	2.42867	59.6
„ 10	.25445	42.5	„ 10	.43463	60.3
„ 20	.25870	42.9	„ 20	.44066	61.1
„ 30	.26299	43.3	„ 30	.44677	61.8
„ 40	.26732	43.6	„ 40	.45295	62.6
„ 50	.27168	44.0	„ 50	.45921	63.5
73 00	2.27608	44.3	79 00	2.46556	64.2
„ 10	.28051	44.7	„ 10	.47198	65.0
„ 20	.28498	45.0	„ 20	.47848	65.9
„ 30	.28948	45.4	„ 30	.48507	66.9
„ 40	.29402	45.8	„ 40	.49176	67.7
„ 50	.29860	46.2	„ 50	.49853	68.8
74 00	2.30322	46.7	80 00	2.50541	69.6
„ 10	.30789	47.0	„ 10	.51237	70.7
„ 20	.31259	47.5	„ 20	.51944	71.6
„ 30	.31734	47.9	„ 30	.52660	72.7
„ 40	.32213	48.3	„ 40	.53387	73.8
„ 50	.32696	48.8	„ 50	.54125	74.9
75 00	2.33184	49.3	81 00	2.54874	76.1
„ 10	.33677	49.7	„ 10	.55635	77.2
„ 20	.34174	50.2	„ 20	.56407	78.5
„ 30	.34676	50.7	„ 30	.57192	79.7
„ 40	.35183	51.2	„ 40	.57989	81.1
„ 50	.35695	51.7	„ 50	.58800	82.4
76 00	2.36212	52.3	82 00	2.59624	83.8
„ 10	.36735	52.8	„ 10	.60462	85.1
„ 20	.37263	53.3	„ 20	.61313	86.6
„ 30	.37796	53.8	„ 30	.62179	88.3
„ 40	.38334	54.5	„ 40	.63062	89.9
„ 50	.38879	55.1	„ 50	.63961	91.4
77 00	2.39430	55.7	83 00	2.64875	93.1
„ 10	.39987	56.3	„ 10	.65806	94.9
„ 20	.40550	56.9	„ 20	.66755	96.7
„ 30	.41119	57.6	„ 30	.67722	98.6
„ 40	.41695	58.3	„ 40	.68708	100.6
„ 50	.42278	58.9	„ 50	.69714	102.6
78 00	2.42867		84 00	2.70740	

TABLA I.—Refracciones astronómicas.

Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′	Distancia zenital aparente.	Log. ρ	Dif. por 1′
84°00′	2.70740	104.7	87°00′	2.93754	160.8
„ 10	.71787	106.9	„ 10	.95362	165.4
„ 20	.72856	109.2	„ 20	.97016	170.1
„ 30	.73948	111.5	„ 30	2.98717	174.9
„ 40	.75063	113.9	„ 40	3.00466	180.1
„ 50	.76202	116.5	„ 50	.02267	185.5
85 00	2.77367	119.1	88 00	3.04122	190.9
„ 10	.78558	121.9	„ 10	.06031	196.7
„ 20	.79777	124.8	„ 20	.07998	202.6
„ 30	.81025	127.7	„ 30	.10024	208.9
„ 40	.82302	130.9	„ 40	.12113	215.5
„ 50	.83611	134.0	„ 50	.14268	222.1
86 00	2.84951	137.4	89 00	3.16489	229.0
„ 10	.86325	141.0	„ 10	.18779	236.1
„ 20	.87735	144.7	„ 20	.21140	243.4
„ 30	.89182	148.4	„ 30	.23574	250.9
„ 40	.90666	152.3	„ 40	.26083	258.4
„ 50	.92189	156.5	„ 50	.28667	266.7
87 00	2.93754		90 00	3.31334	

TABLA II.—Factores barométricos para la refracción.

Barómetro.	Log. b	Dif. por 0.001 m.	Barómetro.	Log. b	Dif. por 0.001 m.
0m.500	9.81702	86.4	0m.635	9.92082	68.2
.505	.82134	85.6	.640	.92423	67.6
.510	.82562	84.6	.645	.92761	67.0
.515	.82985	84.0	.650	.93096	66.4
.520	.83405	83.2	.655	.93428	66.2
.525	.83821	82.4	.660	.93759	65.6
.530	.84233	81.4	.665	.94087	65.0
.535	.84640	80.8	.670	.94412	64.6
.540	.85044	80.0	.675	.94735	64.2
.545	.85444	79.4	.680	.95056	63.6
.550	.85841	78.6	.685	.95374	63.2
.555	.86234	78.0	.690	.95690	62.8
.560	.86624	77.2	.695	.96004	62.2
.565	.87010	76.4	.700	.96315	61.8
.570	.87392	76.0	.705	.96624	61.4
.575	.87772	75.2	.710	.96931	61.0
.580	.88148	74.6	.715	.97236	60.4
.585	.88521	73.0	.720	.97538	60.0
.590	.88890	73.1	.725	.97838	59.8
.595	.89256	72.8	.730	.98137	59.2
.600	.89620	72.0	.735	.98433	59.0
.605	.89980	71.6	.740	.98728	58.4
.610	.90338	70.8	.745	.99020	58.2
.615	.90692	70.4	.750	.99311	57.6
.620	.91044	69.8	.755	.99599	57.4
.625	.91393	69.2	.760	9.99886	57.0
.630	.91739	68.6	.765	0.00171	56.6
0.635	9.92082		0.770	0.00454	

TABLA III.—Factores termométricos para la refracción.

Termómetro.	Log. f	Dif.	Log. l	Dif.	Termómetro.	Log. f	Dif.	Log. l	Dif.
−10°	0.00156	8	0.03386	175	14°	9.99969	8	9.99353	160
9	.00148	8	.03211	175	15	.99961	8	.99193	160
8	.00140	7	.03036	174	16	.99953	8	.99033	159
7	.00133	8	.02862	174	17	.99945	7	.98874	158
6	.00125	8	.02688	173	18	.99938	8	.98716	158
5	.00117	8	.02515	172	19	.99930	8	.98558	157
4	.00109	8	.02343	172	20	.99922	8	.98401	157
3	.00101	7	.02171	171	21	.99914	8	.98244	156
2	.00094	8	.02000	170	22	.99906	7	.98088	155
−1	.00086	8	.01830	170	23	.99899	8	.97933	155
0	.00078	8	.01660	169	24	.99891	8	.97778	155
+1	.00070	8	.01491	168	25	.99883	8	.97623	154
2	.00062	7	.01323	168	26	.99875	8	.97469	153
3	.00055	8	.01155	167	27	.99867	7	.97316	153
4	.00047	8	.00988	166	28	.99860	8	.97163	152
5	.00039	8	.00822	166	29	.99852	8	.97011	152
6	.00031	8	.00656	165	30	.99844	8	.96859	151
7	.00023	7	.00491	164	31	.99836	8	.96708	151
8	.00016	8	.00327	164	32	.99828	7	.96557	150
9	.00008	8	.00163	163	33	.99821	8	.96407	150
10	0.00000	8	0.00000	163	34	.99813	8	.96257	149
11	9.99992	8	9.99837	162	35	.99805	8	.96108	148
12	.99984	7	.99675	161	36	.99797	8	.95960	148
13	.99977	8	.99514	161	37	.99789	7	.95812	148
14	9.99969		9.99353		38	9.99782		.95664	

TABLA IV.

Logaritmos de *A* y *B*.

