ANALYSE

[illegible]

I.

ANALYSE DEMONTRÉE,

OU

LA METHODE

DE RESOUDRE LES PROBLÊMES

DES MATHEMATIQUES,

ET

D'APPRENDRE FACILEMENT CES SCIENCES;

Expliquée & démontrée dans le premier Volume, & appliquée, dans le ſecond, à découvrir les proprietés des figures de la Geometrie ſimple & compoſée ; à reſoudre les Problêmes de ces ſciences & les Problêmes des ſciences Phyſico-mathematiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul differentiel & le calcul integral. Ces derniers calculs y ſont auſſi expliqués & démontrés.

DEDIÉE A MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

Par un Prêtre de l'Oratoire.

TOME I.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Univerſité, rue Galande près de la rue du Fouare, aux Armes de l'Univerſité.

MDCCVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

A MONSEIGNEUR

LE DUC

DE BOURGOGNE.

MONSEIGNEUR,

L'honneur que vous me faites de permettre que cet Ouvrage, composé pour faciliter l'étude *des Mathematiques, & pour les conduire à leur perfection par un progrès rapide, paroisse sous vos Auspices & sous la protection de votre auguste Nom, est le plus fort préjugé qu'on puisse avoir de son utilité. Tout le monde sçait,* MONSEIGNEUR, *votre goût pour toute sorte de Sciences en general, & pour les Mathematiques en particulier; que ce goût est plein de discernement; qu'il est exquis.*

On voit avec admiration qu'un jeune Heros qui a sçu conduire des Armées, vaincre l'Ennemi, & emporter les plus fortes Places presqu'aussi-tôt qu'il a été en âge de manier les armes; toujours plein d'une noble ardeur, qui ne respire que de nouvelles conquêtes & de nouveaux triomphes; toujours prêt à s'exposer pour le bien de l'Etat, soit qu'il faille porter la terreur au dehors en fondant sur nos Ennemis, ou rassurer la confiance au dedans du Royaume, en rendant inutile leur irruption sur une de nos Provinces: qui ne neglige aucun des soins qu'un Prince destiné à gouverner un grand Royaume, doit prendre de s'instruire par avance de tout ce qui concerne le bien de l'Etat & les avantages particuliers de chaque Province, & generalement de tout ce qui peut contribuer au bonheur des Peuples & à la grandeur du Souverain: On voit, dis-je, avec admiration que sans rien prendre sur le temps, qu'une pieté solide lui fait un devoir de donner au culte de Dieu & à l'étude assidue des Livres saints, il sçait encore en dérober à ses plaisirs pour déveloper ce qu'il y a de plus caché dans les Sciences; qu'elles lui servent de délassement; & qu'il honore de sa protection ceux qui les cultivent, aprés s'être mis en état de juger par lui-même de leurs sciences, & de décider de leurs Ouvrages.

Mais, MONSEIGNEUR, *les traits de la plume d'un Geometre n'ont pas assez de délicatesse ni de vivacité pour representer au naturel le portrait que vous avez tracé vous-même dans tous les esprits & dans tous les cœurs par cette conduite toujours remplie de sagesse & de bonté, formée sur les admirables Exemples & sur les Royales Instructions du plus Sage, du plus Religieux, du plus Magnanime, en un mot du*

Premier & du plus Grand des Rois votre auguste Ayeul.

Je puis assurer, MONSEIGNEUR, *qu'il n'y a personne en qui il produise de plus vifs sentimens de veneration que dans celui qui a l'honneur d'être avec un très profond respect,*

MONSEIGNEUR,

Votre très humble & très obéïssant
Serviteur CHARLES REYNEAU,
Prêtre de l'Oratoire.

PRÉFACE.

L'ESPRIT de l'homme est si borné, qu'il ne peut voir distinctement d'une simple vûe beaucoup d'objets à la fois. Les perceptions vives, comme sont toutes celles des sens & de l'imagination, l'éblouissent, & elles occupent tellement son étenduë, qu'il ne peut découvrir les raports & les proprietés des objets sensibles, ~~qu'en les consi~~derant par parties les unes aprés les autres avec une application penible & fatigante ; & quand il est attentif à quelqu'une, il a perdu de vûe les autres, qui lui seroient pourtant nécessaires afin d'en appercevoir les raports.

C'est une des principales causes du peu de progrès qu'ont fait les sciences sensibles : Mais, pour ne parler ici que des Mathematiques, que leur utilité, leur beauté, leur évidence & leur certitude ont toujours fait cultiver ; pendant que l'on ne s'y est appliqué que par la contemplation des figures mêmes, que l'on a cherché les proprietés des figures en les regardant, ou en les formant dans ſon imagination, on n'a pas fait beaucoup de chemin : les découvertes étoient fort bornées : on ne trouvoit avec beaucoup de peine que des reſolutions particulieres des Problêmes ; on ſe fatiguoit ; on ſe rebuttoit ; & l'on ne peut aſſés louer le travail, la patience & la force d'eſprit des anciens Geometres, d'avoir porté les Mathematiques par des moyens ſi difficiles, à l'état où ils nous les ont laiſſées.

On s'aviſa heureuſement, dans le dernier ſiecle, d'exprimer les lignes & les figures par les caracteres familiers de l'alphabet, & de réduire ces expreſſions à un calcul facile, qui exprimât auſſi tous les raports ſimples & compoſés que peuvent avoir ces lignes & ces figures. On forma un Art methodique (qui eſt ce que l'on nomme l'*Analyſe*) pour trouver, par les raports connus qu'ont les grandeurs inconnues que l'on cherche dans les Problêmes avec celles qui ſont connues, des *équations* qui exprimaſſent les conditions & la nature, pour ainſi dire, des Problêmes ; & pour découvrir les valeurs des grandeurs inconnues de ces équations ; ce qui donne la reſolution des Problêmes. *Monſieur Deſcartes* perfectionna & réduiſit à une extrême facilité ces calculs & cette Analyſe naiſſante. Il y ajouta l'excellente methode d'employer les expreſſions indéterminées, qui, quelques ſimples qu'elles étoient, repreſentaſſent pourtant une infinité de grandeurs ; & de les déterminer aux grandeurs particulieres de tous les cas auſquels elles peuvent convenir : la méthode de réduire les lignes courbes à des équations qui en exprimaſſent les principales

proprietés ; & de tirer de ces équations toutes les choſes que l'on pouvoit deſirer de connoître ſur ces courbes : enfin la maniere d'employer les courbes elles-mêmes à la reſolution des équations & des Problêmes.

Ces nouvelles methodes, réduiſant la Geometrie à un calcul ſimple & facile, retranchoient ce qu'il y avoit d'embaraſſant dans les figures, c'eſt à dire, tout ce qui fatiguoit l'imagination, & ce qui rempliſſoit la capacité de l'eſprit. Elles lui laiſſoient la liberté de penetrer ſon ſujet, & de découvrir avec évidence tout ce qu'il renfermoit. Elles augmentoient même, pour ainſi dire, l'étendue de l'eſprit par l'art de lui repreſenter, comme dans une perſpective, ſous des expreſſions ſimples & abregées, un nombre infini d'objets. Les Mathematiques devinrent par là ſi faciles, que chaque trait de plume donnoit naiſſance à des découvertes. Alors le plaiſir ſucceda à la peine, & le cœur dédommagé permit à l'eſprit de voir les utilités & les beautés des Mathematiques, & il s'y rendit. Auſſi ces ſciences changerent-elles de forme. On vit une Geometrie nouvelle, qui contenoit tout ce que nous avions reçû des anciens, & qui alloit infiniment plus loin : les reſolutions étoient generales, & aucun cas particulier ne leur échapoit.

On vit naître de la même ſource des ſciences curieuſes & utiles, & preſque toutes les autres en tirerent un nouvel éclat : comme celle qui a appris à donner aux horloges toute la juſteſſe neceſſaire pour les rendre la meſure exacte du temps :

celle qui nous a donné les moyens d'étendre notre vue aux objets qui nous étoient inconnus par leur trop grand éloignement, ou par leur extrême petitesse : celle qui a découvert la maniere de jetter les bombes, & de les faire tomber precisément où l'on voudroit, &c.

Ces methodes étoient assés fecondes pour produire toutes les découvertes; mais il leur manquoit des expressions, & un calcul qui suivît pas à pas la nature, laquelle, produisant les figures par le mouvement, n'en fait décrire, aux corps mobiles qui les forment, que des parties insensibles plus petites que toutes celles que nous pouvons déterminer, dans chacun des instans qui passent plus vîte que tout temps que nous pouvons mesurer. On ne pensoit pas à donner des expressions à ces espaces qui étoient trop petits pour avoir un raport déterminé avec ceux ausquels convenoient *les expressions ordinaires*, ni à ces instants que leur petitesse infinie empêchoit d'entrer en comparaison avec le plus petit temps que l'on pût prendre pour la mesure de tous les autres. On pensoit encore moins à réduire ces premiers élemens des grandeurs à un calcul qui leur fût propre, & qui les soumît aux methodes de l'Analyse.

Cependant le principe de ce calcul est si naturel, que les premiers Geometres l'ont fait servir à quelques unes de leurs démonstrations. La plûpart des propositions du *douziéme livre d'Euclide* ne sont démontrées que par ce principe; & on le voit supposé dans quelques-unes des découvertes *d'Archimede*. On s'apperçut bien du besoin que l'on avoit

de ce calcul, pour résoudre des Problêmes qui furent proposés du temps de Monsieur Descartes, & il fut obligé d'exclure de ses methodes les courbes qu'on a nommées aprés lui *Mechaniques*, qui sont pourtant un nombre infini de courbes dont les proprietés sont aussi utiles que celles des courbes *Geometriques*, & qui, à l'aide de ce calcul, deviennent soumises à ces methodes comme les autres. Les Geometres, qui ont suivi les methodes de Monsieur Descartes, ont été obligés, aussi bien que les plus anciens, de supposer, dans la résolution de plusieurs Problêmes, le principe de ce calcul que l'on touchoit du doigt, pour ainsi dire : mais il falloit que differentes Nations eussent part à la gloire des découvertes. Celles ci se sont faites en même temps en Allemagne par *Monsieur Leibnits*, & en Angleterre par *Monsieur Newton*; l'un & l'autre ont trouvé des expressions, & un calcul propre à ces premiers élemens des grandeurs d'une petitesse infinie par raport aux grandeurs entieres dont ils sont les premiers élemens; & l'on a pû, par le moyen de ces expressions & de ce nouveau calcul, leur appliquer les methodes de l'Analyse, & remonter de ces élemens infiniment petits aux grandeurs entieres dont ils sont les élemens. Ces nouveaux calculs s'appellent *le calcul differentiel & le calcul integral*.

Monsieur Leibnits n'eut pas plûtôt rendu publiques ses nouvelles découvertes, dont il cacha pourtant une partie exprès, comme il le dit lui-même, pour laisser aux autres le plaisir de les trouver, que *Messieurs Bernoulli*, qui en virent toute l'utilité, s'y appliquerent avec tant de succès, qu'ils les pénétrerent, se les rendirent propres, y ajouterent de nouvelles methodes, & en firent usage dans la resolution d'une grande quantité de nouveaux Problêmes.

Monsieur le Marquis de l'Hospital donna l'excellent Ouvrage *de l'Analyse des infiniment petits*, où le calcul differentiel, & les principaux usages de ce calcul pour toutes les courbes, sont expliqués: & il fit voir qu'il avoit pénetré dans tout ce que le calcul integral pouvoit avoir de plus caché, par les resolutions complettes qu'il trouva des plus difficiles Problêmes, qui furent proposés par ceux qui s'en étoient rendu les maîtres. *Monsieur Varignon* doit bientôt donner une science generale du Mouvement toute nouvelle, qui est le fruit des profondes découvertes qu'il a faites dans ces nouvelles methodes, & dans la Geometrie composée. On doit juger du prix de l'ouvrage par les beaux morceaux qui paroissent tous les ans. Ce sont des pieces achevées, remplies de nouvelles découvertes, qui font bien desirer l'ouvrage entier dont elles ne doivent faire que quelques parties. *Monsieur Carré* employa le principe le plus general du calcul integral à la mesure des surfaces, des solides, des distances des centres de pesanteur & d'oscillation. *Monsieur Newton* fit paroître de son côté le sçavant Ouvrage *des Principes Mathematiques de la Philosophie naturelle*, qui est tout fondé sur ces nouvelles methodes qu'il avoit inventées, mais dont il n'a laissé voir que quelques vestiges, pour donner lieu à ceux qui voudroient entrer dans l'invention même des

verités qu'il y découvre, de se rendre propres les methodes qui en sont la clef. Enfin depuis l'invention de ces nouveaux calculs, on a non seulement résolu d'une maniere courte & generale les Problêmes les plus difficiles, qui avoient été trouvés par les methodes de Monsieur Descartes appliquées au calcul ordinaire de l'Algebre; mais on a vû *les Actes de Lipsic, les Journaux des Sçavans & les Memoires de l'Academie Royale des Sciences* remplis de resolutions de Problêmes; que l'on n'auroit osé tenter auparavant. Elles étoient tirées comme du fond de la nature, & des premiers & plus intimes principes du mouvement, de la courbure même des courbes & des petits angles que forment entr'elles les tangentes de leurs points qui se touchent, que l'on peut bien concevoir, mais que l'on ne sçauroit comparer avec les angles déterminés que nous mesurons; & l'on s'est ouvert par le moyen de ces nouveaux calculs une voye qui conduit à une nouvelle Geometrie des courbes mechaniques & parcourantes, qui est aussi utile que celle que l'on avoit déja.

Les resolutions d'un si grand nombre de Problêmes nouveaux, que nous ont donné les illustres Inventeurs des calculs differentiel & integral, & ceux qui aprés eux se les sont rendu propres par leur travail, sont les fruits que l'Analyse a recueillis de ces calculs; mais ils ne sont que pour un petit nombre de Sçavans; c'est le prix de la peine qu'il faut prendre pour inventer soi-même quelques-unes des methodes qui ont servi à les découvrir. Pour les posseder, il faut se mettre en état de faire de pareilles découvertes ; & ce n'est que depuis peu de temps que l'on a vû des regles du calcul integral dans l'ouvrage de *Monsieur Cheinée* Ecossois, *de Methodo fluxionum inversâ*, (les Anglois donnent aprés Monsieur Newton, au calcul differentiel, le nom de *calcul des fluxions*,) & dans le petit traité *de quadraturis curvarum*, que Monsieur Newton a mis à la fin de son ouvrage sur les couleurs.

On a toujours regardé les Mathematiques comme très utiles pour la perfection de la Physique & des Arts, & pour former l'esprit des jeunes gens, en les accoutumant à apporter aux sujets de leurs applications toute l'attention qu'ils demandent ; à mettre, dans toutes les démarches que doit faire leur esprit dans la recherche de la verité, l'ordre qu'il faut pour y arriver ; à ne donner leur consentement entier qu'à l'évidence dans les sciences naturelles : en leur rendant familiere la pratique des regles qui font découvrir, dans toutes les occasions où ils peuvent se trouver, le parti le plus raisonnable : & enfin en leur faisant acquerir la sagacité necessaire pour trouver dans les questions difficiles les moyens les plus propres à les résoudre. Cette utilité des Mathematiques, & l'habitude de les mettre à la portée des commençants acquise pendant vingt deux années de temps que je les ai enseignées publiquement, m'ont porté à mettre toutes les methodes que nous avons reçues de Monsieur Descartes & de ses Disciples, & celles qui ont été découvertes par les sçavans Geometres de notre temps, dans leur ordre naturel, de maniere qu'elles s'éclaircissent mutuellement,

ment, & fussent toutes démontrées dans cet Ouvrage, que je nomme à cause de cela l'*Analyse démontrée*. Je me suis proposé de rendre, par le moyen de ces methodes, les Mathematiques faciles à ceux qui commencent, & qui veulent les sçavoir à fond ; en leur découvrant les voyes qui les conduiront des permiers principes à tout ce qu'ils peuvent desirer d'en connoître, sans se fatiguer l'imagination, sans être obligés de lire de gros volumes, sans qu'il faille charger leur memoire d'un grand nombre de propositions ; en leur ôtant par là ce qu'il y avoit de rebutant & de plus pénible dans l'étude des Mathematiques : en les faisant entrer dans l'invention naturelle de ces sciences, qui les menera sur chaque sujet à des resolutions simples & generales : en les mettant enfin en état d'entendre toutes les nouvelles découvertes, & de faire eux-mêmes celles qu'ils voudront entreprendre.

Cet Ouvrage est partagé en huit Livres ; l'Analyse est expliquée & démontrée dans les sept premiers Livres, qui font le premier Volume ; & le huitiéme, qui est comme une seconde partie de l'Ouvrage, & qui en est le second Volume, fait voir les usages de l'Analyse, & apprend aux Lecteurs qui commencent, la maniere d'en appliquer les methodes à la Geometrie simple & composée, & à la resolution des Problêmes des sciences Physico-Mathematiques, en se servant du calcul ordinaire de l'Algebre, du calcul differentiel & du calcul integral : ces nouveaux calculs y sont aussi expliqués & démontrés, comme on le dira dans la Préface de ce huitiéme Livre.

Le premier Livre contient l'Analyse simple, &

la resolution de plusieurs Problêmes qui n'ont besoin que de l'Analyse simple. Les six Livres suivants expliquent & démontrent l'Analyse composée. Le second & le troisiéme enseignent les premiers principes de l'Analyse, & les préparations qu'il faut donner aux équations composées pour les resoudre.

La methode de réduire les Problêmes aux équations qui en expriment toutes les conditions, est expliquée dans le second Livre avec plusieurs préparations qu'il faut faire sur les équations, pour en rendre la resolution plus facile; comme la maniere d'en ôter les fractions & les incommensurables, & la maniere de trouver le plus grand diviseur commun à plusieurs équations d'un même Problême.

On explique dans le troisiéme Livre la formation des équations : elle sert à faire concevoir clairement leur nature aux Lecteurs qui commencent. On leur apprend à distinguer le nombre & les qualités des valeurs de l'inconnue de chaque équation; & on leur enseigne les differentes transformations des équations avec leurs usages. Aprés avoir appris les premiers principes de l'Analyse dans les trois premiers Livres, qui sont comme des préparations pour resoudre les équations & les Problêmes qu'elles expriment, on enseigne la resolution des équations dans les quatre Livres suivants.

Le quatriéme Livre contient plusieurs methodes pour resoudre toutes les équations de quelque degré qu'elles puissent être, lorsque les valeurs de l'inconnue sont commensurables; & les methodes generales de réduire les équations composées aux plus simples qu'il est possible. Les regles qu'a données *Monsieur Hudde* dans la lettre intitulée *de reductione æquationum*, qui est à la fin du premier Volume de la Geometrie de Monsieur Descartes, y sont mises en ordre & démontrées. La methode d'employer les grandeurs indéterminées qui representent toutes les grandeurs particulieres, pour découvrir celles que l'on cherche, est expliquée dans ce quatriéme Livre, & mise en usage dans tous les suivants. Les Lecteurs qui commencent, doivent se rendre familiere cette methode de Monsieur Descartes : elle est comme la clef qui ouvre l'entrée presque à toutes les découvertes. On explique dans le même Livre tout ce qui regarde les valeurs égales des inconnues des équations; ce qui est de grand usage dans la resolution de plusieurs Problêmes.

On a mis dans le cinquiéme Livre les methodes de resoudre les équations composées en particulier du second degré, du troisiéme, du quatriéme, &c. On tâche de faire entrer les commençants dans ces resolutions, qui sont la plûpart de l'invention du *Pere Prestet*, comme s'ils les découvroient eux-mêmes. Ils y remarqueront qu'il y a dans l'Analyse, aussi bien que dans la Geometrie simple, des Problêmes dont l'on n'a pû jusqu'à present démontrer l'impossibilité, ni trouver des methodes qui en donnassent la resolution exacte; qu'on n'a pas laissé cependant de trouver des methodes qui en donnassent des resolutions si approchantes, que les Mathematiques practiques & les Arts en tirent les mêmes avantages qu'ils auroient des resolutions exactes : & comme l'on a trouvé dans la Geometrie des valeurs si approchantes de la longueur de la circonference & de la quadrature du cercle, que leur difference d'avec les valeurs exactes est insensible; on a de même trouvé des methodes d'approcher de si prés des valeurs des inconnues des équations dans les cas où l'Analyse n'en a pas encore pû trouver d'expressions exactes, qu'on en peut rendre la difference plus petite qu'aucune grandeur que l'on voudra. Ces methodes d'approximation sont le sujet du sixiéme & du septiéme Livre.

On explique & l'on démontre dans le sixiéme Livre la methode de trouver les grandeurs qui sont les limites des valeurs de l'inconnue dans les équations numeriques de tous les degrés; (*Monsieur Rolle est l'Auteur de cette methode*;) & l'on donne plusieurs manieres de trouver, par le moyen de ces limites, les valeurs des inconnues des équations numeriques aussi peu differentes des valeurs exactes qu'on le peut desirer.

La maniere de faire une formule generale pour élever une grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra à une puissance quelconque, dont l'exposant indéterminé represente un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif, est expliquée & démontrée pour tous les cas dans le septiéme Livre. Elle est de grand usage pour former toute sorte de puissances, pour extraire toute sorte de racines, par de simples substitutions; pour faire des formules generales dans la resolution des Problêmes & dans le calcul integral; & pour réduire à une extrême facilité la pratique des methodes qui font trouver par *des suitesinfinies* les valeurs de celles des inconnues que l'on voudra de toutes

sortes d'équations qui en ont plusieurs, comme aussi de toutescelles qui contiennent les differentielles de plusieurs grandeurs *changeantes* meslées ensemble. Ces methodes, découvertes par *Messieurs Leibnits & Newton*, sont expliquées & démontrées dans ce septiéme Livre: & comme elles sont de grand usage dans la resolution d'une infinité de beaux Problêmes, & qui sont très utiles, comme on le verra dans la derniere Section de la seconde Partie du huitiéme Livre; on n'a rien oublié pour les faire concevoir clairement aux Lecteurs qui commencent, & pour les leur rendre familieres par plusieurs exemples: on les applique aussi, à la fin de ce septiéme livre, à l'approximation des valeurs des inconnues des équations litterales déterminées de quelque degré qu'elles puissent être.

Ainsi les Lecteurs apprendront, dans les sept premiers Livres, la maniere de réduire en équations les Problêmes des Mathematiques, & surtout de la Geometrie simple & composée, & des sciences Physico-Mathematiques, que l'on a eues principalement en vue dans cet Ouvrage. Ils apprendront les methodes pour resoudre ces équations & les Problêmes dont elles sont les expressions: Elles leur feront trouver des resolutions exactes, quand cela se peut; & quand elles ne le pourront pas, elles leur donneront des approximations qu'ils pourront continuer à l'infini. Enfin ils verront dans le huitiéme Livre les usages de ces methodes; & ils y apprendront la maniere de les appliquer à découvrir les proprietés des figures de la Geometrie simple & composée; & à resoudre les Problêmes de ces Sciences, & les Problêmes des Sciences Physico-Mathematiques.

AVERTISSEMENT.

POUR former une notion de l'Analyse aux Lecteurs qui commencent, on leur fera remarquer, que dans tous les Problêmes des Mathematiques il y a des grandeurs inconnues que l'on cherche, des grandeurs connues, & des raports connus entre les grandeurs connues & les inconnues : & que c'est par le moyen de ces raports connus qu'on peut découvrir les grandeurs inconnues que l'on cherche.

L'Analyse est la science qui contient les methodes pour découvrir les grandeurs inconnues que l'on cherche. Ces methodes enseignent à marquer par les lettres de l'alphabet les grandeurs inconnues & les grandeurs connues ; à trouver, par le moyen des raports connus qui sont entre les unes & les autres, des équations qui expriment les Problêmes que l'on veut resoudre, & enfin à resoudre ces équations, c'est à dire, à faire découvrir les valeurs des lettres qui marquent les grandeurs inconnues que l'on cherche. C'est ainsi que l'Analyse donne la resolution des Problêmes.

Quand les équations, que l'Analyse fait découvrir pour la resolution des Problêmes, contiennent des lettres qui marquent les inconnues qui ne sont point multipliées par elles-mêmes, ni par d'autres lettres qui representent d'autres inconnues, ces équations s'appellent simples ; & l'Analyse, par raport à ces équations, s'appelle l'Analyse simple. Le premier Livre explique l'Analyse simple.

Quand les lettres des inconnues sont multipliées par elles-mêmes ou par d'autres lettres des inconnues dans les équations, on les nomme des équations composées, & l'Analyse par raport à ces équations, s'appelle l'Analyse composée : Elle est le sujet des Livres qui suivent le premier.

Quand l'inconnue ne fait qu'un seul terme de l'équation dont tous les autres termes ne contiennent que des grandeurs connues, si elle est multipliée par elle-même, l'equation est composée, & elle se resout par les methodes des équations composées ; mais comme elle se resout aussi par une simple extraction de racines, on peut la regarder comme une équation simple, qui peut être resolue par l'Analyse simple.

Ceux qui voudront profiter de cet Ouvrage, ne doivent le lire que la plume à la main, & faire eux-mêmes les calculs qu'ils y trouveront.

