

RECHERCHES MATHÉMATIQUES
SUR LES
LOIS FONDAMENTALES
DU
MONDE PHYSIQUE,

PAR
L.-J.-A. DE COMMINES DE MARSILLY.

PREMIER MÉMOIRE.
ACTIONS SIMPLES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSION DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

—
1865

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

RECHERCHES MATHÉMATIQUES

NON LES

LOIS FONDAMENTALES

OU

MONDE PHYSIQUE.

I. — *But de ces recherches.*

Connaitre les lois fondamentales du monde physique, et, en les suivant jusque dans leurs dernières conséquences, en déduire l'explication de tous les phénomènes qui se passent autour de nous, faire en un mot la synthèse de la matière, a de tout temps eu le privilège d'exciter au plus haut degré la curiosité des penseurs; ces lois mystérieuses ne semblent pas d'ailleurs au-dessus des forces de l'intelligence humaine, quoique jusqu'ici les philosophes et les géomètres n'aient soulevé que partiellement les voiles qui les recouvrent. Un instant, on a pu croire que la découverte du principe de l'attraction allait constituer une révélation complète; mais cet espoir a été déçu, et l'on a dû reconnaître, après beaucoup d'essais infructueux, que, merveilleuse pour expliquer les phénomènes célestes, la loi de Newton était insuffisante pour les phénomènes qui se passent à la surface du globe. Évidemment, il existe d'autres actions qui interviennent autour de nous et s'évanouissent aux énormes distances qui séparent les astres de leurs satellites: mais quelles sont ces actions?

Moi aussi, j'ai éprouvé la tentation de l'inconnu, et j'ai essayé, dans la mesure de mes forces, de percer les profondes ténèbres qui dérobent à nos regards les lois du monde physique; j'ai tâché surtout de le faire en coordonnant et continuant les travaux nombreux et remarquables qui existent déjà sur ce sujet. Après plusieurs échecs inévitables, où je n'ai vu

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1865, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
RUE DE SÈNE-SAINT-GERMAIN, 10, PRÈS L'INSTITUT.

que des motifs de redoubler de persévérance, je suis enfin parvenu à quelques résultats fondamentaux que j'expose aujourd'hui. Ce ne sont, à proprement parler, que des principes généraux destinés à servir de base à des recherches ultérieures que je compte poursuivre aussi longtemps et aussi loin que mes forces et mon intelligence me le permettront; heureux s'ils peuvent fixer l'attention des géomètres! Ces principes comprennent la question des résistances de la matière, qui a préoccupé beaucoup de savants, et que Lagrange a résolue depuis longtemps, sans que ce fait semble avoir été remarqué par les géomètres, les phénomènes d'adhésion, de frottement et même de capillarité.

II. — Digression sur la MÉCANIQUE ANALYTIQUE de Lagrange.

J'aurai souvent recours à la *Mécanique analytique* de Lagrange, et à l'autorité de ce grand géomètre; effectivement, les doctrines exposées dans son ouvrage sont le point de départ des travaux les plus sérieux que les modernes aient faits sur la Physique mathématique. Mais, tout en rendant à la *Mécanique analytique* un hommage justement mérité, on doit avouer que toutes ses parties ne comportent pas une égale confiance; et l'on peut voir, par les notes dont M. Bertrand a enrichi l'excellente édition qu'il a publiée (3^e édition, chez Mallet-Bachelier; Paris, 1853-1855), et la seule que je citerai dans ce travail, que, même dans le premier volume, le plus achevé des deux, quelques propositions ont été plus ou moins contestées par les géomètres. Je dois appeler particulièrement l'attention sur deux points controversés, afin d'y bien préciser ce qui est vrai, et d'éviter toute espèce de doute sur les conséquences que je tirerai par la suite des doctrines qui y sont exposées.

Commençons par le premier point. Dans une note (t. I, p. 35) M. Bertrand conteste la généralité d'une formule que Lagrange croit applicable à toute espèce de coordonnées, tandis que, d'après un travail de Poinsot reproduit au même volume (p. 389 à 398), elle est applicable aux coordonnées rectangulaires seulement. Je ne résume pas ici la discussion de Poinsot, parce que ce serait trop long, et que la *Mécanique analytique*

doit être entre les mains de tout géomètre qui veut étudier la Physique mathématique; je me bornerai seulement à faire observer que le principe des vitesses virtuelles n'est pas en cause dans tout ceci; que ce sont uniquement les formules qu'en a déduites Lagrange. Or il y suppose que les projections *orthogonales* d'une ligne élémentaire dp , qu'il appelle vitesse virtuelle, sur trois directions données non parallèles à un même plan, se déduisent des projections *orthogonales de la même ligne* sur trois autres directions, et cela au moyen des formules qui servent à passer du système de coordonnées parallèles aux trois premières directions, au système de coordonnées parallèles aux trois dernières. Cette supposition, exacte lorsqu'il s'agit de transformer des coordonnées rectangulaires en d'autres coordonnées rectangulaires, cesse de l'être lorsque l'un des deux systèmes est oblique, ou qu'ils le sont tous les deux. Les formules de Lagrange n'ont donc pas la généralité qu'il leur suppose. Toute l'argumentation de Poinsot repose sur ce fait, qu'on peut ne pas bien saisir au premier abord. Quant au principe même des vitesses virtuelles, il est ici hors de cause; et la preuve en serait au besoin dans la manière dont Cauchy a déduit géométriquement de ce principe, en dehors de toute considération d'axes coordonnés, les conditions générales d'équilibre et de mouvement (voyez les *Exercices de Mathématiques*, 2^e année, p. 70 à 90).

III. — Suite du paragraphe précédent.

Passons au second point. On trouve au bas de la page 187, t. I, la note suivante de M. Bertrand: « La conclusion est exacte, quoique la démonstration ne soit pas suffisante. Nous avons déjà remarqué plusieurs fois qu'on ne peut considérer λ comme une force, que si l'on consent à étendre la signification habituelle du mot *force*. » Cette note me paraît embrasser deux faits, savoir: la démonstration des formules de l'art. 19, p. 185, et les considérations relatives à la fonction λ . Si telle est la véritable portée de cette note, je dois, tout en m'associant complètement à l'opinion exprimée par M. Bertrand sur la fonction λ , affirmer la rigueur de la démonstration de l'article 19, laquelle est appuyée sur des calculs exacts et étran-

gers à toute hypothèse. Au surplus, celui que la démonstration analytique de Lagrange n'aurait pas satisfait trouvera une démonstration plus géométrique de la formule générale d'équilibre avec les multiplicateurs, dans les *Exercices de Mathématiques* de Cauchy, 2^e année, p. 1 à 22. L'illustre auteur s'est servi de considérations mécaniques pour arriver à la formule de Lagrange, et a mis hors de doute l'existence de résistances qui n'interviennent pas explicitement, mais sont représentées par des conditions quelconques, d'où la formule permet de les déduire.

Nous abandonnons en conséquence l'expression de force λ , qui est mauvaise et dont on n'a que faire; mais les équations de l'art. 19 (p. 185) et les conséquences qui en découlent nous sont acquises.

IV. — Première approximation par l'emploi des infiniment petits.

Pour appliquer les principes généraux de la Mécanique aux phénomènes de la Physique, la première chose à faire est d'arrêter la base d'après laquelle on soumettra la matière au calcul. Les géomètres ont, jusque vers la fin du XVIII^e siècle, calculé les actions mécaniques des corps comme si ceux-ci étaient composés de matière continue; Lagrange et Laplace n'agissent pas autrement. Cependant la fausseté de cette hypothèse avait peu à peu été reconnue par tous les physiciens; et, depuis une soixantaine d'années, on s'est préoccupé de trouver des méthodes de calcul plus conformes à la réalité. Le premier pas dans cette voie a été un essai de démontrer que les formules déduites de l'hypothèse de la continuité étaient applicables au cas de la nature, à cause de l'extrême petitesse et de l'extrême rapprochement des molécules constitutives des corps. Depuis, on a cherché des combinaisons de formules d'où la question des distances moléculaires fût écartée, et cette idée semble dominer aujourd'hui. Dans le premier ordre d'idées, je ne connais que les raisonnements de Poisson (*Traité de Mécanique*, 2^e édition, t. I, p. 174 à 178), répétés par M. Cournot dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions*, et ceux de M. Lamé (*Leçons sur la théorie mathématique de l'élas-*

licité des corps solides, p. 28, et *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 1 et 2). Je crois qu'il y a tout avantage à préciser davantage ces raisonnements, ainsi que je vais le faire; on verra que l'hypothèse de la continuité fournit une bonne approximation des phénomènes naturels où n'interviennent pas les actions réciproques des atomes constitutifs de la molécule, mais qu'elle exige, pour représenter les faits aussi complètement que possible, la considération d'une surface matérielle complémentaire des corps continus. C'est aux conséquences de cette addition d'une surface matérielle complémentaire que je bornerai le présent travail.

V. — Hypothèse fondamentale.

Je supposerai, dans ce qui va suivre, que les molécules d'un même corps, simple ou composé, et alors simples dans le premier cas, formées de plusieurs molécules simples dans le second, sont toutes égales de masse et de forme; en agissant ainsi, je crois me conformer à l'opinion la plus généralement répandue chez les physiciens modernes. Je n'examinerai pas, du moins quant à présent, si l'hypothèse de molécules de masses et de formes différentes, admise par les physiciens des siècles précédents plutôt que par ceux de notre époque, est ou non compatible avec les lois de la Mécanique. Je ne me préoccuperai pas non plus des effets mécaniques des formes de ces molécules, auxquels plusieurs savants ont recouru pour expliquer certains phénomènes physiques, tels que la lumière et la chaleur; je me bornerai à considérer les actions exercées à distance dans lesquelles le contact et, par suite, la forme n'interviennent pas. Il suivra du point de vue auquel je me place, que mes résultats conviendront à toutes les hypothèses qu'on pourra faire ultérieurement sur les molécules, soit qu'on regarde, comme le P. Boscovich, les molécules simples comme des points mathématiques contres d'une action, soit qu'on leur accorde une forme, ce qu'il faut faire en tout cas pour les molécules composées, même en admettant les idées du P. Boscovich.

VI. — *Substitution de courbes matérielles continues aux molécules matérielles.*

En Géométrie, on définit le corps une portion limitée de l'espace. Au point de vue physique, je compléterai cette définition en disant que cette portion limitée de l'espace est occupée par des molécules toutes d'une même nature, toutes assujetties aux mêmes lois physiques et mécaniques. Les molécules sont les dernières parties en lesquelles on peut diviser un corps sans en changer la nature; elles peuvent être simples ou composées, c'est-à-dire appartenir à un corps simple, tel que l'or, l'oxygène, etc., ou à un corps composé, tel que l'eau, la fonte, l'acide sulfurique, etc. Qu'elles soient concentrées en des points mathématiques, comme le voulait le P. Boscowich, ou qu'elles aient une forme, comme on l'admet généralement, on peut toujours, dans le calcul, les représenter par une masse ou une force appliquée en un point mathématique, toutes les fois qu'il ne s'agit pas d'effets produits par le contact immédiat, mais seulement d'actions exercées à distance. Je représente par M_i le point de l'espace où se trouve concentrée une molécule de masse m_i , et je suppose cette masse $m_i = m$ la même pour toutes les molécules du même corps; je représente ensuite par O le point où est concentrée la molécule de masse μ , sur laquelle la molécule de masse m concentrée en M_i exerce son action à distance; et l'objet du problème que je me propose est de chercher: 1° si et comment la masse réelle du corps, somme de toutes les masses m , extrêmement petites, mais finies, et situées à des distances commensurables quoique extrêmement petites, peut être représentée par un corps de même masse et de même volume, supposé continu; 2° si et comment les actions réelles de ce corps sur la molécule μ située en O peuvent être représentées par les actions de la masse continue précédemment obtenue, et exercées sur la même molécule.

Dans ce but, je joins un centre de gravité réel M_0 à un centre de gravité tellement voisin, qu'il n'y en ait aucun autre entre les deux, sur la droite qui les joint; parmi les directions qu'on peut suivre en allant, dans les mêmes conditions, du point M_0

aux points voisins, je choisis celle M_0M_1 , qui fait le plus petit angle avec M_0M_1 prolongée; puis je mène une droite M_0M_2 , qui se trouve par rapport à M_0M_1 dans les mêmes conditions que cette dernière est par rapport à M_0M_1 ; et ainsi de suite. J'obtiens de la sorte un contour polygonal $M_0M_1M_2M_3\dots$, qui sera déterminé par un nombre très-grand, mais fini, de molécules.

En dehors de $M_0M_1M_2\dots$, je choisis un point M'_0 très-rapproché de M_0 et tel, qu'il n'y ait pas de point matériel intermédiaire situé entre M_0 et M'_0 ; je choisis ensuite un second point M'_1 , tel, que, parmi les centres de gravité existants, $M'_0M'_1$ soit la ligne la plus près d'être parallèle à M_0M_1 , et qu'il n'y ait point de centre de gravité compris entre ces deux lignes, cette dernière condition primant la première. Je prends ensuite une seconde direction $M'_0M'_2$, remplissant par rapport à M_0M_1 les mêmes conditions que $M'_0M'_1$ par rapport à M_0M_1 ; puis après, une troisième ligne $M'_0M'_3$, qui soit de même par rapport à M_0M_1 ; et ainsi de suite. J'obtiens de cette manière une seconde ligne polygonale $M'_0M'_1M'_2M'_3\dots$, dont tous les sommets seront déterminés par des centres de gravité réels, et qui sera tellement rapprochée de $M_0M_1M_2\dots$, qu'il n'y aura nulle part de centre de gravité entre elles deux. Du reste, elles ne se couperont pas, puisque je n'ai pris nulle part un point de la première pour servir à la seconde, et que j'en ai toujours choisi les côtés aussi près que possible d'être parallèles.

Je pourrai évidemment prendre pour point de départ un nouveau centre de gravité M''_0 tellement près de $M_0M'_0$, qu'il n'y ait pas de centre de gravité intermédiaire, et en agissant par rapport aux deux lignes polygonales $M_0M_1M_2\dots$, $M'_0M'_1M'_2\dots$, comme je viens de le faire par rapport à la première, je pourrai former un nouveau contour polygonal $M''_0M''_1M''_2\dots$; puis, allant de proche en proche, je déterminerai une série de lignes polygonales analogues, qui peuvent être allongées par leurs deux extrémités jusqu'à leurs intersections avec les surfaces limites des corps. Ces lignes, multipliées autant qu'il sera nécessaire, comprendront tous les centres de gravité des molécules du corps; elles seront très-nombreuses, ainsi que les centres de molécules qui en

occupent les sommets; mais enfin elles seront, ainsi que ces centres, en nombre fini. Dès lors, je puis toujours, soit par interpolation, soit autrement, déterminer une courbe particulière qui passe par tous les sommets d'une de ces lignes polygonales, puis en faire autant pour toutes les autres; après quoi je puis déduire, soit par interpolation, soit autrement, une formule générale qui embrasse toutes ces courbes, et donne l'équation d'une quelconque d'entre elles, dès qu'on en connaît un point. Comme les sommets par lesquels passent ces courbes sont en nombre fini, on pourra toujours déterminer, par l'interpolation, des courbes qui ne se rencontrent pas, du moins dans l'espace occupé réellement par les corps.