Tiempo transcurrido.	1ʰ		2ʰ		3ʰ		4ʰ	
	Log. *A*.	Log. *B*.	Log. *A*.	Log. *B*.	Log. *A*.	Log. *B*.	Log. *A*.	Log. *B*.
0ᵐ	9.4072	9.4034	9.4109	9.3959	9.4172	9.3828	9.4260	9.3635
1	.4072	.4034	.4110	.3957	.4173	.3825	.4261	.3631
2	.4073	.4033	.4111	.3955	.4174	.3822	.4263	.3627
3	.4073	.4032	.4112	.3953	.4175	.3820	.4265	.3624
4	.4074	.4031	.4113	.3952	.4177	.3817	.4266	.3620
5	9.4074	9.4030	9.4113	9.3950	9.4178	9.3814	9.4268	9.3616
6	.4074	.4029	.4114	.3948	.4179	.3811	.4270	.3612
7	.4075	.4028	.4115	.3946	.4181	.3809	.4272	.3608
8	.4075	.4027	.4116	.3944	.4182	.3806	.4273	.3604
9	.4076	.4026	.4117	.3943	.4183	.3803	.4275	.3600
10	9.4076	9.4025	9.4118	9.3941	9.4184	9.3800	9.4277	9.3596
11	.4077	.4024	.4119	.3939	.4186	.3797	.4279	.3592
12	.4077	.4023	.4120	.3937	.4187	.3794	.4280	.3588
13	.4078	.4022	.4121	.3935	.4188	.3792	.4282	.3584
14	.4078	.4021	.4121	.3933	.4190	.3789	.4284	.3580
15	9.4079	9.4020	9.4122	9.3931	9.4191	9.3786	9.4286	9.3576
16	.4079	.4019	.4123	.3929	.4193	.3783	.4288	.3572
17	.4080	.4018	.4124	.3927	.4194	.3780	.4289	.3568
18	.4080	.4017	.4125	.3925	.4195	.3777	.4292	.3564
19	.4081	.4016	.4126	.3923	.4197	.3774	.4293	.3559
20	9.4081	9.4015	9.4127	9.3921	9.4198	9.3771	9.4295	9.3555
21	.4082	.4014	.4128	.3919	.4199	.3768	.4297	.3551
22	.4083	.4013	.4129	.3917	.4201	.3765	.4299	.3547
23	.4083	.4012	.4130	.3915	.4202	.3762	.4300	.3542
24	.4084	.4010	.4131	.3913	.4204	.3759	.4302	.3538
25	9.4084	9.4009	9.4132	9.3911	9.4205	9.3756	9.4304	9.3534
26	.4085	.4008	.4133	.3909	.4207	.3752	.4306	.3530
27	.4086	.4007	.4134	.3907	.4208	.3749	.4308	.3525
28	.4086	.4006	.4135	.3905	.4209	.3746	.4310	.3521
29	.4087	.4004	.4136	.3903	.4211	.3743	.4312	.3516
30	9.4087	9.4003	9.4137	9.3900	9.4212	9.3740	9.4314	9.3512

TABLA IV.

Logaritmos de *A* y *B*.

Tiempo transcurrido.	1ʰ		2ʰ		3ʰ		4ʰ	
	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*.	Log. *B*.	Log. *A*	Log. *B*.	Log. *A*.	Log. *B*.
30ᵐ	9.4087	9.4003	9.4137	9.3900	9.4212	9.3740	9.4314	9.3512
31	.4088	.4002	.4138	.3898	.4214	.3737	.4315	.3508
32	.4089	.4001	.4139	.3896	.4215	.3733	.4317	.3503
33	.4089	.3999	.4140	.3894	.4217	.3730	.4319	.3499
34	.4090	.3998	.4141	.3892	.4218	.3727	.4321	.3494
35	9.4091	9.3997	9.4142	9.3889	9.4220	9.3723	9.4323	9.3490
36	.4091	.3995	.4144	.3887	.4221	.3720	.4325	.3485
37	.4092	.3994	.4145	.3885	.4223	.3717	.4327	.3480
38	.4093	.3993	.4146	.3882	.4224	.3713	.4329	.3476
39	.4093	.3991	.4147	.3880	.4226	.3710	.4331	.3471
40	9.4094	9.3990	9.4148	9.3878	9.4227	9.3707	9.4333	9.3467
41	.4095	.3988	.4149	.3875	.4229	.3703	.4335	.3462
42	.4055	.3987	.4150	.3873	.4231	.3700	.4337	.3457
43	.4096	.3985	.4151	.3871	.4232	.3696	.4339	.3453
44	.4097	.3984	.4152	.3868	.4234	.3693	.4341	.3448
45	9.4097	9.3982	9.4154	9.3866	9.4235	9.3690	9.4343	9.3443
46	.4098	.3981	.4155	.3863	.4237	.3686	.4345	.3438
47	.4099	.3979	.4156	.3861	.4238	.3683	.4347	.3433
48	.4100	.3978	.4157	.3859	.4240	.3679	.4349	.3429
49	.4100	.3976	.4158	.3856	.4242	.3675	.4351	.3424
50	9.4101	9.3975	9.4159	9.3854	9.4243	9.3672	9.4353	9.3419
51	.4102	.3973	.4161	.3851	.4245	.3668	.4355	.3414
52	.4103	.3972	.4162	.3849	.4246	.3665	.4357	.3409
53	.4103	.3970	.4163	.3846	.4248	.3661	.4359	.3404
54	.4104	.3969	.4164	.3843	.4250	.3657	.4361	.3399
55	9.4105	9.3967	9.4165	9.3841	9.4251	9.3654	9.4363	9.3394
56	.4106	.3965	.4167	.3838	.4253	.3650	.4366	.3389
57	.4107	.3964	.4168	.3836	.4255	.3646	.4368	.3384
58	.4107	.3962	.4169	.3833	.4256	.3643	.4370	.3379
59	.4108	.3960	.4170	.3830	.4258	.3639	.4372	.3374
60	9.4109	9.3959	9.4172	9.3828	9.4260	9.3635	9.4374	9.3369

TABLA IV.

Logaritmos de A y B.