Pour l'entendre avec plus de facilité, & pour se le rendre propre peu à peu sans se rebuter, ils pourront se contenter dans une premiere lecture de lire le premier, le second & le troisiéme Livre jusqu'à la page 92 art. 44, passer tout le reste du troisiéme Livre, & tout le quatriéme Livre, & lire la seule premiere Section du cinquiéme Livre. Les connoissances, qu'ils auront acquises dans cette premiere lecture, suffiront à ceux qui sçavent les premiers élemens de la Geometrie simple, pour entendre la premiere & la seconde Section du huitiéme Livre, où ils verront les usages des methodes de l'Analyse qu'ils auront apprises, dans la Geometrie simple, dans l'art de jetter les bombes, & dans les Problêmes qui font découvrir les centres d'oscillation des pendules composés pour donner la justesse aux horloges. Ils pourront même entendre la troisiéme Section du huitiéme Livre. Ils y trouveront les usages de l'Analyse dans la Geometrie composée, & en même temps ils se formeront une idée de cette science & de toutes les lignes courbes qui en sont l'objet, & ils apprendront les proprietés les plus utiles des courbes les plus simples, qu'on appelle les Sections coniques. Ces connoissances les mettront en état d'entendre les Problêmes des articles 498 & 499. Aprés quoi ils pourront lire la premiere Section de la seconde Partie du huitiéme Livre, où est expliqué le calcul differentiel, jusqu'à l'art. 536 ; passer aux art. 549, 550 & 551, pour voir l'usage de ce calcul dans les Problêmes qui font trouver les tangentes des courbes ; & sans s'arrêter au reste de la seconde Partie du huitiéme Livre, ils pourront lire la premiere Section de la troisiéme Partie, où sont expliqués les premiers principes du calcul integral jusqu'à l'art. 666 ; enfin, pour voir quelques usages faciles de ce calcul, ils passeront tout le reste de la troisiéme Partie jusqu'à la derniere Section, dont ils pourront lire les deux premiers Exemples, & passer à la seconde Partie de la derniere Section : ils verront, dans le premier Exemple Physico-mathematique, l'invention des Ovales dont parle Mr Descartes à la fin du second Livre de sa Geometrie, dont il n'a pas donné l'Analyse. Le second Exemple Physico-mathematique leur apprendra la resolution generale du Problême, où il s'agit, aprés avoir donné à la premiere surface d'un verre telle figure qu'on aura voulu, de trouver la figure qu'il faut donner à la seconde surface du même verre, afin que les rayons *qui partent d'un point déterminé, soient disposés par les refractions qu'ils souffriront à l'entrée & au sortir de ce verre, à s'aller réünir dans un même point déterminé. Ils passeront tout le reste.*

Les Lecteurs qui commencent, apprendront, par cette premiere lecture, les premieres methodes de l'Analyse; & ils verront les usages de ces methodes dans la Geometrie simple & composée, & dans la resolution des Problèmes Physico-mathematiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul differentiel & le calcul integral.

Dans une seconde lecture, si les choses qu'ils auront lues dans la premiere ne leur sont pas assez familieres, ils liront les trois premiers Livres, la premiere Section du quatriéme Livre, la troisiéme jusqu'à l'art. 66, & la quatriéme Section; la premiere Section du cinquiéme Livre, la seconde Section jusqu'à l'art. 94, la troisiéme Section jusqu'à l'article 104; ils liront ensuite toute la premiere Partie du huitiéme Livre; les trois premieres Sections de la seconde Partie, excepté l'art. 536 & les suivants jusqu'à l'art. 542; ils passeront la quatriéme Section, & ils liront dans la troisiéme Partie la premiere Section jusqu'à l'art. 666, ils passeront cet article & les suivants jusqu'à l'art 714, qu'ils pourront lire avec ce qui reste de la premiere Section; ils ne liront ni la seconde ni la troisiéme Section, ni le premier Exemple de la quatriéme; mais ils liront le reste de la quatriéme Section, & ils pourront entendre les six Exemples Physico-mathematiques qui sont à la fin de la cinquiéme Section.

Dans une troisiéme lecture, ils ajouteront à la précedente le sixiéme & le septiéme Livre, excepté la cinquiéme & la sixiéme Section du septiéme Livre; & il n'y aura plus rien dans le huitiéme Livre qu'ils ne puissent entendre; & ils seront en état de faire le choix des Methodes de l'Ouvrage qu'ils doivent se rendre les plus familieres.

Pour entendre tout cet Ouvrage, il ne faut sçavoir que les operations de l'Algebre sur les grandeurs litterales, c'est à dire, il ne faut sçavoir que le seul calcul & les proportions & les progressions. Ces choses sont expliquées dans les Traités d'Algebre, comme dans les Elements du Pere Prestet, *ou dans le Traité* de la Grandeur du Pere Lamy; *ceux qui ont la Geometrie latine de M^r Descartes, peuvent se contenter du petit Traité dont le titre est,* Principia Matheseos universalis, *qui est au commencement du second Volume. Pour entendre le huitiéme Livre, il suffit de sçavoir la*

Geometrie

Geometrie simple, c'est à dire, ce qui est contenu dans les six premiers Livres d'Euclide. On donnera dans la suite un Traité d'Algebre & une Geometrie simple.

Le seul calcul qui n'est pas expliqué dans les Traités d'Algebre dont on vient de parler, est celui des exposants des puissances. *On le mettra ici en peu de mots pour la commodité des commençants, qui pourront le lire quand ils seront arrivés aux endroits de cet Ouvrage où ils en auront besoin.*

Lorsqu'une même grandeur a *est multipliée par elle-même une fois, deux fois, trois fois, & ainsi de suite; les produits* aa, aaa, aaaa, *&c. s'appellent les puissances de cette grandeur. Pour abreger ces expressions, l'on écrit au haut de cette grandeur vers la droite en moindre caractere le nombre qui exprime combien de fois chacun des produits contient la lettre* a, *de cette maniere* a^2, a^3, a^4, a^5, &c. *ces nombres s'appellent* les exposants *des puissances de la grandeur* a; *ainsi* a^2 *est la seconde puissance de* a, *& 2 est l'exposant de la seconde puissance de* a; *3 est l'exposant de la troisiéme puissance; & ainsi des autres: on donne aussi à la grandeur simple* a *l'unité pour exposant, de cette sorte* a^1; *ce qui marque la premiere puissance de* a *qui n'est point multipliée par elle-même. Les grandeurs dont les exposants sont des nombres entiers, s'appellent des* puissances entieres.

Les racines d'une grandeur a *se marquent ordinairement par le signe* $\sqrt{}$ *avec le nombre au dessus qui marque si c'est la racine quarrée ou seconde, la racine cubique ou troisiéme, la quatriéme, &c. de cette sorte* $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, &c. *Mais pour les reduire au même calcul que les puissances entieres, on les marque sans le signe* $\sqrt{}$, *& l'on écrit, pour leur exposant, une fraction dont le numerateur est l'unité & dont le dénominateur est le nombre 2 si c'est la racine seconde; le nombre 3, quand c'est la racine troisiéme, &c. de cette sorte* $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$, &c. *Ainsi* $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$ *marque la racine seconde de* a; *& ainsi des autres. Par le moyen de ces expressions on peut regarder les racines des grandeurs comme des* puissances dont les exposants sont des nombres rompus.

La racine quelconque d'une grandeur a^2, a^3, &c. *qui est une puissance entiere, se marque en donnant pour exposant à cette grandeur une fraction dont le premier terme est l'exposant de la puissance entiere de cette grandeur, & dont le second terme est l'exposant de la racine qu'on veut exprimer. Ainsi la racine seconde de* a^2 *se*

i

marque ainsi $a^{\frac{1}{2}}$; *la racine cinquième de* a^7 *se marque ainsi* $a^{\frac{7}{5}}$. *Il en est de même des autres.*

Pour marquer une puissance en general, on prend une lettre pour exposant; ainsi a^n *marque une puissance quelconque; l'exposant* (n) *represente tel nombre qu'on voudra, soit entier, soit rompu, & on l'appelle, à cause de cela, un exposant indeterminé. On peut aussi marquer une puissance en general, dont l'exposant est une fraction, de cette maniere* $a^{\frac{1}{n}}$, *ce qui signifie* $\sqrt[n]{a}$, *c'est à dire la racine quelconque representée par* (n) *de la grandeur* a. *De même* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ *marque la racine quelconque, representée par l'indeterminée* n, *de* a *élevée à la puissance entiere dont l'exposant, quelque nombre entier qu'il puisse être, est representé par l'indeterminée* m. *Ces exposants indeterminés servent à trouver des resolutions generales qui conviennent à toutes les grandeurs particulieres dont les puissances peuvent avoir pour exposants quelque nombre que ce puisse être; tous ces exposants particuliers pouvant être representés par l'exposant indeterminé. Ces choses supposées, voici le calcul des puissances par le moyen de leurs exposants.*

LE CALCUL DES PUISSANCES DES GRANDEURS, par le moyen de leurs exposants.

POUR *multiplier deux puissances d'une grandeur, il ne faut qu'ajouter les deux exposants de ces puissances, & écrire la somme des exposants pour l'exposant du produit.*

Pour diviser une puissance d'une grandeur par une autre puissance de la même grandeur, il ne faut qu'ôter l'exposant du diviseur de l'exposant de la puissance à diviser, & écrire la difference des exposants pour l'exposant du quotient.

Pour multiplier a^2 *par* a^3, *il faut écrire* a^{2+3} *ou* a^5 *pour le produit. Pour multiplier* a^4 *par* a^1, *il faut écrire* a^{4+1} *ou* a^5 *pour le produit. Pour multiplier* a^3 *par* $a^{\frac{1}{2}}$, *il faut écrire pour le produit* $a^{3+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$. *Pour multiplier* $a^{\frac{1}{2}}$ *par* $a^{\frac{3}{4}}$, *il faut écrire pour le produit* $a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$. *De même le produit de* x^n *par* x^m *est* x^{m+n}; *celui de* x^n *par* x^1 *est* x^{n+1}; *celui de* x^n *par* $x^{\frac{m}{p}}$ *est* $x^{n+\frac{m}{p}}$; *celui de* x^n *par* $x^{\frac{1}{n}}$ *est* $x^{n+\frac{1}{n}} = x^{\frac{nn+1}{n}}$. *Il en est de même des autres.*

Pour diviser a^5 *par* a^2, *il faut écrire pour le quotient* $a^{5-2} = a^3$; *de même le quotient de* a^4 *par* a^3 *est* $a^{4-3} = a^1$; *celui de* a^3 *divisé par* $a^{\frac{1}{2}}$ *est* $a^{3-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}}$. *Le quotient de* $a^{\frac{3}{2}}$ *par* $a^{\frac{5}{7}}$ *est* $a^{\frac{3}{2}-\frac{5}{7}} = a^{\frac{11}{14}}$; *celui de* a^1 *par* $a^{\frac{4}{3}}$ *est* $a^{1-\frac{4}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}$. *De même le quotient de* x^m *par* x^n *est* x^{m-n}; *celui de* x^m *par* x^{-n} *est* x^{m+n}; *celui de* x^m *par* x^1 *est* x^{m-1}; *celui de* x^{-m} *divisée par* $x^{-\frac{n}{p}}$ *est* $x^{-m+\frac{n}{p}}$. *Il en est de même des autres.*

On remarquera qu'il suit de ces operations, 1°, qu'un exposant negatif marque que la puissance, dont il est l'exposant, est un diviseur, & qu'elle est par consequent au dénominateur; ainsi $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$, $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{x}}$, $x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}$. *Il en est de même des autres.*

2°. Que l'on peut dans une fraction, faire passer une puissance du dénominateur au numerateur, ou du numerateur au dénominateur, sans changer la valeur de la fraction. Par exemple au lieu de $\frac{ax^2}{y^3}$, *on peut écrire* ax^2y^{-3}. *L'on peut encore écrire* $\frac{a}{x^{-2}y^3}$. *Il en est de même des autres. Ces changements d'expression peuvent être d'usage dans quelques rencontres.*

3°. Que quand on multiplie deux puissances dont les exposants sont negatifs, par exemple $x^{-\frac{1}{2}}$ *par* $x^{-\frac{1}{2}}$; *ce qui donne le produit* $x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = x^{-1}$; *cette operation revient à la même chose que si l'on divisoit* $x^{-\frac{1}{2}}$ *par* $x^{+\frac{1}{2}}$; *car le quotient seroit aussi* $x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = x^{-1}$.

4°. Que quand on multiplie la même grandeur ou la même puissance plusieurs fois par elle-même, par exemple $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$, *il faut écrire, pour exposant du produit, le double de l'exposant quand c'est* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$; *le triple, quand c'est* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$; *le quadruple, quand c'est* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$ *par* $x^{\frac{1}{2}}$;

& ainsi des autres. Car $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{2}} = x^1$; $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$; $x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$. *Il en est de même des autres. D'où l'on voit que pour élever la puissance d'une grandeur à une puissance dont l'exposant est un nombre entier, il n'y a qu'à multiplier l'exposant de cette puissance par l'exposant de la puissance à laquelle on la veut élever, & l'on aura l'exposant que l'on cherche. Par exemple pour élever* $x^{\frac{1}{2}}$ *à la quatrième puissance, il faut écrire* $x^{\frac{1}{2}\times 4} = x^{\frac{4}{2}}$.

D'où il suit que pour avoir la racine d'une puissance quelconque, il n'y a qu'à diviser l'exposant de la puissance par l'exposant du signe radical de la racine, & le quotient sera l'exposant que l'on cherche. Par exemple pour extraire la racine quatrième marquée par $\sqrt[4]{}$ *de* $a^{\frac{1}{3}}$, *il faut écrire pour la racine* $a^{\frac{\frac{1}{3}}{4}} = a^{\frac{1}{12}}$. *C'est la même chose des autres.*

Mais $\frac{1}{3}$ *divisé par 4 est la même chose que* $\frac{1}{3}$ *multiplié par* $\frac{1}{4}$; *ainsi en regardant les racines comme des puissances, c'est à dire, n'employant pas le signe radical* $\sqrt{}$ *pour marquer les racines, mais leur donnant, comme aux puissances, pour exposants des nombres rompus; alors pour élever une puissance comme* $a^{\frac{1}{3}}$ *à une puissance dont l'exposant est un nombre rompu, par exemple* $\frac{1}{4}$, *il ne faut que multiplier l'exposant* $\frac{1}{3}$ *de la puissance proposée* $a^{\frac{1}{3}}$ *par l'exposant* $\frac{1}{4}$ *de la puissance à laquelle on veut élever* $a^{\frac{1}{3}}$, *& l'on aura* $a^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}}$. *Ce qui donne cette regle.*

Pour élever une puissance quelconque a^n *à une puissance quelconque dont l'exposant est representé par* m, *il ne faut que multiplier l'exposant* n *de la puissance proposée* a^n *par l'exposant* m *de la puissance à laquelle on veut élever* a^n, *& écrire* a^{nm} *pour la puissance que l'on cherche.*

Pour élever a^3 *à la puissance dont l'exposant est* $\frac{1}{2}$, *il faut écrire* $a^{3\times\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$; *pour élever* x^n *à la puissance dont l'exposant est* $-\frac{m}{p}$, *il faut écrire* $x^{-\frac{nm}{p}}$. *Il en est de même des autres.*

Voilà le calcul des puissances par le moyen de leurs exposants: voici la raison sur laquelle ce calcul est fondé: les Lecteurs qui sçavent les proprietés des progressions arithmetiques & des progressions geometriques, l'entendront facilement.

A Progression geometrique des puissances de *a*.

$$\div\!\div\ \frac{1}{a^6}, \frac{1}{a^5}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, \text{ ou } a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \&c.$$

B La même.

$$\div\!\div\ a^{-6}, a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \&c.$$

Toutes les puissances d'une grandeur a *mises de suite, de maniere que* a^0, *ou, ce qui est la même chose, l'unité soit entre celles dont les exposants sont les nombres entiers positifs pris de suite, & celles dont les exposants sont les mêmes nombres négatifs mis aussi de suite; toutes ces puissances, dis-je, sont une progression geometrique.*

Les exposants de ces puissances sont une progression arithmetique, & zero qui est entre les exposants positifs & les exposants négatifs, est l'exposant de l'unité ou de a^0 *dans la progression geometrique: ainsi il y a deux progressions dans l'expression* B; *la geometrique est celle des puissances; l'arithmetique est celle des exposants.*

Outre les termes marqués dans la progression geometrique B, *on en peut concevoir une infinité d'autres de cette maniere. Entre* a^0 *ou l'unité &* a^1, *on peut concevoir toutes les puissances infinies de* a *dont les exposants sont les nombres rompus positifs moindres chacun que l'exposant* 1 *de* a^1, *comme* $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{4}{5}}$, &c. *& l'on peut concevoir entre* a^0 *&* a^{-1} *toutes les puissances à l'infini de* a, *dont les exposants sont les mêmes nombres rompus moindres chacun que l'unité, mais négatifs.*

On peut de même concevoir entre a^1 *&* a^2 *un nombre infini de puissances de* a *dont les exposants sont de suite tous les nombres rompus positifs qui surpassent l'unité, & sont moindres que* 2. *On peut aussi concevoir entre* a^{-1} *&* a^{-2} *le nombre infini de puissances de* a, *dont les exposants sont les mêmes nombres rompus dont on vient de parler, mais négatifs.*

Ainsi entre chacun des termes de la progression B *& celui qui le suit, ou celui qui le précede, il peut y avoir une infinité d'autres termes qui seront tous les puissances de* a, *mais leurs exposants seront* des nombres rompus positifs en allant de a^0 vers la droite, & négatifs en allant de a^0 vers la gauche.

Pour faire concevoir que les exposants de ce nombre infini de puissances de a mises de suite en progression geometrique, font entr'eux une progression arithmetique, dont la difference est le plus petit nombre qu'on puisse imaginer, il n'y a qu'à faire remarquer une maniere simple de trouver ces termes moyens à l'infini entre les termes marqués dans B. Par exemple pour trouver tous les termes entre a^0 & a^1, ou entre 1 & a^1, il n'y a qu'à prendre le terme moyen proportionel geometrique $\sqrt[2]{a}$; & pour avoir son exposant, il n'y a qu'à prendre le moyen arithmetique proportionel entre 0 & 1 qui est $\frac{1}{2}$. Ainsi l'on aura ∺ a^0, $a^{\frac{1}{2}}$, a^1.

On prendra de même la moitié de $0 + \frac{1}{2}$ qui est $\frac{1}{4}$, & la moitié de $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, laquelle moitié est $\frac{3}{4}$, & l'on aura ∺ a^0, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{2}{4}}$, $a^{\frac{3}{4}}$, a^1. On conçoit clairement qu'on peut ainsi continuer de prendre des termes moyens proportionels, tant les geometriques que les arithmetiques correspondants, & cela à l'infini; & qu'on peut ensuite, au lieu d'un moyen proportionel, prendre deux, trois, quatre, &c. moyens proportionels geometriques entre deux termes voisins, & prendre en même temps les moyens proportionels arithmetiques correspondants qui serviront d'exposants aux geometriques.

En imaginant de la même maniere les moyens proportionels geometriques entre tous les termes voisins & les arithmetiques qui leur servent d'exposants, on verra clairement qu'on peut concevoir une progression geometrique infinie de toutes les puissances de suite d'une grandeur, dont les exposants feront aussi une progression arithmetique.

L'on remarquera que toutes les fois qu'on prendra quatre termes, dans la progression geometrique, qui feront entr'eux une proportion geometrique, les quatre exposants de ces quatre termes feront entr'eux une proportion arithmetique: Et que toutes les fois qu'on prendra plusieurs termes, c'est à dire tant de termes qu'on voudra, dans la progression geometrique, qui, quoiqu'éloignés les uns des autres, feront pourtant entr'eux une progression geometrique; les exposants de tous ces termes, pris dans le même ordre, feront entr'eux une progression arithmetique; c'est à dire, la même difference regnera dans leur progression.

Mais quand zero est le premier terme d'une proportion arithmetique 0, 1 : 2, 1 + 2 = 3, il faut ajouter le second & le troisiéme terme, & la somme est le quatriéme terme. Quand zero est le quatriéme terme d'une proportion arithmetique 3, 2 : 1, 0, il faut retrancher le second terme du premier, & la difference est le troisiéme terme. Enfin quand zero est le premier ou le dernier terme d'une progression arithmetique ÷ 0, 1, 2, 3, 4; ÷ 4, 3, 2, 1, 0, il faut multiplier le terme le plus proche de zero, qui est la difference de la progression, par le nombre des termes depuis zero non compris, par exemple par 4, si l'on veut le quatriéme terme depuis zero non compris, & le produit est le terme que l'on cherche.

C'est la raison des regles qu'on a données pour multiplier & pour diviser deux puissances d'une même grandeur l'une par l'autre par le moyen des exposants; & pour élever une puissance d'une grandeur à une autre puissance dont l'exposant est donné. Car pour multiplier par exemple a^2 par a^3, il y a une proportion geometrique a^0 ou 1 . a^2 :: a^3 . a^5, dont l'unité est le premier terme, a^2 & a^3 sont le second & le troisiéme terme, & le produit a^5 que l'on cherche est le quatriéme terme. Les exposants 0, 2 : 3, 3 + 2 = 5 font aussi une proportion arithmetique dont zero est le premier terme, les exposants 2 & 3 des grandeurs à multiplier, a^2, a^3, sont le second & le troisiéme terme: ainsi ajoutant 2 + 3, la somme 5 est l'exposant du terme a^5 que l'on cherchoit.

Pour diviser a^3 par a^2, il y a une proportion geometrique a^3 . a^2 :: a^1 . a^0 ou 1, dont a^3 est le premier terme; le diviseur a^2 le second terme; le quotient a^1 que l'on cherche est le troisiéme terme, & l'unité a^0 ou 1 est le quatriéme terme. Les exposants 3, 2 : 1, 0, font aussi une proportion arithmetique; le premier terme est 3, le second est 2, le troisiéme 1 est l'exposant du quotient que l'on cherche, & zero est le quatriéme terme; ainsi en retranchant le second terme 2 du premier terme 3, la difference 1 est l'exposant du quotient que l'on cherche.

Pour élever la puissance d'une grandeur comme a^1 à une puissance dont l'exposant est donné, par exemple à la puissance dont l'exposant est 4, il y a une progression geometrique ∺ a^0 ou 1, a^1, a^2, a^3, a^4, dont le premier terme est l'unité, la puissance donnée a^1 est le premier terme après l'unité, & la puissance a^4 que l'on cherche *est le quatrième terme aprés l'unité. Les exposants sont aussi une progression arithmetique* ÷ 0, 1, 2, 3, 4, *depuis zero ; le premier terme aprés zero est l'unité, & c'est la difference de la progression ; l'exposant que l'on cherche est le quatrième terme aprés zero ; & dans une progression arithmetique, la difference étant connue, qui est ici* 1, *& le nombre des termes aprés zero, qui est ici* 4, *il n'y a qu'à multiplier la difference par le nombre des termes depuis zero non compris, & le produit, qui est ici* 4, *est le terme que l'on cherche de la progression arithmetique, & par consequent l'exposant de la puissance* a^4 *que l'on cherchoit.*

ANALYSE

ANALYSE DEMONTRÉE,

LIVRE I.

DE L'ANALYSE, QUI ENSEIGNE à résoudre les Problêmes qui se réduisent à des équations simples.

SECTION I.

La Methode de réduire un Problême en équations.

PROBLÊME I.

1. R*EDUIRE un Problême en équations ; c'est à dire, exprimer par des équations tous les raports d'un Problême.*

1°. IL faut distinguer avec beaucoup d'attention les trois choses que renferme le Problême : 1. Les grandeurs connues : 2. Les grandeurs inconnues qu'on cherche, ou qui servent à faire trouver celles qu'on cherche : 3. Les raports connus entre les grandeurs connues & les inconnues, ou même ceux qui sont entre les inconnues.

2°. Il faut marquer les grandeurs connues par les premieres lettres de l'alphabet *a*, *b*, *c*, *&c.* & les inconnues par les dernieres *s*, *t*, *v*, *x*, *y*, *z*.

Il est bon aussi de marquer les grandeurs connues & inconnues par les premieres lettres des noms qui les expriment : Par exemple, de marquer un nombre en general par n, une somme par s, le temps par t, la vitesse par v, une tangente par t, une soutangente par s, & ainsi des autres ; cela soulage la memoire.

3°. Il faut supposer le Problême comme resolu, en regardant les inconnues comme si elles étoient connues, & trouver par le moyen des raports connus du Problême, autant d'équations, qu'on a supposé d'inconnues. Il faut observer autant qu'on peut, l'ordre naturel dans la formation des équations, c'est à dire qu'il faut commencer par les raports les plus simples, & se servir ensuite par ordre des raports les plus composés.

EXEMPLE I.

TROUVER le quatriéme terme d'une proportion, dont on connoît les trois premiers termes.

1°. Je remarque les grandeurs connues qui sont les trois premiers termes connus, la grandeur inconnue qui est le quatriéme terme, & les raports connus entre les grandeurs connues & l'inconnue : dans ce Problême, les raports connus sont le raport qui est entre la premiere & la seconde grandeur connue, & le raport qui est entre la troisiéme grandeur connue, & la quatriéme qui est l'inconnue qu'on cherche, ces deux raports sont égaux ; par consequent le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

2°. Je marque les grandeurs connues par les premieres lettres de l'alphabet, & l'inconnue par une des dernieres ; de cette maniere. Soit le premier terme $=a$. Le second $=b$. Le troisiéme $=c$. Le quatriéme $=x$.

3°. Par le moyen des raports connus, j'ai cette proportion $a . b :: c . x$.

Et le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, l'on aura cette équation $ax=bc$, qui est celle du Problême.

EXEMPLE II.

TROUVER la somme de tous les termes infinis d'une progression geometrique qui va en diminuant, dont on connoît le premier & le second terme.

1°. Je remarque les grandeurs connues, qui sont le premier terme de la progression qui est le plus grand, & le second terme, la grandeur inconnue qui est la somme de tous les termes infinis de la progression ; Je remarque de plus que par la proprieté des raports égaux qui sont entre tous les termes de la progression, la somme de tous les antecedents, qui est ici la somme de tous les termes infinis de la progression, parceque zero est le dernier terme, est à la somme de tous les consequents, qui est la somme de tous les termes moins le premier, comme le premier terme est au second.

2°. Je marque les grandeurs connues & l'inconnue de cette maniere.