VII. — *Suite du paragraphe précédent.*

Pour abrégér le discours, j'appelle courbe α la ligne déterminée comme il vient d'être dit par une série de centres de gravité. Le paramètre α pourra être le nombre de molécules comprises entre celle qu'on considère et une molécule désignée d'avance sur le contour polygonal; il pourra être aussi une quantité proportionnelle à ce nombre. Il est clair qu'il y a beaucoup d'arbitraire dans le choix de la courbe, puisqu'on peut suivre à partir du point M_0 une énorme quantité de directions M_0M_1 , ne rencontrant pas d'autre centre de gravité avant M_1 , et ne donnant pas de lignes courbes qui se rencontrent.

Je dis que la matière constituée par les α molécules de masse m concentrées aux points M_0, M_1, M_2, \dots , et situées sur la même courbe, peut être représentée par cette même courbe supposée matérielle et continue, et par deux points matériels situés à ses extrémités, de masse $\frac{m}{2}$ chacun; je dis encore que les différences entre les masses ainsi calculées et la réalité sont inappréciables. Pour le démontrer, je suppose la courbe α rectifiée et allongée ou raccourcie selon que besoin sera, de manière que les sommets $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$, y soient régulièrement espacés. Je suppose de plus, pour la clarté du discours, que M_0 soit l'une des extrémités de la courbe. Je prends cette extrémité pour origine et j'appelle α

une longueur quelconque de la courbe rectifiée, mesurée à partir du point M_0 . Je désigne de plus par $\Delta\alpha$ l'intervalle constant qui y est occupé par deux sommets successifs M_i et M_{i+1} du contour polygonal primitif.

Je peux, en chaque sommet, partager la masse m en deux parties égales $\frac{m}{2}$; puis affecter l'une de ces moitiés à l'arc $\Delta\alpha$ en avant, et l'autre moitié à l'arc $\Delta\alpha$ en arrière; il n'y aura d'exceptions qu'aux deux extrémités M_0, M_{n-1} , où une moitié $\frac{m}{2}$ de la masse restera sans emploi. Ceci posé, je puis considérer isolément l'arc $\Delta\alpha$ avec les deux masses $\frac{m}{2}$ placées à ses extrémités, et l'assimiler à un arc matériel de masse constante et uniformément répartie, dont la somme m est égale à celle des deux masses $\frac{m}{2}$, et a le même point d'application, milieu de $\Delta\alpha$, lorsqu'on les concentre. Alors la quantité de matière répartie sur l'élément $d\alpha$ sera à $m :: d\alpha : \Delta\alpha$; autrement dit, elle sera donnée par la formule

$$(1) \quad \frac{m d\alpha}{\Delta\alpha};$$

et la quantité de matière contenue dans cette courbe matérielle rectifiée étant celle de n molécules sera représentée par

$$(2) \quad \frac{m}{2} + \int_0^{\alpha} m \frac{d\alpha}{\Delta\alpha} + \frac{m}{2} = m + m(n-1) = mn,$$

savoir, les deux demi-masses aux extrémités, et $\alpha = (n-1)\Delta\alpha$.

Maintenant, si l'on fait repasser cette courbe matérielle rectifiée par les opérations de raccourcissement ou d'allongement inverses de celles d'allongement ou de raccourcissement qu'on lui a fait subir, on retombera sur la courbe primitive, pour la forme seulement; mais elle sera devenue une courbe matérielle continue, au lieu de présenter des masses m placées de distance en distance, séparées par des espaces vides et finis. Je dis que cette courbe matérielle reproduit à très-peu près, en chacune de ses parties, la masse qu'on y aurait en répartissant

uniformément, sur l'arc qui sépare deux sommets, les moitiés des masses des molécules placées en chacun de ces sommets. C'est ce que je vais démontrer.

VIII.— *Démonstration de l'exactitude de la substitution.*

La longueur de la courbe α , avant la rectification, étant toujours comptée à partir du point M_0 , et représentée par s , il est évident que les coordonnées de l'extrémité variable de l'arc $M_0 M_1 M_2 \dots M_i$, que nous représenterons comme à l'ordinaire par x, y, z , seront des fonctions de α et déterminées dès que α sera connu (on suppose donnée l'équation de la courbe); on peut donc toujours écrire

$$(3) \quad \begin{cases} x = f_1(\alpha), & y = f_2(\alpha), & z = f_3(\alpha), \\ s = \int_0^\alpha (f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2)^{\frac{1}{2}} d\alpha. \end{cases}$$

Soit ρ la densité de la courbe matérielle au point M_i ; la quantité de matière contenue dans l'arc ds sera ρds ; et comme cet arc provient de l'arc $d\alpha$ de densité constante, il doit renfermer la même quantité de matière; on a donc

$$(4) \quad \rho ds = \frac{m d\alpha}{\Delta\alpha};$$

remplaçant ds par sa valeur tirée de (3), il vient, en divisant tout par $d\alpha$,

$$(5) \quad \rho = \frac{m}{(f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2)^{\frac{1}{2}} \Delta\alpha}.$$

ρ sera donc, ainsi qu'on devait s'y attendre, une expression continue. Je dis que cette expression donnera une répartition de la matière très-peu différente de celle qu'on aurait en répartissant uniformément les deux masses $\frac{m}{2}$ sur l'arc très-petit $\Delta\alpha$ compris entre les points consécutifs M_i et M_{i+1} . En effet, cette répartition donnerait pour la densité de l'arc en avant de M_i

$$\rho' = \frac{m}{\Delta s},$$

et pour la densité de l'arc en arrière,

$$\rho'' = \frac{m}{\Delta_1 s},$$

$\Delta_1 s$ étant pris positivement. Mais, en recourant à la série de Taylor applicable à toutes les courbes, et ici en particulier où s n'a pas de point singulier, puisque c'est un arc qui croît constamment, où par conséquent l'on n'a pas $\frac{ds}{d\alpha} = 0$, ou trouvera, en ne conservant que les valeurs absolues,

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta s = (f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta\alpha}{1} + \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \frac{\Delta\alpha^2}{1.2} + \dots, \\ \Delta_1 s = (f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta\alpha}{1} - \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \frac{\Delta\alpha^2}{1.2} + \dots \end{cases}$$

Donc

$$(7) \quad \begin{cases} \rho' = \frac{m}{\Delta s} = \frac{m}{(\sum f_i'^2)^{\frac{1}{2}} \Delta\alpha + \frac{d^2 s}{d\alpha^2} \frac{\Delta\alpha^2}{1.2} + \dots} \\ = \frac{m}{[\sum f_i'^2]^{\frac{1}{2}} \Delta\alpha} - \frac{m}{[\sum f_i'^2]^{\frac{1}{2}} \Delta\alpha} \left(\frac{d^2 s}{d\alpha^2} \frac{\Delta\alpha^2}{1.2} + \dots \right) \\ + \frac{m}{[\sum f_i'^2]^{\frac{1}{2}} \Delta\alpha} \left(\frac{d^2 s}{d\alpha^2} \frac{\Delta\alpha^2}{1.2} + \dots \right)^2 - \dots \end{cases}$$

On aura de même, abstraction faite du signe,

$$(8) \quad \begin{cases} \rho'' = \frac{m}{\Delta_1 s} = \frac{m}{(\sum f_i'^2)^{\frac{1}{2}} \Delta\alpha} + \frac{m}{[\sum f_i'^2]^{\frac{1}{2}} \Delta\alpha} \left(\frac{d^2 s}{d\alpha^2} \frac{\Delta\alpha^2}{1.2} + \dots \right) \\ + \frac{m}{[\sum f_i'^2]^{\frac{1}{2}} \Delta\alpha} \left(\frac{d^2 s}{d\alpha^2} \frac{\Delta\alpha^2}{1.2} + \dots \right)^2 + \dots \end{cases}$$

Comme les séries (6) sont convergentes, même en ne supposant pas $\Delta\alpha$ très-petit, les séries (7) et (8) le sont également dans les mêmes conditions; et quand on y suppose $\Delta\alpha$ extrêmement petit, ce qui est le cas de la nature, $\frac{m}{(\sum f_i'^2)^{\frac{1}{2}} \Delta\alpha}$

devient énormément grand par rapport à tous les autres termes; en sorte que ρ et ρ'' se réduisent, sans erreur sensible, à ce premier terme. Donc ils sont, sans erreur appréciable, égaux à la valeur (5). Ce qu'il fallait démontrer. Les points matériels qui, au nombre de n , ont servi à déterminer la courbe α , peuvent donc être remplacés par cette courbe matérialisée (si je puis employer cette expression) d'une manière continue et par deux points matériels, de masse $= \frac{1}{2} m$, placés à ses deux extrémités.

IX. — *Courbes β et surfaces $\alpha\beta$.*

Je suis arrivé à substituer au corps composé de molécules finies et distantes un système de courbes matérielles dont la densité varie suivant des lois continues données, et de points matériels, de masse $\frac{m}{2}$, placés à chacune de leurs extrémités.

En outre, ces courbes, tout en étant fort rapprochées entre elles, sont néanmoins distantes de quantités finies; par conséquent, le corps nouveau est composé d'un nombre fini, quoique extrêmement grand, de ces courbes matérielles. A des quantités négligeables près, ces courbes et les points complémentaires donneront une masse totale identique à celle que donnerait l'ensemble des molécules dont le corps primitif est composé. Continuons à procéder dans cet ordre d'idées.

J'ai désigné par α la longueur de l'arc rectifié et ramené à une densité constante; cet arc est la seule variable dans chacune des courbes considérées ci-dessus, lorsqu'on la suppose déterminée isolément; je désignerai en conséquence par le mot *courbes α* toutes les courbes du système déterminé comme il a été expliqué au § VI. C'est du reste ce que j'ai dit en commençant le § VII. Évidemment, deux courbes α différentes n'ont pas toutes les constantes identiques.

Je puis unir le point M_1 d'une courbe α au point M'_1 d'une des courbes α les plus voisines, et cela de telle sorte qu'il n'y ait aucune autre courbe α sur le trajet $M_1 M'_1$; puis le point M'_1 au point M''_1 d'une troisième courbe α , tel que la direction de $M'_1 M''_1$ diffère le moins possible du prolongement de $M_1 M'_1$, et

que $M'_1 M''_1$ ne rencontre aucune courbe α entre ses deux extrémités; puis le point M''_1 à un quatrième M'''_1 remplissant par rapport à lui les mêmes conditions que M'_1 par rapport à M_1 ; et ainsi de suite. Je formerai ainsi un contour polygonal appuyé sur une série finie de courbes α et arrivant par ses deux extrémités à la surface limite du corps. Il aura pour sommets des centres de gravité de molécules, tout comme le contour polygonal α . Une fois la série de fibres α déterminée par le premier contour polygonal, je peux, en prenant sur chaque fibre α le point $M^{(i)}$ le plus rapproché de $M_1^{(i)}$, et situé du même côté, former les sommets d'un second contour polygonal appuyé sur le même système de fibres α ; prenant ensuite les points $M_2^{(i)}$, je formerai un troisième contour polygonal, et ainsi de suite. J'en ferai autant au-dessous du premier contour; puis, en désignant par β les contours de cette seconde série, je pourrai substituer des courbes continues β aux contours polygonaux β , et une surface continue $\alpha\beta$ au double système de courbes α et de courbes β qui s'appuient les unes sur les autres.

Prenons ensuite une courbe α située en dehors de cette première surface, mais de telle sorte qu'il n'y ait aucune autre courbe α entre elle et la surface dont il s'agit. Choisissons sur cette courbe α le centre de gravité de molécule M_1 le plus rapproché possible du point M_1 situé sur la courbe α la plus rapprochée de celle-ci qui existe dans la surface. Soit $M_1 M'_1$ le premier élément du contour polygonal β dans la surface. Nous chercherons, sur une courbe α située en dehors de celle-ci, un point M'_1 tel, qu'il n'y ait aucune courbe matérielle entre la surface et $M_1 M'_1$, et que de plus la direction $M_1 M'_1$ soit le plus près possible du parallélisme avec $M_1 M'_1$. Continuons à déterminer $M'_1 M''_1$ de même par rapport à $M_1 M'_1$, $M''_1 M'''_1$ par rapport à $M'_1 M''_1$, etc.; nous aurons un second système de courbes α reliées par un contour polygonal β appuyé sur elles toutes. On peut substituer à ce système une surface courbe très-rapprochée de la première, et ne laissant entre elles deux aucune courbe matérielle. On pourra subdiviser cette nouvelle surface en une très-grande quantité de zones par des courbes β ne laissant entre elles aucun point matériel, ainsi qu'on l'a fait pour la première surface.

Prenant maintenant en avant de cette seconde surface une courbe matérielle α très-rapprochée de M_1, M_2, M_3, \dots et M'_1, M'_2, M'_3, \dots , et ne laissant entre cette dernière et elle aucune courbe matérielle, on déterminera, en agissant comme on vient de le faire, une troisième surface formée de courbes β appuyées sur des courbes α et ne laissant entre elle et la seconde surface aucune courbe matérielle, puis on passera de la troisième surface à une quatrième, et ainsi de suite. On aurait pu en faire autant en opérant en arrière de la première surface. On aura donc ainsi ramené toutes les courbes matérielles α à être distribuées sur une série de surfaces divisées chacune en une extrêmement grande quantité de quadrilatères courbes formés par les deux systèmes de courbes α et β .

Il est évident en outre que, sur chaque face, un point sera déterminé dès qu'on connaît les valeurs des arcs α et β interceptés entre ce point et deux courbes fixes, l'une β , l'autre α ; en d'autres termes, dès que l'on connaîtra les valeurs correspondantes de α et de β . Mais, pour pouvoir préciser ce point dans l'espace, il faut connaître non-seulement les arcs α et β , mais encore la surface à laquelle il appartient.

X. — Courbes γ , surfaces $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$.

Partons d'un point M_1 situé sur une surface $\alpha\beta$ et joignons-le au point le plus rapproché de la surface immédiatement voisine, point que nous désignerons par M'_1 ; puis joignons M'_1 à un point M''_1 situé sur la surface $\alpha\beta$ immédiatement suivante et tel, que M'_1, M''_1 diffère le moins possible en direction de M_1, M'_1 ; en continuant de la sorte en avant et en arrière de M_1 , nous formerons un contour polygonal qui rencontrera toutes les surfaces, aboutira en général par ses deux extrémités aux surfaces limites du corps (à moins qu'il ne forme un contour fermé) et aura en tous ses sommets des centres de molécules. Je puis substituer une courbe à ce contour polygonal, et je la désignerai sous la dénomination de courbe γ . Maintenant, si je marche sur toutes les courbes α que rencontre cette courbe γ , et si je joins successivement les points matériels qui y suivent immédiatement ceux que j'ai pris pour la

courbe γ , j'obtiendrai un second contour polygonal et une seconde courbe γ ; agissant par rapport à celle-ci comme je l'ai fait par rapport à la première, j'aurai une troisième courbe γ , et ainsi de suite. J'arriverai ainsi à déterminer une surface différente de celles de la première série, qui les coupera toutes, et qui sera formée d'une courbe génératrice γ appuyée sur des courbes directrices α . Je désignerai cette surface par l'appellation de surface $\gamma\alpha$. Mais j'aurais pu cheminer sur les courbes β rencontrées par la première courbe γ tout aussi bien que je l'ai fait sur les courbes α , et j'aurais trouvé une nouvelle surface $\beta\gamma$ formée de la courbe génératrice γ appuyée sur les courbes directrices β . Ainsi j'ai un système de surfaces $\alpha\beta$ en nombre excessivement grand, mais fini, une surface $\gamma\alpha$ et une surface $\beta\gamma$. La surface $\alpha\gamma$ rencontre toutes les surfaces $\alpha\beta$ suivant des courbes α qui sont leurs communes intersections; la surface $\beta\gamma$ les rencontre toutes suivant des courbes β . Il est clair qu'on peut construire, en marchant suivant les courbes β qui percent la première surface $\gamma\alpha$, une série indéfinie de surfaces $\gamma\alpha$ qui comprendront toutes les molécules du corps; et que, de même, en marchant suivant les courbes α qui percent la première surface $\beta\gamma$, on peut construire autant de surfaces $\beta\gamma$ de même nature qu'il y a de molécules dans une courbe α , et que ces surfaces comprendront aussi toutes les molécules du corps. Les surfaces $\beta\gamma$ et $\gamma\alpha$ se couperont suivant des courbes γ .