Tiempo transcurrido.	5ʰ		6ʰ		7ʰ		8ʰ	
	Log. A.	Log. B.	Log. A.	Log. B.	Log. A.	Log. B.	Log. A.	Log. B.
0ᵐ	9.4374	9.3369	9.4515	9.3010	9.4685	9.2530	9.4884	9.1874
1	.4376	.3364	.4518	.3003	.4688	.2520	4888	.1861
2	.4378	.3358	.4521	.2996	.4691	.2511	.4892	.1848
3	.4380	.3353	.4523	.2989	.4694	.2502	.4895	.1835
4	.4383	.3348	.4526	.2982	.4697	.2492	.4899	.1822
5	9.4385	9.3343	9.4528	9.2975	9.4701	9.2483	9.4902	9.1809
6	.4387	.3337	.4531	.2968	.4704	.2473	.4906	.1796
7	.4389	.3332	.4534	.2961	.4707	.2463	.4910	.1782
8	.4391	.3327	.4536	.2954	.4710	.2454	.4913	.1759
9	.4393	.3321	.4539	.2947	.4713	.2444	.4917	.1756
10	9.4396	9.3316	9.4542	9.2940	9.4716	9.2434	9.4921	9.1742
11	.4398	.3311	.4544	.2932	.4719	.2425	.4924	.1728
12	.4400	.3305	.4547	.2925	.4723	.2415	.4928	.1715
13	.4402	.3300	.4550	.2918	.4726	.2405	.4932	.1701
14	.4405	.3294	.4552	.2911	.4729	.2395	.4935	.1687
15	9.4407	9.3289	9.4555	9.2903	9.4732	9.2385	9.4939	9.1673
16	.4409	.3283	.4558	.2896	.4735	.2375	.4943	.1659
17	.4411	.3278	.4561	.2888	.4738	.2365	.4946	.1645
18	.4414	.3272	.4563	.2881	.4742	.2355	.4950	.1630
19	.4416	.3266	.4566	.2873	.4745	.2344	.4954	.1616
20	9.4418	9.3261	9.4569	9.2866	9.4748	9.2334	9.4958	9.1602
21	.4420	.3255	.4572	.2858	.4751	.2324	.4961	.1587
22	.4423	.3249	.4574	.2850	.4755	.2313	.4965	.1573
23	.4425	.3244	.4577	.2843	.4758	.2303	.4969	.1558
24	.4427	.3238	.4580	.2835	.4761	.2292	.4973	.1543
25	9.4430	9.3232	9.4583	9.2827	9.4764	9.2282	9.4977	9.1528
26	.4432	.3226	.4585	.2819	.4768	.2271	.4980	.1513
27	.4434	.3220	.4588	.2812	.4771	.2261	.4984	.1498
28	.4437	.3214	.4591	.2804	.4774	.2250	.4988	.1483
29	.4439	.3208	.4594	.2796	.4778	.2239	.4992	.1468
30	9.4441	9.3203	9.4597	9.2788	9.4781	9.2228	9.4996	9.1453

TABLA IV.

Logaritmos de A y B.

Tiempo transcurrido.	5ʰ		6ʰ		7ʰ		8ʰ	
	Log. A.	Log. B.	Log. A.	Log. B.	Log. A.	Log. B.	Log. A.	Log. B.
30ᵐ	9.4441	9.3203	9.4597	9.2788	9.4781	9.2228	9.4996	9.1453
31	.4444	.3197	.4600	.2780	.4784	.2217	.5000	.1437
32	.4446	.3191	.4602	.2772	.4788	.2206	.5003	.1422
33	.4448	.3185	.4605	.2764	.4791	.2195	.5007	.1406
34	.4451	.3178	.4608	.2756	.4794	.2184	.5011	.1390
35	9.4453	9.3172	9.4611	9.2747	9.4798	9.2173	9.5015	9.1375
36	.4456	.3166	.4614	.2739	.4801	.2162	.5019	.1359
37	.4458	.3160	.4617	.2731	.4804	.2151	.5023	.1343
38	.4460	.3154	.4620	.2723	.4808	.2140	.5027	.1327
39	.4463	.3148	.4622	.2714	.4811	.2128	.5031	.1310
40	9.4465	9.3142	9.4625	9.2706	9.4815	9.2117	9.5035	9.1294
41	.4468	.3135	.4628	.2698	.4818	.2105	.5038	.1278
42	.4470	.3129	.4631	.2689	.4821	.2094	.5042	.1261
43	.4473	.3123	.4634	.2681	.4825	.2082	.5046	.1244
44	.4475	.3116	.4637	.2672	.4828	.2070	.5050	.1228
45	9.4477	9.3110	9.4640	9.2664	9.4832	9.2059	9.5054	9.1211
46	.4480	.3103	.4643	.2655	.4835	.2047	.5058	.1194
47	.4482	.3097	.4646	.2646	.4839	.2035	.5062	.1177
48	.4485	.3091	.4649	.2638	.4842	.2023	.5066	.1159
49	.4487	.3084	.4652	.2629	.4846	.2011	.5070	.1142
50	9.4490	9.3078	9.4655	9.2620	9.4849	9.1999	9.5074	9.1125
51	.4492	.3071	.4658	.2611	.4853	.1987	.5078	.1107
52	.4494	.3064	.4661	.2602	.4856	.1974	.5082	.1089
53	.4497	.3058	.4664	.2593	.4860	.1962	.5086	.1072
54	.4500	.3051	.4667	.2584	.4863	.1950	.5091	.1054
55	9.4503	9.3044	9.4670	9.2575	9.4867	9.1937	9.5095	9.1036
56	.4505	.3038	.4673	.2566	.4870	.1925	.5099	.1017
57	.4508	.3031	.4676	.2557	.4874	.1912	.5103	.0999
58	.4510	.3024	.4679	.2548	.4877	.1900	.5107	.0981
59	.4513	.3017	.4682	.2539	.4881	.1887	.5111	.0962
60	9.4515	9.3010	9.4685	9.2530	9.4884	9.1874	9.5115	9.0943

TABLA IV.

Logaritmos de A y B.

Tiempo transcurrido.	9h Log. A.	9h Log. B.	10h Log. A.	10h Log. B	11h Log. A.	11h Log. B.	12h Log. A.	12h Log. B.
0m	9.5115	9.0943	9.5379	8.9509	9.6406	8.7563	9.6841	9.0971
1	.5119	.0925	.5384	.9478	.6412	.7641	.6848	.1014
2	.5123	.0906	.5389	.9447	.6419	.7718	.6856	.1057
3	.5127	.0887	.5393	.9416	.6426	.7794	.6864	.1099
4	.5132	.0867	.5398	.9384	.6433	.7868	.6872	.1141
5	9.5136	9.0848	9.5403	8.9352	9.6440	8.7942	9.6879	9.1183
6	.5140	.0828	.5408	.9320	.6447	.8015	.6887	.1224
7	.5144	.0809	.5412	.9287	.6454	.8087	.6895	.1265
8	.5148	.0789	.5417	.9254	.6461	.8158	.6903	.1306
9	.5153	.0769	.5422	.9221	.6467	.8227	.6911	.1347
10	9.5157	9.0749	9.5427	8.9187	9.6474	8.8296	9.6919	9.1387
11	.5161	.0729	.5432	.9153	.6481	.8364	.6926	.1428
12	.5165	.0708	.5436	.9118	.6488	.8432	.6934	.1468
13	.5169	.0688	.5441	.9083	.6495	.8498	.6942	.1507
14	.5174	.0667	.5446	.9048	.6502	.8564	.6950	.1547
15	9.5178	9.0646	9.5451	8.9013	9.6509	8.8628	9.6958	9.1586
16	.5182	.0625	.5456	.8977	.6516	.8692	.6966	.1625
17	.5186	.0604	.5461	.8940	.6523	.8756	.6974	.1664
18	.5191	.0583	.5466	.9903	.6530	.8818	.6982	.1703
19	.5195	.0561	.5470	.8866	.6538	.8880	.6990	.1741
20	9.5199	9.0540	9.5475	8.8829	9.6545	8.8941	9.6998	9.1779
21	.5204	.0517	.5480	.8791	.6552	.9002	.7006	.1817
22	.5208	.0496	.5485	.8752	.6559	.9062	.7014	.1865
23	.5212	.0474	.5490	.8713	.6566	.9121	.7022	.1893
24	.5217	.0452	.5495	.8674	.6573	.9180	.7030	.1930
25	9.5221	9.0429	9.5500	8.8634	9.6580	8.9238	9.7038	9.1967
26	.5225	.0406	.5505	.8594	.6588	.9295	.7047	.2004
27	.5230	.0383	.5510	.8553	.6595	.9352	.7055	.2041
28	.5234	.0360	.5515	.8512	.6602	.9408	.7063	.2078
29	.5238	.0337	.5520	.8470	.6609	.9464	.7071	.2114
30	9.5243	9.0314	9.5525	8.8427	9.6616	8.9519	9.7079	9.2150

TABLA IV.