Soit le premier terme connu $=a$.

Le second $=b$.

La somme inconnue de tous les termes infinis $=s$.

3°. Je me sers ainsi du raport connu pour former l'équation du Problême.

La somme de tous les antecedents de la progression qui est égale à $s-o$, c'est à dire la somme s, est à la somme de tous les consequents qui est $s-a$, comme le premier terme a est au second b, & j'ai cette proportion

$$s . s-a :: a . b.$$

Et le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, l'on aura cette équation $bs=as-aa$, qui est celle du Problême.

EXEMPLE III.

TROUVER deux grandeurs dont on connoît la somme & la difference.

1°. Soit la somme connue des deux grandeurs inconnues $=a$.

Soit leur difference connue $=d$.

Soit la premiere & la plus grande des deux grandeurs inconnues $=x$.

La seconde $=y$.

2°. Il y a deux raports connus, le premier est que la somme des deux inconnues est égale à a, ce qui donne cette premiere équation $x+y=a$.

Le second raport connu est que la difference des deux inconnues est égale à d, ce qui donne cette seconde équation $x-y=d$.

L'on a ainsi les deux équations du Problême.

REMARQUE.

LORSQU'IL n'y a pas assez de raports connus pour trouver autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, le Problême a plusieurs résolutions, comme on le fera voir dans la suite, & on l'appelle *indéterminé*.

DE'FINITION.

LES grandeurs qui sont des deux côtés du signe $=$ dans une équation, sont nommées les deux membres de l'équation, $x-y$ est le premier membre de l'équation $x-y=d$, & d en est le second membre.

AVERTISSEMENT.

APRE'S avoir réduit un Problême en équations, il faut faire en sorte que les inconnues des équations se trouvent seules dans le premier membre, & qu'il n'y ait que des grandeurs connues dans le second; ce qui donne la résolution du Problême.

Le dégagement des inconnues des équations, & les préparations pour y arriver, se font par l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'extraction des racines, &c.

SECTION II.

La Methode de dégager les inconnues des équations, & de préparer les équations à ce dégagement.

Usage de l'addition & de la soustraction pour le dégagement des inconnues, & pour y préparer les équations.

2. L'ADDITION & la soustraction servent à faire passer une ou plusieurs grandeurs d'un membre de l'équation dans l'autre.

Il faut effacer la grandeur qu'on veut faire passer, dans le membre où elle est, & l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire à celui qu'elle avoit.

Par exemple, dans l'équation $bs=as-aa$, on fera passer $-aa$ du second membre dans le premier, en l'effaçant dans le second membre, & l'écrivant dans le premier avec le signe $+$, & l'on aura $bs+aa=as$.

On fera passer de même dans l'équation $bs+aa=as$, la grandeur $+bs$ du premier membre dans le second, en l'effaçant dans le premier, & en l'écrivant avec le signe $-$ dans le second, & l'on aura $aa=as-bs$.

DE'MONSTRATION.

L'ON ne fait dans cette transposition qu'ajoûter ou retrancher des grandeurs égales dans chaque membre de l'équation: car en ajoûtant $+aa$ dans chaque membre de l'équation $bs=as-aa$, l'on trouve $aa+bs=as-aa+aa$, & $-aa+aa$ étant égale à zero, on l'efface, & il reste $aa+bs=as$. Et en retranchant $+bs$ dans chaque membre de $aa+bs=as$, l'on trouve $aa+bs-bs=as-bs$, & $+bs-bs$ étant égal à zero, on l'efface, & il reste $aa=as-bs$. Par consequent les deux membres demeurent toujours égaux aprés cette transposition.

Usages de la transposition.

1. ON peut mettre par transposition toutes les quantités où est l'inconnue dans un membre, & toutes les quantités connues dans l'autre, comme on le voit dans la derniere équation; ce qui servira au dégagement des inconnues.

2. On peut mettre par transposition toutes les quantités d'une équation dans un membre, & zero dans l'autre; ce qui servira dans les Livres suivans. Car en effaçant toutes les quantités d'un membre, & les écrivant avec des signes contraires dans l'autre membre, l'égalité demeure toujours, & zero se trouve seul dans le membre où l'on a effacé toutes les quantités. Par exemple, si l'on a $xx-ax=ab$, l'on aura par transposition $xx-ax-ab=0$.

3. On peut rendre positives par le moyen de la transposition, les grandeurs negatives de l'équation, les ôtant du membre où elles sont negatives, & les mettant dans l'autre

avec le signe $+$, ce qui sert à rendre l'inconnue positive, quand elle est negative, & à faire trouver la valeur positive de l'inconnue.

4. Lorsque la même grandeur se trouve avec le même signe dans chaque membre de l'équation, comme dans cet exemple $ax + ab = + ab + bc$, il faut l'effacer, & l'on aura $ax = bc$.

Usages de la multiplication pour préparer les équations, pour en ôter les fractions, & pour en dégager les inconnues.

3. 1. LORSQUE l'inconnue est divisée par une grandeur connue, comme dans cet exemple $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$, on peut dégager l'inconnue de cette grandeur connue, en multipliant chaque membre par la grandeur a, par laquelle l'inconnue x est divisée, & l'on aura $x = \frac{ab}{c}$.

2. On peut encore ôter par la multiplication, toutes les fractions d'une équation.

Il faut multiplier les deux membres de l'équation par le dénominateur de la premiere fraction, & multiplier la nouvelle équation par le dénominateur de la seconde fraction, & ainsi de suite, & l'on trouvera une équation où il n'y aura plus de fractions.

Exemple. Il faut ôter les fractions de l'équation $\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$.

Je multiplie chaque membre par a, & je trouve l'équation $x + \frac{ab}{c} = \frac{ad}{e}$.

Je multiplie ensuite chaque membre de cette équation par le dénominateur c, & je trouve $cx + ab = \frac{acd}{e}$.

Enfin je multiplie chaque membre de cette équation par le dénominateur e, & je trouve $cex + abe = acd$ où il n'y a plus de fractions.

On peut ôter tout d'un coup toutes les fractions d'une équation, en multipliant chaque membre par le produit de tous les dénominateurs.

Dans l'exemple précedent en multipliant $\frac{x}{a} + \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ par ace produit de tous les dénominateurs, l'on trouve l'équation $\frac{acex}{a} + \frac{abce}{c} = \frac{aced}{e}$; dans laquelle effaçant les lettres communes au numerateur & au dénominateur de chaque fraction, l'on aura l'équation sans fractions $cex + abe = acd$, comme on l'avoit trouvée.

D'où l'on voit que si toutes les quantités d'une équation étoient divisées par une même grandeur, il n'y auroit qu'à effacer cette grandeur, & l'équation seroit sans fractions.

3. On peut aussi faire en sorte par la multiplication, qu'une des grandeurs connues, laquelle on voudra, devienne un quarré ou une puissance parfaite, en multipliant chaque membre de l'équation par cette même grandeur, ou par sa racine; par exemple, dans cette équation $axx + abc = c^3$, on peut rendre la grandeur c^3 quarrée en multipliant chaque membre par c, & l'on aura $acxx + abcx = c^4$.

On peut aussi par ce moyen faire en sorte dans quelques équations, où la plus haute puissance de l'inconnue est multipliée par quelque grandeur connue, que cette grandeur devienne quarrée ou une puissance parfaite.

Par exemple, si l'on a l'équation $axx + abx = bbc$, on rendra quarrée la grandeur axx, en multipliant chaque membre par la grandeur connue a, & l'on aura $aaxx + aabx = abbc$.

Enfin on pourroit ôter toutes les grandeurs incommensurables d'une équation, lorsqu'elle en a, par le moyen de la multiplication; mais cet usage n'étant que pour les équations composées, il sera mieux placé dans le Livre suivant.

Démonstration de tous ces usages.

IL est évident que dans toutes les operations précedentes, on multiplie les deux membres de l'équation par des grandeurs égales; par consequent ils sont encore égaux après la multiplication.

Usages de la division pour préparer les équations, & pour dégager les inconnues.

4. 1. LORSQUE l'inconnue est multipliée par une grandeur connue dans une équation, comme dans le premier exemple de la premiere Section, où l'on a trouvé $ax = bc$, on dégagera l'inconnue en divisant chaque membre par cette grandeur connue.

Ainsi divisant chaque membre par a, l'on aura $x = \frac{bc}{a}$, ce qui donne la résolution du Probléme, où l'on voit que le 4^e terme d'une proportion étant inconnu, & les trois premiers étant connus, l'on trouvera le 4^e en divisant le produit du second & du troisiéme par le premier.

On dégagera de même l'inconnue dans l'équation du second exemple $bs = as - aa$ car par transposition l'on aura $aa = as - bs$; & divisant chaque membre par $a - b$, l'on aura $\frac{aa}{a-b} = s$. C'est à dire si l'on divise le quarré du premier terme d'une progression geometrique qui va en diminuant, par le premier terme moins le second, le quotient sera égal à la somme de tous les termes infinis de la progression.

2. Lorsque toutes les quantitez d'une équation sont multipliées par une même lettre ou par une même grandeur, on rendra l'équation plus simple, en divisant toutes les quantitez qui la composent par cette grandeur commune.

Par exemple, si l'on a l'équation $axx - abx = bcx$, en divisant toutes les quantités par x, l'on aura l'équation plus simple $ax - ab = bc$.

3. Lorsque les deux membres d'une équation ont un diviseur commun, on la reduira à une équation plus simple, en divisant chaque membre par leur commun diviseur.

Par exemple, les deux membres de $axx - aax = abx - aab$, ont le diviseur commun $ax - aa$; en divisant chacun par $ax - aa$, l'on aura l'équation simple $x = b$, où l'inconnue est entierement dégagée.

Démonstration de tous ces usages.

Il est évident que dans toutes les operations précedentes, on divise les deux membres égaux d'une équation par des grandeurs égales; par consequent ils sont encore égaux aprés la division.

Usages de l'extraction des racines pour préparer les équations, & pour dégager les inconnues.

5. 1. LORSQUE le second membre d'une équation ne contient que des grandeurs connues, & que le premier membre où est l'inconnue contient une puissance parfaite, il faut extraire la racine de ces deux membres, & l'on aura une équation plus simple.

L'on a par exemple l'équation $xx = aa$, il faut extraire la racine quarrée de chaque membre, & l'on aura $x = a$. De la même maniere en tirant la racine cubique de chaque membre de l'équation $x^3 = aab$, l'on aura $x = \sqrt[3]{aab}$.

Le premier membre de l'équation $xx - 2ax + aa = bc$, est un quarré parfait; ainsi en tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura l'équation simple $x - a = \sqrt{bc}$, & par transposition $x = a + \sqrt{bc}$.

Le premier membre de l'équation $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = abc$, est un cube parfait; ainsi en tirant la racine cubique de chaque membre, l'on aura l'équation simple $x - a = \sqrt[3]{abc}$, & par transposition $x = a + \sqrt[3]{abc}$.

2. Il y a plusieurs équations dont le premier membre deviendroit une puissance parfaite, si on lui ajoutoit une grandeur connue; par exemple, si l'on ajoutoit $+ aa$ au premier membre de l'équation $xx - 2ax = bc$, le premier membre seroit le quarré $xx - 2ax + aa$; dans ce cas il faut ajoûter à chaque membre la grandeur connue qui rend le premier membre une puissance parfaite, & l'on aura $xx - 2ax + aa = aa + bc$; il faut ensuite tirer la racine de chaque membre, & l'on aura $x - a = \sqrt{aa + bc}$, qui est une équation simple, où l'on aura par transposition $x = a + \sqrt{aa + bc}$.

De la même maniere si l'on retranche b^3 de chaque membre de l'équation $x^3 - 3bxx + 3bbx = c^3$, l'on aura l'équation $x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3 = c^3 - b^3$, dont le premier membre est un cube parfait; ainsi en tirant la racine cubique de chaque membre, on aura l'équation simple $x - b = \sqrt[3]{c^3 - b^3}$, & par transposition $x = b + \sqrt[3]{c^3 - b^3}$.

Le second usage de l'extraction des racines sert à reduire à des équations simples, toutes les équations où l'inconnue est élevée au quarré dans une des grandeurs de l'équation, & lineaire dans quelqu'autre grandeur, comme l'équation $xx - ax = ab$.

Ces équations sont nommées *du second degré*, & l'on y distingue trois termes: le premier est xx, c'est à dire le quarré de l'inconnue; le second est celui où l'inconnue est lineaire, comme $- ax$; le troisiéme & dernier terme est celui qui ne contient que des grandeurs connues, comme ab.

La methode de reduire toutes les équations du second degré à des équations simples: ce qui en donne la résolution.

6. POUR reduire les équations du second degré à des équations simples, 1°. il faut faire passer les grandeurs con-

res connues dans le second membre. 2°. Il faut prendre la moitié de la grandeur connue qui multiplie l'inconnue lineaire dans le second terme. 3°. Ajouter le quarré de cette moitié à chaque membre de l'équation, & le premier membre deviendra un quarré parfait. 4°. Il faut tirer la racine quarrée de chaque membre, & l'on aura une équation simple.

Exemple. Il faut réduire l'équation $xx - ax - ab = 0$ à une équation simple.

1°. Je fais passer la grandeur connue $-ab$ dans le second membre, & je trouve $xx - ax = ab$.

2°. Je prens $\frac{1}{2}a$ qui est la moitié de la grandeur connue a du second terme.

3°. J'ajoute $\frac{1}{4}aa$, qui est le quarré de cette moitié, à chaque membre, & je trouve $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + ab$, dont le premier membre est un quarré parfait, qui a pour sa racine $x - \frac{1}{2}a$.

4°. Je tire la racine quarrée de chaque membre, & je trouve l'équation simple $x - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$, & par transposition $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + ab}$.

Troisiéme usage de l'extraction des racines.

7. L'on trouve dans la résolution de quelques Problêmes deux équations, qui étant jointes ensemble, ou retranchées l'une de l'autre, font trouver une équation dont le premier membre où est l'inconnue, est une puissance parfaite ; ou bien ces équations étant élevées au quarré, au cube, &c. & ensuite jointes ensemble ou retranchées l'une de l'autre, l'on trouve une équation dont le premier membre où est l'inconnue, est une puissance parfaite : dans ce cas il faut extraire la racine de chaque membre de la derniere équation que l'on a trouvée, & l'on aura une équation plus simple.

Exemple I. Si l'on a les deux équations $x^3 + 3a^2x = b^3$, & $3axx + a^3 = c^3$.

Les ajoûtant l'une à l'autre, l'on aura $x^3 + 3axx + 3aax + a^3 = b^3 + c^3$, dont le premier membre est le cube de $x + a$, il faut extraire la racine cubique de chaque membre, & l'on aura l'équation simple $x + a = \sqrt[3]{b^3 + c^3}$, & par transposition $x = -a + \sqrt[3]{b^3 + c^3}$.

Exemple II. L'on a les deux équations $xx - yy = \frac{1}{3}p$, & $x^3 + 3xyy = \frac{1}{2}q$.

Si l'on éleve la premiere à la troisiéme puissance, & la seconde au quarré, l'on aura $x^6 - 3x^4yy + 3xxy^4 - y^6 = \frac{1}{27}p^3$, & $x^6 + 6x^4yy + 9xxy^4 = \frac{1}{4}qq$.

Retranchant le premier membre de la premiere du premier membre de la seconde, & le second membre de la premiere du second membre de la seconde, l'on trouve $9x^4yy + 6xxy^4 + y^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, dont le premier membre est le quarré de $3xxy + y^3$.

C'est pourquoi tirant la racine quarrée de chaque membre, l'on trouve $3xxy + y^3 = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$.

Enfin ajoutant cette équation à l'équation $x^3 + 3xyy = \frac{1}{2}q$, l'on trouve $x^3 + 3xxy + 3xyy + y^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, dont le premier membre est le cube de $x + y$.

C'est pourquoi tirant la racine cubique de chaque membre, l'on trouve l'équation simple $x + y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Démonstration de tous ces usages.

Les racines quarrées, ou cubiques, ou quatriémes, &c. de grandeurs égales, sont égales : or il est évident que dans toutes les operations précedentes, on tire des racines quarrées, ou cubiques, &c. de grandeurs égales ; les grandeurs que l'on trouve sont donc encore égales, & elles sont une équation, mais elle est plus simple.

AVERTISSEMENT.

Les operations précedentes suffisent pour dégager l'inconnue des équations simples, lorsqu'il n'y en a qu'une seule, mais l'on a encore besoin des substitutions, lorsqu'on trouve plusieurs équations simples dans la résolution d'un Problême, qui contiennent plusieurs inconnues.

DES SUBSTITUTIONS.

8. Lorsqu'il n'y a qu'une inconnue dans le premier membre d'une équation, les quantités dont le second membre est composé, sont la valeur de cette inconnue.

Dans l'équation $x = a + b$, $a + b$ est la valeur de x.

Substituer la valeur d'une inconnue dans une équation, c'est y mettre cette valeur à la place de l'inconnue, ou les puissances, ou les racines de cette valeur à la place des semblables puissances, ou des semblables racines de l'inconnue.

D'où il suit, 1°, que si l'inconnue est dans l'équation avec le signe + ou —, il faut l'ôter de l'équation, & mettre sa valeur en sa place avec ses signes si l'inconnue a le signe +, avec des signes contraires si l'inconnue a le signe —.

2°. Si l'inconnue est multipliée ou divisée dans l'équation par quelqu'autre grandeur, il faut multiplier ou diviser la valeur de l'inconnue par cette grandeur, & la mettre dans l'équation à la place de la grandeur où étoit l'inconnue: ce qui se doit aussi entendre des puissances de l'inconnue, ou de ses racines.

Enfin de quelque maniere que soit l'inconnue dans une équation, il faut y mettre de la même maniere sa valeur à sa place. Tout ceci s'entendra mieux par des exemples.

EXEMPLE I.

POUR substituer la valeur de y, qu'on suppose $= a - x$, dans l'équation $x - y = d$; il faut ôter $-y$ de cette équation, & mettre en sa place sa valeur $a - x$, en changeant
* 2 les signes de cette valeur *, & l'on aura $x - a + x = d$; & en abregeant l'on aura $2x - a = d$, & par transposition $2x = a + d$, & en divisant chaque membre par deux, l'on aura $x = \frac{a+d}{2}$; ce qui fait voir l'usage des substitutions.

EXEMPLE II.

POUR substituer la valeur de x, qu'on suppose $= y + 1$, dans l'équation $xx - 2x - 3 = 0$; il faut, 1°, élever chaque membre de $x = y + 1$ au quarré, & l'on aura $xx = yy + 2y + 1$.

2°. Multiplier $y + 1$ valeur de x par -2, & l'on aura $-2x = -2y - 2$.

3°. Il faut mettre dans l'équation $xx - 2x - 3 = 0$, à la place de xx & de $-2x$, leurs valeurs, & l'on aura $yy - 4 = 0$, au lieu de $xx - 2x - 3 = 0$, & par transposition l'on aura $yy = 4$, & $y = 2$, l'on aura la valeur de x toute connue, en mettant à la place de y dans l'équation $x = y + 1$, sa valeur 2, car l'on trouvera $x = 3$.

L'operation se fait de cette maniere.

L'équation proposée est $xx - 2x - 3 = 0$, l'on suppose $x = y + 1$.

$$\begin{array}{lrcl} \text{L'on aura donc} & xx & = & yy + 2y + 1. \\ & -2x & = & -2y - 2. \\ & -3 & = & -3. \\ \hline \text{Donc} & xx - 2x - 3 & = 0 = & yy \quad * \quad -4 = 0. \end{array}$$

EXEMPLE III.

ON propose de substituer dans l'équation $x = \frac{z}{z+1}$ la valeur de z prise dans l'équation $z = -1 + \frac{\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}$, l'on trouve en mettant au lieu de z sa valeur;

$$x = \frac{\dfrac{a+1-\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}}{\dfrac{-1+\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}+1}.$$

Il faut ensuite abreger cette expression par les operations ordinaires de l'Algebre, de cette maniere,

$$x = \frac{\dfrac{a+1-\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}}{\dfrac{-1+\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{c+1}}+1} = \frac{\overline{a+1}\times\sqrt{c+1}-\sqrt{ab+a+b+1}}{\sqrt{ab+a+b+1}}$$

$$= \frac{\overline{a+1}\times\sqrt{c+1}}{\sqrt{ab+a+b+1}} - 1 = \frac{\sqrt{a+1}\times\sqrt{a+1}\times\sqrt{c+1}}{\sqrt{a+1}\times\sqrt{b+1}} - 1 =$$

$$\frac{\sqrt{a+1}\times\sqrt{c+1}}{\sqrt{b+1}} - 1 = -1 + \frac{\sqrt{ac+a+c+1}}{\sqrt{b+1}}.$$

L'on aura donc l'expression la plus simple $x = -1 + \frac{\sqrt{ac+a+c+1}}{\sqrt{b+1}}$.

Démonstration des substitutions.

L'ON met par la substitution des grandeurs égales dans une équation, à la place d'autres grandeurs qu'on en ôte; par consequent les deux membres de l'équation demeurent toujours égaux.

SECTION III.

Où l'on explique la manière de résoudre entiérement les Problêmes simples ou du premier degré, & l'on en apporte plusieurs exemples.

PROBLÊME II.

9. *APRÉS avoir réduit un Problême en autant d'équations qu'on a pris d'inconnues ; trouver la valeur connue de toutes les inconnues, c'est à dire trouver la résolution du Problême.*

Premiere maniere.

1°. ON écrira toutes les équations du Problême qui expriment tous les raports connus qui sont entre les inconnues & les connues, & on les nommera les premieres équations.

2°. On en prendra une, qu'on écrira à part, l'on prendra la valeur de l'une des inconnues qu'elle contient, & l'on substituera cette valeur à sa place dans toutes celles des premieres équations où se trouve cette inconnue, excepté celle où on l'a dégagée, aprés quoi cette inconnue ne se trouvera plus dans les équations où sa valeur a été substituée ; on écrira toutes ces nouvelles équations, & l'on y ajoutera celles des premieres équations où l'inconnue qu'on a ôtée, n'étoit point, s'il s'en trouve quelqu'une, & on les nommera les secondes équations.

3°. On prendra une de ces équations, que l'on écrira avec celle qu'on a deja mise à part, on prendra la valeur de l'une des inconnues qu'elle contient, & on la substituera à sa place dans toutes celles des secondes équations où se trouve cette inconnue ; ce qui donnera de nouvelles équations où cette inconnue ne se trouve plus. On les écrira, & l'on y ajoutera celles des secondes équations où ne se trouvoit pas cette inconnue, & on les nommera les troisiémes équations, sur lesquelles on operera comme l'on a fait sur les équations precedentes, & l'on continuera l'operation jusqu'à ce qu'on trouve une équation où il n'y ait qu'une seule inconnue.

4°. On prendra la valeur de l'inconnue de cette équation, & on la substituera dans celle des équations mises à part, où il n'y a que cette inconnue & une autre, & il n'y restera que cette autre inconnue, dont on prendra la valeur, qu'on substituera dans une des équations mises à part où il n'y a que cette inconnue avec une autre. En continuant d'operer de cette maniere, on trouvera les valeurs connues de toutes les inconnues, & l'on aura la résolution du Problême.

Seconde maniere.

1°. APRÉS avoir écrit les premieres équations, on prendra toutes les valeurs d'une même inconnue dans toutes celles des premieres équations où elle se trouve, & l'on en écrira une à part.

2°. On comparera toutes ces valeurs les unes avec les autres ; ce qui donnera de nouvelles équations, qu'on écrira, & l'on y ajoutera celles des premieres où n'étoit point cette inconnue, s'il s'en trouve, & l'on aura les secondes équations.

3°. On operera sur celles-ci comme on a fait sur les premieres, & l'on continuera jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation où il n'y ait qu'une inconnue.

4°. On en prendra la valeur, & on la substituera dans celles des équations mises à part où elle se trouve avec une seule autre inconnue, & l'on continuera, comme dans la methode précedente, jusqu'à ce qu'on ait les valeurs connues de toutes les inconnues.

REMARQUE.

LORSQU'ON a trouvé la valeur toute connue d'une seule inconnue, si l'on n'avoit pas mis à part les équations dont on a parlé, on trouveroit neanmoins la valeur de toutes les inconnues en substituant la valeur toute connue dans une des équations où il n'y a que l'inconnue qui a cette valeur avec une seconde inconnue, & aprés la substitution on prendroit la valeur toute connue de la seconde inconnue, & on la substitueroit avec la valeur de la premiere inconnue dans une des équations où il n'y a que les deux premieres inconnues avec une troisiéme ; & en continuant cette operation, on trouveroit les valeurs connues de toutes les inconnues.

Troisiéme maniere qui sert à abreger les operations dans plusieurs cas.

Il arrive quelquefois qu'on trouve tout d'un coup la valeur toute connue de chacune des inconnues du Problême, en ajoutant ensemble deux ou plusieurs des valeurs d'une même inconnue prises dans les premieres équations, ou bien en les retranchant les unes des autres. Il faut seulement observer de joindre ensemble les valeurs d'une même inconnue qui forment une équation où les autres inconnues se détruisent par des signes contraires, ou toutes, ou la plûpart, comme on le verra dans l'exemple suivant, auquel on appliquera ces trois methodes.

Application de la premiere methode à un exemple.

On suppose qu'en réduisant un Problême en équations, on a trouvé les quatre suivantes.

Premieres équations.	*Equations mises à part.*
1°. $v+x+y=z+a$.	$v=z-x-y+a$.
$v+x+z=y+b$.	$2z=2y-a+b$.
$v+y+z=x+c$.	$2y=2x-b+c$.
$x+y+z=v+d$.	