Me voici donc arrivé à la détermination de trois systèmes de surfaces qui comprendront chacun toutes les molécules du corps et découperont l'espace en solides hexaédriques curvilignes dont les sommets seront les centres mêmes de gravité des molécules. Ces systèmes peuvent servir de coordonnées, en ce sens que tout point sera déterminé dès qu'on connaîtra les trois surfaces qui y passent. On conçoit du reste qu'ils laissent un grand arbitraire, puisque les directions de départ, pour chaque système de courbes, et par suite de surfaces, sont entièrement indéterminées. Enfin on peut substituer, comme coordonnées, aux trois systèmes de surfaces les trois systèmes de courbes.

XI. — *Substitution des surfaces matérielles continues aux courbes matérielles continues.*

On aurait pu évidemment commencer par les courbes β ou par les courbes γ , aussi bien qu'on l'a fait par les courbes α , et supposer que ce seraient elles qui, rendues matérielles, remplaceraient les molécules. En représentant dès lors par β la longueur d'une courbe β rectifiée et allongée ou raccourcie de manière que les molécules qui y sont placées deviennent toutes également distantes, on peut regarder l'arc s , de cette courbe comme une fonction de β ; il en sera de même de l'arc s , de la courbe γ par rapport à γ . Dans ces conditions, on peut intercaler une infinité de surfaces $\alpha\beta$ entre celles qui sont déterminées par les molécules, et les soumettre à un même mode de génération. Il suffira d'admettre que toutes les courbes γ qui traversent une surface $\alpha\beta$ ont la même valeur de γ comptée à partir de la surface $\alpha\beta$ prise pour base. Il en est de même pour les surfaces $\alpha\gamma$ et pour les surfaces $\beta\gamma$; en sorte qu'on arrive à diviser l'espace occupé par le corps en une infinité de parallélépipèdes élémentaires compris entre les intersections de deux surfaces $\alpha\beta$, deux surfaces $\beta\gamma$ et deux surfaces $\gamma\alpha$ infiniment voisines par couple. Il s'agit actuellement de prouver qu'on peut, en général et sans erreur sensible, supposer la matière continue; en d'autres termes, qu'on peut substituer ces parallélépipèdes matériels aux courbes matérielles continues par lesquelles nous avons déjà représenté la masse du corps. Mais, pour y arriver, nous commencerons par démontrer qu'on peut substituer les surfaces $\alpha\beta$ matérialisées aux courbes α matérielles.

XII. — *Même sujet.*

Considérons l'une des surfaces $\alpha\beta$ primitivement construites, c'est-à-dire contenant des molécules qu'on a remplacées par des courbes matérielles α , toutes comprises dans cette surface, et des points matériels de masse $\frac{m}{2}$ placés aux deux extrémités de ces courbes que nous ne supposerons pas fer-

mées. Les courbes matérielles α sont situées à des distances finies les unes des autres, mais extrêmement rapprochées, et nous ne nous occupons point, quant à présent, des courbes α intercalées entre elles et infiniment rapprochées les unes des autres; mais nous supposons une infinité de courbes β , en sorte que la surface $\alpha\beta$ sera divisée en une infinité de quadrilatères curvilignes par un nombre fini de courbes α et un nombre infini de courbes β . Considérons la surface comprise entre deux courbes β infiniment voisines. La masse de chaque arc élémentaire de courbe α qui s'y trouve compris peut être supposée appartenir moitié au quadrilatère en avant, moitié au quadrilatère en arrière. La masse de cet arc est ρds , que

nous avons trouvée, § VIII, être $\frac{m d\alpha}{\Delta\alpha}$. Elle est constante pour tous les arcs de la même surface élémentaire déterminée par deux courbes β consécutives, puisque $d\alpha$ et $\Delta\alpha$ y sont constants. Donc chaque petit quadrilatère curviligne de base Δs , et de hauteur ds , correspond à une masse $\frac{1}{2} \frac{m d\alpha}{\Delta\alpha}$ placée à

droite et à une masse $\frac{1}{2} \frac{m d\alpha}{\Delta\alpha}$ placée à gauche; c'est-à-dire que si on le considère comme une surface matérielle douée d'une densité δ , on aura

$$(9) \quad \delta d\Lambda = \frac{m d\alpha}{\Delta\alpha},$$

et que l'ensemble de ces surfaces équivaldra, sous le rapport de la masse, à tous les arcs matériels $\frac{ds}{d\alpha} d\alpha$ qui y étaient compris; il y aura cependant, aux deux extrémités de la zone considérée, un demi-arc matériel sans emploi. Remontant de cette zone élémentaire à toute la surface $\alpha\beta$, on voit que les molécules qui y sont placées peuvent être représentées par cette surface matérialisée, à laquelle il faudra de plus ajouter une série de points matériels de masse $\frac{m}{2}$ placés aux extrémités des fibres α , et deux courbes α matérielles extrêmes, moitié en masse des autres courbes α .

Comme on aurait pu tout aussi bien regarder les courbes β

comme les courbes matérielles, il y aurait eu sur le contour de la surface des courbes β matérielles au lieu des points placés aux extrémités des courbes α ; on en conclura que les molécules contenues dans la surface $\alpha\beta$ peuvent être représentées par cette surface et par son contour matérialisés, ce dernier ayant une masse moitié moindre que les courbes matérielles qu'on avait préalablement substituées aux molécules.

Les quadrilatères que je suppose matériels ont un côté (l'arc β) très-petit, mais fini; il y a donc, entre les surfaces de deux quadrilatères consécutifs qu'on rencontre en cheminant le long d'une même courbe β , une différence de même ordre que ces surfaces, et, partant, une différence finie entre les densités de ces deux quadrilatères, puisque leur masse est la même et égale à $\frac{m d\alpha}{\Delta\alpha}$. Mais cette différence est tellement

petite, qu'elle est négligeable. La démonstration de ce fait est identique à celle qu'on a donnée au § VIII, puisque ces quadrilatères diffèrent seulement en ce que β y est devenu $\beta + \Delta\beta$. On peut toujours supposer qu'ils proviennent de la déformation d'un rectangle $\Delta\beta d\alpha$, qu'on obtient en ramenant les courbes α ou β à être uniformément denses; donc la masse appartenant à l'unité superficielle de la surface $\alpha\beta$ sera, au point (α, β) , égale à $m \frac{d\alpha d\beta}{\Delta\alpha \Delta\beta}$. La formule donnant la densité superficielle δ sera, en représentant par d^2A l'aire élémentaire du second ordre,

$$(10) \quad \delta \frac{d^2A}{d\alpha d\beta} = \frac{m}{\Delta\alpha \Delta\beta}.$$

Ce que j'ai fait pour une surface $\alpha\beta$ peut se faire pour toutes les autres; je suis donc arrivé à prouver qu'on peut, sans grande erreur, substituer aux molécules qui constituent en réalité le corps une série de surfaces matérielles $\alpha\beta$, en nombre fini quoique extrêmement grand, et séparées les unes des autres par des distances extrêmement petites, mais mesurables, et en outre autant de contours matériels complémentaires qu'il y a de ces surfaces. Il existe en outre deux autres systèmes de surfaces qui coupent les premières, mais ne sont pas matérielles, et partagent l'espace occupé par le corps en

une infinité d'hexaédres curvilignes ayant pour bases les petits parallélogrammes matériels découpés sur les surfaces $\alpha\beta$ par les surfaces $\beta\gamma$ et $\gamma\alpha$ infiniment voisines.

Je termine en faisant observer que j'aurais pu tout aussi bien commencer par supposer matérielles les courbes β ou les courbes γ , et arriver à matérialiser les surfaces $\beta\gamma$ ou les surfaces $\gamma\alpha$.

XIII. — *Substitution des volumes matériels continus aux surfaces matérielles continues.*

En répétant le raisonnement du § VIII, on prouvera le plus facilement du monde qu'on peut substituer aux surfaces matérielles dont il a été question dans l'article précédent des parallépipèdes matériels, c'est-à-dire la matière continue, pourvu qu'on ajoute aux deux extrémités moitié de la masse des surfaces matérielles, laquelle sera restée sans emploi; la totalité de la masse des molécules pourra donc être remplacée par le corps supposé continu, les contours matériels complémentaires, et les surfaces matérielles extrêmes réduites à moitié de leur masse; et comme il est indifférent d'avoir commencé par tel système de surfaces ou par tel autre, et que, suivant l'ordre adopté, la partie complémentaire consistera en contours matériels ou en surfaces matérielles, il est évident que les uns et les autres reviennent au même, ce qu'on pourrait prouver directement d'ailleurs; on pourra donc remplacer la totalité des molécules par le corps supposé continu en y ajoutant une surface matérielle complémentaire, qui ne sera pas autre chose que la surface limite du corps matérialisée et représentant la demi-masse des molécules qui y sont situées. Cette substitution faite, il est évidemment indifférent, au point de vue du résultat du calcul, que les surfaces $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ soient choisies de manière à passer par des centres réels de gravité, ou entre ceux-ci; il suffira d'admettre que si le corps est, au moyen de condensations et dilations partielles, ramené à avoir partout la même densité, les trois systèmes de surfaces dont il s'agit deviennent trois systèmes de plans se coupant à angle droit.

XIV. — Application de la même méthode aux forces.

Si, au lieu de considérer seulement les masses des molécules, je leur avais substitué les forces (ou une des forces) qui les animent, j'aurais fait des raisonnements identiques, et je serais arrivé à conclure qu'au point de vue de l'action de ces forces on peut, sans grande erreur, leur substituer un volume qui en soit animé d'une manière continue jusque dans ses moindres éléments, et une surface (la surface limite du corps) qui en soit également animée d'une manière continue, mais de telle sorte qu'elle équilibre à la moitié des forces des molécules qu'elle contient.

Et comme cette distribution des forces est la même que celle des masses, il est clair que la loi même de la force, c'est-à-dire $\frac{F}{m}$, F représentant la totalité de l'action de la molécule, sera la même dans la matière continue et dans la molécule finie, située à une distance finie de ses congénères.

Ainsi donc j'arrive, un peu longuement il est vrai, mais d'une manière bien plus précise, aux résultats constatés par les raisonnements généraux de Poisson et de M. Lamé, avec cette différence, d'une importance capitale comme on le verra ci-après, que, pour représenter totalement les actions d'un corps discontinu par celles d'un corps supposé continu, il faut ajouter à ce dernier une surface matérielle complémentaire. Nous verrons plus loin que cette surface complémentaire, insignifiante quand il s'agit de calculer les masses et les attractions en raison inverse du carré de la distance, acquiert tout à coup une importance réelle dès qu'il s'agit d'attractions en raison inverse de puissances de la distance supérieures à la seconde, et qu'elle nous donnera, comme première approximation, des lumières importantes sur plusieurs questions physiques.

XV. — Question de la résistance.

Je puis aborder à présent la question de la résistance de la matière, dont la cause a de tout temps préoccupé les géomètres et les physiciens. Quand les partisans de Newton ont

tenté de tout expliquer par l'attraction, on leur a de suite objecté que si la matière n'obéissait qu'à des attractions, elle se concentrerait en un point unique. C'était supposer qu'un mouvement pouvait anéantir la matière, ce qui est absurde; mais de cette absurdité reconnue, on concluait que l'attraction était insuffisante pour expliquer l'équilibre de la matière, sans songer que ce non-anéantissement de la matière était lui-même une condition qui pouvait équivaloir à une résistance. On chercha donc ailleurs les causes de la résistance, et on en vint à supposer dans la nature deux sortes de corps, les uns attractifs, les autres répulsifs, dont le mélange produisait l'équilibre. C'était transporter, en quelque sorte, les deux principes du manichéisme dans le monde physique. Aux yeux des savants, le calorique fut, pendant un temps, chargé du rôle de la répulsion; puis, lorsque vint à prédominer l'opinion qui attribue la chaleur, comme la lumière, à un mouvement de l'éther, et supprime l'existence du calorique en tant que corps particulier, on reporta sur l'éther lui-même le rôle de la résistance. On ne semble pas s'être demandé ce qui en résulterait pour les vastes espaces célestes où l'éther paraît être seul; et cependant l'existence d'un corps composé de particules qui se repoussent toutes entre elles est aussi difficile à concevoir que celle d'un corps dont toutes les particules s'attirent. M. de Saint-Venant a lu le 20 janvier 1844, à la Société Philomathique de Paris, un Mémoire fort intéressant sur la question de savoir s'il existe des masses continues, etc., lequel est plein de faits relatifs à l'histoire de la question de la résistance des corps; je ne puis qu'y renvoyer.

Mais cette question de la résistance des corps a depuis longtemps été résolue incidemment par Lagrange, ainsi que je l'ai dit au § I^{er}; et pas une phrase, pas même un mot de l'auteur, ou de son savant commentateur M. Bertrand, ne font soupçonner qu'ils aient entrevu l'extrême importance de ce résultat. Pareil fait a des précédents dans l'histoire des Mathématiques; il suffit de citer ce que Jacobi a dit d'un théorème de Poisson. La solution de Lagrange se trouve dans la *Mécanique analytique*, 1^{re} partie, sect. VII, consacrée à l'Hydrostatique. Voyez aussi ce qu'il dit au paragraphe *Analogie des problèmes de Statique avec ceux de maximis et de minimis*, t. 1^{er}, p. 87

et suiv. Au § II de la section VII (t. I^{er}, p. 179), Lagrange part de la condition que le volume élémentaire est invariable, ce qu'il exprime par la condition

$$(11) \quad \delta \cdot dx \, dy \, dz = 0;$$

et en appliquant à cette condition sa méthode des multiplicateurs, il arrive aux équations connues d'ailleurs pour l'équilibre des fluides incompressibles, savoir :

$$(12) \quad \frac{d\lambda}{dx} = \Gamma X, \quad \frac{d\lambda}{dy} = \Gamma Y, \quad \frac{d\lambda}{dz} = \Gamma Z,$$

où Γ représente la densité (p. 185). L'importance de ce résultat ne git point dans ce qu'il reproduit, en dehors de toute hypothèse sur la nature des pressions, les formules qu'on avait obtenues par d'autres considérations; elle est tout entière dans ceci, que l'invariabilité de volume élémentaire équivaut, comme toutes les autres conditions, à une résistance; pour les corps compressibles, il en est évidemment de même de l'invariabilité de la quantité de matière, et je le prouverai tout à l'heure. Donc, et ceci est de la plus haute importance, tout corps résiste par cela même qu'il est; par le fait même de son existence, tout corps oppose une résistance aux efforts qui lui sont imprimés; il détruit toutes les actions qui ne produisent pas de mouvement. Il n'y a pas des corps qui repoussent mêlés à des corps qui attirent; il n'y a que des corps attirant les autres dans la limite des conditions nécessaires à leur existence. Le double principe du manichéisme est faux dans l'ordre physique comme il l'est dans l'ordre moral.