Logaritmos de A y B.

Tiempo transcurrido.	9h Log. A	9h Log. B	10h Log. A.	10h Log. B.	11h Log. A.	11h Log. B.	12h Log. A.	12h Log. B.
30m	9.5243	9.0314	9.5525	8.8427	9.6616	8.9519	9.7079	9.2150
31	.5247	.0290	.5530	.8384	.6624	.9573	.7088	.2186
32	.5252	.0266	.5535	.8341	.6631	.9627	.7096	.2222
33	.5256	.0242	.5540	.8297	.6638	.9681	.7104	.2258
34	.5261	.0218	.5545	.8253	.6645	.9734	.7112	.2293
35	9.5265	9.0194	9.5550	8.8208	9.6653	8.9787	9.7121	9.2329
36	.5269	.0169	.5555	.8162	.6660	.9839	.7129	.2364
37	.5274	.0144	.5560	.8115	.6667	.9891	.7137	.2399
38	.5278	.0119	.5565	.8068	.6675	.9942	.7146	.2434
39	.5283	.0094	.5570	.8020	.6682	.9993	.7154	.2468
40	9.5287	9.0069	9.5576	8.7972	9.6690	9.0043	9.7162	9.2503
41	.5292	.0043	.5581	.7923	.6697	.0093	.7171	.2537
42	.5296	.0017	.5586	.7873	.6704	.0142	.7179	.2571
43	.5301	8.9991	.5591	.7823	.6712	.0191	.7187	.2605
44	.5305	.9965	.5596	.7772	.6719	.0240	.7196	.2639
45	9.5310	8.9938	9.5601	8.7720	9.6727	9.0288	9.7204	9.2673
46	.5315	.9911	.5606	.7668	.6734	.0336	.7213	.2706
47	.5319	.9884	.5612	.7614	.6742	.0384	.7221	.2740
48	.5324	.9857	.5617	.7560	.6749	.0431	.7230	.2773
49	.5328	.9830	.5622	.7505	.6757	.0478	.7238	.2806
50	9.5333	8.9802	9.5627	8.7449	9.6764	9.0524	9.7247	9.2839
51	.5337	.9774	.5632	.7392	.6772	.0570	.7256	.2872
52	.5342	.9745	.5638	.7335	.6779	.0616	.7264	.2905
53	.5347	.9717	.5643	.7276	.6787	.0662	.7273	.2937
54	.5351	.9688	.5648	.7217	.6795	.0707	.7281	.2970
55	9.5356	8.9659	9.5654	8.7156	9.6802	9.0752	9.7290	9.3002
56	.5361	.9630	.5659	.7094	.6810	.0796	.7299	.3034
57	.5365	.9600	.5664	.7032	.6818	.0840	.7307	.3066
58	.5370	.9570	.5669	.6968	.6825	.0884	.7316	.3098
59	.5375	.9540	.5675	.6903	.6833	.0928	.7824	.3130
60	9.5379	8.9509	9.5680	8.6837	9.6841	9.0971	9.7333	9.3162

TABLA IV.

LOGARITMOS DE A Y B.

Tiempo transcurrido.	13h		14h		15h		16h	
	Log. A.	Log. B.	Log. A	Log. B	Log. A.	Log. B.	Log. A	Log. B.
0m	9.7333	9.3162	9.7895	9.4884	9.8539	9.6383	9.9287	9.7782
1	.7342	.3194	.7905	.4911	.8550	.6407	.9300	.7804
2	.7351	.3235	.7915	.4937	.8562	.6431	.9314	.7827
3	.7360	.3256	.7925	.4963	.8573	.6455	.9327	.7850
4	.7369	.3287	.7935	.4990	.8585	.6478	.9341	.7873
5	9.7378	9.3319	9.7945	9.5016	9.8597	9.6502	9.9355	9.7896
6	.7386	.3350	.7955	.5042	.8608	.6526	.9368	.7919
7	.7395	.3380	.7965	.5068	.8620	.6550	.9382	.7942
8	.7404	.3411	.7975	.5094	.8632	.6573	.9396	.7965
9	.7413	.3442	.7986	.5120	.8644	.6597	.9410	.7988
10	9.7422	9.3472	9.7996	9.5146	9.8655	9.6621	9.9424	9.8011
11	.7431	.3503	.8006	.5171	.8667	.6644	.9437	.8034
12	.7440	.3533	.8016	.5197	.8679	.6668	.9451	.8057
13	.7449	.3563	.8027	.5223	.8691	.6691	.9465	.8080
14	.7458	.3593	.8037	.5248	.8703	.6715	.9479	.8103
15	9.7467	9.3623	9.8047	9.5274	9.8717	9.6738	9.9493	9.8126
16	.7476	.3653	.8058	.5300	.8727	.6762	.9508	.8149
17	.7485	.3683	.8068	.5325	.8739	.6785	.9522	.8172
18	.7494	.3713	.8078	.5351	.8751	.6809	.9536	.8195
19	.7503	.3742	.8089	.5376	.8763	.6832	.9550	.8218
20	9.7512	9.3772	9.8099	9.5401	9.8775	9.6856	9.9564	9.8241
21	.7522	.3801	.8110	.5427	.8787	.6879	.9579	.8264
22	.7530	.3831	.8120	.5452	.8799	.6903	.9593	.8287
23	.7541	.3860	.8131	.5477	.8812	.6926	.9607	.8310
24	.7549	.3889	.8141	.5502	.8824	.6949	.9622	.8333
25	9.7558	9.3918	9.8152	9.5528	9.8836	9.6973	9.9636	9.8356
26	.7568	.3947	.8162	.5553	.8848	.6996	.9651	.8379
27	.7577	.3976	.8173	.5578	.8861	.7019	.9665	.8402
28	.7586	.4005	.8184	.5603	.8873	.7043	.9680	.8425
29	.7595	.4033	.8194	.5628	.8885	.7066	.9695	.8448
30	9.7605	9.4062	9.8205	9.5653	9.8898	9.7089	9.9709	9.8471

TABLA IV.

LOGARITMOS DE A Y B.