2°. On prendra la valeur d'une inconnue, par exemple de v, dans laquelle on voudra de ces équations comme dans
* 1 la premiere, & l'on trouvera * $v=z-x-y+a$, qu'on écrira à part, & l'on substituera cette valeur dans les autres équations à la place de v, & l'on aura les secondes équations où v ne se trouvera plus.

Secondes équations abregées.

$2z-2y+a=b$. $2z-2x+a=c$. $2x+2y=a+d$.

3°. On prendra la valeur d'une inconnue de ces secondes
* 1 équations, comme de z, & l'on trouvera * $2z=2y-a+b$; on l'écrira dans l'ordre des équations mises à part, & l'on substituera cette valeur dans celles des secondes équations où se trouve z, c'est à dire dans la seconde, & l'on aura la premiere des troisiémes équations, & y ajoutant l'équation $2x+2y=a+d$, les troisiémes équations seront les deux suivantes.

Troisiémes

Troisiémes équations abregées.

$2y-2x+b=c$. $2x+2y=a+d$.

4°. On prendra la valeur d'une inconnue de ces troisiémes équations, comme de y, & l'on trouvera $2y=2x-b+c$. On écrira cette équation dans l'ordre des équations mises à part, & l'on substituera la valeur de $2y$ dans l'équation $2x+2y=a+d$, & l'on trouvera $4x=a+b-c+d$.

Comme l'on est arrivé à une équation qui ne contient qu'une seule inconnue x, on la dégagera, & l'on trouvera $x=\frac{a+b-c+d}{4}$.

On substituera la valeur connue de x dans l'équation mise à part $2y=2x-b+c$, qui n'a d'inconnues que y & x, & l'on trouvera $2y=\frac{a+b-c+d}{2}-b+c=\frac{a-b+c+d}{2}$, & en divisant chaque membre de $2y=\frac{a-b+c+d}{2}$ par 2, l'on aura $y=\frac{a-b+c+d}{4}$.

On substituera cette valeur de y dans l'équation mise à part $2z=2y-a+b$, & aprés avoir abregé l'équation qui en viendra, & dégagé l'inconnue z, on trouvera $z=\frac{-a+b+c+d}{4}$. Enfin on substituera les valeurs connues de x, y, z dans l'équation mise à part $v=z-x-y+a$, & aprés avoir abregé l'équation qui en viendra, & dégagé l'inconnue v, on trouvera $v=\frac{a+b+c-d}{4}$.

Le Problême est entierement resolu, & l'on a toutes les valeurs connues des grandeurs inconnues, $x=\frac{a+b-c+d}{4}$. $y=\frac{a-b+c+d}{4}$. $z=\frac{-a+b+c+d}{4}$. $v=\frac{a+b+c-d}{4}$.

Application de la seconde methode au même exemple.

Premieres équations.	*Equations mises à part.*
$v+x+y=z+a$.	$v=z-x-y+a$.
$v+x+z=y+b$.	$2z=2y+b-a$.
$v+y+z=x+c$.	$2x=2y+b-c$.
$x+y+z=v+d$.	

1°. On prendra dans les premieres équations toutes les valeurs d'une même inconnue, comme de v, & l'on en mettra une à part. Ces valeurs sont,

$v=z-x-y+a$. $v=y-x-z+b$. $v=x-y-z+c$. $v=x+y+z-d$.

2°. On comparera ces valeurs égales les unes avec les autres, & l'on aura les secondes équations.

Secondes équations abregées.

$2z - 2y = b - a.$ $2z - 2x = c - a.$ $2x + 2y = a + d.$

Les autres équations qu'on pourroit faire des quatre valeurs de v, sont inutiles, ces trois équations contenant toutes les inconnues du Problême excepté v, & toutes les connues.

3°. L'on prendra dans les secondes équations toutes les valeurs d'une même inconnue comme de z, & l'on aura,

$2z = 2y + b - a.$ $2z = 2x + c - a.$

On en écrira une dans l'ordre des équations mises à part, on comparera ces valeurs les unes avec les autres, & on aura les troisiémes équations en y ajoutant l'équation $2x + 2y = a + d$, dans laquelle z ne se trouve point.

Troisiémes équations abregées.

$2x - 2y = b - c.$ $2x + 2y = a + d.$

4°. On dégagera l'inconnue x dans ces troisiémes équations, & l'on aura $2x = 2y + b - c.$ $2x = -2y + a + d.$

On en écrira une dans l'ordre des équations mises à part, & on fera une équation de ces deux valeurs de $2x$, & l'on aura l'équation $4y = a - b + c + d$, où il n'y a que la seule inconnue y, en divisant chaque membre par 4, l'on aura $y = \frac{a-b+c+d}{4}$.

Enfin on substituera la valeur de y dans les équations mises à part, & l'on trouvera la valeur de x, & avec ces deux valeurs, celle de z, & enfin celle de v, qui sont,

$x = \frac{a+b-c+d}{4}.$ $z = \frac{-a+b+c+d}{4}.$ $v = \frac{a+b+c-d}{4}.$

Application de la troisiéme methode au même exemple.

Equations du Problême.

$v + x + y = z + a.$ $v + x + z = y + b.$ $v + y + z = x + c.$ $x + y + z = v + d.$

Valeurs de v.	*Valeurs de x.*
$v = z - x - y + a.$	$x = z - v - y + a.$
$v = y - x - z + b.$	$x = y - v - z + b.$
$v = x - y - z + c.$	$x = v + y + z - c.$
$v = x + y + z - d.$	$x = v - y - z + d.$
Somme abregée. $4v = a + b + c - d.$	Somme abregée. $4x = a + b - c + d.$

Divisant par 4, $v = \frac{a+b+c-d}{4}$. Divisant par 4, $x = \frac{a+b-c+d}{4}$.

Valeurs de y.	*Valeurs de z.*
$y = z - v - x + a.$	$z = v + x + y - a.$
$y = v + x + z - b.$	$z = y - v - x + b.$
$y = x - v - z + c.$	$z = x - v - y + c.$
$y = v - x - z + d.$	$z = v - x - y + d.$
Somme abregée. $4y = a - b + c + d.$	Somme abregée. $4z = -a + b + c + d.$

Divisant par 4, $y = \frac{a-b+c+d}{4}$. Divisant par 4, $z = \frac{-a+b+c+d}{4}$.

AVERTISSEMENT.

Comme il arrive rarement qu'en joignant ainsi toutes les valeurs d'une même inconnue, l'on trouve sa valeur toute connue, il est bon de remarquer qu'en les joignant deux à deux dans les cas où cela se peut faire, ou trois à trois, &c. il faut choisir celles où les autres inconnues se détruisent par des signes contraires, ou toutes, ou en partie.

Démonstration de ces trois methodes.

Il est évident que dans toutes les operations de ces methodes, l'égalité se conserve toujours entre les deux membres des équations qu'elles font trouver, & que les inconnues se dégagent les unes après les autres; par conséquent il y a égalité entre les membres des dernieres équations où conduisent ces methodes; ainsi les dernieres équations donnent les valeurs toutes connues de toutes les inconnues du Problême.

REMARQUE.

10. I. Lorsqu'on ne peut pas dégager toutes les inconnues, ce qui arrive lorsqu'on n'a pas pu former autant d'équations qu'on a été obligé de prendre d'inconnues, le Problême est indéterminé, & il peut avoir différentes résolutions; car en mettant des grandeurs arbitraires à la place des inconnues qu'on n'a pas pu dégager, on aura différentes résolutions: il arrive neanmoins quelquefois que les grandeurs arbitraires doivent être entre certaines limites, autrement on trouveroit des résolutions négatives, ou même impossibles, les équations où se trouvent les inconnues à la place

desquelles on peut mettre des grandeurs arbitraires, feront connoître ces limites.

Par exemple, si en resolvant un Problême, on ne peut trouver d'autre équation que celle-ci, $y = \frac{ax}{x-b}$, ce Problême est indéterminé, & en mettant differentes grandeurs arbitraires à la place de x, on aura differentes résolutions. Cependant il est évident que pour avoir des valeurs positives de y, il faut que chaque grandeur arbitraire qu'on mettra à la place de x, soit plus grande que b.

2. Lorsqu'au contraire on a plus d'équations que d'inconnues, aprés avoir trouvé les valeurs toutes connues de toutes les inconnues, il faut qu'en mettant ces valeurs dans les équations qui restent, on ne trouve pas d'impossibilité, c'est à dire qu'on ne trouve pas dans les deux membres de ces équations des grandeurs toutes connues inégales entr'elles: car ce seroit une marque que l'on a supposé quelque impossibilité dans les raports du Problême qui ont fourni ces équations; comme si dans l'exemple auquel on a appliqué les methodes, l'on avoit encore eu cette équation de plus que celles qui y sont, $x + y = e$. L'on auroit trouvé en substituant dans cette équation, les valeurs toutes connues de x & de y, l'égalité $\frac{a+a}{2} = e$; & si la grandeur e n'étoit pas égale à $\frac{a+a}{2}$, on auroit supposé dans le Problême une chose impossible.

Exemples où l'on résout plusieurs Problêmes simples ou du premier degré.

I.

LA somme a de deux grandeurs inconnues x & y, dont x est
II. la plus grande, étant connue avec leur difference d, trouver chacune de ces grandeurs.

Par la supposition $x + y = a$, & $x - y = d$; donc $x = a - y$, & $x = d + y$; donc $a - y = d + y$, & par transposition $2y = a - d$, & en divisant chaque membre par 2, l'on aura $y = \frac{a-d}{2}$; substituant cette valeur dans laquelle on voudra des équations précedentes comme dans $x = a - y$, l'on trouvera $x = \frac{a+d}{2}$.

L'on a donc trouvé que la moitié de la somme de deux grandeurs avec la moitié de leur difference, est égale à la plus grande, & la moitié de la somme moins la moitié de la difference, est égale à la moindre. Ce qu'il faut bien retenir,

II.

On propose de trouver trois grandeurs inconnues x, y, z, qui soient telles qu'en ajoutant une grandeur connue a à la premiere x, elle soit égale aux deux autres, en ajoutant la même grandeur a à la seconde y, elle soit égale au produit des deux autres $x + z$ par un nombre connu b; enfin en ajoutant a à la troisiéme z, elle soit égale au produit des deux autres par un autre nombre connu c. Par la supposition

$$x + a = y + z.$$
$$y + a = bx + bz.$$
$$z + a = cx + cy.$$

Equations mises à part.

$$x = y + z - a.$$
$$y = \frac{-2bz + ab + a}{b-1}.$$

Donc $x = y + z - a$. $x = \frac{y}{b} - z + \frac{a}{b}$. $x = \frac{z}{c} - y + \frac{a}{c}$, en comparant la premiere de ces valeurs de l'inconnue x avec les deux autres, l'on aura,

Secondes équations abregées.

$2z + \frac{by - y}{b} = \frac{ab + a}{b}$. $2y + \frac{cz - z}{c} = \frac{ac + a}{c}$; en dégageant y dans l'une & dans l'autre, on aura $y = \frac{-2bz + ab + a}{b-1}$, $y = \frac{-cz + z + ac + a}{2c}$.

Comparant ces deux valeurs de y, on trouvera $\frac{-2bz + ab + a}{b-1} = \frac{-cz + z + ac + a}{2c}$, où dégageant z, l'on trouvera $z = \frac{abc + 3ac - ab + a}{3bc + b + c - 1}$, mettant cette valeur de z dans $y = \frac{-2bz + ab + a}{b-1}$, l'on trouve aprés avoir abregé $y = \frac{abc + 3ab - ac + a}{3bc + b + c - 1}$, substituant les valeurs connues de z & de y dans $x = y + z - a$, l'on trouve aprés avoir abregé $x = \frac{-abc + ab + ac + 3a}{3bc + b + c - 1}$.

Si l'on suppose $a = 10$, $b = 2$, $c = 3$, l'on aura $x = \frac{10}{11}$. $y = 4\frac{6}{11}$. $z = 6\frac{4}{11}$.

III.

Deux nombres qu'on exprimera generalement par a & b, étant donnés, trouver un troisiéme nombre inconnu x, par lequel les deux a & b étant divisés, si l'on ajoute à chaque quotient $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$, un nombre donné c, les sommes $\frac{a}{x} + c$, $\frac{b}{x} + c$, soient entr'elles comme deux nombres donnés m & n, l'on suppose a moindre que b, & m moindre que n.

Par la supposition $\frac{a}{x} + c \,.\, \frac{b}{x} + c :: m \,.\, n$; ce qui donne cette équation $\frac{an}{x} + cn = \frac{bm}{x} + cm$; multipliant toutes les quantités par x, l'on aura $an + cnx = bm + cmx$, & dégageant x, l'on aura $x = \frac{bm - an}{cn - cm}$.

Si l'on suppose $a = 12$, $b = 36$, $c = 8$, $m = 3$, $n = 5$, l'on aura $x = 3$.

REMARQUE.

Il faut prendre garde en dégageant les inconnues, de faire en sorte que les valeurs toutes connues que l'on trouve, soient positives lorsque cela est possible.

IV.

On prendra pour quatriéme exemple le Problême de la couronne mêlée d'or & d'argent, dont Archimede trouva le mêlange sans endomager la couronne. Un ouvrage paroît être d'or, il faut trouver premierement s'il n'y a point d'argent mêlé avec l'or; secondement s'il se trouve du mêlange, il faut trouver combien il y a d'or, & combien il y a d'argent dans l'ouvrage sans l'endomager.

On suppose comme une chose démontrée par l'experience, & dont on donne la raison dans l'Hydrostratique, que les métaux perdent une partie de leur poids dans l'eau, & que l'or en perd moins que l'argent, & que les autres métaux.

Ainsi le poids de l'ouvrage étant connu & nommé p, il faut prendre un lingot d'or pur, & un lingot d'argent, chacun du poids p de l'ouvrage, & peser ces trois corps égaux dans l'eau, pour voir la quantité qu'ils y perdent de leur poids; si l'ouvrage en perd plus que l'or & moins que l'argent, l'on est assûré par là qu'il y a du mêlange.

Pour le trouver soit nommée a la quantité que l'argent perd de son poids dans l'eau; b la quantité qu'y perd l'or pur, & c la quantité qu'y perd l'ouvrage, & l'on suppose c plus grand que b, & moindre que a.

Soit la quantité inconnue d'argent mêlé dans l'ouvrage $= x$.

La quantité inconnue d'or mêlé dans l'ouvrage $= y$.

L'on a déja cette premiere équation $x + y = p$, puisque les deux parties font ensemble la quantité p du poids de l'ouvrage.

Pour avoir une seconde équation, il faut auparavant faire ces deux proportions.

Le poids p du lingot d'argent est à la quantité x d'argent mêlé dans l'ouvrage, comme la perte a que fait le lingot d'argent de son poids, étant mis dans l'eau, à la perte que fait la partie x d'argent qui est dans l'ouvrage lorsqu'on le pese dans l'eau.

$p \,.\, x :: a \,.\, \frac{ax}{p}$. ainsi $\frac{ax}{p}$ est la perte que fait la quantité x d'argent qui est dans l'ouvrage.

Par un raisonnement semblable à celui qui précede, le poids du lingot d'or pur $p \,.\, y :: b \,.\, \frac{by}{p}$. ainsi $\frac{by}{p}$ est la perte que fait la quantité y d'or qui est dans l'ouvrage; mais ces deux quantités de perte $\frac{ax}{p}$ & $\frac{by}{p}$ doivent être ensemble égales à la perte c que fait l'ouvrage étant pesé dans l'eau.

L'on a donc cette seconde équation $\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} = c$.

Il faut substituer la valeur de x prise dans la premiere équation, qui est $x = p - y$, dans cette seconde équation, & l'on aura $\frac{ap - ay + by}{p} = c$, où l'on trouvera $y = \frac{ap - cp}{a - b}$.

Substituant cette valeur dans $x = p - y$, on trouvera $x = \frac{cp - bp}{a - b}$.

Si l'on resout chacune de ces égalités en proportion, on trouvera $a - b \,.\, p :: a - c \,.\, y$. $\quad a - b \,.\, p :: c - b \,.\, x$.

Ce sont les proportions que donne la regle d'alliage.

Si l'on suppose le poids de l'ouvrage $p = 10$ livres, que l'argent perd la dixiéme partie de son poids dans l'eau, c'est à dire que 10 livres d'argent perdent une livre, l'on aura $a = 1$ que l'or y perd la dix-huitiéme partie de son poids, l'on aura $b = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, que l'ouvrage perd $\frac{2}{3}$ d'une livre de son poids dans l'eau, c'est à dire $c = \frac{2}{3}$.

On trouvera que la quantité d'argent mêlé dans l'ouvrage est $x = 2$ liv. $\frac{1}{2}$; la quantité d'or est $y = 7$ liv. $\frac{1}{2}$.

V.

Trouver entre deux grandeurs données a & b, autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra, ce nombre de moyennes proportionnelles soit nommé n.

Il suffit de trouver le premier terme moyen proportionnel, car par la regle de trois, on aura tous les autres.

Soit ce premier moyen $= x$.

Suivant ce qui est démontré dans les raports composés $a^{n+1} \,.\, x^{n+1} :: a \,.\, b$. d'où l'on déduit $ax^{n+1} = a^{n+1} b$, divisant chaque membre par a, l'on aura $x^{n+1} = a^n b$; en tirant la racine dont l'exposant est $n + 1$ de chaque membre, l'on aura $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$.

Si on demande un seul moyen proportionnel, l'on aura $n = 1$, & $n + 1 = 2$, ainsi $x = \sqrt[2]{ab}$.

Si on demande deux moyens, l'on aura $n = 2$, & $n + 1 = 3$, ainsi $x = \sqrt[3]{a^2 b}$.

Si on en demande trois, l'on aura $x=\sqrt[3]{a^3b}$, &c.

VI.

On prendra un exemple de Physique sur le ressort de l'air pour le sixiéme.

Soit supposé un tuyau de verre d'une longueur determinée telle qu'on voudra, comme de 30 pouces, fermé d'un bout, & ouvert de l'autre, qu'on remplisse de mercure à la reserve d'une certaine quantité d'air grossier qu'on y laisse telle qu'on voudra, par exemple de huit pouces: l'on demande aprés avoir renversé le tuyau, & mis l'ouverture dans un vaisseau plein de mercure, quelle sera la quantité du tuyau qu'occupera l'air qu'on y a laissé aprés s'être étendu par son ressort, & à quelle hauteur le mercure demeurera suspendu.

On suppose que l'experience demontre, 1°, que le mercure demeure suspendu à la hauteur de 28 pouces, lorsqu'il n'y a point d'air grossier dans le tuyau: par consequent l'air exterieur presse le mercure qui est dans le tuyau, & l'empêche de descendre avec une force égale au poids de 28 pouces de mercure. Il presse avec la même force tous les corps qu'il environne, & une portion d'air grossier même est pressée avec la même force par l'air qui l'environne, de maniere que s'il arrivoit qu'elle en fût moins pressée, elle s'étendroit par son ressort, & occuperoit un plus grand espace.

2. Que lorsqu'une portion d'air est pressée par deux forces inégales, dont l'une est par exemple double de l'autre, l'espace qu'elle occupe étant pressée par la plus grande, est à celui auquel elle s'étend par son ressort, étant pressée par la moindre, comme reciproquement cette moindre force est à la plus grande; dans cet exemple comme 1 à 2. Ces choses supposées,

Soit la longueur connuë du tuyau $=l$.

La quantité connue d'air laissé dans le tuyau $=a$.

La force entiere avec laquelle l'air exterieur presse le mercure, qui est connue & ordinairement égale au poids de 28 pouces de mercure $=f$.

La hauteur inconnue de la colonne de mercure qui demeurera dans le tuyau où l'on a laissé l'air a, $=x$.

La quantité inconnue de l'espace qu'occupera l'air a laissé dans le tuyau $=y$.

Les

Les deux quantités x & y des espaces qu'occuperont le mercure & l'air dans le tuyau, seront égales à la longueur du tuyau l; ce qui donne cette premiere équation $x+y=l$.

L'air a laissé dans le tuyau qui occupoit l'espace a lorsqu'il étoit pressé par la force entiere f de l'air qui l'environnoit, doit s'étendre lorsqu'il n'est plus pressé que par la force $f-x$, moindre que f, c'est à dire lorsqu'il est pressé par la force f de l'air exterieur diminuée par le poids de la colonne de mercure x qui restera dans le tuyau; car l'air exterieur pressant le mercure x & l'air qui sont dans le tuyau avec la force f, le poids du mercure x diminue l'action de la force f sur l'air resté dans le tuyau, qui n'y est plus pressé que par la force $f-x$.

Or l'espace y qu'occupera l'air laissé dans le tuyau aprés s'être étendu, n'étant pressé que par la force $f-x$, doit être à l'espace a qu'il occupoit étant pressé par la force entiere f; comme reciproquement la force f est à la force $f-x$, ce qui donne cette proportion $y \,.\, a :: f \,.\, f-x$, d'où l'on déduit la seconde équation $fy-xy=af$.

Il faut prendre la valeur de x dans la premiere équation $x+y=l$, & l'on aura $x=l-y$.

Il faut substituer cette valeur de x dans la seconde équation $fy-xy=af$, & l'on aura $fy-ly+yy=af$, qu'on écrira de cette maniere $yy+fy-ly=af$.

Pour abreger on supposera $f-l=-b$, lorsque l surpasse f; & $f-l=+b$, lorsque f surpasse l; & on mettra $-b$ à la place de $f-l$ dans le premier cas, & l'on aura $yy-by=af$.

Il faut ajouter à chaque membre $\frac{1}{4}bb$, & l'on aura $yy-by+\frac{1}{4}bb=\frac{1}{4}bb+af$, dont le premier membre est un quarré parfait, qui a pour sa racine $y-\frac{1}{2}b$; ainsi en tirant la racine quarrée de chaque membre, l'on aura $y-\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{1}{4}bb+af}$, & par transposition $y=\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}bb+af}$. En mettant cette valeur de y dans $x=l-y$, l'on aura $x=l-\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}bb+af}$, & le Problême est résolu.

Supposant $30=l$, $28=f$, $8=a$, & $28-30=-2=-b$, l'on trouvera $y=16$, & $x=14$.

REMARQUE.

L'on peut souvent abreger les résolutions des Problêmes en se servant de quelques-uns de leurs raports, pour diminuer le nombre des inconnues, & par consequent celui des équations. Dans l'exemple précedent, au lieu de prendre la seconde inconnue y, on auroit pu raisonner ainsi : La longueur du tuyau l moins la hauteur inconnue de la colonne du mercure x, est precisément la quantité inconnue de l'espace qu'occupera l'air a laissé dans le tuyau, ainsi cet espace est $l - x$; ce qui est cause qu'on n'a pas besoin de la premiere équation, & qu'une seule équation suffit pour la résolution du Problême.

ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui se réduisent à des équations composées.

LIVRE II.

Où l'on explique la maniere de réduire les Problêmes en équations, & toutes les équations d'un même Problême à une seule qui en contienne toutes les conditions, & quelques préparations generales des équations composées, pour les resoudre plus facilement, comme les manieres d'en ôter les fractions, les incommensurables, & de trouver leur plus grand diviseur commun.

SECTION I.

Où l'on explique la maniere de réduire un Problême composé sur les nombres ou de Geometrie en équations, & la maniere de réduire toutes les équations d'un Problême à une seule qui ne contienne qu'une inconnue lorsque le Problême est déterminé, ou plusieurs lorsqu'il est indéterminé.

AVERTISSEMENT.

Ce Traité d'Analyse est principalement pour la Geometrie, où les équations composées sont necessaires pour resoudre les Problêmes les plus composés, d'une maniere generale & si simple, que les expressions n'occupent point l'esprit, & lui laissent toute son étendue pour découvrir tout ce qu'ils ont de plus difficile. Cela oblige de marquer ici en general la maniere de réduire en équations les Problêmes de Geometrie.

PROBLÊME I.

12. *REDUIRE un Problême composé en équations, & réduire ensuite toutes les équations d'un Problême à une seule qui contienne tous les raports du Problême, & dont la résolution donne celle du Problême.*

PREMIERE PARTIE DU PROBLÊME.

1. SI le Problême est numerique, on suivra la methode qui est au commencement du premier Livre, c'est à dire, on marquera les connues & les inconnues par les lettres qui leur conviennent, & par le moyen des raports du Problême, on formera autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, lorsque cela se peut.

Si le Problême est de Geometrie, il faut faire la figure propre au Problême, & qui l'exprime comme s'il étoit résolu, c'est à dire, il faut y marquer les lignes inconnues comme si elles étoient connues; il faut ensuite tracer dans cette figure des lignes perpendiculaires, paralleles, & autres, selon qu'on les jugera necessaires pour former des triangles rectangles, des triangles semblables, ou d'autres figures propres à découvrir ce qu'on cherche.

Parmi les lignes de la figure il y en a qui sont connues par la construction ou par la supposition, on les marquera par les premieres lettres de l'alphabet; il y en a d'inconnues qui sont celles qu'on cherche, ou celles qu'on juge pouvoir servir à les trouver; on les marquera par les dernieres lettres de l'alphabet, ou par les premieres lettres de leurs noms.

Les proprietés de la figure, les propositions de la Geometrie sur les triangles semblables, sur les triangles rectangles, &c. & les conditions énoncées dans le Problême, feront connoître les raports qui sont entre les inconnues & les connues, & l'on s'en servira par ordre pour former autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, lorsque cela est possible; & aprés cela le Problême sera réduit en équations.

Lorsqu'on ne peut former autant d'équations qu'on a supposé d'inconnues, le Problême est indeterminé, & peut recevoir plusieurs résolutions, & souvent même une infinité.

Il est bon de remarquer qu'on peut aussi se servir de quelques-uns des raports du Problême ou de la figure, pour diminuer le nombre des inconnues, ce qu'il faut toujours faire afin d'abreger.

On concevra mieux ce qu'on vient de dire lorsqu'on en verra l'application dans la Geometrie.