XVI. — Résistance des corps compressibles.

Je viens de dire que l'invariabilité de la quantité de matière constituait une résistance tout aussi bien que l'invariabilité de volume; il suffit, pour le démontrer, de répéter les calculs de Lagrange dans la section précitée, en écrivant

$$(13) \quad \delta \cdot \Gamma \, dx \, dy \, dz = 0$$

au lieu de la relation (11). Partant alors de ce que Lagrange a

prouvé pour la déformation du parallépipède rectangulaire, on trouve

$$\delta \cdot \Gamma \, dx \, dy \, dz = dx \, dy \, dz \left(\frac{d\Gamma}{dx} dx + \frac{d\Gamma}{dy} dy + \frac{d\Gamma}{dz} dz \right) + \Gamma \, dx \, dy \, dz \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right).$$

L'équation générale d'équilibre sera donc alors

$$\mathbf{S} \left[\Gamma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + \lambda \, dx \, dy \, dz \left(\frac{d\Gamma}{dx} \delta x + \frac{d\Gamma}{dy} \delta y + \frac{d\Gamma}{dz} \delta z \right) + \lambda \Gamma \, dx \, dy \, dz \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right) \right] = 0.$$

Opérant ensuite les calculs développés dans la *Mécanique analytique*, n° 17 (p. 184), on trouve

$$\mathbf{S} \lambda \Gamma \, dx \, dy \, dz \frac{d\delta x}{dx} = \mathbf{S} \, dy \, dz (\lambda'' \Gamma'' \delta x'' - \lambda' \Gamma' \delta x') - \mathbf{S} \left(\lambda \frac{d\Gamma}{dx} + \Gamma \frac{d\lambda}{dx} \right) \delta x \, dx \, dy \, dz;$$

et de même

$$\mathbf{S} \lambda \Gamma \, dx \, dy \, dz \frac{d\delta y}{dy} = \mathbf{S} \, dx \, dz (\lambda'' \Gamma'' \delta y'' - \lambda' \Gamma' \delta y') - \mathbf{S} \left(\lambda \frac{d\Gamma}{dy} + \Gamma \frac{d\lambda}{dy} \right) \delta y \, dx \, dy \, dz;$$

$$\mathbf{S} \lambda \Gamma \, dx \, dy \, dz \frac{d\delta z}{dz} = \mathbf{S} \, dx \, dy (\lambda'' \Gamma'' \delta z'' - \lambda' \Gamma' \delta z') - \mathbf{S} \left(\lambda \frac{d\Gamma}{dz} + \Gamma \frac{d\lambda}{dz} \right) \delta z \, dx \, dy \, dz.$$

Substituant toutes ces valeurs dans l'équation générale d'équilibre, et égalant séparément à zéro les coefficients des variations indéterminées, on trouve

$$\Gamma X - \Gamma \frac{d\lambda}{dx} = 0, \quad \Gamma Y - \Gamma \frac{d\lambda}{dy} = 0, \quad \Gamma Z - \Gamma \frac{d\lambda}{dz} = 0;$$

ou, divisant tout par le facteur commun Γ qui ne peut pas

être nul,

$$(14) \quad X - \frac{d\lambda}{dx} = 0, \quad Y - \frac{d\lambda}{dy} = 0, \quad Z - \frac{d\lambda}{dz} = 0.$$

Donc encore ici $\Gamma \frac{d\lambda}{dx} dx dy dz$, $\Gamma \frac{d\lambda}{dy} dx dy dz$, $\Gamma \frac{d\lambda}{dz} dx dy dz$ représentent trois résistances qui annulent les forces dont l'élément matériel est animé; et les causes de ces trois résistances sont le seul fait, écrit dans l'équation (13), que le mouvement ne peut pas faire varier la quantité de matière; en d'autres termes, la résistance est due, comme je l'ai dit, à la condition de l'existence de la matière, indépendante de la loi du mouvement.

Il suffit de se reporter aux équations du mouvement et à la manière dont on les déduit de celles de l'équilibre pour voir que les mêmes conséquences relativement à la résistance en découlent immédiatement. Les équations (14) ne sont pas du reste particulières aux gaz; elles appartiennent à tous les corps, car ceux-ci sont compressibles à des degrés divers.

Ainsi la formule générale de la Mécanique, établie par Lagrange, a une signification physique propre, et autre que celle qu'on peut y mettre; si elle ne détermine pas les valeurs réelles des actions de la matière, au moins elle établit nettement le fait que l'existence de la matière entraîne une résistance égale aux actions qui se développent. On peut en tirer encore quelques autres conséquences, ainsi que nous allons le montrer.

XVII. — Liaison de la pression avec la densité.

Les équations (14) ont toujours lieu en tout état de cause; les équations (12) ne peuvent exister que s'il y a des mouvements virtuels compatibles avec l'invariabilité de densité existant dans le corps, lequel peut cependant ne pas avoir une même densité en tous ses points. Mais évidemment il en est toujours ainsi; car on conçoit toujours la possibilité de mouvements de translation ou rotation du corps sans déformation. Donc les équations (12) et (14) peuvent exister simultanément; seulement les valeurs de λ n'y sont pas les mêmes.

Désignons, pour les distinguer, les premières par p , et gardons le signe λ pour les secondes. p est ce genre de résistance qu'on connaît sous le nom de *pression*. On pourra mettre ainsi les formules (12) et (14) sous la forme

$$\frac{dp}{dx} = \Gamma X, \quad \frac{dp}{dy} = \Gamma Y, \quad \frac{dp}{dz} = \Gamma Z;$$

$$X = \frac{d\lambda}{dx}, \quad Y = \frac{d\lambda}{dy}, \quad Z = \frac{d\lambda}{dz}.$$

On en déduit immédiatement

$$(15) \quad \frac{dp}{dx} = \Gamma \frac{d\lambda}{dx}, \quad \frac{dp}{dy} = \Gamma \frac{d\lambda}{dy}, \quad \frac{dp}{dz} = \Gamma \frac{d\lambda}{dz},$$

et

$$(16) \quad \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = \Gamma \left(\frac{d\lambda}{dx} dx + \frac{d\lambda}{dy} dy + \frac{d\lambda}{dz} dz \right).$$

Les équations (15) subsistent dans le cas du mouvement aussi bien que dans celui de l'équilibre. Mais, dans le cas de l'équilibre, le premier membre de (16) et le second facteur du second membre de la même équation sont des différentielles complètes, tandis que, dans le cas du mouvement, elles ne le sont que si p et λ ne contiennent pas t , ce qui répond au cas particulier désigné sous le nom de *mouvement permanent*. Il suit de là que, dans le cas de l'équilibre et du mouvement permanent, le second membre de (16) doit être une différentielle complète, puisque le premier l'est; donc Γ est une fonction de λ , par suite de p ; et réciproquement

$$(17) \quad p = f(\Gamma),$$

f désignant une fonction arbitraire, est l'intégrale complète de l'équation (16). Dans le cas le plus général du mouvement, le premier membre est une différentielle partielle de p , en ce sens qu'il faut le terme $\frac{dp}{dt} dt$ pour la compléter; il en est de même de $\frac{d\lambda}{dx} dx + \frac{d\lambda}{dy} dy + \frac{d\lambda}{dz} dz$. Mais cette équation comportant des différentielles complètes par rapport aux trois

variables x, y, z , entraîne les mêmes conséquences par rapport à celles-ci; il n'y a d'arbitraire que ce qui est relatif à la variable t . L'intégrale de (16) dans le cas général du mouvement sera donc

$$(18) \quad p = f(t, \Gamma),$$

f désignant encore une fonction arbitraire. Ces conséquences générales des équations (12) et (14) sont conformes aux idées généralement admises; on aurait même pu y arriver par un raisonnement direct. La loi de Mariotte rentre comme cas particulier dans la formule (17); mais la relation (18) montre qu'elle n'est pas généralement vraie d'un instant à l'autre, dans le cas du mouvement, et cela même pour les corps où elle se vérifie à peu près dans le cas d'équilibre.

XVIII. — Masse des surfaces matérielles complémentaires.

La première chose à faire maintenant est d'estimer les surfaces matérielles complémentaires sous le rapport des masses et des actions, afin d'apprécier leur rôle dans l'explication des phénomènes physiques. On sait en effet que l'hypothèse de la matière continue ne peut expliquer aucun des phénomènes d'adhésion, frottement, etc., dès qu'on se borne à considérer les volumes; si donc cette hypothèse peut donner un résultat positif, c'est seulement par la considération des surfaces matérielles complémentaires que nous allons évaluer.

Nous avons vu, au § XIII, qu'une fois démontrée la possibilité de la répartition uniforme de la matière, le choix du système de courbes était complètement indifférent. On peut donc admettre que la surface extérieure du corps soit prise pour première surface, $\alpha\beta$ par exemple, et que l'on ait déterminé toutes les courbes γ par la condition que leur premier élément, à partir de la surface extérieure, γ soit perpendiculaire. Désignons respectivement par s_1, s_2, s_3 les arcs des courbes α, β, γ ; l'aire d'un parallélogramme élémentaire sur la surface extérieure sera $ds_1 ds_2$; le volume du parallélépipède infiniment petit appuyé sur cette base et compris entre deux surfaces α, β situées à une distance finie l'une de l'autre, et égale à celle des molécules, sera $ds_1 ds_2 \Delta s_3$. Appelant Γ sa

densité, nous aurons, d'après les bases admises ici, ainsi que dans le § XIII,

$$(19) \quad \gamma \cdot ds_1 \cdot ds_2 = \frac{1}{2} \Gamma ds_1 \cdot ds_2 \cdot \Delta s_3$$

ou

$$(20) \quad \gamma = \frac{1}{2} \Gamma \Delta s_3,$$

γ représentant la densité de la surface matérielle complémentaire, c'est-à-dire la moitié de la densité d'une surface matérielle, dont la densité γ est donnée par la formule (10). On aura de même, en représentant par F la force qui agit sur les molécules, pour la surface complémentaire,

$$(21) \quad \gamma F = \frac{1}{2} \Gamma F \Delta s_3.$$

Il résulte des équations (20) et (21), ainsi que de l'extrême petitesse de Δs_3 , par rapport à l'unité, que γ est toujours extrêmement petit et du même ordre que les distances moléculaires; donc le supplément de masse dû à la surface matérielle complémentaire est tout à fait insignifiant, et il en est de même du supplément de force, excepté dans le cas particulier où F est très-grand; on est donc autorisé à négliger complètement les surfaces matérielles complémentaires, lorsqu'il s'agit d'évaluer des masses ou des efforts finis; on ne doit en tenir compte que quand F est considérable. On voit d'ailleurs que cette surface complémentaire n'intervient jamais pour la matière continue; car alors Δs_3 est infiniment petit. Si donc elle explique les phénomènes physiques qui se produisent au contact des corps, on aura une preuve de plus que les molécules constituantes sont finies et situées à des grandeurs finies, quoique extrêmement petites, les unes des autres.

XIX. — L'attraction en raison inverse du carré des distances ne peut pas expliquer l'adhésion.

On sait que l'attraction en raison inverse du carré des distances n'explique pas l'adhésion quand on suppose la matière

continue et que l'on considère seulement les volumes; voyons si l'intervention des surfaces complémentaires peut changer ce résultat. Comme au reste il s'agit seulement de vérifier le fait, nous prendrons les cas qui se prêtent le plus facilement au calcul. Supposons en conséquence deux corps contigus par une surface plane. Le contact n'est pas immédiat comme si la matière était continue; il faut nécessairement admettre un espace entre les surfaces terminales des deux corps, espace dont l'épaisseur sera une grandeur du même ordre que les distances moléculaires, ou un peu plus grand; il n'y a en outre à considérer que les actions réciproques des surfaces matérielles complémentaires en contact, les autres étant tout à fait négligeables, d'après le paragraphe précédent, puisque F y est assez petit, et que les actions des volumes continus ne produisent pas d'autres effets que ceux de la pesanteur, incomparablement inférieurs à ceux de l'adhésion.

Nous représenterons par ϵ la distance, supposée constante, des deux surfaces. De plus, les seules attractions assez grandes pour rendre sensible $\frac{1}{2} \Gamma \Delta s$, étant renfermées dans un cercle fort restreint, on n'augmente pas sensiblement la valeur de l'adhésion en supposant que celui des plans matériels qu'attire le point considéré s'étend à l'infini dans tous les sens. On a donc à chercher la composante (normale à la surface) de l'attraction exercée par tous les points d'une des surfaces sur un point de l'autre; puis à faire la somme de toutes ces attractions dans l'étendue de la surface supérieure. On obtiendra ainsi l'action développée au contact des surfaces par l'attraction, puisque toutes les autres actions sont constatées être nulles.

Supposons, pour fixer les idées, que la surface de séparation est horizontale, et désignons par les mêmes lettres les quantités communes aux deux corps, mais en donnant l'accent aux quantités du corps inférieur. La masse de l'élément superficiel supérieur est

$$\gamma dx dy = \frac{1}{2} \Gamma \Delta s_1 . dx dy.$$

Prenons la projection du centre de cet élément sur la surface

inférieure pour origine des coordonnées, et supposons Δs_1 , $\Delta s'_1$ constants dans toute l'étendue des surfaces de contact; nous aurons, pour l'attraction d'un élément superficiel de la surface inférieure exercée sur l'élément donné, l'expression

$$\frac{1}{2} \Gamma \Delta s_1 . dx dy . \frac{1}{2} \Gamma' \Delta s'_1 . dx' dy' \frac{g}{\epsilon^2 + x'^2 + y'^2},$$

dont la composante verticale sera

$$\frac{1}{4} \Gamma \Gamma' . \Delta s_1 . \Delta s'_1 . g dx dy dx' dy' \cdot \frac{\epsilon}{(\epsilon^2 + x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il s'agit, pour avoir F , de sommer entre les limites $\pm \infty$ le produit des facteurs entrant dans cette expression et appartenant à la face inférieure; en un mot,

$$(22) \quad F = \frac{g}{2} \Gamma \Gamma' \Delta s_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon dx' dy'}{(\epsilon^2 + x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou, tous calculs faits,

$$(23) \quad F = \pi g \Gamma \Gamma' \Delta s_1,$$

π représentant, comme à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre.

Chaque point de la surface matérielle complémentaire supérieure représente donc une action égale à

$$(24) \quad \frac{1}{2} \Gamma \Delta s_1 . \pi g \Gamma' \Delta s'_1 . dx dy;$$

et, en l'intégrant entre les limites de la surface de contact A , il vient, en désignant par A l'aire de cette surface,

$$(25) \quad \frac{1}{2} \pi g . A \Gamma \Gamma' . \Delta s_1 . \Delta s'_1;$$

c'est-à-dire que cette action est tellement petite, qu'il est très-difficile de l'apprécier, puisque π , g , A , Γ , Γ' sont des quantités finies, tandis que Δs_1 et $\Delta s'_1$ sont excessivement petits. De plus, cette expression est indépendante de la distance ϵ

des surfaces en contact. Ces résultats sont en désaccord complet avec ce que l'on sait de l'adhésion; et comme ils représentent d'une façon très-approchée les effets de l'attraction en raison inverse du carré des distances, ils ne laissent aucun doute sur l'impuissance de celle-ci à produire les phénomènes dont il s'agit.