Tiempo transcurrido.	13h		14h		15h		16h	
	Log. A.	Log. B.	Log. A.	Log. B.	Log. A.	Log. B	Log. A.	Log. B.
30m	9.7605	9.4062	9.8205	9.5653	9.8898	9.7089	9.9709	9.8471
31	.7614	.4090	.8216	.5677	.8910	.7112	.9724	.8494
32	.7624	.4119	.8227	.5702	.8923	.7136	.9739	.8517
33	.7633	.4147	.8237	.5727	.8935	.7159	.9754	.8540
34	.7642	.4175	.8248	.5752	.8948	.7182	.9769	.8563
35	9.7652	9.4204	9.8258	9.5777	9.8961	9.7205	9.9784	9.8586
36	.7661	.4232	.8270	.5801	.8973	.7228	.9798	.8609
37	.7671	.4260	.8281	.5826	.8986	.7251	.9813	.8632
38	.7680	.4288	.8292	.8850	.8999	.7275	.9829	.8655
39	.7690	.4316	.8303	.5875	.9011	.7298	.9844	.8678
40	9.7699	9.4343	9.8314	9.5900	9.9024	9.7321	9.9859	9.8701
41	.7709	.4371	.8325	.5924	.9037	.7344	.9874	.8724
42	.7718	.4399	.8336	.5948	.9050	.7367	.9889	.8748
43	.7728	.4426	.8347	.5973	.9063	.7390	.9904	.8771
44	.7738	.4454	.8358	.5997	.9075	.7413	.9920	.8794
45	9.7747	9.4481	9.8369	9.6022	9.9088	9.7436	9.9935	9.8817
46	.7757	.4509	.8380	.6046	.9101	.7459	.9951	.8840
47	.7767	.4536	.8391	.6070	.9114	.7482	.9966	.8863
48	.7776	.4563	.8402	.6094	.9127	.7505	.9982	.8887
49	.7786	.4590	.8414	.6119	.9140	.7529	.9998	.8910
50	9.7796	9.4617	9.8424	9.6143	9.9154	9.7552	0.0013	9.8933
51	.7806	.4644	.8436	.6167	.9167	.7575	.0029	.8956
52	.7815	.4671	.8447	.6191	.9180	.7598	.0044	.8980
53	.7825	.4698	.8459	.6215	.9193	.7621	.0060	.9003
54	.7835	.4725	.8470	.6239	.9206	.7644	.0076	.9026
55	9.7845	9.4752	9.8481	9.6263	9.9220	9.7667	0.0092	9.9050
56	.7855	.4778	.8493	.6287	.9233	.7690	.0108	.9073
57	.7865	.4805	.8504	.6311	.9246	.7713	.0124	.9096
58	.7875	.4831	.8516	.6335	.9260	.7736	.0140	.9120
59	.7885	.4858	.8527	.6359	.9273	.7759	.0156	.9143
60	9.7895	9.4884	9.8539	9.6383	9.9287	9.7782	0.0172	9.9167

TABLA IV.

Logaritmos de *A* y *B*.

Tiempo transcurrido.	17^h		18^h		19^h		20^h	
	Log. *A*.	Log. *B*.	Log. *A*.	Log. *B*.	Log. *A*	Log. *B*	Log. *A*.	Log. *B*.
0^m	0.0172	9.9167	0.1249	0.0625	0.2623	0.2279	0.4523	0.4372
1	.0188	.9190	.1269	.0650	.2649	.2309	.4562	.4414
2	.0204	.9213	.1290	.0676	.2676	.2339	.4601	.4455
3	.0221	.9237	.1310	.0701	.2702	.2370	.4640	.4497
4	.0237	.9260	.1330	.0727	.2729	.2401	.4680	.4540
5	0.0253	9.9284	0.1351	0.0753	0.2756	0.2431	0.4720	0.4582
6	.0270	.9307	.1371	.0779	.2783	.2462	.4761	.4625
7	.0286	.9331	.1392	.0805	.2810	.2493	.4801	.4668
8	.0303	.9355	.1412	.0830	.2838	.2524	.4842	.4711
9	.0319	.9378	.1433	.0856	.2865	.2556	.4884	.4755
10	0.0336	9.9402	0.1454	0.0882	0.2893	0.2587	0.4926	0.4799
11	.0353	.9426	.1475	.0909	.2921	.2619	.4968	.4844
12	.0370	.9449	.1496	.0935	.2949	.2650	.5010	.4889
13	.0386	.9473	.1517	.0961	.2977	.2682	.5053	.4934
14	.0403	.9497	.1538	.0987	.3005	.2714	.5097	.4980
15	0.0420	9.9520	0.1559	0.1013	0.3034	0.2746	0.5140	0.5026
16	.0437	.9544	.1581	.1040	.3063	.2778	.5184	.5072
17	.0454	.9568	.1602	.1066	.3091	.2811	.5229	.5118
18	.0472	.9592	.1623	.1093	.3120	.2843	.5274	.5165
19	.0489	.9616	.1645	.1119	.3150	.2876	.5319	.5213
20	0.0506	9.9640	0.1667	0.1146	0.3179	0.2909	0.5365	0.5261
21	.0523	.9664	.1689	.1173	.3208	.2942	.5411	.5309
22	.0541	.9687	.1711	.1200	.3238	.2975	.5458	.5358
23	.0558	.9711	.1733	.1226	.3268	.3008	.5505	.5407
24	.0576	.9735	.1755	.1253	.3298	.3041	.5553	.5457
25	0.0593	9.9760	0.1777	0.1280	0.2328	0.3075	0.5601	0.5507
26	.0611	.9784	.1799	.1308	.3359	.3109	.5649	.5557
27	.0628	.9808	.1821	.1335	.3389	.3143	.5698	.5608
28	.0646	.9832	.1844	.1362	.3420	.3177	.5748	.5660
29	.0664	.9856	.1867	.1389	.3451	.3211	.5798	.5712
30	0.0682	9.9880	0.1889	0.1417	0.3482	0.3245	0.5848	0.5764

TABLA IV.

Logaritmos de *A* y *B*.

Tiempo transcurrido.	17^h		18^h		19^h		20^h	
	Log. *A*.	Log. *B*.	Log. *A*.	Log. *B*.	Log. *A*.	Log. *B*	Log. *A*.	Log. *B*.
30^m	0.0682	0.9880	0.1889	0.1417	0.3482	0.3245	0.5848	0.5764
31	.0700	.9904	.1912	.1444	.3514	.3280	.5899	.5817
32	.0718	.9929	.1935	.1472	.3545	.3315	.5951	.5871
33	.0736	.9953	.1958	.1499	.3577	.3350	.6003	.5925
34	.0754	.9977	.1981	.1527	.3609	.3385	.6056	.5979
35	0.0772	0.0002	0.2004	0.1555	0.3641	0.3420	0.6110	0.6034
36	.0790	.0026	.2028	.1582	.3674	.3456	.6164	.6090
37	.0809	.0051	.2051	.1610	.3706	.3491	.6218	.6147
38	.0827	.0075	.2075	.1638	.3739	.3527	.6273	.6204
39	.0845	.0100	.2098	.1667	.3772	.3563	.6329	.6261
40	0.0864	0.0124	0.2122	0.1695	0.3805	0.3599	0.6386	0.6319
41	.0883	.0149	.2146	.1723	.3839	.3636	.6443	.6378
42	.0901	.0173	.2170	.1751	.3873	.3673	.6501	.6438
43	.0920	.0198	.2194	.1780	.3907	.3710	.6560	.6498
44	.0939	.0223	.2218	.1808	.3941	.3747	.6619	.6559
45	0.0958	0.0248	0.2243	0.1837	0.3975	0.3784	0.6679	0.6621
46	.0976	.0272	.2267	.1866	.4010	.3822	.6740	.6684
47	.0995	.0297	.2292	.1895	.4045	.3859	.6802	.6747
48	.1015	.0322	.2316	.1924	.4080	.3897	.6865	.6811
49	.1034	.0347	.2341	.1953	.4115	.3936	.6928	.6876
50	0.1053	0.0372	0.2366	0.1982	0.4151	0.3974	0.6993	0.6942
51	.1072	.0397	.2391	.2011	.4187	.4013	.7058	.7008
52	.1092	.0422	.2416	.2040	.4223	.4052	.7124	.7076
53	.1111	.0447	.2442	.2070	.4260	.4091	.7191	.7144
54	.1131	.0473	.2467	.2099	.4297	.4130	.7259	.7214
55	0.1150	0.0498	0.2493	0.2129	0.4334	0.4170	0.7328	0.7284
56	.1170	.0523	.2518	.2159	.4371	.4210	.7398	.7355
57	.1190	.0548	.2544	.2189	.4408	.4250	.7469	.7428
58	.1209	.0574	.2570	.2219	.4446	.4291	.7541	.7501
59	.1229	.0599	.2596	.2249	.4485	.4331	.7615	.7576
60	0.1249	0.0625	0.2623	0.2279	0.4523	0.4372	0.7689	0.7652