SECONDE PARTIE DU PROBLÊME.

13. *REDUIRE toutes les équations d'un Problême à une seule qui n'ait qu'une inconnue, lorsque cela se peut.*

PARMI les inconnues qu'on a supposées pour former les équations d'un Problême, il y en a d'ordinaire une principale dont dépend la résolution, & pour laquelle les autres inconnues ont été supposées. Cette principale inconnue doit être celle de l'équation à laquelle on doit réduire toutes les équations du Problême, & il ne faut point la dégager dans les dégagemens particuliers des autres inconnues.

On se servira des deux premieres methodes de la troisiéme Section du premier Livre,*pour réduire toutes les équations *9.
du Problême à une seule, c'est à dire, on prendra dans une des équations du Problême la valeur d'une inconnue qui n'est pas la principale, on la substituera dans les autres, & les nouvelles équations qu'on trouvera n'auront plus cette inconnue; on ôtera de même de celles-ci une seconde inconnue, & on continuera d'ôter une troisiéme inconnue, & toutes les autres ensuite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation qui n'ait que la principale inconnue, ce sera l'équation qu'on cherche.

Ou bien on prendra dans les équations du Problême toutes les valeurs, ou du moins deux valeurs d'une inconnue qui n'est pas la principale; on comparera ces valeurs égales, ce qui donnera de nouvelles équations qui n'auront plus cette inconnue; on operera de même sur ces secondes équations, ce qui en fera trouver de troisiémes où deux inconnues ne se trouveront plus, enfin on continuera cette operation jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation qui n'ait que la principale inconnue, ce sera l'équation qu'on cherche.

Dans les Problêmes indéterminés, la derniere équation qui renferme toutes les conditions ou raports du Problême, aura plusieurs inconnues.

Application de ces methodes à un exemple.

On suppose qu'on a réduit un Problême à ces trois premieres équations qui en expriment tous les raports, & dont y est la principale inconnue qui doit se trouver dans la derniere équation qu'on cherche.

Premieres équations.

$$z - yy + v = -p. \quad -zy + vy = -q. \quad vz = r.$$

Pour les réduire à une seule équation dont y soit l'inconnue, je prens par la premiere methode la valeur de z dans
*1. la premiere équation, & je trouve * $z = yy - v - p$.
*8. Je substitue * cette valeur de z dans les deux autres équations, & je trouve les secondes équations dans lesquelles z n'est plus.

Secondes équations abregées.

$$2vy = y^3 - py - q. \quad vyy - vv - pv = r.$$

Je prens dans la premiere de ces équations la valeur
*4. de v, & je trouve * $v = \frac{y^3 - py - q}{2y}$, dont le quarré est $vv = \frac{y^6 - 2py^4 - 2qy^3 + ppyy + 2pqy + qq}{4yy}$.
*8. Je substitue * les valeurs de v & de vv dans l'équation $vyy - vv - pv = r$, & je trouve l'équation $+\frac{y^5 - py^3 - qyy}{2y} - \frac{y^6 + 2py^4 + 2qy^3 - ppyy - 2pqy - qq}{4yy} - \frac{py^3 + ppy + pq}{2y} = r$, dans laquelle il n'y a plus d'autre inconnue que la principale y; ainsi c'est l'équation qu'il falloit trouver.

Autrement. *Premieres équations.*

$$z - yy + v = -p. \quad -zy + vy = -q. \quad vz = r.$$

*1. & 4. Je prens * deux valeurs de la même inconnue v dans les deux premieres équations, & je trouve $v = yy - z - p$. $v = \frac{zy - q}{y}$.

Je fais une équation de ces deux valeurs, & je trouve $yy - z - p = \frac{zy - q}{y}$, où l'inconnue v n'est plus.

Je multiplie chaque terme par y *, & je trouve * $y^3 - py + q = 2zy$. *3. *2.

Je prens la valeur de z, & j'ai * $z = \frac{y^3 - py + q}{2y}$. *4.

Je prens * dans l'équation $vz = r$, dont je ne me suis pas *4.
encore servi, la valeur de z, & j'ai $z = \frac{r}{v}$.

Je fais des deux valeurs de z, l'équation $\frac{y^3 - py + q}{2y} = \frac{r}{v}$.

Je réduis les deux membres au même dénominateur, & aprés avoir effacé le dénominateur commun, je trouve $vy^3 - pvy + qv = 2ry$.

Je prens * la valeur de v, & j'ai $v = \frac{2ry}{y^3 - py + q}$. *4.

Je substitue les valeurs de z & de v, $z = \frac{y^3 - py + q}{2y}$, *8.
$v = \frac{2ry}{y^3 - py + q}$, qui n'ont pas d'autres inconnues que la principale y dans la premiere, ou dans la seconde des premieres équations, il n'importe laquelle. Je la substitue, dis-je, dans la premiere $z - yy + v = -p$, & je trouve $\frac{y^3 - py + q}{2y} - yy + \frac{2ry}{y^3 - py + q} = -p$, qui est l'équation qu'il falloit trouver.

On auroit pu prendre dans les trois premieres équations les trois valeurs de la même inconnue v, & les comparant ensemble, en faire deux équations, où il n'y auroit eu d'inconnue que z avec la principale y, & prendre dans ces deux équations deux valeurs de z, qui étant comparées, auroient donné l'équation où il n'y auroit eu que l'inconnue principale y; mais le calcul en auroit été un peu plus embarrassé.

On ne met pas d'autres exemples, on en verra assés dans la suite, & dans la Geometrie.

DÉMONSTRATION.

Il est évident que l'on conserve toujours l'égalité dans toutes les operations du Problême, & qu'ayant employé toutes les équations du Problême à former la derniere, cette derniere équation renferme tous les raports exprimés par toutes les équations du Problême. Enfin il est évident que la résolution de cette derniere équation donnera celle de toutes les équations du Problême.

SECTION II.

Où l'on explique la maniére d'ôter toutes les fractions de l'équation du Problême. L'on y explique aussi toutes les définitions des équations composées.

PROBLÊME II.

14. *OTER toutes les fractions d'une équation composée.*

IL faut réduire toutes les grandeurs de l'équation à un même dénominateur, & ensuite effacer le commun dénominateur, & abreger l'équation en effaçant les grandeurs qui se détruisent par des signes contraires, en joignant ensemble les mêmes grandeurs, & en divisant toutes les grandeurs par les lettres communes, & l'on aura l'équation sans fractions.

Par exemple, pour ôter les fractions de l'équation $\frac{y^3 - py + q}{2y} - yy + \frac{2ry}{y^3 - py + q} = -p$, on réduira toutes les grandeurs de l'équation au dénominateur commun $2y^4 - 2pyy + 2qy$, & l'on aura,

$$\frac{y^6 - py^4 + qy^3 - py^4 + ppyy - pqy + qy^3 - pqy + qq - 2y^6 + 2py^4 - 2qy^3 + 4ryy}{2y^4 - 2pyy + 2qy}$$
$$= \frac{-2py^4 + 2ppyy - 2pqy}{2y^4 - 2pyy + 2qy}.$$

On effacera le dénominateur commun, & toutes les quantités qui se détruisent par des signes contraires, & l'on joindra ensemble les mêmes quantités, & on aura $-y^6 + 2py^4 + ppyy + 4ryy + qq = 0$; & en faisant passer toutes les quantités dans le second membre, afin que y^6 soit positive, on aura $0 = y^6 - 2py^4 + ppyy - 4ryy - qq$.

On a démontré ces operations dans le premier Livre.

On ôtera de la même maniere les fractions de l'équation $\frac{y^5 - py^3 - qyy}{2y} - \frac{y^6 - 2py^4 + 2qy^3 - ppyy - 2pqy - qq}{4yy} - \frac{py^3 + ppy + pq}{2y} = r$, en multipliant les numerateurs $y^5 - py^3 - qyy$, & $-py^3 + ppy + pq$ par $2y$, & r par $4yy$; & aprés avoir effacé le commun dénominateur $4yy$, & abregé l'équation, on trouvera la même équation $y^6 - 2py^4 + ppyy - 4ryy - qq = 0$.

DEFINITIONS.

DE'FINITIONS.

I.

15. UNE équation *ordonnée* est celle où la plus haute puissance de l'inconnue est la premiere, & les autres puissances de la même inconnue sont de suite, selon leurs degrés; ainsi $x^4 - ax^3 + abxx - aacx + c^4 = 0$, est une équation ordonnée.

II.

On appelle les *termes* d'une équation, les grandeurs où l'inconnue a differens degrés; & un seul *terme*, les grandeurs où l'inconnue est élevée à un même degré. Quand il y a plusieurs grandeurs dans un même terme, on les écrit toutes les unes sous les autres. Les grandeurs connues qui multiplient l'inconnue dans les termes, s'appellent les *coëfficiens*.

Le premier terme est celui où se trouve la plus haute puissance de l'inconnue; le second est celui où se trouve la puissance suivante de l'inconnue, & ainsi de suite jusqu'au dernier terme, qui est toujours celui où il n'y a que des grandeurs toutes connues, comme dans cet exemple,

$$\begin{array}{llll} x^3 & - axx & + abx & - abc = 0. \\ & - b & + ac. & \\ & - c & + bc. & \end{array}$$

Le premier terme est x^3; le second est $\overline{-a-b-c} \times xx$; le troisiéme est $\overline{ab+ac+bc} \times x$; le dernier terme est $-abc$. $-a-b-c$ sont le coëfficient du second terme; $+ab+ac+bc$ sont le coëfficient du troisiéme terme: L'unité est le coëfficient du premier terme $x^3 = 1 \times x^3$, lorsqu'il ne contient que la plus haute puissance de l'inconnue; pour abreger, on n'écrit ordinairement qu'une seule fois l'inconnue dans un terme lorsqu'il renferme plusieurs grandeurs.

Lorsqu'il y a de l'interruption dans la suite des puissances de l'inconnue, comme dans $x^3 - abx + abc = 0$, on dit que les termes où se trouve l'interruption, manquent dans l'équation, ou sont évanouis; ainsi le second terme manque dans $x^3 - abx + abc = 0$, & $-abx$ demeure toujours le troisiéme terme.

Le troisiéme terme est évanoui dans $x^3 - axx + abc = 0$.

III.

16. On distingue les équations en differens degrés. Les

équations simples, ou du premier degré, ou lineaires, sont celles où l'inconnue est au premier degré; ainsi $x - a = 0$ est du premier degré. Les équations du second degré sont celles où la plus haute puissance de l'inconnue est élevée au quarré, $xx - ax + ab = 0$ est une équation du second degré.

Les équations du 3^e, du 4^e, du 5^e degré, &c. sont celles où la plus haute puissance de l'inconnue est une 3^e, ou une 4^e, ou une 5^e puissance, &c.

IV.

La plus haute puissance de l'inconnue, & toutes ses autres puissances dans les termes suivans, peuvent être les puissances exactes du moindre degré de l'inconnue qui est dans le penultiéme terme; par exemple, dans l'équation $x^6 - ax^4 + abxx - aabc = 0$, en regardant le moindre degré de l'inconnue dans le penultiéme terme qui est xx, comme lineaire, x^6 est sa troisiéme puissance, x^4 est sa seconde puissance. Dans ce cas le degré de l'équation est celui de la plus haute puissance du moindre degré xx de l'inconnue; ainsi l'équation $x^6 - ax^4 + abxx - aabc = 0$, n'est que du troisiéme degré, parceque x^6 n'est que la troisiéme puissance du moindre degré xx de l'inconnue.

Ainsi $x^{2r} - aax^r + aab^r = 0$, est une équation du second degré, parceque x^{2r} est le quarré de x^r.

De même $x^{3r} - aax^{2r} + aabx^r - a^3b^r = 0$, est du troisiéme degré, parceque x^{3r} est le cube, & x^{2r} le quarré de x^r.

Mais $x^6 - ax^5 + abcxx - a^3bcc = 0$, est du sixiéme degré, parceque les puissances exactes du moindre degré xx, ne sont pas de suite.

COROLLAIRE.

LORSQU'IL ne manque aucun terme dans une équation, il y a autant de termes plus un, que l'equation a de degrés; ainsi il y a deux termes dans une équation du premier degré; il y en a trois dans une équation du second degré; quatre dans une équation du troisiéme degré, &c.

Car tous les degrés de l'inconnue font autant de termes que la plus haute puissance de l'inconnue a de degrés, & les grandeurs toutes connues en font un autre, qui est le dernier terme.

DÉFINITION V.

17. SI tous les termes d'une équation ont chacun le même nombre de dimensions, on dit qu'ils sont *homogenes*; ainsi tous les termes de $x^4 - ax^3 + abxx - a^2cx + a^3d = 0$, sont homogenes, parceque chaque terme est de quatre dimensions: mais les termes de $x^4 - ax^3 + bxx - cx + d = 0$, ne sont pas homogenes; & l'on dit alors que *la loi des homogenes n'est pas observée.*

Cette loi des homogenes doit être observée autant qu'il est possible dans les équations des Problêmes de Geometrie, parcequ'on ne compare pas, par exemple, des grandeurs planes ou de deux dimensions, quand elles expriment des surfaces, avec des grandeurs solides ou de trois dimensions, lorsqu'elles expriment des figures solides.

REMARQUE I.

CEPENDANT lorsque les produits qui sont les termes des équations, n'expriment que des lignes dont les raports composés avec l'unité ou avec d'autres lignes, sont exprimés par le produit de plusieurs grandeurs, l'on peut comparer des raports plus composés entre des lignes, avec des raports moins composés, & même simples, entre d'autres lignes; ainsi l'on peut comparer ensemble des grandeurs de differentes dimensions, & où la loi des homogenes n'est pas observée.

On peut aussi dans ce cas conserver toujours, si l'on veut, la loi des homogenes, en concevant les moindres produits multipliez par l'unité autant de fois qu'il le faut, pour les rendre homogenes avec les produits d'un plus grand nombre de dimensions; ainsi on rendra $+bxx$ homogene avec $-ax^3$ en écrivant $+1 \times bxx$. De même on pourra écrire $-1 \times 1 \times cx$, & $1 \times 1 \times 1 \times d$, pour rendre les termes $-cx + d$, homogenes avec les autres.

On verra dans la Geometrie les moyens de rendre homogenes tous les termes d'une équation, en conservant leur même valeur.

REMARQUE II.

UN des grands avantages de l'Analyse est de ne pas partager inutilement l'esprit; c'est pourquoi elle reduit les

Problêmes les plus composés à des expressions si simples, que toute l'attention de l'esprit n'est qu'aux grandeurs inconnues qu'il cherche : ainsi pour empêcher que les grandeurs connues sur lesquelles il ne reste plus rien à découvrir, ne partagent l'attention, on exprime par une seule lettre toutes les grandeurs connues d'un même terme.

Par exemple, on abregera l'équation

$$\begin{array}{llll} x^3 - axx & + abx & - abc = 0. \\ - b & + ac. & \\ - c & + bc. & \end{array}$$

En supposant toutes les grandeurs connues $-a-b-c$ du second terme égales à une seule lettre $-n$; en supposant toutes les grandeurs connues $+ab+ac+bc$ du troisiéme terme égales à une seule lettre $+p$; & toutes les connues $-abc$ du quatriéme terme à une seule lettre $-q$, l'on aura $x^3 - nxx + px - q = 0$, au lieu de l'équation proposée.

L'on voit bien que la loi des homogenes n'est pas moins observée dans cette expression simple, que dans l'expression composée, parceque la lettre p, par exemple, est dans le troisiéme terme à la place d'une grandeur connue de deux dimensions, & q dans le quatriéme à la place d'une grandeur connue de trois dimensions.

DEFINITION VI.

Une équation ainsi abregée s'appelle une *formule*, c'est à dire une expression generale & abregée de toutes les équations du même degré, qui auroient le même nombre de termes, & la même diversité dans leurs signes.

COROLLAIRE I.

18. Toute la diversité des équations d'un même degré ne pouvant venir que de ces deux choses : 1. de ce qu'il manque quelques termes dans les unes qui ne manquent pas dans les autres ; 2. de la diversité des signes $+$ & $-$ qui précedent les termes, on peut réduire toutes les équations d'un même degré à un nombre déterminé de formules.

Par exemple, en supposant que le premier terme a toujours le signe $+$, toutes les équations du second degré se peuvent réduire aux suivantes.

$xx - p = 0.$ $xx + p = 0.$ $xx - nx + p = 0.$ $xx + nx + p = 0.$ $xx - nx - p = 0.$ $xx + nx - p = 0.$

Dans ces équations n marque la quantité connue du second terme, & p la quantité connue du troisiéme.

L'avantage de ces formules est que leur résolution donnera la résolution de toutes les équations particulieres du second degré, en mettant dans la résolution à la place de n & de p, les grandeurs connues du second & du troisiéme terme des équations particulieres.

On peut de même réduire les équations du troisiéme degré, du quatriéme, &c. à un nombre déterminé de formules.

COROLLAIRE II.

On peut même réduire toutes les équations d'un même degré à une seule formule, pour abreger tous les cas ; par exemple, la seule formule $xx \pm nx \pm p = 0$, peut representer toutes les équations du second degré, $x^3 \pm nxx \pm px \pm q = 0$ peut representer toutes les équations du troisiéme degré, & $x^4 \pm nx^3 \pm pxx \pm qx \pm r = 0$, toutes celles du quatriéme degré, & ainsi des autres ; & cela, en supposant deux choses, 1°, que quelques termes de la formule sont nuls ou égaux à zero, lorsqu'elle represente les équations où il manque des termes ; 2°. Que quand quelques termes des équations ont $+$, & les autres $-$, il faut donner aux termes de la formule qui leur répondent, les mêmes signes.

Par exemple, afin que la formule $x^3 \pm nxx \pm px \pm q = 0$ represente l'équation $x^3 - abx + abc = 0$, il faut, 1°, supposer dans la formule, le second terme $\pm nxx = 0$. 2°. Il faut supposer que px dans la formule a le signe $-$, & q le signe $+$: il en est de même des autres.

Enfin on peut se servir d'une seule formule pour chaque degré où tous les termes ayent le signe $+$; par exemple $xx + nx + p = 0$, sera la formule generale du second degré ; $x^3 + nxx + px + q = 0$, celle du troisiéme, & ainsi des autres : En supposant ces deux choses, 1°, que lorsqu'elle represente des équations où il manque des termes, ces mêmes termes sont nuls ou égaux à zero dans la formule. 2°. Que le signe $+$ de chaque terme de la formule represente le signe $+$ ou $-$ du même terme de chaque équation particuliere du même degré, selon qu'il se trouve dans chaque équation.

Ainsi $x^3 + nxx + px + q = 0$, represente l'équation particuliere $x^3 - abx - abc = 0$, en supposant, 1°, le second terme de la formule $+ nxx = 0$, & 2°, que les signes + devant $+ px + q$, representent les signes — qui sont devant $- abx - abc$.

Et dans la formule que donnera la résolution de $x^3 + nxx + px + q = 0$, on supposera les grandeurs où sera n, égales à zero, & on donnera aux grandeurs où seront p & q, des signes opposés; mais on laissera les signes + devant les puissances paires de p & de q, & on les changera devant leurs puissances impaires.

Aprés cela il ne faudra plus que substituer dans la formule de la résolution de $x^3 + nxx + px + q = 0$, les grandeurs de l'équation particuliere, à la place de n, p, q, qui les representent dans la formule generale.

Cette maniere abrege les cas, & rend les résolutions generales, comme on le verra dans le cinquiéme Livre, où l'on expliquera la résolution particuliere des équations de chaque degré.

SECTION III.

Où l'on explique la maniere d'ôter les incommensurables des équations des Problêmes composés, lorsqu'elles en ont.

AVERTISSEMENT.

LORSQUE l'inconnue de l'équation est incommensurable, c'est à dire lorsqu'elle est sous le signe radical, il est necessaire de la rendre commensurable pour connoître de quel degré est l'équation; lorsqu'il n'y a d'incommensurables que les grandeurs connues de l'équation, & que l'inconnue ne l'est pas, on connoît alors de quel degré est l'équation, sans ôter les incommensurables, & l'on pourroit resoudre l'équation sans les ôter; néanmoins comme il est ordinairement plus facile de resoudre l'équation, lorsqu'il n'y a point d'incommensurables, les methodes qui suivent peuvent servir à les ôter toutes.

PROBLÊME III.

19. *OSTER les incommensurables d'une équation lorsqu'il y en a.*

Premiere maniere.

1°. IL faut mettre une des grandeurs incommensurables seule dans le premier membre, & toutes les autres quantités dans le second, & élever chaque membre à la puissance marquée par l'exposant du signe radical du premier membre, & la grandeur du premier membre deviendra commensurable. S'il reste des incommensurables dans le second membre, 2°, il faut en mettre une seule dans le premier membre, & toutes les autres quantités dans le second, & faire sur cette équation l'operation précedente, qui ôtera une seconde incommensurable. En continuant cette operation, on ôtera toutes les incommensurables.

Lorsqu'il y a plusieurs incommensurables de differens degrés, on mettra une lettre seule pour chaque incommensurable; ce qui abregera le calcul, comme on le verra dans les exemples.

On abregera encore le calcul, en mettant aprés chaque operation une lettre à la place de toutes les grandeurs devenues commensurables, & dans la derniere operation on restituera les valeurs des lettres qu'on a mises pour débarrasser le calcul.

EXEMPLES.

I.

POUR ôter les incommensurables de $\sqrt{xx} = \sqrt{ax + bb}$, on élevera chaque membre au quarré, & l'on aura $xx = ax + bb$, où il n'y a plus d'incommensurables.

II.

Pour ôter les incommensurables de $x + \sqrt[3]{aax} = b$, on fera, 1°, $\sqrt[3]{aax} = b - x$. 2°. On élevera chaque membre à la troisiéme puissance, parceque l'exposant de $\sqrt[3]{}$ est 3, & l'on aura $aax = b^3 - 3bbx + 3bxx - x^3$, où il n'y a plus d'incommensurables.

III.

Pour ôter les incommensurables de $\sqrt[3]{aax + \sqrt{a^3x^3}} = x - c$, 1°, il faut élever chaque membre à la troisiéme puissance, & l'on aura $aax + \sqrt{a^3x^3} = x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3$.

2°. Aprés avoir mis $\sqrt{a^3x^3}$ seule dans le premier membre, $\sqrt{a^3x^3} = x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3 - aax$, il faut élever chaque membre au quarré, & l'on aura $a^3x^3 = x^6 - 6cx^5$, &c. où il n'y a plus d'incommensurables.

IV.

Pour ôter les incommensurables de $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$, on supposera $n = \sqrt[3]{aax}$, ce qui donne $n^3 = aax$, & $m = \sqrt{ax}$, ce qui donne $mm = ax$, & l'on aura $x + n = m$, au lieu de $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$.

Ensuite on fera par transposition $n = m - x$, & on élevera chaque membre à la troisiéme puissance marquée par l'exposant $\sqrt[3]{}$ du signe radical de $\sqrt[3]{aax} = n$, & l'on aura $n^3 = m^3 - 3mmx + 3mxx - x^3$, & par transposition $n^3 + 3mmx + x^3 = m^3 + 3mxx$, où $n^3 + 3mmx$, & $+ x^3$ sont commensurables.

Pour débarasser le calcul, on supposera les grandeurs commensurables $n^3 + 3mmx + x^3 = f^3$, afin de n'avoir attention qu'aux seules incommensurables $m^3 + 3mxx$, & l'on aura $m^3 + 3mxx = f^3$. On élevera chaque membre au quarré, parceque l'exposant de l'incommensurable $m = \sqrt{ax}$ est 2, & l'on aura $m^6 + 6m^4xx + 9mmx^4 = f^6$, où il n'y a plus d'incommensurables. Enfin on substituera à la place de f, m, n, leurs valeurs, & l'on aura $a^4xx + 6a^3x^3 + 9aax^4 + 2aax^4 + 6ax^5 + x^6 = a^3x^3 + 6aax^4 + 9ax^5$; & en l'abregeant on aura $x^6 - 3ax^5 + 5aax^4 + 5a^3x^3 + a^4xx = 0$, ou bien $x^4 - 3ax^3 + 5aaxx + 5a^3x + a^4 = 0$, où il n'y a plus d'incommensurables.

Seconde maniere, lorsque l'équation contient plusieurs incommensurables.

1°. Il faut supposer une lettre égale à chaque grandeur incommensurable, ce qui donnera autant d'équations qu'il y a d'incommensurables. Il faut en ôter les incommensurables par la premiere maniere, & l'on aura de nouvelles équations où les puissances des lettres supposées seront égales à des grandeurs commensurables; on les appellera les équations commensurables.

2°. Il faut mettre les mêmes lettres dans l'équation proposée; & aprés avoir mis dans le premier membre la seule lettre, qu'on a supposée égale à l'incommensurable, dont l'exposant est le plus grand, on élevera chaque membre de cette équation à la puissance de cet exposant.

Enfin

Enfin on substituera les valeurs commensurables des lettres supposées à leur place dans l'équation précedente, & ces valeurs seront prises dans les équations commensurables; & en continuant les substitutions, on arrivera enfin à une équation où les lettres supposées ne seront plus, & qui n'aura plus d'incommensurables.

Par exemple, pour ôter les incommensurables de $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$: 1°, je suppose $n = \sqrt[3]{aax}$, & $m = \sqrt{ax}$; & ôtant les incommensurables, je trouve $n^3 = aax$, & $mm = ax$, ce sont les équations commensurables.

2°. Je mets n & m dans l'équation proposée $x + \sqrt[3]{aax} = \sqrt{ax}$, à la place des incommensurables, & je trouve $x + n = m$.

Je fais par transposition $n = m - x$, & j'éleve chaque membre à la troisiéme puissance, parceque l'exposant de $\sqrt[3]{aax} = n$, qui est le plus grand, est 3, & je trouve $n^3 = m^3 - 3mmx + 3mxx - x^3$.