Donc, comme je l'ai dit en tête de ce paragraphe, l'attraction en raison inverse du carré de la distance ne peut expliquer ni l'adhésion ni la cohésion.

XX. — *L'adhésion peut être expliquée par une attraction en raison inverse de la quatrième puissance de la distance.*

Conservons les notations du paragraphe précédent, et essayons, au lieu de l'attraction en raison inverse du carré des distances, une attraction en raison inverse d'une puissance n plus grande de ces mêmes distances. Nous aurons, au lieu de la formule (22),

$$(26) \quad F = \frac{f}{2} \Gamma' \Delta s' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon dx' dy'}{(x^2 + y'^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Comme on a, entre les limites $\pm \infty$, les relations

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{n-1}{(n-1)a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{n-1}{2}}} \\ \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a^2} \end{array} \right.$$

on en déduira une première intégration de F , et la seconde ne présentera pas, en général, de difficulté. Ainsi, pour une attraction en raison inverse de la troisième puissance des distances, $n = 3$,

$$\text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)} = \frac{\pi}{2a^2};$$

d'où, remplaçant a^2 par $\varepsilon^2 + x'^2$,

$$(28) \quad F = \frac{f}{2} \Gamma' \varepsilon \Delta s' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi dx'}{2(\varepsilon^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi f}{2\varepsilon} \Gamma' \Delta s'.$$

Pour $n = 4$, c'est-à-dire l'attraction en raison inverse de la quatrième puissance, les formules (27) donneront

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{3a^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3a^3};$$

la formule (26) deviendra dès lors

$$\frac{2f\varepsilon}{3} \Gamma' \Delta s' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(\varepsilon^2 + x'^2)^{\frac{5}{2}}},$$

ou, en vertu de (27)

$$(29) \quad \frac{2f\varepsilon}{3} \Gamma' \Delta s' \cdot \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\varepsilon^2 + x'^2} = \frac{\pi f}{3\varepsilon^2} \Gamma' \Delta s'.$$

Pour $n = 5$, c'est-à-dire l'attraction en raison inverse de la cinquième puissance, la première formule (27) donnera

$$(30) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{6}{2}}} = \frac{3}{4a^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{4}{2}}} = \frac{3\pi}{8a^4},$$

en prenant la valeur déjà trouvée pour la seconde de ces intégrales; substituant dans (26), il vient

$$(31) \quad F = \frac{3\pi f \varepsilon}{16} \Gamma' \Delta s' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(\varepsilon^2 + x'^2)^{\frac{6}{2}}}.$$

Cette seconde intégrale se détermine aisément par les formules (27), et l'on a, au lieu de (31),

$$(32) \quad F = \frac{\pi f}{4\varepsilon^3} \Gamma' \Delta s'.$$

Pour $n = 6$, c'est-à-dire pour l'attraction en raison inverse

de la sixième puissance, la première formule (27) donnera

$$(33) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{4}{5a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{(a^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{16}{3.5a^2},$$

et la formule (26) deviendra

$$(34) \begin{cases} F = \frac{8f\varepsilon}{15} \Gamma' \Delta s_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(\varepsilon^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ = \frac{2f}{5\varepsilon} \Gamma' \Delta s_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(\varepsilon^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi f}{5\varepsilon} \Gamma' \Delta s_2. \end{cases}$$

La loi que suit la force F est évidente; on peut écrire d'une manière générale, en représentant par n l'exposant de la puissance de la distance en raison inverse de laquelle l'attraction a lieu,

$$(35) \quad F = \frac{\pi f}{(n-1)\varepsilon^{n-2}} \Gamma' \Delta s_2.$$

J'admets cette loi sans chercher à la démontrer: aussi bien, je n'en ai pas besoin pour la suite de mon raisonnement.

XXI. — Explication de l'adhésion (suite).

Maintenant que j'ai la somme des actions exercées par la surface matérielle complémentaire inférieure sur chaque point de la surface matérielle complémentaire supérieure, je la multiplie par la masse de l'élément superficiel supérieur et j'en fais la somme dans toute l'étendue de la surface de contact. Cet élément de l'adhésion est

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Gamma \Delta s_2 \cdot \frac{\pi f}{2\varepsilon} \Gamma' \Delta s_2 \cdot dx dy, \quad \text{pour } n = 3, \\ & \frac{1}{2} \Gamma \Delta s_2 \cdot \frac{\pi f}{3\varepsilon^2} \Gamma' \Delta s_2 \cdot dx dy, \quad \text{pour } n = 4, \\ & \frac{1}{2} \Gamma \Delta s_2 \cdot \frac{\pi f}{4\varepsilon^3} \Gamma' \Delta s_2 \cdot dx dy, \quad \text{pour } n = 5, \\ & \frac{1}{2} \Gamma \Delta s_2 \cdot \frac{\pi f}{5\varepsilon^4} \Gamma' \Delta s_2 \cdot dx dy, \quad \text{pour } n = 6, \end{aligned}$$

L'adhésion de la surface de contact A, où $\Gamma, \Gamma', \Delta s_2, \Delta s_2'$ sont supposés constants, sera donc

$$(36) \quad \frac{\pi f \Lambda}{4\varepsilon} \Gamma \Gamma' \Delta s_2 \Delta s_2', \quad \text{pour } n = 3,$$

$$(37) \quad \frac{\pi f \Lambda}{6\varepsilon^2} \Gamma \Gamma' \Delta s_2 \Delta s_2', \quad \text{pour } n = 4,$$

$$(38) \quad \frac{\pi f \Lambda}{8\varepsilon^3} \Gamma \Gamma' \Delta s_2 \Delta s_2', \quad \text{pour } n = 5,$$

$$(39) \quad \frac{\pi f \Lambda}{10\varepsilon^4} \Gamma \Gamma' \Delta s_2 \Delta s_2', \quad \text{pour } n = 6,$$

Or on ne peut pas admettre que f soit énormément grand: rien ne l'indique; donc l'expression (36) contenant deux facteurs $\Delta s_2, \Delta s_2'$ de l'ordre des distances moléculaires, et un seul diviseur ε du même ordre, est elle-même de l'ordre des distances moléculaires, c'est-à-dire insensible, quoique finie; l'expression (37) est finie et les autres seraient de plus en plus grandes, à moins que f ne devienne extrêmement petit. On conclura de ceci que l'adhésion ne peut pas être expliquée par une attraction en raison inverse du carré ou du cube de la distance, mais qu'elle peut l'être par une attraction en raison inverse de la quatrième puissance, ou même d'une puissance plus grande; à condition toutefois que f devienne d'une grandeur comparable à celle des distances moléculaires si l'attraction est en raison inverse de la cinquième puissance; d'une grandeur comparable à celle des carrés des distances moléculaires si l'attraction est en raison inverse de la sixième puissance; et, en général, d'une grandeur comparable à celle des puissances $n-4$ des distances moléculaires, si l'attraction est en raison inverse de la n^{ième} puissance des distances. On conçoit même une somme de plusieurs adhésions de cette nature répondant à autant d'attractions diverses; ainsi la formule de l'attraction pourrait être

$$(40) \quad \frac{E}{r^2} + \frac{f}{r^3} + \frac{f'\varepsilon}{r^4} + \frac{f''\varepsilon^2}{r^5} + \dots$$

au lieu d'être simplement $\frac{E}{r^2}$. Je crois même qu'en présence

des phénomènes célestes, on doit supposer f très-petit; mais y a-t-il plusieurs termes $f', f'',$ etc., ou n'y en a-t-il qu'un seul? c'est ce qu'on ne peut pas encore décider.

Un seul fait ressort avec évidence de ce qui précède: c'est que l'adhésion peut s'expliquer aisément par des actions en raison inverse de la quatrième puissance de la distance, ou de puissances plus grandes, ou par la somme d'actions de cette nature. Les valeurs données ci-dessus sont approximatives; pour avoir les valeurs réelles, il faudrait opérer le calcul avec l'hypothèse de la matière discontinue, qui est la représentation la plus exacte de la réalité. Mais je n'en suis pas là encore.

XII. — Digression sur une formule de Poisson.

J'ai, dans le temps, cherché l'explication de l'adhésion, et même du frottement, dans une formule de Poisson qui me semblait devoir conduire à des résultats remarquables. C'est la relation

$$(41) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 4\pi q,$$

que Poisson a fait connaître dans un Mémoire lu à la Société Philomathique de Paris en 1813, qu'il a publié plus tard dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1829, et où

$$V = \int \frac{dm}{r}, \quad q = T, \quad \text{et} \quad r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Mais un examen plus sérieux et plus approfondi m'a fait reconnaître que cette équation n'aboutissait à aucune nouvelle conséquence, et comportait une impossibilité physique, celle de la concentration de deux molécules en une seule. On sait la difficulté de calcul qui a été résolue par cette formule. Depuis Newton, qui avait le premier calculé l'attraction d'une sphère homogène sur un point extérieur, on n'avait pas pu déterminer par l'intégration directe l'attraction d'une sphère homogène sur un point de sa superficie; mais on y arrivait en étendant la formule du point extérieur jusqu'au cas où il devenait tellement près de la surface, qu'il pouvait y être supposé sans erreur sensible. C'était admettre en réalité que ce

point se confondait avec un point de la surface dont on avait calculé séparément l'attraction, et par conséquent que les deux points se réunissaient en un seul. Ceci était impossible; mais, par induction, il est probable qu'on obtient ainsi une valeur très-approchée de celle qui doit réellement avoir lieu. Laplace avait, dans la *Mécanique céleste*, donné l'équation aux dérivées partielles de V pour un point extérieur; c'est

$$(42) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0;$$

mais cette formule ne donne pas plus que l'intégration directe la valeur admise pour un point de la surface. En établissant la relation (41) au moyen des séries (voyez la *Connaissance des Temps* pour 1829), Poisson leva la difficulté de calcul; car la formule de Newton, qui échappe à la relation (42), satisfait à la relation (41), dont l'autre peut à la rigueur être considérée comme un cas particulier. Mais dans quelles limites de petitesse la convergence sur laquelle Poisson base sa démonstration a-t-elle lieu? Ces limites sont-elles assez étendues pour permettre de supposer séparées par une distance extrêmement petite, mais finie, comme le sont réellement les molécules dans la nature, la molécule attirée et la molécule la plus voisine de la surface attirante? On est en droit de conclure pour la négative, par ce fait que si on calcule directement l'attraction exercée par une sphère sur son centre, quand cette sphère est de rayon ε extrêmement petit, mais fini, on trouve une somme nulle toutes les fois qu'on pose le rayon variable $r = ndx$, et qu'on intègre de $n = 1$ à $n = \infty$. Du reste, si on examine de près l'article *De la différentiation sous le signe* \int inséré par Cauchy dans ses *Exercices de Mathématiques*, 2^e année, p. 125 à 140, on y verra que la valeur de Δ , ou le second membre de l'équation (41), n'existe qu'à la condition de faire varier a dans l'expression

$$\int_{x_1}^X f(x, a) dx = \int_{x_1}^{a-\varepsilon} f(x, a) dx + \int_{a+\varepsilon}^X f(x, a) dx.$$

c'est-à-dire, puisqu'on suppose ε très-petit, mais constant, de

resserrer indéfiniment les distances $a - \epsilon$, $a + \epsilon$, ou, si l'on aime mieux, de rapprocher indéfiniment les molécules attirantes de la molécule attirée. Cette condition est incompatible avec le fait réel, et par conséquent il est inutile d'étudier la formule de Poisson au point de vue de l'explication des phénomènes naturels. Elle ne paraît pas d'ailleurs conduire à d'autres conséquences que celles de la perpendicularité des actions aux surfaces, tout comme l'équation (42); et en général comme toute formule basée sur l'hypothèse de la matière continue; je ne m'étendrai donc pas davantage sur ce sujet.

XXIII. — *Du frottement.*

Le frottement, phénomène en vertu duquel les pressions se transmettent d'un corps à l'autre obliquement aux surfaces de contact, est dû à des causes très-différentes selon que les corps contigus sont en mouvement ou en équilibre; dans le premier cas, en effet, il est dû principalement au mouvement transmis par le corps supérieur à celui sur lequel il glisse; dans le second, il ne peut être expliqué que par une disposition particulière des molécules. Aussi l'expérience a-t-elle donné des chiffres différents pour valeurs du frottement dans le mouvement et dans l'équilibre. On sait aussi que, dans l'équilibre, le frottement (qu'on suppose généralement répondre à la limite sous laquelle une pression oblique peut être transmise) est plus fort au bout d'un certain temps de contact qu'au début.

La première réflexion qui vient à l'esprit, lorsqu'on veut étudier le frottement, est que celui-ci est dû seulement au jeu d'actions très-rapprochées; car le plus petit intervalle entre deux corps suffit pour le faire disparaître. Si donc on veut l'expliquer par des attractions, on doit admettre, comme nous l'avons fait au § XIX, que ces attractions sont celles de la surface inférieure, supposée infinie, sur chacun des points de la surface supérieure; il y a lieu également d'écartier les actions réciproques des deux volumes continus et celles d'une des surfaces matérielles sur l'autre corps continu. Mais, même avec ces restrictions, on n'obtient aucun résultat, si on suppose continues les surfaces matérielles complémentaires; car,

dans cette hypothèse, chaque point de la surface matérielle complémentaire supérieure peut être supposé situé au centre de la surface matérielle complémentaire inférieure; et comme il s'agit de composantes de l'attraction parallèlement à cette surface, et qu'elles sont égales deux à deux et opposées, dès qu'on suppose la densité constante, ce qui est sensiblement vrai en général, elles se détruisent, et l'on trouve que leur somme est nulle. Il faut donc nécessairement écarter, au moins pour les surfaces complémentaires, l'hypothèse de la continuité de la matière, quand on veut expliquer le frottement par des attractions.

Toute difficulté disparaît dès qu'on admet, conformément à la réalité, que les surfaces matérielles complémentaires sont discontinues et composées de molécules situées à des distances finies les unes des autres. Supposons en effet, pour plus de clarté, que ces molécules soient disposées régulièrement comme les sommets d'un réseau de rectangles égaux et jointifs, et qu'elles soient également distantes et également orientées dans les deux corps en contact. Cela posé, si la molécule m et la molécule m' des surfaces supérieure et inférieure sont situées sur une perpendiculaire commune, il est évident que toutes les molécules de la surface inférieure seront symétriquement placées par rapport à la molécule m , puisque la surface inférieure est supposée indéfinie, et m au centre; partant toutes les composantes parallèles au plan seront égales deux à deux et de signe contraire; leur somme sera nulle, et il n'y aura pas d'action exercée sur m parallèlement au plan. Pareille symétrie et pareille conséquence auront encore lieu lorsque m sera sur la même verticale qu'un point symétrique par rapport au réseau inférieur de rectangles, tel que la centre d'un de ceux-ci, ou le milieu d'un de leurs côtés; mais dès qu'il en sera autrement, les attractions des molécules inférieures sur la molécule m cesseront d'avoir leurs composantes parallèles au plan égales deux à deux et de signe contraire; il y aura une différence entre elles, et la somme de ces différences constituera un effort parallèle au plan de séparation, effort qui devra être contre-balancé pour que l'équilibre subsiste, ou, autrement, amènera un déplacement, soit dans l'un des corps, soit dans leurs parties en contact. Nous allons exa-

miner quelle peut être la valeur de cet effort dans le cas de l'équilibre, suivant la nature des attractions auxquelles il répond. Nous ne nous occuperons au reste que du cas de l'équilibre; le cas du mouvement suppose l'étude préalable de la transmission du mouvement, dont nous poserons seulement les bases dans le présent Mémoire.