TABLA V.—Reducción al meridiano.

$$m = \frac{2\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} h}{\text{sen. } 1''}$$

h	0^m	1^m	2^m	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m
′	″	″	″	″	″	″	″	″
0′	0.00	1.96	7.85	17.67	31.42	49.09	70.68	96.20
1	0.00	2.03	7.98	17.87	31.68	49.41	71.07	96.66
2	0.00	2.10	8.12	18.07	31.94	49.74	71.47	97.12
3	0.00	2.16	8.25	18.27	32.20	50.07	71.86	97.58
4	0.01	2.23	8.39	18.47	32.47	50.40	72.26	98.04
5	0.01	2.31	8.52	18.67	32.74	50.73	72.66	98.50
6	0.02	2.38	8.66	18.87	33.01	51.07	73.06	98.97
7	0.02	2.45	8.80	19.07	33.27	51.40	73.46	99.43
8	0.03	2.52	8.94	19.28	33.54	51.74	73.86	99.90
9	0.04	2.60	9.08	19.48	33.81	52.07	74.26	100.37
10	0.05	2.67	9.22	19.69	34.09	52.41	74.66	100.84
11	0.06	2.75	9.36	19.90	34.36	52.75	75.06	101.31
12	0.08	2.83	9.50	20.11	34.64	53.09	75.47	101.78
13	0.09	2.91	9.64	20.32	34.91	53.43	75.88	102.25
14	0.11	2.99	9.79	20.53	35.19	53.77	76.29	102.72
15	0.12	3.07	9.94	20.74	35.46	54.11	76.69	103.20
16	0.14	3.15	10.09	20.95	35.74	54.46	77.10	103.67
17	0.16	3.23	10.24	21.16	36.02	54.80	77.51	104.15
18	0.18	3.32	10.39	21.38	36.30	55.15	77.93	104.63
19	0.20	3.40	10.54	21.60	36.58	55.50	78.34	105.10
20	0.22	3.49	10.69	21.82	36.87	55.84	78.75	105.58
21	0.24	3.58	10.84	22.03	37.15	56.19	79.16	106.06
22	0.26	3.67	11.00	22.25	37.44	56.55	79.58	106.55
23	0.28	3.76	11.15	22.47	37.72	56.90	80.00	107.03
24	0.31	3.85	11.31	22.70	38.01	57.25	80.42	107.51
25	0.34	3.94	11.47	22.92	38.30	57.60	80.84	107.99
26	0.37	4.03	11.63	23.14	38.59	57.96	81.26	108.48
27	0.40	4.12	11.79	23.37	38.88	58.32	81.68	108.97
28	0.43	4.22	11.95	23.60	39.17	58.68	82.10	109.46
29	0.46	4.32	12.11	23.82	39.46	59.03	82.52	109.95
30	0.49	4.42	12.27	24.05	39.76	59.40	82.95	110.44

TABLA V.—Reducción al meridiano.

$$m = \frac{2\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} h}{\text{sen. } 1''}$$

h	0^m	1^m	2^m	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m
	″	″	″	″	″	″	″	″
30′	0.49	4.42	12.27	24.05	39.76	59.40	82.95	110.44
31	0.52	4.52	12.43	24.28	40.05	59.75	83.38	110.93
32	0.56	4.62	12.60	24.51	40.35	60.11	83.81	111.43
33	0.59	4.72	12.76	24.74	40.65	60.47	84.23	111.92
34	0.63	4.82	12.93	24.98	40.95	60.84	84.66	112.41
35	0.67	4.92	13.10	25.21	41.25	61.20	85.09	112.90
36	0.71	5.03	13.27	25.45	41.55	61.57	85.52	113.40
37	0.75	5.13	13.44	25.68	41.85	61.94	85.95	113.90
38	0.79	5.24	13.62	25.92	42.15	62.31	86.39	114.40
39	0.83	5.34	13.79	26.16	42.45	62.68	86.82	114.90
40	0.87	5.45	13.96	26.40	42.76	63.05	87.26	115.40
41	0.91	5.56	14.13	26.64	43.06	63.42	87.70	115.90
42	0.96	5.67	14.31	26.88	43.37	63.79	88.14	116.40
43	1.01	5.78	14.49	27.12	43.68	64.16	88.57	116.90
44	1.06	5.90	14.67	27.37	43.99	64.54	89.01	117.41
45	1.10	6.01	14.85	27.61	44.30	64.91	89.45	117.92
46	1.15	6.13	15.03	27.86	44.61	65.29	89.89	118.43
47	1.20	6.24	15.21	28.10	44.92	65.67	90.33	118.94
48	1.26	6.36	15.39	28.35	45.24	66.05	90.78	119.45
49	1.31	6.48	15.57	28.60	45.55	66.43	91.23	119.96
50	1.36	6.60	15.76	28.85	45.87	66.81	91.68	120.47
51	1.42	6.72	15.95	29.10	46.18	67.19	92.12	120.98
52	1.48	6.84	16.14	29.36	46.50	67.58	92.57	121.49
53	1.53	6.96	16.32	29.61	46.82	67.96	93.02	122.01
54	1.59	7.09	16.51	29.86	47.14	68.35	93.47	122.53
55	1.65	7.21	16.70	30.12	47.46	68.73	93.92	123.05
56	1.71	7.34	16.89	30.38	47.79	69.12	94.38	123.57
57	1.77	7.46	17.08	30.64	48.11	69.51	94.83	124.09
58	1.83	7.60	17.28	30.90	48.43	69.90	95.29	124.61
59	1.89	7.72	17.47	31.16	48.76	70.29	95.74	125.13

TABLA V.—Reducción al meridiano.

$$m = \frac{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,h}{\text{sen.}\,1''}$$

h	8^m	9^m	10^m	11^m	12^m	13^m	14^m
	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$
0^s	125.65	159.02	196.32	237.54	282.68	331.74	384.74
1	126.17	159.61	196.97	238.26	283.47	332.59	385.65
2	126.70	160.20	197.63	238.98	284.26	333.44	386.56
3	127.22	160.80	198.28	239.70	285.04	334.29	387.48
4	127.75	161.39	198.94	240.42	285.83	335.15	388.40
5	128.28	161.98	199.60	241.14	286.62	336.00	389.32
6	128.81	162.58	200.26	241.87	287.41	336.86	390.24
7	129.34	163.17	200.92	242.60	288.20	237.72	391.16
8	129.87	163.77	201.59	243.33	289.00	338.58	392.09
9	130.40	164.37	202.25	244.06	289.79	339.44	393.01
10	130.94	164.97	202.92	244.79	290.58	340.30	393.94
11	131.47	165.57	203.58	245.52	291.38	341.16	394.86
12	132.01	166.17	204.25	246.25	292.18	342.02	395.79
13	132.55	166.77	204.92	246.98	292.98	342.88	396.72
14	133.09	167.37	205.59	247.72	293.78	343.75	397.65
15	133.63	167.97	206.26	248.45	294.58	344.62	398.58
16	134.17	168.58	206.93	249.19	295.38	245.49	399.52
17	134.71	169.19	207.60	249.93	296.18	346.36	400.45
18	135.25	169.80	208.27	250.67	296.99	347.23	401.38
19	135.80	170.41	208.94	251.41	297.79	348.10	402.32
20	136.34	171.02	209.62	252.15	298.60	348.97	403.26
21	136.88	171.63	210.30	252.89	299.40	349.84	404.20
22	137.43	172.24	210.98	253.63	300.21	350.71	405.14
23	137.98	172.85	211.66	254.37	301.02	351.58	406.08
24	138.53	173.47	212.34	255.12	301.83	352.46	407.02
25	139.08	174.08	213.02	255.87	302.64	353.34	407.96
26	139.63	174.70	213.70	256.62	303.46	354.22	408.90
27	140.18	175.32	214.38	257.37	304.27	355.10	409.84
28	140.74	175.94	215.07	258.12	305.09	355.98	410.79
29	141.29	176.56	215.75	258.87	305.90	356.86	411.73
30	141.85	177.18	216.44	259.62	306.72	357.74	412.68