3°. Je substitue dans cette équation les valeurs commensurables de n^3 & de mm, prises dans les équations commensurables, & je trouve $aax = m^3 - 3axx + 3mxx - x^3$.

Pour substituer la valeur de m^3 dans cette équation, je multiplie chaque membre de $mm = ax$ par m, & j'ai $m^3 = amx$; & je substitue amx à la place de m^3 dans $aax = m^3 + 3mxx - 3axx - x^3$, & je trouve $aax = amx + 3mxx - 3axx - x^3$ ou bien $aa = am + 3mx - 3ax - xx$; je mets par transposition les quantités où est m dans le premier membre, & les autres dans le second, & j'ai $am + 3mx = 3ax + aa + xx$; divisant le tout par $a + 3x$, je trouve $m = \frac{3ax + aa + xx}{a + 3x}$.

Pour substituer la valeur commensurable de m dans cette équation, j'éleve chaque membre à la seconde puissance, parceque l'exposant de $\sqrt{ax} = m$ est 2; & je trouve $mm = \frac{9aaxx + 6a^3x + a^4 + 6ax^3 + 2aaxx + x^4}{aa + 6ax + 9xx}$.

Je substitue dans cette équation la valeur de mm prise dans l'équation $mm = ax$, & je trouve

$$ax = \frac{9aaxx + 6a^3x + a^4 + 6ax^3 + 2aaxx + x^4}{aa + 6ax + 9xx}.$$

En réduisant chaque membre au même dénominateur, que j'efface ensuite, & en abregeant & ordonnant l'équation, je trouve $x^4 - 3ax^3 + 5aaxx + 5a^3x + a^4 = 0$, où il n'y a plus d'incommensurables. Ce qui étoit proposé.

DEMONSTRATION.

Il est évident que par les operations de ces deux methodes du Probléme, on ôte les incommensurables les unes aprés les autres, & que l'égalité se conserve toujours.

SECTION IV.

Où l'on explique la maniére de trouver le plus grand diviseur commun de deux ou de plusieurs équations composées qui ont la même inconnue.

AVERTISSEMENT.

Il est tres utile pour la résolution des équations composées, de pouvoir trouver le plus grand diviseur commun de celles qui ont la même inconnue ; & cela sert aussi quand on a plus de raports d'un Probléme que d'inconnues, à former l'équation la plus simple qui en donne la résolution.

PROBLÊME IV.

20. *TROUVER le plus grand diviseur commun des deux équations qui ont la même inconnue.*

1°. Si toutes les quantités de chaque équation étoient multipliées par une grandeur commune, on les diviseroit toutes par cette grandeur commune ; & il faudroit ensuite chercher le plus grand diviseur commun des deux quotiens ; & aprés l'avoir trouvé, le multiplier par cette grandeur commune, & le produit seroit le plus grand diviseur commun qu'on cherchoit.

2°. Si toutes les quantités d'une seule des deux équations, & surtout de celle qui servira de diviseur, étoient multipliées par une même grandeur, il faudroit les diviser par cette grandeur, qui ne doit point entrer dans le commun diviseur, & operer ensuite avec le quotient. Ces choses supposées.

Premiere maniere.

1. APRE'S avoir nommé la premiere équation celle du degré plus élevé, & l'autre la seconde, (si elles sont du même degré, on nommera laquelle on voudra la premiere, & l'autre la seconde,) il faut diviser la premiere par la seconde ; & si la division se fait juste, la seconde est le plus grand diviseur commun.

Si la division ne peut se faire exactement, lorsqu'on sera arrivé à un reste où l'inconnue a moins de degrés que dans la seconde équation, sans avoir égard au quotient, on divisera la seconde par le reste, qu'on nommera premier reste.

Si la division se fait exactement, le premier reste est le plus grand diviseur commun.

Mais si elle n'est pas exacte, & qu'elle donne un reste, on divisera le premier reste par ce second reste ; & si cette division donne un troisiéme reste, on divisera le second reste par le troisiéme, & on continuera jusqu'à ce qu'on ait trouvé un reste qui soit un diviseur exact du precedent, & ce reste sera le plus grand diviseur commun.

2. Quand en faisant les divisions de cette methode, on trouve une fraction pour quotient, il faut dans ce cas multiplier la grandeur à diviser par la grandeur connue, qui est le coëficient du premier terme du diviseur, ou par le dénominateur de la fraction trouvée pour quotient ; & la grandeur à diviser étant ainsi préparée, la division donnera pour quotient une grandeur entiere.

EXEMPLE I.

POUR trouver le plus grand diviseur commun des deux équations $x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 = 0$. $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 = 0$.

Je remarque qu'il n'y a aucune grandeur commune qui multiplie toutes les quantités de chacune de ces deux équations, ni aucune grandeur commune qui multiplie tous les termes de la seconde ; ainsi j'opere immédiatement sur ces deux équations.

Je divise la premiere par la seconde, & je trouve le quotient $xx - 1$, que je néglige, & le reste $-x^8 + 9x^6 - 28x^4 + 35xx - 14$, qui ne peut plus être divisé par la seconde équation, puisque $-x^8$ est moindre que x^{10}.

Je divise la seconde équation $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 = 0$, par ce premier reste $-x^8 + 9x^6 - 28x^4 + 35xx - 14$, & je trouve le quotient $-xx + 3$, que je néglige, & le reste $-x^6 + 7x^4 - 14xx + 7$.

Je divise le premier reste $-x^8+9x^6-28x^4+35xx-14$, par ce second reste $-x^6+7x^4-14xx+7$, & la division se fait exactement : ainsi $-x^6+7x^4-14xx+7=0$, ou bien en rendant la plus haute puissance $-x^6$ positive, $x^6-7x^4+14xx-7=0$, est le plus grand diviseur commun des deux équations proposées.

EXEMPLE II.

POUR trouver le plus grand diviseur commun des deux équations $3x^3-12xx+15x-6=0$. $-12xx+30x-18=0$: 1°, Je remarque que tous les termes des deux équations sont multipliés par 3, ou peuvent être divisés par 3; je les divise par 3, & je trouve les deux quotiens $x^3-4xx+5x-2=0$, & $-4xx+10x-6=0$.

Il faut à present chercher le plus grand diviseur commun de ces deux quotients, & quand on l'aura trouvé, le multiplier par 3, & le produit sera le plus grand diviseur commun des deux équations proposées.

2°. Je remarque que tous les termes de la seconde équation $-4xx+10x-6=0$, qui doit servir de diviseur, peuvent être divisés par 2; je les divise donc par 2, & je trouve l'équation $-2xx+5x-3=0$, qui est celle qui doit servir de diviseur.

Mais il faut remarquer que quand on aura trouvé le plus grand diviseur commun, il ne faudra pas le multiplier par 2, parceque 2 n'est pas un diviseur commun des deux équations $x^3-4xx+5x-2=0$, $-4xx+10x-6=0$.

Pour trouver maintenant le plus grand diviseur commun de $x^3-4xx+5x-2=0$, & de $-2xx+5x-3=0$, je divise la premiere par la seconde, & je trouve pour quotient la fraction $\frac{x}{-2}$; cela me fait voir qu'il faut préparer la grandeur à diviser $x^3-4xx+5x-2$, en la multipliant par le dénominateur de la fraction $\frac{x}{-2}$, qui est -2, & j'aurai le produit $-2x^3+8xx-10x+4$, qu'il faut diviser par la seconde grandeur $-2xx+5x-3$.

En faisant la division, je trouve d'abord le quotient x, & le reste $+3xx-7x+4$, qu'il faut continuer de diviser par $-2xx+5x-3$, parceque la plus haute puissance de l'inconnue x, n'est pas dans le reste $+3xx-7x+4$, moindre que la plus haute puissance de la même x dans le diviseur $-2xx+5x-3$.

Mais en continuant de diviser $+3xx-7x+4$, par $-2xx+5x-3$, je trouve pour quotient la fraction $\frac{3}{-2}$; cela fait voir qu'il faut préparer la grandeur à diviser $+3xx-7x+4$, en la multipliant par le dénominateur -2; cela me donne la grandeur à diviser $-6xx+14x-8$; je la divise par le diviseur $-2xx+5x-3$, & je trouve le quotient 3, & le reste $-x+1=0$.

Je divise maintenant $-2xx+5x-3=0$, qui a servi jusqu'ici de diviseur, par ce reste $-x+1=0$, & je trouve que la division se fait exactement.

Ainsi $-x+1=0$, ou $+x-1=0$, est le plus grand commun diviseur de $x^3-4xx+5x-2=0$, & de $-4xx+10x-6=0$.

Et en multipliant $-x+1=0$, ou $+x-1=0$ par 3, je trouve $-3x+3=0$, ou $+3x-3=0$, pour le plus grand diviseur commun des deux équations proposées $3x^3-12xx+15x-6=0$, $-12xx+30x-18=0$. Ce qui étoit proposé.

AVERTISSEMENT.

ON a mis dans cet exemple, qui n'est pas fort composé, toutes les difficultez qu'on peut trouver dans la recherche du plus grand diviseur commun; c'est pourquoi ceux qui commencent, doivent se le rendre tres familier.

EXEMPLE III.

POUR trouver le plus grand diviseur commun de ces deux équations $x^4-4ax^3+11aaxx-30a^3x+12a^4=0$,
$x^4-3ax^3+12aaxx-16a^3x+24a^4=0$;
je divise la premiere par la seconde, & je trouve le quotient 1, que je néglige, & le reste $-ax^3-aaxx-4a^3x-12a^4$, qui étant divisé par $-a$, donne $x^3+axx+4aax+12a^3$ pour le premier reste.

Je divise la seconde équation $x^4-3ax^3+12aaxx-16a^3x+14a^4=0$, par $x^3+axx+4aax+12a^3$.

Je trouve le quotient $x-4a$, que je néglige, & le reste $+12aaxx-12a^3x+72a^4$, que je divise par $12aa$, & je trouve pour le second reste $xx-ax+6aa$.

Je divise le premier reste $x^3+axx+4aax+12a^3$, par le second reste $xx-ax+6aa$, & la division est exacte.

Ainſi $xx - ax + 6aa = 0$, eſt le plus grand diviſeur commun des deux équations propoſées.

EXEMPLE IV.

POUR trouver le plus grand diviſeur commun des deux équations

$$\begin{array}{l} x^3 - 2axx + aax - aab = 0, \\ - bxx + 2abx. \end{array}$$

&

$$\begin{array}{l} -2axx + 2aax - 3aab = 0. \\ -bxx + 4abx. \end{array}$$

je diviſe la premiere par la ſeconde ; & en diviſant le premier terme x^3 par le premier terme $-2axx - bxx$ du diviſeur, je trouve la fraction $\frac{x}{-2a-b}$. Cela me fait voir qu'il faut préparer la premiere équation, qui eſt la grandeur à diviſer, en la multipliant par le dénominateur $-2a-b$; & je trouve pour produit la premiere équation préparée,

$$\begin{array}{lllll} -2ax^3 & +4aaxx & -2a^3x & +2a^3b & = 0. \\ -bx^3 & +4abxx & -5aabx & +aabb & \\ & +bbxx & -2abbx. & & \end{array}$$

Je la diviſe par la ſeconde équation

$$\begin{array}{l} -2axx + 2aax - 3aab = 0. \\ -bxx + 4abx, \end{array}$$

& je trouve le quotient x, que je néglige, & le reſte

$$\begin{array}{lll} +2aaxx & -2a^3x & +2a^3b \\ +bbxx & -2aabx & +aabb \\ & -2abbx. & \end{array}$$

qu'il faut continuer de diviſer par le même diviſeur

$$\begin{array}{l} -2axx + 2aax - 3aab = 0. \\ -bxx + 4abx, \end{array}$$

parceque la plus haute puiſſance xx de l'inconnue n'eſt pas moindre dans le reſte, que dans le diviſeur.

Mais en faiſant la diviſion de ce reſte par le diviſeur, je trouve la fraction $\frac{2aa+bb}{-2a-b}$; ce qui me fait voir qu'il faut préparer le reſte

$$\begin{array}{l} +2aaxx - 2a^3x, \text{ \&c.} \\ +bbxx, \end{array}$$

en le multipliant par le dénominateur $-2a-b$, & je trouve le reſte préparé

$$\begin{array}{lll} -4a^3xx & +4a^4x & -4a^4b \\ -2aabxx & +6a^3bx & -4a^3bb \\ -2abbxx & +6aabbx & -aab^3 \\ -b^3xx & +2ab^3x. & \end{array}$$

Je continue de le diviſer par le même diviſeur

$$\begin{array}{l} -2axx + 2aax - 3aab = 0. \\ -bxx + 4abx, \end{array}$$

& je trouve le quotient $2aa + bb$, que je néglige, & le reſte

$$\begin{array}{ll} -2a^3bx & +2a^4b \\ +4aabbx & -4a^3bb \\ -2ab^3x & +2aab^3, \end{array}$$

dont chaque terme peut être exactement diviſé par $-2a^3b + 4aabb - 2ab^3$.

Ainſi je diviſe ce reſte par $-2a^3b + 4aabb - 2ab^3$, & je trouve pour quotient $x - a$, que je prens pour le dernier reſte.

Je diviſe maintenant la ſeconde équation qui a ſervi de diviſeur juſqu'ici, par le reſte $x - a$, & la diviſion eſt exacte.

Par conſequent $x - a = 0$, eſt le plus grand diviſeur commun des deux équations propoſées.

Préparation pour la démonſtration.

LA démonſtration n'eſt pas differente de ce qu'on a coutume de donner dans l'Arithmetique & l'Algebre, pour la methode de trouver le plus grand diviſeur commun de deux grandeurs incomplexes, & elle eſt fondée ſur ces axiomes.

AXIOME I.

UN diviſeur exact d'une grandeur, eſt auſſi un diviſeur exact d'un multiple de cette grandeur ; par exemple, un diviſeur exact d'une grandeur A, eſt un diviſeur exact de $3A$, ou en general de mA.

AXIOME II.

UN diviſeur exact d'une grandeur entiere A, qui a deux parties B & C, & de l'une de ces deux parties comme de B, l'eſt auſſi de la ſeconde partie C.

AXIOME III.

LE plus grand diviſeur commun de deux grandeurs A & B, contient les autres communs diviſeurs moindres des mêmes grandeurs, & il eſt un multiple de chacun de ces diviſeurs moindres. Ces choſes ſuppoſées.

Premiere.	*Seconde.*
A.	B.
$A = mB + C.$	
$B = nC + D.$	
$C = pD.$	

Soit nommée A la premiere équation, & B la seconde, on suppose que A étant divisée par B, on trouve le quotient m, & le reste C; ainsi $A = mB + C$.

En divisant la seconde équation B par le premier reste C, qu'on trouve le quotient n, & le reste D; ainsi $B = nC + D$.

Enfin, qu'en divisant le premier reste C par le second D, la division soit exacte, & qu'on trouve le quotient p, ainsi $C = pD$.

Il faut démontrer que D est le plus grand diviseur commun de A & de B.

DEMONSTRATION.

1°. Il est évident que D est diviseur commun de A & de B, car par la supposition il l'est de C; donc il l'est de $nC + D = B$ par le 1er axiome; donc D est diviseur de $mB + C = A$ par le 1er axiome. 2°. D est aussi le plus grand diviseur commun de A & de B; car leur plus grand diviseur commun doit être diviseur de mB multiple de B; & étant aussi diviseur de la grandeur entiere $mB + C = A$, il est diviseur de la 2e partie C par le 2e axiome; donc le plus grand diviseur commun de A & de B, est diviseur de nC multiple de C par le 1er axiome; & étant aussi diviseur de la grandeur entiere $nC + D = B$, il est diviseur de D par le 2e axiome: Mais D est diviseur commun de A & de B par la premiere partie de cette démonstration; ainsi le plus grand diviseur commun de A & de B, étant aussi diviseur de D, il faut que D soit lui-même ce plus grand commun diviseur: autrement D seroit un diviseur commun de A & de B, qui surpasseroit le plus grand; ce qui seroit contre la supposition.

Démonstration pour le cas où il faut préparer la grandeur à diviser.

Si en divisant la premiere grandeur A par la seconde B, on trouve une fraction dont le dénominateur soit f, il faut préparer A en la multipliant par f; on suppose qu'en divisant ensuite fA par B, on trouve le quotient m & le reste C, ainsi $fA = mB + C$.

Divisant

Premiere.	*Seconde.*
A.	B.
$fA = mB + C.$	
$gB = nC + D.$	
$C = pD.$	

Divisant ensuite B par le reste C, si l'on trouve une fraction dont le dénominateur est g, il faut préparer B en la multipliant par g, & l'on aura gB; on suppose qu'en divisant gB par le premier reste C, on trouve le quotient n, & le reste D; ainsi $gB = nC + D$.

Enfin on suppose qu'en divisant le premier reste C, par le second D, la division est exacte, & que $C = pD$. Cela supposé,

Il est évident que le plus grand diviseur commun de A & de B, est diviseur de fA par le premier axiome, & par consequent de $mB + C = fA$. Il est de même évident que le plus grand diviseur commun de A & de B, est diviseur de mB & de gB, multiples de B; il est par consequent diviseur de C, seconde partie de $mB + C$, par le 2e axiome, & de $nC + D = gB$; il l'est aussi de nC multiple de C; par consequent étant diviseur de $nC + D$, & de la premiere partie nC, il l'est aussi de l'autre partie D.

Ainsi D étant diviseur exact de C, il est le plus grand commun diviseur de A & de B, ou du moins il le contient, & il en est le multiple.

Mais quand les plus hautes puissances de l'inconnue x ne sont point multipliées par d'autres grandeurs connues dans A & dans B, la puissance la plus élevée de x dans le plus grand diviseur commun, doit être seule; c'est pourquoi en divisant le dernier reste D, diviseur exact du précedent, par le coëficient de la plus haute puissance de son inconnue x, le quotient doit être le plus grand diviseur commun de A & de B.

Seconde maniere de trouver le plus grand diviseur commun.

21. On nommera la premiere équation A, pour rendre la chose plus claire, & la seconde B.

Il faut prendre la valeur de la plus haute puissance de l'inconnue x, qui est le premier terme de B, & substituer cette valeur au lieu de x dans A, (observant d'élever auparavant B au degré de A, en multipliant l'équation B par x, ou xx, &c. si le premier terme de B étoit moindre que le premier terme de A.)

Il faut continuer cette substitution jusqu'à ce qu'on ait réduit A à un moindre degré que B, & on appellera C l'équation où l'on aura réduit A par ces substitutions.

Il faut ensuite prendre la valeur du premier terme de C & la substituer dans B, & continuer la substitution jusqu'à ce qu'on ait réduit B à une équation D d'un moindre degré que C.

L'on prendra ensuite la valeur du premier terme de D, qu'on substituera dans C, & l'on continuera ces operations jusqu'à ce qu'on trouve une équation E, d'où la valeur du premier terme étant substituée dans la précedente D, tous les termes se détruisent par des signes contraires.

L'équation E sera le plus grand diviseur commun de A & de B.

Lorsqu'il arrive que les premiers termes des équations A & B, ou B & C, ou C & D, &c. ont des coëficients, il faut préparer les deux équations en multipliant A par le coëficient du premier terme de B; & B par celui du premier terme de A, & faire la même chose pour B & C, &c. comme on le verra dans les exemples.

Premier exemple qui est le troisiéme qui précede.

POUR trouver le plus grand diviseur commun des deux équations $A.\ x^4 - 4ax^3 + 11aaxx - 20a^3x + 12a^4 = 0.$
$B.\ x^4 - 3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4 = 0,$
je prens la valeur de x^4 dans la seconde, & je trouve $x^4 = 3ax^3 - 12aaxx + 16a^3x - 24a^4$.

Je substitue cette valeur de x^4 dans la premiere équation, & aprés la substitution, je trouve au lieu de la premiere équation, celle-ci $-ax^3 - aaxx - 4a^3x - 12a^4 = 0$, dont tous les termes peuvent se diviser par $-a$; & aprés la division, je trouve $C.\ x^3 + axx + 4aax + 12a^3 = 0$.

Cette équation C étant d'un moindre degré que la seconde B, je la multiplie par x, & j'ai l'équation $x^4 + ax^3 + 4aaxx + 12a^3x = 0$.

Je prens dans cette équation la valeur de x^4, qui est $x^4 = -ax^3 - 4aaxx - 12a^3x$, & je la substitue dans B, & aprés la substitution, je trouve l'équation $-4ax^3 + 8aaxx - 28a^3x + 24a^4 = 0$.

Comme elle n'est pas d'un degré inferieur à celui de l'équation C, il faut prendre dans l'équation C la valeur de x^3 pour la substituer dans l'équation précedente.

Mais le premier terme de la précedente, qui est $-4ax^3$, ayant $-4a$ pour coëficient, il faut préparer l'équation C en la multipliant par $-4a$, & je trouve $-4ax^3 - 4aaxx - 16a^3x - 48a^4 = 0$.

Je prens dans cette équation préparée la valeur de $-4ax^3$, qui est $-4ax^3 = 4aaxx + 16a^3x + 48a^4$.

Je la substitue dans l'équation $-4ax^3 + 8aaxx - 28a^3x + 24a^4 = 0$, & je trouve aprés la substitution l'équation $12aaxx - 12a^3x + 72a^4 = 0$, dont tous les termes peuvent se diviser par $12aa$; & aprés avoir fait la division, je trouve l'équation $D.\ xx - ax + 6aa = 0$.

J'éleve cette équation D au troisiéme degré en la multipliant par x, afin de pouvoir substituer la valeur de x^3 dans l'équation C, & je trouve $x^3 - axx + 6aax = 0$.

Je prens la valeur de x^3 dans cette équation, qui est $x^3 = +axx - 6aax$, & je la substitue dans l'équation C, ce qui me donne $2axx - 2aax + 12a^3 = 0$.

Je substitue encore la valeur de xx prise de l'équation D, dans $2axx - 2aax + 12a^3 = 0$, mais auparavant je multiplie l'équation D par le coëfficient $2a$; & ayant trouvé $2axx = 2aax - 12a^3$, je substitue la valeur de $2axx$ dans $2axx - 2aax + 12a^3 = 0$, & je trouve $-2aax + 12a^3 = 0$.
$+2aax - 12a^3$,
où toutes les quantités se détruisent par des signes contraires; ainsi l'équation $D.\ xx - ax + 6aa = 0$, est le plus grand diviseur commun des deux proposées.

Second exemple qui est le quatriéme qui précede.

ON mettra les opérations de la premiere & de la seconde maniere sur cet exemple, à côté les unes des autres, afin qu'on voye que ces deux methodes de trouver le plus grand diviseur commun, reviennent à une même methode; ainsi la premiere étant démontrée, la seconde l'est aussi.

EXEMPLE II.

Premiere maniere de trouver le plus grand diviseur commun.

Premierere équation.

$$\begin{array}{l} x^3 - 2axx + aax - aab = 0. \\ \quad - bxx + 2abx. \\ \qquad \times\ \overline{-2a - b}. \end{array}$$

Seconde équation.

$$\begin{array}{l} -2axx + 2aax - 3aab = \\ -bxx + 4abx. \end{array}$$

Premiere équation préparée.

$$\begin{array}{l} -2ax^3 + 4aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0. \\ -bx^3 + 4abxx - 5aabx + aabb \\ \qquad + bbxx - 2abbx. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + 2ax^3 - 2aaxx + 3aabx \\ + bx^3 - 4abxx. \end{array}$$

Seconde équation qui sert de diviseur.

$$\begin{array}{l} -2axx + 2aax - 3aab = \\ -bxx + 4abx. \end{array}$$

x quotient.

Reste qu'il faut continuer de diviser par le même diviseur.

$$\begin{array}{l} + 2aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0. \\ + bbxx - 2aabx + aabb \\ \qquad - 2abbx. \\ \quad \times\ \overline{-2a - b}. \end{array}$$

Reste préparé.

$$\begin{array}{l} -4a^3xx + 4a^4x - 4a^4b = 0. \\ -2aabxx + 6a^3bx - 4a^3bb \\ -2abbxx + 6aabbx - aab^3 \\ -b^3xx + 2ab^3x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + 4a^3xx - 4a^4x + 6a^4b \\ + 2aabxx - 8a^3bx + 3aab^3 \\ + 2abbxx - 2aabbx \\ + b^3xx - 4ab^3. \end{array}$$

Seconde équation qui sert de diviseur.

$$\begin{array}{l} -2axx + 2aax - 3aab = \\ -bxx + 4abx. \end{array}$$

$2aa + bb$ quotient.

Reste,

$$\begin{array}{l} -2a^3bx + 2a^4b = 0. \\ +4aabbx - 4a^3bb \\ -2ab^3x + 2aab^3, \end{array}$$

EXEMPLE II.

Seconde maniere de trouver le plus grand diviseur commun.