XXIV. — Composantes horizontales des attractions.

Je représente toujours par ε la distance, supposée constante, des deux surfaces matérielles; par $\Delta s'_1, \Delta s'_2$ les deux côtés des rectangles inférieurs supposés parallèles aux axes des x et des y ; par ξ et η les coordonnées de la première molécule, lesquelles sont nécessairement inférieures à $\Delta s'_1$ et $\Delta s'_2$, à moins que l'origine ne soit précisément le centre de gravité d'une molécule (auquel cas on peut supposer également $\xi = \Delta s'_1$, ou $= 0$, et $\eta = \Delta s'_2$, ou $= 0$), et par λ et μ le nombre de côtés de rectangles compris entre cette première molécule et la molécule considérée m' . D'après cela, j'ai

$$(43) \quad x' = \xi + \lambda \Delta s'_1, \quad y' = \eta + \mu \Delta s'_2.$$

La distance r de la molécule m à la molécule m' située en (x', y') sera donnée par la relation

$$(44) \quad r^2 = \varepsilon^2 + (\xi + \lambda \Delta s'_1)^2 + (\eta + \mu \Delta s'_2)^2.$$

La distance de cette même molécule m à la molécule m'' qui serait placée symétriquement à m' , si ξ et η étaient nuls, ou égaux tous les deux à $\frac{\Delta s'_1}{2}, \frac{\Delta s'_2}{2}$, ou l'un nul et l'autre égal à une de ces quantités, est donnée par l'équation

$$(45) \quad r'^2 = \varepsilon^2 + (-\xi + \Delta s'_1 + \lambda \Delta s'_1)^2 + (-\eta + \Delta s'_2 + \mu \Delta s'_2)^2,$$

en convenant que si m était au-dessus d'une molécule, il faudrait faire $\xi = 0, \eta = 0$, dans (44) et $\xi = \Delta s'_1, \eta = \Delta s'_2$ dans (45). L'attraction exercée par m' sur m en raison inverse de la puissance n des distances aura pour composante parallèle aux x , en observant que m' n'est plus ici une masse infi-

niment petite, mais la quantité finie, quoique extrêmement petite, $\frac{1}{2} m' = \frac{1}{2} \Gamma' \Delta s'_1 \Delta s'_2 \Delta s'_3,$

$$(46) \quad \frac{f \Gamma'}{2} \Delta s'_1 \Delta s'_2 \Delta s'_3 \frac{\xi + \lambda \Delta s'_1}{r^{n+1}},$$

tandis que la composante, parallèlement au même axe, de l'attraction exercée par m'' sur m sera

$$(47) \quad \frac{f \Gamma'}{2} \Delta s'_1 \Delta s'_2 \Delta s'_3 \frac{\xi - \Delta s'_1 - \lambda \Delta s'_1}{r'^{n+1}}.$$

La somme de ces deux composantes sera

$$(48) \quad \frac{f \Gamma'}{2} \Delta s'_1 \Delta s'_2 \Delta s'_3 \left(\frac{\xi + \lambda \Delta s'_1}{r^{n+1}} - \frac{-\xi + \Delta s'_1 + \lambda \Delta s'_1}{r'^{n+1}} \right)$$

et l'action totale exercée parallèlement à l'axe des x sur le point m par la surface matérielle inférieure sera

$$(49) \quad \frac{f \Gamma'}{2} \Delta s'_1 \Delta s'_2 \Delta s'_3 \sum \left(\frac{\xi + \lambda \Delta s'_1}{r^{n+1}} - \frac{-\xi + \Delta s'_1 + \lambda \Delta s'_1}{r'^{n+1}} \right),$$

le signe sommatoire s'étendant depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = \infty$, et depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \infty$. On aurait évidemment de même pour la composante parallèle à l'axe des y ,

$$(50) \quad \frac{f \Gamma'}{2} \Delta s'_1 \Delta s'_2 \Delta s'_3 \sum \left(\frac{\eta + \mu \Delta s'_2}{r^{n+1}} - \frac{-\eta + \Delta s'_2 + \mu \Delta s'_2}{r'^{n+1}} \right).$$

En multipliant cette expression par la masse de l'élément de la surface matérielle complémentaire supérieure, supposé fini comme dans la surface matérielle complémentaire inférieure, c'est-à-dire par $\frac{1}{2} \Gamma \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3$, on aura l'effort réel exercé sur cet élément. C'est, parallèlement à l'axe des x ,

$$(51) \quad \frac{f \Gamma \Gamma'}{4} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \Delta s'_2 \Delta s'_3 \sum \left(\frac{\xi + \lambda \Delta s'_1}{r^{n+1}} - \frac{-\xi + \Delta s'_1 + \lambda \Delta s'_1}{r'^{n+1}} \right),$$

et parallèlement à l'axe des y ,

$$(52) \frac{f \Pi'}{4} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \Delta s'_2 \Delta s'_3 \sum \left(\frac{\eta + \mu \Delta s'_2}{r^{n+1}} - \frac{-\eta + \Delta s'_1 + \mu \Delta s'_3}{r'^{n+1}} \right).$$

Voyons maintenant ce que peuvent être ces efforts.

XXV. — Calcul des composantes.

Je ne connais pas de méthode d'évaluation directe de la double somme (51) et (52), et les développements en séries qu'on pourrait déduire de la formule connue d'Euler sont sujets à plusieurs difficultés. Il est évident d'ailleurs que les deux termes sous le signe \sum approchent rapidement d'être égaux, et de s'annuler par conséquent, dès que λ et μ sont un peu grands. En calculant donc un petit nombre de groupes semblables correspondants à $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$, $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$, et se bornant à 10, par exemple, on aura une valeur assez approchée de la véritable. En tous cas, la somme de tous les termes appréciables différera peu, sous le rapport de l'ordre de la grandeur, de celui des deux premiers termes. On peut encore arriver à la même conséquence en recourant à l'intégration résultant de l'hypothèse de la matière continue; en effet, nous avons démontré que les actions des molécules finies et distantes étaient à peu près les mêmes que celles de la matière supposée continue. On peut donc admettre que la somme des actions d'un côté de l'axe des x diffère peu de l'intégrale prise depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = \infty$; qu'il en est de même de l'autre côté, et substituer ainsi

$$\int_{x=\xi}^{x=\infty} \frac{x dx}{[e^2 + x^2 + (\eta + \mu \Delta s'_1)^2]^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\sum \frac{(\xi + \lambda \Delta s'_1) \Delta s'_1}{r^{n+1}},$$

et

$$\int_{x=-\xi + \Delta s'_1}^{x=\infty} \frac{x dx}{[e^2 + x^2 + (-\eta + \Delta s'_1 + \mu \Delta s'_3)]^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\sum \frac{(-\xi + \Delta s'_1 + \lambda \Delta s'_1) \Delta s'_1}{r'^{n+1}}.$$

Dans ces conditions on trouvera

$$(53) \left\{ \begin{aligned} & \sum \left[\frac{(\xi + \lambda \Delta s'_1) \Delta s'_1}{r^{n+1}} - \frac{(-\xi + \Delta s'_1 + \lambda \Delta s'_1) \Delta s'_1}{r'^{n+1}} \right] \\ &= -\frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{[e^2 + \xi^2 + (\eta + \mu \Delta s'_2)^2]^{\frac{n-1}{2}}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{[e^2 + (-\xi + \Delta s'_1)^2 + (-\eta + \Delta s'_2 + \mu \Delta s'_3)^2]^{\frac{n-1}{2}}} \right\}; \\ &= -\frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{r_1^{n-1}} - \frac{1}{r'_1{}^{n-1}} \right), \end{aligned} \right.$$

en posant, pour abrégier,

$$r_1^2 = e^2 + \xi^2 + (\eta + \mu \Delta s'_2)^2,$$

$$r'_1{}^2 = e^2 + (-\xi + \Delta s'_1)^2 + (-\eta + \Delta s'_2 + \mu \Delta s'_3)^2;$$

et les formules (51) et (52) deviendront

$$(54) \left\{ \begin{aligned} & \frac{-f \Pi'}{4(n+1)} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \Delta s'_2 \Delta s'_3 \sum \left(\frac{1}{r_1^{n-1}} - \frac{1}{r'_1{}^{n-1}} \right) \\ &= \frac{-f \Pi'}{4(n+1)} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \\ & \times \left\{ \int_{y=\eta}^{y=\infty} \frac{dy}{[e^2 + \xi^2 + y^2]^{\frac{n-1}{2}}} \right. \\ & \quad \left. - \int_{y=-\eta + \Delta s'_1}^{y=\infty} \frac{dy}{[e^2 + (-\xi + \Delta s'_1)^2 + y^2]^{\frac{n-1}{2}}} \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(55) \left\{ \begin{aligned} & \frac{-f\Gamma\Gamma'}{4(n+1)} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \Delta s'_2 \sum \left(\frac{1}{r_1^{n-1}} - \frac{1}{r_1'^{n-1}} \right) \\ &= \frac{-f\Gamma\Gamma'}{4(n+1)} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \\ &\times \left\{ \int_{x=\xi}^{x=\infty} \frac{dx}{(\varepsilon^2 + x^2 + \eta^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \int_{x=-\xi+\Delta s'_1}^{x=\infty} \frac{dx}{(\varepsilon^2 + x^2 + (-\eta + \Delta s'_1)^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Dans la relation (55), on a posé, pour abrégier,

$$r_1^2 = \varepsilon^2 + (\xi + \lambda \Delta s'_1)^2 + \eta^2,$$

$$r_1'^2 = \varepsilon^2 + (-\xi + \Delta s'_1 + \lambda \Delta s'_1)^2 + (-\eta + \Delta s'_1)^2.$$

Donnant maintenant à n différentes valeurs, on trouvera les valeurs suivantes :

Pour $n = 2$,
parallèlement à l'axe des x ,

$$(56) \frac{f\Gamma\Gamma'}{12} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \log \left(\frac{\eta + \sqrt{\varepsilon^2 + \xi^2 + \eta^2}}{\Delta s'_2 - \eta + \sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta s'_1 - \xi)^2 + (\Delta s'_2 - \eta)^2}} \right);$$

parallèlement à l'axe des y ,

$$(57) \frac{f\Gamma\Gamma'}{12} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \log \left(\frac{\xi + \sqrt{\varepsilon^2 + \xi^2 + \eta^2}}{\Delta s'_1 - \xi + \sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta s'_1 - \xi)^2 + (\Delta s'_2 - \eta)^2}} \right);$$

Pour $n = 3$,
parallèlement à l'axe des x ,

$$(58) \left\{ \begin{aligned} & \frac{f\Gamma\Gamma'}{16} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \\ &\times \left[-\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta s'_1 - \xi)^2}} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \xi^2}} \operatorname{arc tang} \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \xi^2}} \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta s'_1 - \xi)^2}} \operatorname{arc tang} \frac{\Delta s'_2 - \eta}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta s'_1 - \xi)^2}} \right]; \end{aligned} \right.$$

parallèlement à l'axe des y ,

$$(59) \left\{ \begin{aligned} & \frac{f\Gamma\Gamma'}{16} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \\ &\times \left[-\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta s'_2 - \eta)^2}} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}} \operatorname{arc tang} \frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}} \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta s'_2 - \eta)^2}} \operatorname{arc tang} \frac{\Delta s'_1 - \xi}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\Delta s'_2 - \eta)^2}} \right]; \end{aligned} \right.$$

Pour $n = 4$,

parallèlement à l'axe des x ,

$$(60) \left\{ \begin{aligned} & \frac{f\Gamma\Gamma'}{20} \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \Delta s'_1 \\ &\times \left[-\frac{1}{\varepsilon^2 + \xi^2} \frac{\eta}{(\varepsilon^2 + \xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\varepsilon^2 + \xi^2} \right. \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2 + (\Delta s'_1 - \xi)^2} \frac{\Delta s'_2 - \eta}{[\varepsilon^2 + (\Delta s'_2 - \xi)^2 + (\Delta s'_2 - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon^2 + (\Delta s'_1 - \xi)^2} \right]; \end{aligned} \right.$$

Etc., etc.

Si maintenant on fait la somme de ces composantes dans toute l'étendue de la surface supérieure, en y supposant ξ et η constants, on aura évidemment une quantité du même ordre que les carrés des distances moléculaires pour $n = 2$; car le logarithme y est une quantité finie, et $\sum \Delta s_1 \Delta s_2$, prise dans l'étendue de la surface, $= A$; cette quantité sera du même ordre que les distances mêmes pour $n = 3$, et enfin elle sera finie pour $n = 4$. Donc les attractions en raison inverse du carré de la distance, ou du cube de la distance, produisent des actions tout à fait insignifiantes; mais il cesse d'en être de même pour les attractions en raison inverse de la qua-

trème puissance, qui produisent des efforts latéraux de grandeur finie. Ces attractions expliquent le frottement comme elles expliquent l'adhésion. Nous serions arrivés au même résultat en déterminant l'ordre de l'action comme nous proposons de le faire au début du présent article. Nous allons en discuter les conséquences.

XXVI. — Causes probables de la capillarité.

Nous avons supposé ξ et η constants dans ce qui précède; c'est évidemment ce qui doit avoir à peu près lieu dans la nature; ou bien, si ξ et η varient, les côtés $\Delta s'$ et $\Delta s''$ doivent varier sensiblement dans le même rapport. Car comme le moindre changement dans ces rapports influe d'une manière très-sensible sur la valeur des composantes horizontales, il faudrait admettre, si l'on voulait à toute force que la densité superficielle restât constante, sans que ξ et η le fussent, que les composantes horizontales varient très-rapidement et entre des limites très-étendues, dans des endroits très-resserrés, sans qu'aucune force intervienne pour amener ces changements de force d'un point à l'autre; en effet, les efforts, dans un corps, ne se transmettent d'un point à l'autre que par des effets de dilatation ou de condensation, et tout changement de force équivaut à une dilatation ou à une condensation. Ce serait évidemment admettre une impossibilité, contraire à tout ce qui a lieu. Il en résulte que nécessairement, dans le cas de la nature, si deux corps sont en contact, les molécules des deux surfaces contiguës se répartissent de manière que les côtés des parallélogrammes élémentaires aient la même orientation, et que ceux d'un des corps soient des parties aliquotes de ceux de l'autre. La conséquence de ce fait est un raccourcissement ou un allongement de la surface en contact; et partant, comme cet allongement ou ce raccourcissement se transmet partiellement à la couche immédiatement contiguë dans le même corps et ainsi de suite, les corps en contact se déformeront dans le voisinage de leur surface commune et y montreront des phénomènes de dilatation ou de condensation analogues à ceux que nous voyons dans la capillarité. L'attraction en raison inverse de la quatrième

puissance de la distance, ou de puissances plus grandes, peut donc produire des phénomènes analogues à ceux de la capillarité. Mais, pour les étudier en détail, il faudrait pouvoir substituer au calcul des infiniment petits le calcul de quantités extrêmement rapprochées, et à des distances finies cependant; il faudrait aussi étudier les mouvements qui se produisent à l'instant du contact, toutes choses que je ne suis pas encore en mesure de faire. Je dois donc me borner à ce que j'ai aperçu qui me paraît suffire pour mettre hors de doute l'origine de la capillarité. Je ferai également observer que les résultats auxquels je suis parvenu relativement au frottement donnent prise à plusieurs objections de détail, tout en expliquant partiellement l'origine du frottement dans le cas de repos. Ainsi on ne voit pas pourquoi le frottement se fait sentir d'une manière sensible, alors que l'adhésion ne se développe pas encore, comme cela s'observe dans la nature; les formules obtenues indiquent au contraire que le frottement est inférieur à l'adhésion en grandeur et se produit simultanément. L'approximation de mes formules est aussi très-vague. Ces raisons m'engagent à ne pas pousser plus loin la comparaison de ces formules avec les faits; je mets à la suite de ce qui précède ce que j'aurais pu employer un calcul plus conforme à la vérité, et où je pourrais apprécier convenablement les phénomènes du mouvement. Je bornerai aujourd'hui ma tâche à donner les équations de la propagation du mouvement dans un corps supposé continu.