TABLA V.—Reducción al meridiano.

$$m = \frac{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}\,h}{\text{sen.}\,1''}$$

h	8^m	9^m	10^m	11^m	12^m	13^m	14^m
	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$	$''$
30^s	141.85	177.18	216.44	259.62	306.72	357.74	412.68
31	142.40	177.80	217.12	260.37	307.54	358.62	413.63
32	142.96	178.43	217.81	261.12	308.36	359.51	414.59
33	143.52	179.05	218.50	261.88	309.18	360.39	415.54
34	144.08	179.68	219.19	262.64	310.00	361.28	416.49
35	144.64	180.30	219.88	263.39	310.82	362.17	417.44
36	145.20	180.93	220.58	264.15	311.65	363.07	418.40
37	145.76	181.56	221.27	264.91	312.47	363.96	419.35
38	146.33	182.19	221.97	265.68	313.30	364.85	420.31
39	146.89	182.82	222.66	266.44	314.12	365.75	421.27
40	147.46	183.46	223.36	267.20	314.95	366.64	422.23
41	148.03	184.09	224.06	267.96	315.78	367.53	423.19
42	148.60	184.72	224.76	268.73	316.61	368.42	424.15
43	149.17	185.35	225.46	269.49	317.44	369.31	425.11
44	149.74	185.99	226.44	270.26	318.27	370.21	426.07
45	150.31	186.63	226.12	271.02	319.10	371.11	427.04
46	150.88	187.27	227.81	271.79	319.94	372.01	428.01
47	151.45	187.91	228.50	272.56	320.78	372.91	428.97
48	152.03	188.55	228.19	273.34	321.62	373.82	429.93
49	152.61	189.19	229.88	274.11	322.45	374.72	430.90
50	153.19	189.83	230.58	274.88	323.29	375.62	431.87
51	153.77	190.47	231.27	275.68	324.13	376.52	432.84
52	154.35	191.12	231.97	276.43	324.97	377.43	433.82
53	154.93	191.76	232.66	277.20	325.81	378.34	434.79
54	155.51	192.41	233.36	277.98	326.66	379.26	435.76
55	156.09	193.06	233.06	278.76	827.50	380.17	436.73
56	156.67	193.71	234.76	279.55	328.35	381.08	437.71
57	157.25	194.36	235.46	280.33	329.19	381.99	438.69
58	157.84	195.01	236.10	281.12	330.04	382.90	439.67
59	158.43	195.66	236.82	281.90	330.89	383.82	440.65

TABLA V.—Reducción al meridiano.

$$m = \frac{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''}$$

h	15^m	16^m	17^m	18^m	19^m	20^m	21^m
	″	″	″	″	″	″	″
0ˢ	441.63	502.46	567.2	635.9	708.4	784.9	865.3
1	442.62	503 50	568.3	637.0	709.7	786.2	866.6
2	443.60	504.55	569.4	638.2	710.9	787.5	868.0
3	444.58	505.60	570.5	639.4	712.1	788.8	869.4
4	445.56	506 65	571.6	640.6	713.4	790.1	870.8
5	446.55	507.70	572.8	641.7	714.6	791.4	872.1
6	447.54	508.76	573.9	642.9	715.9	792.7	873.5
7	448.53	509.81	575.0	644.1	717.1	794.0	874.9
8	449.51	510.86	576.1	645.3	718.4	795.4	876.3
9	450.50	511.92	577.2	646.5	719.6	796.7	877.6
10	451.50	512.98	578.4	647.7	720.9	798.0	879.0
11	452.49	514.03	579.5	648.9	722.1	799.3	880.4
12	453.48	515.09	580.6	650.0	723.4	800.7	881.8
13	454.48	516.15	581.7	651.2	724.6	802.0	883.2
14	455.47	517.21	582.9	652.4	725.9	803.3	884.6
15	456.47	518.27	584.0	653.6	727.2	804.6	886.0
16	457.47	519.34	585.1	654.8	728.4	806.0	887.4
17	458.47	520.40	586.2	656.0	729.7	807.3	888.8
18	459.47	521.47	587.4	657.2	730.9	808.6	890.2
19	460.47	522.53	588.5	658.4	732.2	809.9	891.6
20	461.47	523.60	589.6	659.6	733.5	811.3	893.0
21	462.48	524.67	590.8	660.8	734.7	812.6	894.4
22	463.48	525.74	591.9	662.0	736.0	813.9	895.8
23	464.48	526.81	593.0	653.2	737.3	815.2	897.2
24	465.49	527.89	594.2	664.4	738.5	816.6	898.6
25	466.50	528.96	595.3	565.6	739.8	817.9	900.0
26	467.51	530.03	596.5	666.8	741.1	819.2	901.4
27	468.52	531.11	597.6	668.0	742.3	820.5	902.8
28	469.53	532.18	598.7	669.2	743.6	821.9	904.2
29	470.54	533.26	599.9	670.4	744.9	823.2	905.6
30	471.55	534.33	601.0	671.6	746.2	824.6	907.0

TABLA V.—Reducción al meridiano.

$$m = \frac{2\,\text{sen.}^2\,\frac{1}{2}h}{\text{sen.}\,1''}$$

h	15^m	16^m	17^m	18^m	19^m	20^m	21^m
	″	″	″	″	″	″	″
30	471.55	534.33	601.0	671.6	746.2	824.6	907.0
31	472.57	535.41	602.2	672.8	747.4	825.9	908.4
32	473.58	536.50	603.3	674.1	748.7	827.3	909.8
33	474.60	537.58	604.5	675.3	750.0	828.6	911.2
34	475.62	538.67	605.6	676.5	751.3	829.9	912.6
35	476.64	539.75	606.8	677.7	752.6	831.2	914.0
36	477.65	540.83	607.9	678.9	753.8	832.6	915.5
37	478.67	541.91	609.1	680.1	755.1	833.9	916.9
38	479.70	543.00	610.2	681.3	756.4	835.3	918.3
39	480.72	544.09	611.4	682.6	757.7	836.6	919.7
40	481.74	545.18	612.5	683.8	759.0	838.0	921.1
41	482.77	546.27	613.7	685.0	760.2	839.3	922.5
42	483.79	547.36	614.8	686.2	761.5	840.7	923.9
43	484.82	548.45	616.0	687.4	762.8	842.0	925.3
44	485.85	549.55	617.2	688.7	764.1	843.4	926.8
45	486.88	550.64	618.3	689.9	765.4	844.7	928.2
46	487.91	551.73	619.5	691.1	766.7	846.1	929.6
47	488.94	552.83	620.6	692.4	768.0	847.5	931.0
48	489.97	553.93	621.8	693.6	769.3	848.9	932.4
49	491.01	555.03	623.0	694.8	770.6	850.2	933.8
50	492.05	556.13	624.1	696.0	771.9	851.6	935.2
51	493.08	557.24	625.3	697.3	773.1	852.9	936.6
52	494.12	558.34	626.5	698.5	774.5	854.3	938.1
53	495.15	559.44	627.6	699.7	775.7	855.7	939.5
54	496.19	560.55	628.8	701.0	777.1	857.1	940.9
55	497.23	561.65	630.0	702.2	778.4	858.4	942.3
56	498.28	562.76	631.2	703.5	779.7	859.8	943.8
57	499.32	563.87	632.3	704.7	781.0	861.1	945.2
58	500.37	564.98	633.5	705.9	782.3	862.5	946.6
59	501.41	566.08	634.7	707.1	783.6	863.9	948.1