Premiere équation.

$$\begin{array}{l} x^3 - 2axx + aax - aab = 0. \\ \quad - bxx + 2abx \\ \qquad \times\ \overline{-2a - b}. \end{array}$$

Seconde équation.

$$\begin{array}{l} -2axx + 2aax - 3aab = 0. \\ -bxx + 4abx, \end{array}$$

ou bien

$$\begin{array}{l} -2axx = -2aax + 3aab \\ -bxx \qquad -4abx \\ \times x \qquad\quad \times x. \end{array}$$

Premiere équation préparée.

$$\begin{array}{l} -2ax^3 + 4aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0. \\ -bx^3 + 4abxx - 5aabx + aabb \\ \qquad + bbxx - 2abbx. \end{array}$$

Substitution.

$$\begin{array}{l} -2ax^3 = -2aaxx + 3aabx \\ -bx^3 - 4abxx. \end{array}$$

Seconde équation multipliée par x.

$$\left.\begin{array}{l} -2ax^3 \\ -bx^3 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} -2aaxx + 3aabx \\ -4abxx. \end{array}$$

Somme où il faut encore substituer la valeur de xx prise dans la seconde équation.

$$\begin{array}{l} + 2aaxx - 2a^3x + 2a^3b = 0. \\ + bbxx - 2aabx + aabb \\ \qquad - 2abbx \\ \quad \times\ \overline{-2a - b}. \end{array}$$

Seconde équation.

$$\left.\begin{array}{l} -2axx \\ -bxx \end{array}\right\} = \begin{array}{l} -2aax + 3aab \\ -4abx. \end{array}$$

$$\times\ \overline{2aa + bb}. \qquad \times\ \overline{2aa + bb}.$$

Somme préparée.

$$\begin{array}{l} -4a^3xx + 4a^4x - 4a^4b = 0. \\ -2aabxx + 6a^3bx - 4a^3bb \\ -2abbxx + 6aabbx - aab^3 \\ -b^3xx + 2ab^3x. \end{array}$$

Substitution.

$$\begin{array}{l} -4a^3xx = -4a^4x + 6a^4b \\ -2aabxx - 8a^3bx + 3aab^3 \\ -2abbxx - 2aabbx \\ -b^3xx - 4ab^3x. \end{array}$$

Seconde équation préparée.

$$\left.\begin{array}{l} -4a^3xx \\ -2aabxx \\ -2abbxx \\ -b^3xx \end{array}\right\} = \begin{array}{l} -4a^4x + 6a^4b \\ -8a^3bx + 3aab^3 \\ -2aabbx \\ -4ab^3x. \end{array}$$

Somme.

$$\begin{array}{l} -2a^3bx + 2a^4b \\ -4aabbx - 4a^3bb \\ -2ab^3x + 2aab^3 \end{array}$$

Continuation de la premiere maniere.

Divisant chaque terme par $-2a^3b + 4aabb - 2ab^3$, on trouve pour le reste l'équation $x - a = 0$.

Il faut diviser la seconde équation par ce reste $x - a = 0$.

Seconde équation.

$$\begin{array}{l} -2axx + 2aax - 3aab = 0. \\ -bxx \quad + 4abx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +2axx - 2aax \\ +bxx \quad - abx. \end{array}$$

$$0 \quad + 3abx - 3aab$$

$$-3abx + 3aab.$$

$$0 \qquad 0.$$

Reste qui sert de diviseur.

$$x - a = 0.$$

$$\begin{array}{l} -2ax + 3ab \text{ quotient.} \\ -bx. \end{array}$$

La division est exacte : ainsi $x - a = 0$ est le plus grand diviseur commun.

REMARQUES.

I.

Il est évident qu'on peut négliger le premier terme dans les cas où il faut préparer la grandeur à diviser ; ce qui abrege le calcul.

II.

S'il falloit trouver le plus grand diviseur commun de trois, ou d'un plus grand nombre d'équations, on chercheroit d'abord le plus grand diviseur commun des deux premieres, & ensuite le plus grand diviseur commun de la troisiéme équation, & du plus

Continuation de la seconde maniere.

Divisant chaque terme par $-2a^3b + 4aabb - 2ab^3$, on trouve l'équation $x - a = 0$, ou $x = a$.

Il faut substituer dans la seconde équation les valeurs de x, xx prises dans $x - a = 0$.

Seconde équation.

$$\begin{array}{l} -2axx \quad + 2aax - 3aab = 0. \\ -bxx \quad + 4abx. \end{array}$$

Substitution.

$$\begin{array}{l} -2axx = -2aax \\ -bxx = -abx. \end{array}$$

Somme.

$$+3abx \quad - 3aab = 0.$$

Substitution. $+3abx = +3aab.$

Somme $\quad 0.$

$$\begin{array}{c} x - a = 0. \\ x = a. \\ \times x \quad \times x. \\ \hline xx = ax \\ \times -2a \quad \times -2a. \\ \hline -2axx = -2aax. \\ \hline xx = ax. \\ \times -b \quad \times -b. \\ \hline -bxx = -abx. \\ \hline x = a. \\ \times +3ab \quad \times +3ab. \\ \hline +3abx = +3aab. \end{array}$$

La substitution des valeurs de x, xx prises de $x - a = 0$, dans la seconde équation, faisant détruire tous les termes par des signes contraires, $x - a = 0$ est le plus grand diviseur commun.

plus grand diviseur commun des deux premieres, & ainsi de suite.

III.

Lorsqu'il y a plus de raports connus dans un Problême composé, qu'il n'y a d'inconnues, on peut, dans ce cas, trouver plusieurs équations qui ayent la même inconnue, dont chacune exprime le Problême ; il faut ensuite trouver le plus grand diviseur commun de ces équations, & il sera l'équation la plus simple du Problême, & la résolution en sera plus facile.

ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui se réduisent à des équations composées.

LIVRE III.

Où l'on explique la nature des équations composées, le nombre & les qualités de leurs racines, & leurs transformations.

AVERTISSEMENT.

On suppose dans ce Livre, 1°, que le second membre d'une équation composée est zero. 2°. Que la plus haute puissance de l'inconnue, c'est à dire le premier terme, a toujours le signe +. 3°. Qu'elle n'a *ni fractions*, *ni incommensurables*.

On a enseigné dans les Livres précedents, les manieres de lui donner ces préparations.

On suppose aussi que dans son premier terme, la plus haute puissance de l'inconnue n'a pas d'autre coefficient que l'unité, on enseignera la maniere de lui donner cette préparation dans les transformations.

Cela supposé, pour concevoir clairement la nature des équations composées, il faut voir la maniere dont elles peuvent être formées.

SECTION I.

Où l'on explique la maniere dont se forment les équations composées.

DÉFINITION I.

22. LA valeur de l'inconnue dans une équation simple $x-a=0$, s'appelle *la racine* de cette équation.

Ainsi

Ainsi a qui est la valeur de l'inconnue x, dans $x-a=0$, puisque $x=a$, s'appelle *la racine* de l'équation $x-a=0$.

Lorsque cette valeur est complexe, comme dans $x-a+b-c=0$, la grandeur complexe $+a-b+c$, (qui est la valeur de x, puisque $x=a-b+c$,) n'est pas moins la seule racine de l'équation $x-a+b-c=0$, & on peut l'abreger en mettant une seule lettre $d=a-b+c$, dans l'équation; ce qui donneroit $x-d=0$, ou bien $x=d$.

Lorsque mettant l'inconnue seule dans le premier membre, sa valeur qui est seule dans le second, est positive, on dit que la racine est *positive*; ainsi dans $x=a$, la racine a est positive; mais lorsque la valeur de l'inconnue est négative, comme dans $x=-b$, on dit que la racine est *négative*.

D'où il suit que lorsque zero est le second membre de l'équation simple, la *racine positive* a le signe négatif $-$, comme dans $x-a=0$; & la *racine négative* a le signe $+$, comme dans $x+b=0$.

La racine d'une équation simple ou lineaire, peut être ou commensurable, comme dans $x-a=0$, ou incommensurable, comme dans $x-\sqrt{ab}=0$, ou mixte, comme dans $x-a+\sqrt{ab}=0$. Ces trois sortes de racines s'appellent *réelles*.

Ou bien elle peut être une grandeur impossible, & qui marque que le Problême renferme une contradiction, comme dans $x-\sqrt{-aa}=0$.

Car $\sqrt{-aa}$ est une grandeur impossible, n'étant pas possible qu'il y ait de quarré qui soit précedé du signe negatif $-$, dont la racine soit possible; parceque si la racine a d'un quarré aa, a le signe $+$, ou le signe $-$, le quarré aura toujours necessairement le signe $+$, le produit de $+$ par $+$, & de $-$ par $-$, ayant toujours $+$; par consequent la racine quarrée d'un quarré négatif, comme $\sqrt{-aa}$, est une grandeur impossible.

Ces sortes de grandeurs impossibles s'appellent *imaginaires*; & lorsque la valeur de l'inconnue x, dans une équation simple $x-\sqrt{-aa}=0$, est imaginaire, la racine de cette équation, qui est $+\sqrt{-aa}$, s'appelle *imaginaire*.

Enfin la racine d'une équation simple peut être composée d'une grandeur réelle, & d'une imaginaire, comme dans

$x - a + \sqrt{-aa} = 0$, où la valeur de x est $a - \sqrt{-aa}$, puisque $x = a - \sqrt{-aa}$. Cette racine $a - \sqrt{-aa}$, s'appelle *mixte imaginaire*.

Remarque sur les grandeurs imaginaires.

23. La racine, dont l'exposant est un nombre pair, d'une grandeur négative, est toujours une grandeur imaginaire; ainsi $\sqrt{-aa}$, $\sqrt[4]{-a^4}$, $\sqrt[6]{-a^6}$, &c. sont des grandeurs imaginaires: car une grandeur a, soit qu'elle ait le signe $-$, ou le signe $+$, étant multipliée par elle-même autant de fois qu'on voudra, pourvu que ce nombre de fois soit pair, le produit aura toujours le signe $+$; par consequent une puissance négative dont l'exposant est pair, comme $-aa$, $-a^4$, $-a^6$, &c. est une grandeur dont la racine est impossible ou imaginaire, puisque si cette racine étoit possible, sa puissance auroit toujours le signe $+$, & elle ne sçauroit avoir le signe $-$.

Mais si l'exposant du signe radical $\sqrt{}$ d'une grandeur négative est impair, la racine est une grandeur réelle; ainsi $\sqrt[3]{-a^3}$, $\sqrt[5]{-a^5}$, $\sqrt[7]{-a^7}$, &c. sont des grandeurs réelles, parceque la racine négative $-a$, étant multipliée par elle-même un nombre de fois qui soit impair, la puissance qui en sera le produit, sera négative; car $-a \times -a = +aa$, & $+aa \times -a = -a^3$, & ainsi des autres.

THEORÊME I.

24. Toute équation composée peut être conçue comme étant formée par la multiplication d'autant d'équations simples, que l'équation composée a de degrés.

Ainsi toute équation de deux degrés, peut être conçue comme formée par la multiplication de deux équations simples.

Toute équation du troisiéme degré, peut être conçue formée par la multiplication de trois équations simples; & ainsi des autres.

Démonstration pour les équations du second degré.

Toutes les équations du second degré peuvent être exprimées par ces six formules.

Premiere, $xx + nx + p = 0$.
Seconde, $xx + nx - p = 0$.
Troisiéme, $xx - nx + p = 0$.
Quatriéme, $xx - nx - p = 0$.
Cinquiéme, $xx - p = 0$.
Sixiéme, $xx + p = 0$.

Or toutes ces équations

peuvent être conçues formées par la multiplication de deux équations simples.

Car, 1°, si l'on multiplie les deux équations simples $x + a = 0$, & $x + b = 0$, leur produit $xx \begin{matrix} + ax \\ + bx \end{matrix} + ab = 0$, donnera la 1re formule, en supposant $a + b = n$, & $ab = p$.

2°. Si l'on multiplie les deux équations simples $x + a = 0$, & $x - b = 0$, leur produit $xx \begin{matrix} + ax \\ - bx \end{matrix} - ab = 0$, donnera la seconde formule, en supposant, 1°, a plus grand que b, & 2°, $a - b = n$, & $-ab = -p$.

3°. Si on multiplie $x - a = 0$, par $x - b = 0$, leur produit $xx \begin{matrix} - ax \\ - bx \end{matrix} + ab = 0$, donnera la troisiéme formule, en supposant $-a - b = -n$, & $+ab = +p$.

4°. Si on multiplie $x - a = 0$, par $x + b = 0$, leur produit $xx \begin{matrix} - ax \\ + bx \end{matrix} - ab = 0$, donnera la quatriéme formule, en supposant, 1°, a plus grand que b, & 2°, $-a + b = -n$, & $-ab = -p$.

5°. Si on multiplie $x + a = 0$, par $x - a = 0$, leur produit $xx - aa = 0$, donnera la cinquiéme formule, en supposant $-aa = -p$.

6°. Enfin si on multiplie $x + \sqrt{-aa} = 0$, par $x - \sqrt{-aa} = 0$, leur produit $xx + aa = 0$, donnera la sixiéme formule, en supposant $+aa = +p$; par consequent toutes les équations du second degré peuvent être conçues formées par le produit de deux équations simples.

Démonstration pour les équations du troisiéme degré.

Toutes les équations du 3e degré peuvent être raportées à ces quatre formules pour abreger.

Premiere, $x^3 \pm nxx \pm px \pm q = 0$.
Seconde, $x^3 \; * \pm px \pm q = 0$.
Troisiéme, $x^3 \pm nxx \; * \pm q = 0$.
Quatriéme, $x^3 \; * \; * \pm q = 0$.

Or toutes les équations representées par ces quatre formules, peuvent être conçues formées par la multiplication de trois équations simples.

Car, 1°, si l'on multiplie les trois équations simples $x \pm a = 0$, $x \pm b = 0$, $x \pm c = 0$, leur produit $x^3 \begin{matrix} \pm axx \\ \pm bxx \\ \pm cxx \end{matrix} \begin{matrix} \pm abx \\ \pm acx \\ \pm bcx \end{matrix} \pm abc = 0$, donnera la premiere formule, en supposant $\pm a \pm b \pm c = \pm n$, $\pm ab \pm ac \pm bc = \pm p$, $\pm abc = \pm q$.

2°. Si l'on suppose que la racine de l'une des trois équations simples, par exemple c dans la troisiéme $x \pm c = 0$, est égale à la somme des deux autres $a + b$, & qu'elle a un signe opposé au leur, c'est à dire que c est négative, si a & b sont positives, & que c est positive, si a & b sont négatives, on aura la seconde formule, en supposant les grandeurs connues du troisiéme terme du produit des trois équations simples, égales à $\pm p$, & la grandeur connue du quatriéme terme du produit des trois équations simples, égale à $\pm q$; & à cause de $-c = a + b$, ou de $+c = -a - b$, le second terme sera détruit par des signes contraires.

3°. Si l'on suppose la même racine c avec un signe contraire à ceux des deux autres a & b, mais qu'elle leur soit inégale, on aura la troisiéme formule, en supposant les produits ac, bc, avec des signes contraires à celui de ab, égaux ensemble à ab, & en supposant toujours les coëficients du deuxiéme & quatriéme terme du produit des trois équations simples, égaux à ceux du deuxiéme & quatriéme terme de la troisiéme formule.

4°. Si on multiplie les trois équations simples $x + \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x + \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x - a = 0$, leur produit $x^3 - a^3 = 0$, donnera la quatriéme formule $x^3 - q = 0$, en supposant $a^3 = q$.

Et si on multiplie les trois équations simples $x - \frac{1}{2}a + \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x - \frac{1}{2}a - \sqrt{-\frac{3}{4}aa} = 0$, $x + a = 0$, leur produit $x^3 + a^3 = 0$, donnera la quatriéme formule $x^3 + q = 0$, en supposant $a^3 = q$.

Par conséquent toutes les équations du troisiéme degré peuvent être conçues comme formées par trois équations simples.

REMARQUE.

25. On peut aussi concevoir toutes les équations du troisiéme degré comme formées par la multiplication d'une équation du second degré, & d'une équation simple.

Car, 1°, si on multiplie $xx \pm lx \pm m = 0$, par $x \pm c = 0$, le produit $x^3 \pm lxx \pm mx \pm cm = 0$, donnera la premiere
$\qquad \pm cxx \pm clx$,
formule, en supposant $\pm l \pm c = \pm n$, $\pm m \pm cl = \pm p$, $\pm cm = \pm q$.

2°. Si on multiplie $xx \pm lx \pm m = 0$, par $x \mp l = 0$, le produit $x^3 \pm mx \mp lm = 0$, donnera la seconde formule,
$\qquad - llx$,
en supposant $\pm m - ll = \pm p$, & $\mp lm = \mp q$.

3°. Si on multiplie $xx \pm lx \mp lm = 0$, par $x + m = 0$, le produit $x^3 \pm lxx \mp lmm = 0$, donnera la troisiéme formule,
$\qquad + mxx$,
en supposant $\pm l + m = \pm n$, & $\mp lmm = \mp q$.

4°. Si on multiplie $xx \pm lx + ll = 0$, par $x \mp l = 0$, le produit $x^3 \mp l^3 = 0$, donnera la quatriéme formule, en supposant $\mp l^3 = \mp q$.

Démonstration pour les équations des autres degrés.

On voit clairement que les équations des autres degrés peuvent être conçues formées par les équations du premier, du second & du troisiéme degré; par exemple, celles du quatriéme par une équation du premier, & une du troisiéme, ou par deux équations, chacune du second degré; celles du cinquiéme par une équation du second degré, & une du troisiéme, & ainsi des autres: Par conséquent toute équation composée peut être conçue formée par autant d'équations simples qu'elle a de degrés.

REMARQUE.

Lorsque le Problême renferme quelque contradiction, l'équation composée qui l'exprime, peut toujours être conçue comme formée par autant d'équations simples qu'elle a de degrés; mais les racines de ces équations simples ne seront pas toutes réelles, & il y en aura d'imaginaires. On en a déja vû des exemples dans la quatriéme formule du troisiéme degré, & dans la sixiéme du second degré.

COROLLAIRE.

26. Une équation composée, dont on n'a point abregé les grandeurs connues, en supposant plusieurs de ces grandeurs égales à une seule lettre, peut toujours être divisée exactement par chacune des équations de moindre degré qu'elle n'est, par la multiplication desquelles elle a été formée: & lorsqu'une équation d'un moindre degré, est un diviseur exact d'une équation composée d'un degré plus élevé, cette équa-

tion d'un moindre degré est une de celles dont la compo[sée] a été formée par la multiplication.

DÉMONSTRATION.

Il est évident que lorsqu'un produit a été formé par [la] multiplication de plusieurs grandeurs, chacune de ces gra[n]deurs en est un diviseur exact : & lorsqu'une grandeur est [un] diviseur exact d'un produit, cette grandeur est une de cel[les] dont la multiplication a formé ce produit ; ainsi le Coro[l]laire est évident.

THEORÊME II.

27. Quand la plus haute puissance de l'inconnue est multi[-]pliée dans le premier terme d'une équation composée, pa[r] une grandeur connue differente de l'unité, on peut bie[n] concevoir cette équation comme formée par le produ[it] d'autant d'équations simples, qu'elle a de degrés ; mais, 1°, ou bien l'inconnue du premier terme est multipliée par une grandeur connue dans chacune des équations simples ; 2°, ou bien elle l'est dans quelques-unes, & non dans toutes ; 3°, ou bien elle l'est dans une seule.

DÉMONSTRATION.

Car en supposant, 1°, ces équations simples $ax - d = 0$, $bx - e = 0$, $cx - f = 0$, & les multipliant les unes par les autres, l'on aura pour le premier cas l'équation composée $abcx^3 -$ &c. 2°. En supposant $x - d = 0$, $bx - e = 0$, $cx - d = 0$, & les multipliant les unes par les autres, on aura pour le second cas l'équation composée $bcx^3 -$ &c. 3°. En supposant $x - d = 0$, $x - e = 0$, $cx - d = 0$, & les multipliant les unes par les autres, on aura l'équation composée $cx^3 -$ &c.

On peut aussi concevoir une équation composée, dont le premier terme a un coëficient different de l'unité, comme le produit d'autant d'équations simples qu'elle a de degrés, dont toutes les racines sont des fractions, ou seulement quelques-unes, ou du moins une seule.

Car en supposant, 1°, $x - \frac{d}{a} = 0$, $x - \frac{e}{b} = 0$, $x - \frac{f}{c} = 0$; ou bien, 2°, $x - d = 0$, $x - \frac{e}{b} = 0$, $x - \frac{f}{c} = 0$; ou bien, 3°, $x - d = 0$, $x - e = 0$, $x - \frac{f}{c} = 0$; aprés avoir fait la multiplication dans chacun de ces trois cas, & ensuite ôté les frac-

tions, on aura une équation composée, dont le premier terme aura un coëficient different de l'unité.

COROLLAIRE.

28. Si le premier terme d'une équation composée a un coëficient different de l'unité, les équations d'un moindre degré qu'elle n'est, par lesquelles elle peut être exactement divisée, auront toutes, ou plusieurs, ou du moins quelqu'une, dans leur premier terme, un coëficient different de l'unité ; ou bien elles auront toutes, ou plusieurs, ou du moins quelqu'une, des fractions pour leurs racines.

SECTION II.

Du nombre & de la qualité des racines des équations composées.

DÉFINITION II.

29. Les racines des équations simples dont une équation composée est le produit, s'appellent aussi *les racines* de l'équation composée.

Corollaires qu'il faut se rendre familiers.

D'où il suit, 1°, qu'une équation composée a autant de racines, qu'elle a de degrés.

2°. Que les racines d'une équation composée peuvent être ou toutes réelles, & il y en peut avoir de trois sortes, ou elles seront commensurables, ou incommensurables, ou mixtes ; ou bien elles seront toutes imaginaires, ou mixtes imaginaires ; ou enfin elles seront en partie réelles, & en partie imaginaires.

3°. Que chaque racine étant exprimée par une seule lettre dans chacune des équations simples, elles peuvent être ou positives, ou négatives, ou en partie positives, & en partie négatives.

4°. Que l'on peut, selon les combinaisons differentes des signes + & — des racines positives & négatives, raporter toutes les équations de chaque degré à un nombre déterminé de formules.

Dans le second degré, il n'y en peut avoir que de trois sortes ; car ou, 1°, les deux racines seront positives ; ou, 2°, négatives ; ou, 3°, l'une positive, & l'autre négative.

Dans le troisiéme degré, il n'y en peut avoir que de quatre sortes; car ou bien, 1°, les trois racines seront positives; ou, 2°, négatives; ou, 3°, deux positives, & une négative; ou, 4°, deux négatives, & une positive.

En general, dans chaque degré il peut y avoir autant de formules, & une de plus, qu'il y a de racines dans les équations de ce degré; sçavoir cinq formules dans le quatriéme degré, six formules dans le cinquiéme, sept formules dans le sixiéme, &c.

En voici la démonstration pour le sixiéme degré, qui servira pour tous les autres.

RACINES.	1re,	2e,	3e,	4e,	5e,	6e.
	+	+	+	+	+	+
	+	+	+	+	+	—
	+	+	+	+	—	—
	+	+	+	—	—	—
	+	+	—	—	—	—
	+	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—

Il faut voir dans la Table toutes les formules differentes de chaque degré, jusqu'au quatriéme degré. Il faut les former soi-même, & se les rendre familieres, pour bien concevoir ce qui suit, & on peut continuer la Table tant qu'on voudra.

Table des formules des équations composées.

Pour le second degré.

Premiere,

$$\begin{array}{l} x-a=0,\ \times x-b=0, \\ \hline xx-ax+ab=0, \\ \quad -bx. \end{array}$$

Seconde,

$$\begin{array}{l} x+a=0.\ \times x+b=0, \\ \hline xx+ax+ab=0, \\ \quad +bx. \end{array}$$

Troisiéme,

$$\begin{array}{l} x-a=0,\ \times x+b=0, \\ \hline xx-ax-ab=0, \\ \quad +bx. \end{array}$$

Pour le troisiéme degré.

Premiere,

$$\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{x-a=0,\ \times x-b=0,\ \times x-c=0,} \\ \hline x^3-axx & +abx & -abc=0, \\ \quad -bxx & +acx, & \\ \quad -cxx & +bcx. & \end{array}$$

Seconde,

$$\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{x+a=0,\ \times x+b=0;\ \times x+c=0,} \\ \hline x^3+axx & +abx & +abc=0, \\ \quad +bxx & +acx & \\ \quad +cxx & +bcx. & \end{array}$$

Troisiéme

$$\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{x-a=0,\ \times x-b=0.\ \times x+c=0,} \\ \hline x^3-axx & +abx & +abc=0, \\ \quad -bxx & -acx & \\ \quad +cxx & -bcx, & \end{array}$$

Quatriéme,

$$\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{x-a=0,\ \times x+b=0,\ \times x+c=0,} \\ \hline x^3-axx & -abx & -abc=0, \\ \quad +bxx & -acx & \\ \quad +cxx & +bcx. & \end{array}$$

Pour

Pour le quatriéme degré.

Premiere,

$$\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{x-a=0,\ \times x-b=0,\ \times x-c=0,\ \times x-d=0,} \\ \hline x^4-ax^3 & +abxx & -abcx & +abcd=0. \\ \quad -bx^3 & +acxx & -abdx & \\ \quad -cx^3 & +bcxx & -acdx & \\ \quad -dx^3 & +adxx & -bcdx & \\ & +bdxx & & \\ & +cdxx. & & \end{array}$$

Seconde,

$$\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{x+a=0,\ \times x+b=0,\ \times x+c=0,\ \times x+d=0,} \\ \hline x^4 & +ax^3 & +abxx & +abcx & +abcd=0. \\ & +b & +ac & +abd & \\ & +c & +bc & +acd & \\ & +d & +ad & +bcd & \\ & & +bd & & \\ & & +cd. & & \end{array}$$

Troisiéme,

$$\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{x-a=0,\ \times x-b=0,\ \times x-c=0;\ \times x+d=0,} \\ \hline x^4 & -ax^3 & +abxx & -abcx & -abcd=0, \\ & -b & +ac & +abd & \\ & -c & +bc & +acd & \\ & +d & -ad & +bcd & \\ & & -bd & & \\ & & -cd. & & \end{array}$$

Quatriéme,

$$\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{x-a=0,\ \times x+b=0,\ \times x+c=0,\ \times x+d=0,} \\ \hline x^4 & -ax^3 & -abxx & -abcx & -abcd=0, \\ & +b & -ac & -abd & \\ & +c & +bc & -acd & \\ & +d & -ad & +bcd, & \\ & & +bd & & \\ & & +cd. & & \end{array}$$

Cinquiéme,

$$\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{x-a=0,\ \times x-b=0,\ \times x+c=0,\ \times x+d=0,} \\ \hline x^4 & -ax^3 & +abxx & +abcx & +abcd=0, \\ & -b & -ac & +abd & \\ & +c & -bc & -acd & \\ & +d & -ad & -bcd & \\ & & -bd & & \\ & & +cd. & & \end{array}$$

5°. Le coëficient du second terme d'une équation composée, contient la somme de toutes les racines, sans être multipliées les unes par les autres.