XXVII. — Propagation du mouvement.

Afin de ne pas compliquer le problème de la propagation du mouvement, j'envisagerai le cas le plus simple, celui d'un mouvement se propageant dans un milieu homogène au repos, ou soumis à une loi unique de mouvement. En un instant t , la partie douée du nouveau mouvement est séparée de la partie soumise à l'ancien par une surface que je désignerai sous le nom de *surface de rupture*; cette surface se déplace d'un instant à l'autre, non-seulement par rapport aux axes fixes, mais encore par rapport aux molécules qui la composent; toutes les molécules qu'elle laisse en arrière, dans son mou-

vement progressif, participent au nouveau mouvement; celles qu'elle n'a pas encore atteintes sont soumises à l'ancien mouvement. En arrière de cette surface de rupture, il peut en exister d'autres, et il en existe en effet, si la cause de l'ébranlement qui se propage n'a qu'une durée limitée; mais entre celle que nous considérons et la plus rapprochée en arrière, il existe des molécules obéissant à une loi unique et indépendantes de celles qui peuvent exister en deçà: et, par conséquent, en n'envisageant dans ce milieu que la partie en arrière de la surface de rupture, on peut dire qu'elle *croît*, et la désigner par le titre de *milieu croissant*. Pour le même motif, et par rapport à la même surface de rupture, nous nommerons l'autre partie *milieu décroissant*.

Dans l'un et dans l'autre milieu, les vitesses d'un point matériel dont on donne les coordonnées à l'instant t sont déterminées, et toutes les positions successives du point le sont également. Donc les coordonnées et les vitesses d'un point sont fixées en chaque instant t , dès qu'on a sa position (x', y', z') en un instant donné t' ; en d'autres termes, les coordonnées x, y, z de la position occupée à l'instant t par la molécule m sont fonctions de x', y', z', t' et t . Réciproquement, toute fonction de x', y', z', t' et t , à commencer par les coordonnées x', y', z' elles-mêmes, peut être exprimée en fonction de x, y, z, t et t' . Ainsi donc, si l'on considère une surface formée à l'instant t' par une série continue de points matériels, les diverses surfaces que ces mêmes points formeront par la suite des temps constitueront une famille dont l'équation pourra être représentée tout aussi bien par zéro égalé à une fonction de x', y', z' et t' seulement, qu'à une fonction de x, y, z, t' et t , t étant le paramètre de cette famille de surfaces. Cette égalité donne non-seulement les surfaces correspondantes aux valeurs de t postérieures à t' , époque à laquelle, pour fixer les idées, je suppose que les points matériels dont cette surface est composée appartiennent au milieu croissant; mais encore, en les supposant assujetties aux mêmes lois de mouvement, les surfaces correspondantes aux valeurs de t antérieures à t' et pour lesquelles les points dont il s'agit pouvaient encore faire partie du milieu décroissant. Toutefois, l'équation calculée suivant

les lois du milieu croissant ne répond pas alors à la surface qui aurait réellement lieu dans ces époques antérieures où les points appartiennent au milieu décroissant; elle serait virtuelle, pour ainsi dire, et la vérification en serait subordonnée à ces où les lois du milieu croissant n'auraient pas eu de commencement. Ceci n'a rien d'illogique en soi; les formules donnent les positions, les vitesses et toutes les autres propriétés des points matériels en égard aux lois qu'ils subissent au moment du calcul, et sans tenir compte des changements brusques que des causes indéterminées et indépendantes peuvent y avoir amenées antérieurement ou y produire plus tard en des instants quelconques. Pratiquement donc, les formules ne donnent les lois réelles du mouvement qu'à partir du moment où il a commencé jusqu'au moment où il est troublé par des causes extérieures. Dans cet ordre d'idées, chaque surface de rupture correspond à une certaine surface au temps t' , que ce temps t' soit antérieur ou postérieur au temps t auquel on considère ladite surface de rupture. Les diverses surfaces qui, au temps t' , correspondent aux surfaces de rupture qui se produiront chacune en un instant t différent, constituent une famille dont l'équation, calculée avec les données du milieu décroissant, ne se vérifie que pour les surfaces antérieures à l'instant t ; et dont l'équation, calculée avec les données du milieu croissant, ne se vérifie que pour les surfaces postérieures à l'instant t . Au contraire, les points correspondants à une surface de rupture en un instant déterminé τ ne forment qu'une seule surface à l'instant t' . Les équations des diverses surfaces qui, à l'instant t' , correspondent aux surfaces de rupture qui se produiront successivement, varieront précisément par cette valeur de τ ; en sorte qu'on pourra représenter l'équation générale des surfaces qui, au temps t' , représentent la série des surfaces de rupture qui se produiront successivement par la formule générale

$$(61) \quad R = \tau.$$

XXVIII. — *Choix d'un élément de volume.*

La couche superficielle réunie au milieu croissant pendant l'instant dt avait, avant le commencement de cet instant, la

densité, la résistance et les vitesses du milieu décroissant; au bout de l'instant dt , elle a celles du milieu croissant. Il y a là un brusque changement de vitesse et de résistance qui suppose des forces perdues, auxquelles on peut appliquer le principe de d'Alembert; mais, outre cette conséquence mécanique et en dehors de toute hypothèse, il y a une relation mathématique nécessaire entre la masse de cette couche superficielle à l'instant t , puis à l'instant $t + dt$; c'est la relation exprimant que la masse n'a pas changé; car, pour la changer, il faudrait un anéantissement ou une création de matière, et un mouvement ne peut ni anéantir ni créer. On exprimera analytiquement cette condition en considérant un volume de matière infiniment petit, situé tout entier, à l'instant t , dans le milieu décroissant, et tout entier aussi, à l'instant $t + dt$, dans le milieu croissant; en cherchant son volume aux deux époques t et $t + dt$; multipliant le premier par la densité correspondante dans le milieu décroissant à l'instant t ; le second, par la densité correspondante dans le milieu croissant à l'instant $t + dt$ (ou, ce qui revient au même, à un infiniment petit près, par la densité dont il s'agit à l'instant t), puis égalant ces deux produits.

Le choix du volume infiniment petit qu'on doit employer d'après la marche qui vient d'être décrite est à peu près indifférent, dès que ce volume satisfait aux deux conditions: 1^o d'avoir sa base postérieure appuyée sur la surface de rupture à l'instant t ; 2^o d'avoir sa base antérieure appuyée sur la surface qui deviendra de rupture à l'instant $t + dt$, avec les conditions de mouvement du milieu décroissant. On pourroit tout aussi bien prendre les conditions inverses, savoir: 1^o d'avoir la base postérieure appuyée à l'instant $t + dt$ sur la surface qui, d'après les lois du mouvement du milieu croissant, a été de rupture à l'instant précédent t ; 2^o d'avoir sa base antérieure appuyée, en l'instant $t + dt$, sur la surface de rupture.

Je choisis le volume le plus simple afin d'éviter la complication des formules; et je considère un pentaèdre ayant pour bases opposées des triangles, pour faces latérales des quadrilatères gauches. Les choses ne se passent pas ici comme dans le cas d'un mouvement continu; pendant l'instant dt tout en-

ter, la base antérieure obéit aux lois de mouvement du milieu décroissant (j'adopte la première des deux marches que je viens d'indiquer), la base postérieure aux lois de mouvement du milieu croissant, et les points intermédiaires d'abord aux unes, ensuite aux autres. Le pentaèdre est donc susceptible de très-grandes déformations dans l'instant très-court dt ; c'est pour cela que je lui suppose la possibilité de faces gauches; et, comme les côtés restent infiniment petits, ils peuvent toujours, sans erreur sensible, être supposés rectilignes; pour le même motif, les bases et les facettes triangulaires des quadrilatères gauches latéraux peuvent toujours être supposées planes.

XXIX. — *Expression du volume d'un pentaèdre.*

Dans ces conditions, le premier calcul à faire est celui du volume du pentaèdre à bases triangulaires et à faces quadrilatérales gauches, les diagonales gouttières de ces dernières faces restant bien entendu les mêmes pendant le déplacement du pentaèdre. Le choix de ces diagonales influant sur la symétrie de la formule, je prendrai le système le plus uniforme, c'est-à-dire celui où il ne part qu'une diagonale gouttière de chaque sommet de la base, et où l'ordre est toujours le même. Je désigne les sommets du pentaèdre par les n^{os} 1, 2, 3, 4, 5, 6



placés dans l'ordre où ils le sont dans la figure ci-contre; j'admets que les surfaces (1, 2, 3) et (4, 5, 6) recouvrent les autres en projection horizontale, et que les diagonales gouttières sont les droites (2, 4), (3, 5) et (1, 6). On peut faci-

lement trouver le volume du pentaèdre de différentes manières; je me bornerai à renvoyer à deux théorèmes donnés par Cauchy dans ses *Exercices de Mathématiques* (2^e année, p. 39 et 41, *Sur quelques propriétés des polyèdres*), et contenant ces deux propriétés:

L'aire d'un triangle est égale à la somme algébrique de ses côtés projetés sur l'axe des x , et multipliés respectivement par les y de leurs milieux;

Le volume d'un polyèdre est égal à la somme algébrique de ses faces projetées sur le plan des xy , et multipliées respectivement chacune par le z de son centre de gravité.

L'application de ces théorèmes à la cubature du pentaèdre (1, 2, 3, 4, 5, 6) donne facilement, en désignant par V le volume cherché, et par a_i, b_i, c_i les coordonnées du sommet i , la formule suivante :

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} 6V &= (a_3 - a_2)(b_4 - b_2)(c_1 - c_2) - (a_3 - a_2)(b_1 - b_2)(c_3 - c_2) \\ &+ (a_1 - a_2)(b_3 - b_2)(c_1 - c_2) - (a_1 - a_2)(b_4 - b_2)(c_3 - c_2) \\ &+ (a_3 - a_1)(b_3 - b_1)(c_2 - c_1) - (a_3 - a_1)(b_4 - b_1)(c_2 - c_1). \end{aligned} \right.$$

Non-seulement cette expression donne le volume du pentaèdre considéré en fonction des projections de ses trois diagonales gouttières, car chacun des facteurs qui composent ses six termes ne sont pas autre chose que ces projections; mais encore, en comparant l'expression (62) à celle du volume d'un prisme triangulaire à faces planes, on voit que le pentaèdre gauche V est équivalent au tiers du prisme triangulaire dont les trois arêtes distinctes sont égales, en grandeur et en direction, à ses trois diagonales gouttières. Laissons de côté ce théorème de Géométrie probablement connu, dont la considération d'ailleurs nous est complètement inutile, et appliquons l'expression (62) au pentaèdre infiniment petit dont les bases s'appuient sur les surfaces de rupture.

XXX. — Volume de l'élément choisi au § XXVIII.

Nous pouvons toujours supposer x', y', z' éliminés de l'équation (61) au moyen de leurs valeurs en x, y, z, t' et t calculées dans le milieu décroissant; l'équation peut être conservée sous la même forme; seulement, elle a deux para-

mètres t et τ au lieu d'un seul. Elle correspond ainsi à deux familles de surfaces, savoir : 1^o à celle des surfaces de rupture pour lesquelles t et τ varient à la fois si on considère les différentes positions qu'occuperont en des moments divers t les points qui constituent, en divers instants τ , les surfaces de rupture; 2^o à celle des surfaces que constituent, par la suite des temps, une même série de points constituant, à l'instant donné τ , une surface de rupture. Ici t varie seul et τ est constant. Il suit de là qu'en désignant par u, v, w les composantes de la vitesse d'un point dans le milieu décroissant, où les familles des surfaces de rupture sont réelles avant la production du nouveau mouvement, les déplacements dus au temps t seulement seront u, dt, v, dt, w, dt ; tandis que les déplacements dus au changement de surface et de temps à la fois seront $dx + u, dt, dy + v, dt, dz + w, dt$. Si donc on fait varier à la fois t et τ dans l'équation (61), on aura

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dR}{dx} (dx + u, dt) + \frac{dR}{dy} (dy + v, dt) \\ + \frac{dR}{dz} (dz + w, dt) + \frac{dR}{dt} dt = d\tau. \end{aligned} \right.$$

Mais si l'on considère seulement les variations dues aux divers changements éprouvés, par la suite des temps, par un même groupe de points matériels, τ ne variera pas, et l'on aura

$$(64) \quad \frac{dR}{dx} u, dt + \frac{dR}{dy} v, dt + \frac{dR}{dz} w, dt + \frac{dR}{dt} dt = 0.$$

La coexistence légitime de ces deux relations réduit la première à

$$(65) \quad \frac{dR}{dx} dx + \frac{dR}{dy} dy + \frac{dR}{dz} dz = d\tau,$$

qui caractérisera la famille des surfaces de rupture, quand on l'ajoutera à (64), car ces deux équations ne peuvent convenir simultanément qu'aux surfaces pour lesquelles les deux paramètres t et τ varient à la fois.

Ces expressions générales auraient encore évidemment été les mêmes, si, au lieu de chercher la famille de surfaces qui, dans le milieu décroissant, viennent former successivement la

surface de rupture, j'avais cherché la famille qui, dans le milieu croissant, avait été formée successivement par ces mêmes surfaces de rupture. La relation (65) convient donc également à ces deux familles au temps t . L'équation (64), pour être applicable au milieu croissant, devrait prendre les valeurs de u, v, w particulières à ce milieu, savoir u_1, v_1, w_1 .