TABLA VI.—Reducción al meridiano. (Segunda parte.)

$$n = \frac{2 \operatorname{sen.}^2 \frac{1}{2} h}{\operatorname{sen.} 1''}$$

h	n	h	n	h	n
0m00s	0″.00	13m40s	0″.33	17m20s	0″.84
1 00	0 .00	„ 50	0 .34	„ 30	0 .88
2 00	0 .00	14 00	0 .36	„ 40	0 .91
3 00	0 .00	„ 10	0 .38	„ 50	0 .95
4 00	0 .00	„ 20	0 .39	18 00	0 .98
5 00	0 .01	„ 30	0 .41	„ 10	1 .02
6 00	0 .01	„ 40	0 .43	„ 20	1 .06
7 00	0 .02	„ 50	0 .45	„ 30	1 .09
8 00	0 .04	15 00	0 .47	„ 40	1 .13
9 00	0 .06	„ 10	0 .49	„ 50	1 .18
10 00	0 .09	„ 20	0 .52	19 00	1 .22
11 00	0 .14	„ 30	0 .54	„ 10	1 .26
12 00	0 .19	„ 40	0 .56	„ 20	1 .30
„ 10	0 .20	„ 50	0 .59	„ 30	1 .35
„ 20	0 .22	16 00	0 .61	„ 40	1 .40
„ 30	0 .23	„ 10	0 .64	„ 50	1 .44
„ 40	0 .24	„ 20	0 .67	20 00	1 .49
„ 50	0 .25	„ 30	0 .69	„ 10	1 .54
13 00	0 .26	„ 40	0 .72	„ 20	1 .60
„ 10	0 .28	„ 50	0 .75	„ 30	1 .65
„ 20	0 .30	17 00	0 .78	„ 40	1 .70
13 30	0 .31	17 10	0 .81	20 50	1 .76

TABLA VII.—Logaritmos del factor *k* para llevar en cuenta la variación del cronómetro en las reducciones al meridiano.

v	Log. k	v	Log. k	v	Log. k
−30s	9.99970	−10s	9.99990	+11s	0.00011
29	71	9	91	12	12
28	72	8	92	13	13
27	73	7	93	14	14
26	74	6	94	15	15
25	75	5	95	16	16
24	76	4	96	17	17
23	77	3	97	18	18
22	78	2	98	19	19
21	79	−1	9.99999	20	20
20	80	+1	0.00001	21	21
19	81	2	02	22	22
18	82	3	03	23	23
17	83	4	04	24	24
16	84	5	05	25	25
15	85	6	06	26	26
14	86	7	07	27	27
13	87	8	08	28	28
12	88	9	09	29	29
−11	9.99989	+10	0.00010	+30	0.00030

TABLA VIII.

Logaritmos del factor ν. $\nu = 0.000277\, n$

n	Log. ν	Dif.	n	Log. ν	Dif.	n	Log. ν	Dif.	n	Log. ν	Dif.
00″	$-\infty$		250″	8.8404	170	500″	9.1414	86	750″	9.3175	58
10	7.4425	3010	260	.8574	164	510	.1500	85	760	.3233	57
20	7.7435	1761	270	.8738	158	520	.1585	83	770	.3290	56
30	7.9196	1249	280	.8896	153	530	.1668	81	780	.3346	55
40	8.0445	969	290	.9049	147	540	.1749	79	790	.3401	55
50	.1414	792	300	.9196	142	550	.1828	79	800	.3456	54
60	.2206	670	310	.9338	138	560	.1907	76	810	.3510	53
70	.2876	580	320	.9476	134	570	.1983	76	820	.3563	53
80	.3456	511	330	.9610	130	580	.2059	74	830	.3616	52
90	.3967	458	340	.9740	125	590	.2133	73	840	.3668	51
100	.4425	414	350	.9865	123	600	.2206	72	850	.3719	51
110	.4839	378	360	.9988	119	610	.2278	71	860	.3770	50
120	.5217	347	370	9.0107	116	620	.2394	69	870	.3820	50
130	.5564	322	380	.0223	112	630	2418	69	880	.3870	49
140	.5886	300	390	.0335	110	640	.2487	67	890	.3919	48
150	.6186	280	400	.0445	108	650	.2554	66	900	.3967	48
160	.6466	263	410	.0553	104	660	.2620	65	910	.4015	48
170	.6729	248	420	.0657	102	670	.2685	65	920	.4063	47
180	.6977	235	430	.0759	100	680	.2750	63	930	.4110	46
190	.7212	223	440	.0859	98	690	.2813	63	940	.4156	46
200	.7435	212	450	.0957	95	700	.2876	61	950	.4202	45
210	.7647	202	460	.1052	94	710	.2937	61	960	.4247	45
220	.7849	193	470	.1146	91	720	.2998	60	970	.4292	45
230	.8042	185	480	.1237	90	730	.3058	59	980	.4337	44
240	8.8227	177	490	9.1327	87	740	9.3117	58	990	9.4381	44

TABLA IX.

Log. $(1-\mu)$ $\mu = 0.000277\, m$

m	Log. $(1-\mu)$	m	Log. $(1-\mu)$	m	Log. $(1-\mu)$	m	Log. $(1-\mu)$
100 s.	9.98780	120 s.	9.98532	140	9.98282	160 s.	9.98031
101	768	121	519	141	269	161	018
102	755	122	507	142	257	162	9.98006
103	743	123	494	143	244	163	9.97993
104	730	124	482	144	232	164	981
105	718	125	469	145	219	165	968
106	706	126	457	146	207	166	955
107	693	127	444	147	194	167	943
108	681	128	432	148	182	168	930
109	668	129	419	149	169	169	918
110	656	130	407	150	157	170	905
111	644	131	394	151	144	171	892
112	631	132	382	152	132	172	880
113	619	133	369	153	119	173	867
114	606	134	357	154	107	174	855
115	594	135	344	155	094	175	842
116	582	136	332	156	081	176	829
117	569	137	319	157	069	177	817
118	557	138	307	158	056	178	804
119	9.98544	139	9.98294	159	9.98044	179	9.97772

ÍNDICE.

PARTE SEGUNDA.—DETERMINACIÓN DE LA FORMA Y MAGNITUD DE LA TIERRA.

PARTE TERCERA.—ELEMENTOS DE ASTRONOMÍA PRÁCTICA.

Páginas.

Páginas.

Páginas

Páginas

TABLAS.