Soit ω la vitesse de propagation de mouvement, comptée normalement à la surface de rupture, et prise au temps t ; l'épaisseur de la couche perdue pendant l'instant dt , par le milieu décroissant, sera ωdt ; elle sera égale à la longueur de normale interceptée entre les deux surfaces successives. Or les projections de cette longueur de normale sur les plans coordonnés seront

$$dx = \frac{\frac{dR}{dx} \omega dt}{\sqrt{\frac{dR^2}{dx^2} + \frac{dR^2}{dy^2} + \frac{dR^2}{dz^2}}},$$

$$dy = \frac{\frac{dR}{dy} \omega dt}{\sqrt{\frac{dR^2}{dx^2} + \dots}},$$

$$dz = \frac{\frac{dR}{dz} \omega dt}{\sqrt{\frac{dR^2}{dx^2} + \dots}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (65), et faisant des réductions évidentes, il vient

$$(66) \quad \omega dt \sqrt{\frac{dR^2}{dx^2} + \frac{dR^2}{dy^2} + \frac{dR^2}{dz^2}} = d\tau.$$

Évidemment du reste les deux bases du pentagèdre sont parallèles entre elles à l'instant dt , et à la position qu'elles occupent à l'instant $t + dt$; car les plans auxquels elles appartiennent se déduisent des équations (63), (64) et (65) en y remplaçant $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par $x - \xi, y - \eta, z - \zeta$, et les coefficients de x, y, z sont les mêmes dans tous ces plans.

Cela posé, soient x, y, z les coordonnées du point i dans le pentagèdre au temps t ; $x + d_1x, y + d_1y, z + d_1z$ celles du point $i + 1$ au même instant; en l'instant $t + dt$, les mêmes coordonnées seront devenues :

Pour la base postérieure, qui a toujours appartenu au milieu croissant,

$$x + d_1x + u_1 dt, \quad y + d_1y + v_1 dt, \quad z + d_1z + w_1 dt;$$

Pour la base antérieure, qui a toujours appartenu au milieu décroissant,

$$x + d_1x + u_2 dt, \quad y + d_1y + v_2 dt, \quad z + d_1z + w_2 dt.$$

Faisant successivement, dans l'expression (62), la substitution de ces valeurs, d'abord pour le temps t , ensuite pour le temps $t + dt$, j'aurai :

À l'instant t ,

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} 6V &= (d_1x - d_1x)(d_1y - d_1y)d_1z - (d_1x - d_1x)d_1y(d_1z - d_1z) \\ &+ d_2x(d_2y - d_2y)(d_1z - d_1z) - d_2x(d_2y - d_2y)(d_1z - d_1z) \\ &+ (d_1x - d_1x)d_2x(d_1z - d_1z) - (d_1x - d_1x)(d_2y - d_2y)d_1z \end{aligned} \right.$$

Et à l'instant $t + dt$, en effectuant quelques calculs faciles,

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} 6V' &= (d_2x - d_1x)(d_2y - d_2y)d_2z - (d_2x - d_1x)d_2y(d_2z - d_2z) \\ &+ d_3x(d_3y - d_3y)(d_2z - d_2z) - d_3x(d_3y - d_3y)(d_2z - d_2z) \\ &+ (d_2x - d_2x)d_3x(d_2z - d_2z) - (d_2x - d_2x)(d_3y - d_3y)d_2z \\ &+ (u_2 - u_1)dt[(d_2y - d_2y)d_2z - d_2y(d_2z - d_2z)] + (d_2y - d_2y)(d_2z - d_2z) \\ &- (d_2y - d_2y)(d_2z - d_2z) + d_2y(d_2z - d_2z) - (d_2y - d_2y)d_2z \\ &+ (v_2 - v_1)dt[(d_2x - d_1x)d_2z - (d_2x - d_1x)(d_2z - d_2z)] + d_2x(d_2z - d_2z) \\ &- d_2x(d_2z - d_2z) + (d_2x - d_1x)(d_2z - d_2z) - (d_2x - d_1x)d_2z \\ &+ (w_2 - w_1)dt[(d_2x - d_1x)(d_2y - d_2y) - (d_2x - d_1x)d_2y] + d_2x(d_2y - d_2y) \\ &- d_2x(d_2y - d_2y) + (d_2x - d_1x)d_2y - (d_2x - d_1x)(d_2y - d_2y) \end{aligned} \right.$$

Si les deux milieux suivaient la même loi de mouvement, $6V'$ se réduirait à $6V$; et il doit effectivement en être ainsi.

XXXI. — Relation cinématique de la propagation.

D'après ce qui vient d'être établi, on aura évidemment, en représentant par Γ , la densité du milieu croissant et par Γ' ,

celle du milieu décroissant,

$$(69) \quad V\Gamma_2 = V'\Gamma_1, \text{ ou } 6V\Gamma_2 = 6V'\Gamma_1;$$

remplaçant 6V et 6V' par les valeurs (67) et (68), égalant les deux produits, et transposant, on trouve

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\Gamma_2 - \Gamma_1) [(d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y)d_2z - (d_2x - d_1x)d_2y(d_1z - d_2z) \\ &\quad + d_2x(d_2y - d_1y)(d_1z - d_2z) - d_2x(d_1y - d_2y)(d_1z - d_2z) \\ &\quad + (d_2x - d_1x)d_2y(d_1z - d_2z) - (d_2x - d_1x)(d_2y - d_1y)d_2z] \\ &= \Gamma_1(u_2 - u_1) dt [(d_1y - d_2y)d_2z - d_2y(d_1z - d_2z) + (d_1y - d_2y)(d_1z - d_2z) \\ &\quad - (d_1y - d_2y)(d_2z - d_1z) + d_2y(d_1z - d_2z) - (d_1y - d_2y)d_2z] \\ &+ \Gamma_1(v_2 - v_1) dt [(d_2x - d_1x)d_2z - (d_2x - d_1x)(d_1z - d_2z) + d_2x(d_1z - d_2z) \\ &\quad - d_2x(d_2z - d_1z) + (d_2x - d_1x)(d_2z - d_1z) - (d_1x - d_2x)d_2z] \\ &+ \Gamma_1(w_2 - w_1) dt [(d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y) - (d_2x - d_1x)d_2y + d_2x(d_1y - d_2y) \\ &\quad - d_2x(d_1y - d_2y) + (d_2x - d_1x)d_2y - (d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y)]. \end{aligned} \right.$$

Évidemment, à l'instant t , les points 2 et 3 se trouvent sur le plan tangent à la surface de rupture passant par le point 1; ce plan satisfait d'ailleurs à l'équation (65) dans laquelle on a supposé $d\tau$ nulle, puisque ce doit être le résultat de l'équation (61) dans laquelle on change de position sans faire varier les paramètres; les points 4, 5, 6 doivent être de même sur le plan tangent à la surface de rupture infiniment voisine qui diffère de la première par la variation du paramètre τ ; ils doivent donc satisfaire à l'équation (65) sous la forme qui lui est donnée. Ainsi j'aurai, pour le premier plan, c'est-à-dire les points 2 et 3,

$$d_2z = - \frac{1}{\frac{dR}{dz}} \left(\frac{dR}{dx} d_2x + \frac{dR}{dy} d_2y \right),$$

et pour le second, c'est-à-dire pour les points 4, 5 et 6,

$$d_1z = \frac{1}{\frac{dR}{dz}} \left(d\tau - \frac{dR}{dx} d_1x - \frac{dR}{dy} d_1y \right).$$

Éliminant les d_iz au moyen de ces formules, et opérant

quelques réductions faciles, on obtiendra

$$\begin{aligned} &(\Gamma_2 - \Gamma_1) dt [(d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y) - (d_2x - d_1x)d_2y + d_2x(d_1y - d_2y) \\ &\quad - d_2x(d_2y - d_1y) + (d_2x - d_1x)d_2y - (d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y)] \\ &= \Gamma_1(u_2 - u_1) dt \frac{dR}{dz} [(d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y) - (d_2x - d_1x)d_2y + d_2x(d_1y - d_2y) \\ &\quad - d_2x(d_2y - d_1y) + (d_2x - d_1x)d_2y - (d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y)] \\ &+ \Gamma_1(v_2 - v_1) dt \frac{dR}{dy} [(d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y) - (d_2x - d_1x)d_2y + d_2x(d_1y - d_2y) \\ &\quad - d_2x(d_2y - d_1y) + (d_2x - d_1x)d_2y - (d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y)] \\ &+ \Gamma_1(w_2 - w_1) dt \frac{dR}{dz} [(d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y) - (d_2x - d_1x)d_2y + d_2x(d_1y - d_2y) \\ &\quad - d_2x(d_2y - d_1y) + (d_2x - d_1x)d_2y - (d_2x - d_1x)(d_1y - d_2y)]. \end{aligned}$$

Chassant le facteur commun aux termes de cette équation, après y avoir remplacé $d\tau$ par la valeur (66), elle se réduit à

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\Gamma_2 - \Gamma_1) \omega \sqrt{\frac{dR^2}{dx^2} + \frac{dR^2}{dy^2} + \frac{dR^2}{dz^2}} \\ &= \Gamma_1 \left[(u_2 - u_1) \frac{dR}{dx} + (v_2 - v_1) \frac{dR}{dy} + (w_2 - w_1) \frac{dR}{dz} \right]. \end{aligned} \right.$$

Sous cette forme, ω exprime la vitesse de transmission du mouvement dans le milieu décroissant, tel qu'il émit au temps t , et non pas tel qu'il est au temps $t + dt$, c'est-à-dire au dernier moment de la transmission. C'est cependant cette dernière vitesse de transmission Ω qu'on mesure en général, et qui représente l'espace absolu gagné par le nouveau mouve-

ment. Or, pour celle-ci, l'espace n'est plus $ds = \omega \sqrt{\sum \frac{dR^2}{dx^2}} dt$, mais ds augmenté de l'intervalle même parcouru par la lame (4, 5, 6) du milieu décroissant; c'est-à-dire qu'on a

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Omega \cdot \sqrt{\sum \frac{dR^2}{dx^2}} dt \\ &= \omega \sqrt{\sum \frac{dR^2}{dx^2}} dt + \left(u_1 \frac{dR}{dx} + v_1 \frac{dR}{dy} + w_1 \frac{dR}{dz} \right) dt. \end{aligned} \right.$$

Déduisons la valeur de ω de cette formule, substituons-la dans (71), et effaçons les termes qui se détruisent; il viendra

définitivement

$$(73) \left\{ \begin{aligned} & (\Gamma_2 - \Gamma_1) \Omega \sqrt{\Sigma \frac{dR^2}{dx^2}} \\ & = (\Gamma_2 u_2 - \Gamma_1 u_1) \frac{dR}{dx} + (\Gamma_2 v_2 - \Gamma_1 v_1) \frac{dR}{dy} + (\Gamma_2 w_2 - \Gamma_1 w_1) \frac{dR}{dz} \end{aligned} \right.$$

Ces deux équations (72) et (73) qui reviennent à la même, quant au fond, sont complètement indépendantes du volume qui a servi à les établir, et on devait s'y attendre; elles sont le résultat de la continuité et constituent une relation *cinématique* entre les vitesses des deux milieux et celle de la propagation. Elles rendent d'ailleurs fort douteuse la constance de cette dernière, contrairement au résultat des approximations admises aujourd'hui.

XXXII. — Relation mécanique de la propagation.

Pour compléter l'étude de la propagation du mouvement, il me reste à chercher l'équation due au principe de d'Alembert. Or, il résulte de ce qui précède que les bases élémentaires sont parallèles à un même plan dans les instants t et $t + dt$; on peut donc substituer, à la considération d'un pentaèdre, celle d'un parallépipède rectangulaire, dont les faces latérales seront conséquemment perpendiculaires à la surface (61) $R = \tau$. Ce parallépipède ne sera pas sensiblement déformé pendant l'instant dt , puisque la normale à l'instant t fait forcément un angle infiniment petit avec la normale à l'instant $t + dt$.

Si l'on désigne par P le parallépipède dont il s'agit, et si on le compare au parallépipède P' contigu, mais en avant, et situé tout entier dans le milieu décroissant, on voit que les forces finies appliquées aux faces de ce dernier parallépipède P' sont égales entre elles à des infiniment petits près, et se détruisent; comme elles sont aussi égales, à des infiniment petits près, sauf sur la face postérieure, à celles de P, il suit que sur P ces forces se détruisent à l'exception de la différence due aux forces exercées sur les faces postérieure et antérieure. A la fin de l'instant $t + dt$, le parallépipède est situé tout entier dans le milieu croissant; les forces finies, appli-

quées sur ses faces, ne diffèrent plus entre elles que de quantités infiniment petites. La différence qui existait entre les forces de la face antérieure et celles de la face postérieure a disparu; il y a donc là une force perdue sensiblement égale à la différence qui existe entre les forces du milieu croissant et du milieu décroissant mesurées sur une même surface. Cette force représente l'augmentation de mouvement imprimé au parallépipède. Quant à la face da , elle n'a pas changé sensiblement de valeur pendant l'instant dt , puisqu'elle a toujours appartenu au même milieu, ou été parallèle à une face qui appartenait à un même milieu. Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes, parallèlement aux axes, des forces estimées par unité de surface, appliquées à la surface postérieure du parallépipède P à l'instant t , c'est-à-dire dans le milieu croissant, et estimées parallèlement aux axes; soient X_2, Y_2, Z_2 les quantités correspondantes dans le milieu décroissant. Les forces perdues pendant l'instant dt dans le parallépipède P seront

$$(X_1 - X_2) da dt, \quad (Y_1 - Y_2) da dt, \quad (Z_1 - Z_2) da dt,$$

et les quantités de mouvement gagné par le parallépipède P de volume $da \cdot \omega dt$ auront pour composantes

$$\Gamma_2 da \cdot \omega dt \cdot (u_1 - u_2), \quad \Gamma_2 da \cdot \omega dt \cdot (v_1 - v_2), \quad \Gamma_2 da \cdot \omega dt \cdot (w_1 - w_2).$$

Égalant ces quantités et divisant par le facteur commun $da dt$, il vient

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma_2 \omega (u_1 - u_2) &= X_1 - X_2, \\ \Gamma_2 \omega (v_1 - v_2) &= Y_1 - Y_2, \\ \Gamma_2 \omega (w_1 - w_2) &= Z_1 - Z_2. \end{aligned} \right.$$

Cette relation peut encore être mise sous la forme

$$(75) \quad \frac{1}{\Gamma_2 \omega} = \frac{X_1 - X_2}{u_1 - u_2} = \frac{Y_1 - Y_2}{v_1 - v_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{w_1 - w_2}.$$

On pourrait tout aussi bien y substituer Ω à ω ; je ne fais pas ce calcul, qui ne présente aucune difficulté.

XXXIII. — Résumé général.

Qu'il me soit permis de résumer ce travail en le terminant, et d'en exposer les conséquences. J'espère avoir rendu évi-

dent que l'hypothèse de la continuité ne peut pas représenter la réalité, même comme première approximation, à moins qu'on n'ajoute aux volumes continus des surfaces matérielles complémentaires; que l'existence de ces surfaces matérielles complémentaires fait comprendre comment l'adhésion, le frottement, et même la capillarité, peuvent résulter d'une force attractive en raison inverse de la quatrième puissance ou d'une puissance plus grande des distances. Je ne me dissimule pas cependant les obscurités de toute nature que laisse subsister l'approximation à laquelle je me suis borné; aussi mes premiers efforts tendront-ils à examiner si les phénomènes célestes s'opposent à la supposition d'une attraction en raison inverse de la quatrième puissance des distances, ou s'ils la confirment; puis à sommer d'une manière plus exacte que je ne l'ai fait les sommes d'attractions discontinues. Si je parviens à quelques résultats, ils formeront une suite naturelle à ces études.