Le coëficient du troisiéme terme contient les produits de toutes les racines, multipliées deux à deux autant de fois qu'elles le peuvent être, pour faire des produits differents.

Le coëficient du quatriéme terme contient les produits de toutes les racines, multipliées trois à trois autant de fois qu'elles le peuvent être, pour faire des produits differents.

Le coëficient du cinquiéme terme contient tous les produits des racines, multipliées quatre à quatre; & ainsi de suite jusqu'au dernier terme tout connu, qui contient toujours le seul produit de toutes les racines.

Cela est évident par la formation des formules de la Table.

6°. Dans les termes pairs, sçavoir le second, le quatriéme, le sixiéme, &c. les racines sont une à une dans le second, & multipliées en nombre impair dans les autres, sçavoir,

I

trois à trois dans le quatriéme terme, cinq à cinq dans le sixiéme, &c.

Dans les termes impairs, c'est à dire dans le troisiéme, le cinquiéme, &c. les racines sont multipliées les unes par les autres en nombre pair; sçavoir, deux à deux dans le troisiéme, quatre à quatre dans le cinquiéme, &c.

7°. Si toutes les racines sont négatives, tous les termes de l'équation composée sont positifs, c'est à dire, ils ont tous le signe +; car tous les termes des équations simples ayant le signe +, tous les produits qui en sont formés ne peuvent avoir que le signe +.

8°. Si toutes les racines sont positives, tous les termes ont alternativement + & —, car le premier terme a toujours + par la supposition; le second terme ne contient que la somme des racines qui ont toutes le signe —, dans les équations simples; ainsi le second terme a le signe —: pour les autres termes, tous les pairs ayant pour leur coëficient les produits des racines en nombre impair, ils ont necessairement le signe —; & tous les impairs ayant pour leur coëficient les produits des racines en nombre pair, ils ont necessairement le signe +; par consequent les signes + & — se suivent alternativement, lorsque toutes les racines sont positives; ainsi, quand dans une équation composée les signes sont alternativement + & —, toutes les racines sont positives.

9°. D'où il suit que si tous les termes n'ont pas le signe +, & si les + & — ne se suivent pas alternativement, il y a necessairement des racines positives & des racines négatives dans l'équation.

Ces Corollaires étant démontrés, il y a contradiction dans le Problême, c'est à dire il y a des racines imaginaires dans l'équation du Problême, quand ils ne se trouvent pas veritables; ce qu'on doit aussi entendre des Corollaires suivans.

10°. Lorsqu'il manque quelque terme dans l'équation, il est necessaire qu'il y ait des racines positives & négatives, puisqu'un terme ne peut être détruit que par les signes contraires + & — des produits dont ce terme est composé: & ces produits ne peuvent avoir des signes contraires, qu'il n'y ait des racines positives & négatives. Ainsi l'on a ces deux marques pour connoître qu'il y a dans une équation des racines positives & des négatives; 1°. Lorsque la suite alternative des + & des — est interrompue dans les termes d'une équation où tous les termes ne sont pas positifs; 2°. Lorsqu'il manque quelque terme dans une équation.

11°. Le second terme d'une équation contenant la somme des racines; si la somme des positives est égale à celle des négatives, il sera détruit par des signes contraires.

Si la somme des positives surpasse celle des négatives, le second terme aura —; & il aura + si la somme des négatives surpasse celle des positives.

Ainsi quand le second terme manque dans une équation, on est assuré que les racines positives sont égales à la somme des négatives.

12°. Si le second terme manque dans une équation du troisiéme & du quatriéme degré, le troisiéme terme a toujours le signe —.

Démonstration pour le troisiéme degré.

Le second terme étant détruit, il faut qu'il y ait dans l'équation deux racines positives, & une négative, & que la négative soit égale aux deux positives; ou qu'il y ait deux racines négatives, & une positive qui soit égale aux deux négatives: ainsi les équations du troisiéme degré où manque le second terme, sont exprimées par ces deux formules, où $c = a + b$.

$$\begin{array}{l} x - a = 0. \times x - b = 0. \times x + c = 0. \\ \hline x^3 - axx + abx + abc = 0. \\ \quad - bxx - acx. \\ \quad + cxx - bcx. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + a = 0. \times x + b = 0. \times x - c = 0. \\ \hline x^3 + axx + abx - abc = 0. \\ \quad + bxx - acx \\ \quad - cxx - bcx. \end{array}$$

Donc dans le troisiéme terme, le produit $-ac$ surpasse le produit $+ab$; par consequent le troisiéme terme a le signe —.

Démonstration pour le quatriéme degré.

Les équations du quatriéme degré où le second terme est détruit, ayant des racines positives & négatives; & les positives étant égales aux négatives, elles sont toutes exprimées par ces trois formules.

$$\begin{array}{llll} & x - a = 0. & \times x - b = 0. & \\ & \times x - c = 0. & \times x + d = 0. & \\ \hline x^4 - ax^3 & + abxx & - abcx & - abcd = 0. \\ \quad - b & + ac & + abd & \\ \quad - c & + bc & + acd & \\ \quad + d & - ad & + bcd & \\ & - bd & & \\ & - cd. & & \end{array}$$

$x+a=0. \quad \times x+b=0.$ $\times x+c=0. \quad \times x-d=0.$	$x+a=0. \quad \times x+b=0.$ $\times x-c=0. \quad \times x-d=0.$
$\begin{array}{llll} x^4+ax^3 & +abxx & +abcx & -abcd=0. \\ \quad +b & +ac & -abd & \\ \quad +c & +bc & -acd & \\ \quad -d & -ad & -bcd & \\ & -bd & & \\ & -cd. & & \end{array}$	$\begin{array}{llll} x^4+ax^3 & +abxx & -abcx & +abcd=0. \\ \quad +b & -ac & -abd & \\ \quad -c & -ad & +acd & \\ \quad -d & -bc & +bcd & \\ & -bd & & \\ & +cd. & & \end{array}$

Dans les deux premieres $d = a+b+c$; par consequent dans le troisiéme terme $-ad$ surpasse $+ab$; $-cd$ surpasse $+ac$, & $-bd$ surpasse $+bc$; ainsi les produits négatifs surpassent les positifs dans le troisiéme terme.

Dans la derniere $c+d=a+b$, soit $m=c+d=a+b$; donc $mm = ac+ad+bc+bd$; mm est aussi $= aa+2ab+bb$; mm est encore $= cc+2cd+dd$; donc $\frac{mm}{2} - \frac{aa+bb}{2} = ab$, & $\frac{mm}{2} - \frac{cc+dd}{2} = cd$; donc $mm - \frac{aa+bb+cc+dd}{2} = ab+cd$; donc mm surpasse $ab+cd$; donc $-ac-ad-bc-bd = -mm$ surpasse $+ab+cd$; donc dans la derniere formule, les produits négatifs du troisiéme terme surpassent les positifs.

13°. D'où il suit que quand le second terme manque dans une équation du troisiéme & du quatriéme degré, si le troisieme terme a le signe $+$, il y a necessairement des racines imaginaires dans l'équation.

14°. Les racines imaginaires sont toujours en nombre pair dans une équation composée, où l'on suppose qu'il n'y a pas d'incommensurables; c'est à dire il y en a deux, ou quatre, ou six, &c.

DEMONSTRATION.

S'il y a des imaginaires dans une équation, il faut que le produit des unes par les autres les rende réelles, pour faire disparoître leur signe radical $\sqrt{-}$, dans le dernier terme: mais le produit des imaginaires ne sçauroit faire disparoître leur signe $\sqrt{-}$, qu'elles ne soient multipliées en nombre pair; car, par exemple, $+\sqrt{-a}$ multipliée par $-\sqrt{-a}$, donne le produit réel $+a$: mais s'il y en avoit une troisiéme, $-\sqrt{-a}$, le produit seroit $-a\sqrt{-a}$. Les racines imaginaires ne sçauroient donc être qu'en nombre pair dans une équation.

Ainsi s'il y a des racines imaginaires dans une équation du second degré, elles le sont toutes deux: S'il y en a dans le troisiéme degré, il y a toujours une racine réelle, &c.

15°. Les produits réels tous connus, qui naissent de la multiplication des seules imaginaires, ont toujours le signe $+$.

DEMONSTRATION.

Les imaginaires étant toujours en nombre pair, on peut considerer à part les équations du second degré formées par les imaginaires prises deux à deux.

Mais afin que deux racines imaginaires disparoissent dans le second terme, comme on le suppose, il faut que l'une ait $+$, & l'autre $-$, & que les parties réelles $-a$, $-a$, ayent le même signe $+$, ou le même signe $-$; & le produit réel de $+\sqrt{-aa}$ par $-\sqrt{-aa}$, est $+aa$; par consequent les produits réels tous connus, qui naissent de la multiplication des imaginaires, ont toujours $+$.

$$\begin{array}{l} x-a+\sqrt{-aa}=0. \\ x-a-\sqrt{-aa}=0. \\ \hline xx-2ax+2aa=0. \end{array}$$

D'où il suit, le signe $+$ n'apportant aucun changement dans les multiplications, que s'il y a des racines imaginaires avec des racines réelles dans une équation composée, les réelles y conserveront toujours leur signe dans le dernier terme; c'est à dire, les imaginaires ne feront pas de changement dans le signe du produit des réelles du dernier terme.

16°. Le dernier terme d'une équation, étant le produit de toutes les racines, lorsque le nombre des racines positives est pair, il a toujours le signe $+$; lorsqu'il est impair, il a le signe $-$; & lorsqu'il a le signe $-$, il y a necessairement quelque racine réelle dans l'équation; car le produit des imaginaires donne toujours le signe $+$.

THEORÊME III.

30. Si l'on change tous les signes des termes pairs d'une équation composée, c'est à dire du 2e, 4e, 6e, &c. sans toucher aux signes des termes impairs, c'est à dire du 3e, 5e, &c. toutes les racines positives de l'équation composée seront changées en négatives, & toutes les négatives en positives.

DEMONSTRATION.

1°. Le second terme contient la somme des racines; les positives y ont le signe —, & les négatives le signe +; ainsi en changeant dans le second terme les + en —, & les — en +, il est évident que les positives seront changées en négatives, & les négatives en positives.

2°. Chacun des termes pairs contient les produits des racines multipliées les unes par les autres en nombre impair; ceux qui ont + sont necessairement formés ou par un nombre impair de racines qui ont chacune +, ou bien par un nombre pair de racines qui ont —, & un nombre impair de racines qui ont + : ceux qui ont — sont necessairement formés par un nombre impair de racines qui ont chacune —, ou par un nombre pair de racines qui ont +, & un impair de racines qui ont —; donc si l'on change les signes des multiplicateurs, c'est à dire les racines positives en négatives, & les négatives en positives, on changera necessairement les signes des termes pairs; ainsi en changeant les signes des termes pairs, on change les signes des racines, c'est à dire les positives en négatives, & les négatives en positives.

3°. Au contraire, les termes impairs contiennent les produits des racines multipliées en nombre pair.

Ainsi ceux qui ont +, sont necessairement formés ou seulement d'un nombre pair de positives, ou seulement d'un nombre pair de négatives, ou bien d'un nombre pair de positives, & d'un nombre pair de négatives.

Ceux qui ont — sont necessairement formés d'un nombre impair de positives, & d'un nombre impair de négatives: par consequent si on change les signes des multiplicateurs, c'est à dire des racines positives & négatives, on aura des produits qui auront dans les termes impairs les mêmes signes qu'ils avoient; ainsi les termes impairs ne changent point de signes en changeant les racines positives en négatives, & les négatives en positives: Il est donc évident qu'en changeant les signes des termes pairs, sans toucher aux signes des termes impairs, on change toutes les racines positives en négatives, & les négatives en positives.

COROLLAIRE.

Dans cette formule du troisiéme degré $x^3 - px + q = 0$, où il y a des racines positives & négatives, puisque le second terme est évanoui, & où il faut qu'il y ait deux racines positives, & une négative, puisque le dernier terme q a le signe +; si l'on change le seul signe du dernier terme, la formule $x^3 - px - q = 0$, contiendra les mêmes racines que la precedente, mais les deux positives seront changées en négatives, & la négative en positive: car les signes des termes pairs ont été changés.

THEORÊME IV.

31. Si l'on substitue dans une équation composée l'une de ses racines, laquelle on voudra, avec ses puissances, à la place de l'inconnue & de ses puissances, en donnant le signe + à la racine positive qu'on substitue, & le signe — à la racine négative qu'on substitue, tous les produits de tous les termes de l'équation se détruiront aprés la substitution; c'est à dire qu'il s'en trouvera precisément autant avec le signe +, qu'il y en aura avec le signe —, qui seront égaux les uns aux autres.

Pour démontrer ce Theorême, on fera voir, 1°, qu'aprés la substitution d'une racine dans l'équation, le premier terme, ou le premier produit, a un produit dans le second terme, qui est precisément le même; que les autres produits du second terme en ont tout autant d'égaux dans le troisiéme terme; que les autres produits du troisiéme terme en ont un égal nombre d'égaux dans le quatriéme; & ainsi de suite jusqu'au dernier terme, qui en a un dans le penultiéme qui lui est égal. 2°. Que ces produits égaux dans deux termes qui se suivent, ont des signes contraires; d'où il suivra qu'ils se détruisent.

On prendra une formule du 4ᵉ degré, afin que la démonstration soit plus facile, étant appliquée à un exemple.

$$\begin{array}{llll}
& x - a = 0. & x - b = 0. & \\
& x - c = 0. & x - d = 0. & \\
\hline
x^4 - ax^3 & + abxx & - abcx & + abcd = 0. \\
\quad - b & + ac & - abd & \\
\quad - c & + ad & - acd & \\
\quad - d & + bc & - bcd & \\
 & + bd & & \\
 & + cd. & &
\end{array}$$

En substituant $+a$ à la place de $+x$, on trouve

$$
\begin{array}{l}
a^4 - a^4 \\
\quad - ba^3 + ba^3 \\
\quad - ca^3 + ca^3 \\
\quad - da^3 + da^3 \\
\qquad\quad + bcaa - bcaa \\
\qquad\quad + bdaa - bdaa \\
\qquad\quad + cdaa - cdaa \\
\qquad\qquad\quad - bcda + bcda = 0.
\end{array}
$$

DEMONSTRATION.

1°. En substituant $+a$ dans le premier terme $+x^4$, on trouve $+a^4$. Mais dans le second terme, chaque racine est multipliée par x^3; ainsi a étant multipliée par $+a^3$, qu'on a substituée à la place de $+x^3$, il y aura dans le second terme un seul produit a^4 égal à celui du premier terme.

Les autres produits du second terme $-bx^3$, $-cx^3$, $-dx^3$, sont les trois autres racines multipliées par $+x^3$; ainsi aprés la substitution, l'on aura les trois autres racines multipliées par $+a^3$, sçavoir ba^3, ca^3, da^3; mais le troisiéme terme contient les produits des racines deux à deux; ainsi il y a trois produits où a est multipliée par les trois autres racines b, c, d, qui sont $abxx$, $acxx$, $adxx$.

La substitution mettant dans ces produits $+aa$, au lieu de $+xx$, il y aura trois produits dans le troisiéme terme des trois autres racines multipliées par $+a^3$, qui sont ba^3, ca^3, da^3.

Les autres produits $bcxx$, $bdxx$, $cdxx$, qui restent dans le troisiéme terme, sont les produits des trois autres racines b, c, d prises deux à deux par xx; & aprés la substitution ils deviennent $bcaa$, $bdaa$, $cdaa$: mais le quatriéme terme contient les produits de toutes les racines prises trois à trois; ainsi il y a trois produits $abcx$, $abdx$, $acdx$, où a est multipliée par les trois autres prises deux à deux. C'est pourquoi la substitution mettant dans ces produits a au lieu de x, il y aura dans le quatriéme terme trois produits des trois racines b, c, d prises deux à deux par aa, qui sont $bcaa$, $bdaa$, $cdaa$.

Il reste dans le quatriéme terme aprés la substitution un produit de a par les trois autres racines, qui est $bcda$; mais il est évident que le dernier terme $abcd$, est le même produit.

2°. Il reste à démontrer que les produits égaux de deux termes qui se suivent, ont des signes opposés.

Quand la racine est positive, elle a le signe $-$ dans l'équation, & en la substituant, on lui donne le signe $+$: C'est le contraire quand elle est négative. Ainsi quand on substitue une racine à la place de l'inconnue, on lui donne un signe opposé à celui qu'elle a dans l'équation.

Il faut aussi remarquer que le $+$ multipliant le $+$ ou le $-$, ne change rien dans le signe de la grandeur multipliée; au contraire le $-$ change toujours le signe de la grandeur par laquelle on le multiplie; car $-$ par $+$ donne $-$, & $-$ par $-$ donne $+$.

Il suit de là qu'en faisant la substitution de $+a$, au lieu de $+x$, tous les produits ne changent point de signe; mais ceux qui dans l'équation sont multipliés par la racine $-a$, ont des signes contraires à ceux qu'ils auroient sans cela: Par consequent aprés la substitution, le produit a^4 du premier terme, & celui du second, qui lui est égal, sçavoir $-a^4$, ont des signes opposés.

Par la même raison, les produits qui restent dans le second terme $-ba^3$ $-ca^3$ $-da^3$, & ceux du troisiéme terme qui leur sont égaux, sçavoir $+ba^3$, $+ca^3$, $+da^3$, ont des signes contraires. Car les premiers sont faits de $+a^3$ par les racines $-b$, $-c$, $-d$, differentes de a; & ceux du troisiéme terme qui leur sont égaux, sont formés par les produits des mêmes racines $-b$, $-c$, $-d$, multipliées par $-a$, & ensuite par $+a^2$: or $-a$ change leur signe en les multipliant.

Il est évident que le même raisonnement s'étend à tous les autres produits égaux dans deux termes qui se suivent.

Par consequent tous les produits de tous les termes d'une équation, sont détruits par la substitution d'une des racines; car ce que l'on a dit de la premiere, convient évidemment à chacune des autres.

COROLLAIRES.

32 1°. L'INCONNUE d'une équation composée represente également chacune des racines de l'équation; car en substituant successivement chacune des racines à la place de l'inconnue, tous les produits se détruiront toujours.

C'est la raison pourquoi on forme les équations par la multiplication des équations simples, dont le second membre est zero, & non pas par la multiplication des équations simples, dont le premier membre auroit l'inconnue, & le second membre sa racine; car en les formant de cette seconde maniere, l'inconnue ne representeroit pas dans l'équation chacune des racines, comme elle les represente en formant l'équation de la premiere maniere.

2°. Chaque racine est la valeur de l'inconnue dans une équation composée, aussi-bien que dans les équations simples.

3°. Les valeurs de l'inconnue dans une équation composée, & les racines de l'équation composée étant la même chose, l'inconnue d'une équation composée a autant de valeurs que l'équation a de degrés. Ainsi dans une équation du second degré, l'inconnue a deux valeurs: elle en a trois dans une équation du troisiéme degré; & ainsi des autres.

33. 4°. L'on a deux moyens pour reconnoître quand une grandeur est la valeur de l'inconnue, ou une racine de l'équation: Le premier, lorsqu'en divisant l'équation composée par une équation simple, qui a la même inconnue lineaire, moins cette grandeur, quand elle est une valeur positive, & plus cette grandeur, quand elle est une valeur négative; la division est exacte, c'est à dire sans reste. Le second, lorsqu'en substituant cette grandeur, à la place de l'inconnue, dans l'équation, avec le signe + lorsqu'elle est positive, avec le signe — lorsqu'elle est négative, tous les produits de l'équation se détruisent par des signes contraires, c'est à dire sont égaux à zero.

THEORÊME V.

34. LORSQUE dans une équation composée le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité, & qu'il n'y a ni fractions, ni incommensurables, aucune des racines réelles de l'équation n'est une fraction.

DÉMONSTRATION.

SI quelqu'une des racines réelles étoit une fraction, quelqu'une des équations simples par la multiplication desquelles l'équation composée est formée, auroit pour sa racine une fraction. Or s'il y en avoit quelqu'une, l'équation composée en auroit aussi; & pour l'ôter, il auroit falu multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de cette fraction, ce qui auroit donné necessairement un coëficient au premier terme, different de l'unité, contre la supposition.

Démonstration particuliere pour les équations numeriques.

SI une fraction pouvoit être la racine d'une équation numerique, dont le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité, & où il n'y a ni fractions, ni incommensurables, il est certain par le quatriéme Theorême, que cette fraction & ses puissances étant substituées à la place de l'inconnue & de ses puissances, tous les termes de l'équation se détruiroient aprés la substitution.

Pour rendre la démonstration plus claire & plus generale, on supposera une équation du troisiéme degré $x^3 - nxx + px - q = 0$, où les coëficients n, p, q, representent des nombres; & on supposera que la fraction à substituer est representée par $\frac{ac}{bc}$, qui étant réduite aux moindres termes, est $\frac{a}{b}$. Qu'on substitue la fraction $\frac{ac}{bc}$ à la place de l'inconnue, on aura $\frac{a^3c^3}{b^3c^3} - \frac{aacc}{bbcc}n + \frac{ac}{bc}p - q = 0$, & par transposition $\frac{a^3c^3}{b^3c^3} = \frac{aacc}{bbcc}n - \frac{ac}{bc}p + q$.

Réduisant les fractions à l'exposant, l'on aura $\frac{a^3}{b^3} = \frac{aa}{bb}n - \frac{a}{b}p + q$.

Multipliant chaque membre par bb, on aura $\frac{a^3}{b} = aan - abp + bbq$.

Il est certain que le second membre de cette égalité est un nombre entier; ainsi la fraction $\frac{a^3}{b}$ est égale à un nombre entier.

Mais par ce qui est démontré dans les proportions, la fraction $\frac{a}{b}$ étant supposée dans les moindres termes, le numerateur a^3 de la fraction $\frac{a^3}{b}$, n'a aucun diviseur commun avec le dénominateur b; ainsi la fraction $\frac{a^3}{b}$ est dans les moindres termes, & ne sçauroit être égale à un nombre entier.

Par consequent en supposant qu'une fraction peut être la racine d'une équation, dont le premier terme n'a que l'unité pour coëficient, & qui n'a ni fractions, ni incommensurables, cela conduit à cette absurdité, qu'une fraction réduite aux moindres termes, peut être égale à un nombre entier: Il ne se peut donc pas faire, qu'une fraction soit la racine d'une telle équation.

COROLLAIRE.

35. LORSQU'UNE équation composée n'a ni fractions, ni incommensurables, que son premier terme n'a que l'unité

pour coëficient, & que ses racines sont réelles; si des grandeurs entieres ne sont pas ses racines, ses racines sont incommensurables.

Car ses racines réelles ne peuvent être que des grandeurs entieres, ou des fractions, ou des incommensurables; on suppose qu'il n'y a pas de grandeurs entieres qui soient les racines de l'équation, on vient de démontrer qu'elles ne peuvent être des fractions; par conséquent il faut qu'elles soient incommensurables.

REMARQUE.

Au lieu de supposer dans les équations lineaires, dont une équation composée est le produit, l'inconnue x positive; si on la suppose negative $-x$, comme dans cet exemple $-x-a=0$, $-x+b=0$, l'on aura une équation composée $\begin{array}{l} xx+ax-ab=0, \\ -bx, \end{array}$ dans laquelle les racines qui étoient positives dans la supposition de $+x$, seront négatives, & les négatives seront positives. Car puisque $-x-a=0$, l'on aura $x=-a$; & puisque $-x+b=0$, l'on aura $x=b$.

COROLLAIRE.

D'où il suit qu'en changeant dans une équation composée tous les signes des termes, où la puissance de l'inconnue est impaire, comme x, x^3, x^5, &c. sans toucher aux autres, toutes les racines positives seront changées en négatives, & les négatives en positives.

SECTION III.

De la transformation des équations composées.

DÉFINITION.

QUAND on change une équation en une autre du même degré, qui a une inconnue differente de l'inconnue de la premiere, & dont toutes les racines ont un raport connu avec les racines de la premiere, ce changement s'appelle *transformation*; & la seconde équation s'appelle la *transformée* de la premiere.

Il est évident que les racines de la transformée étant connues, elles feront connoître les racines de l'équation dont elle est la transformée.

PROBLÊME I.

Qui contient toutes les transformations.

36. TRANSFORMER une équation proposée, par exemple, $x^3-nxx+px-q=0$, ou son équivalente

$$\begin{array}{l} x^3-axx+abx \\ -bxx+acx \\ -cxx+bcx-abc=0. \end{array}$$

en une autre équation dont les racines soient, 1°, celles de la proposée, augmentées chacune d'une grandeur connue, telle qu'on voudra, comme f; 2°, ou bien diminuées chacune d'une grandeur connue f; 3°, ou bien retranchées elles-mêmes chacune d'une grandeur connue f; 4°, ou bien multipliées chacune par une grandeur connue f; 5°, ou bien divisées chacune par une grandeur connue f; 6°, ou bien de maniere que les valeurs de l'inconnue de la transformée soient les racines 2es, 3es, &c. ou les puissances 2es, 3es, &c. des racines de la proposée; 7°, ou bien de maniere que les valeurs de l'inconnue de la transformée soient moyennes proportionnelles entre une grandeur connue f, & les racines de la proposée; 8°, ou bien de maniere que les racines de la proposée soient les quatriémes proportionnelles aux racines de la transformée, à une grandeur connue, & à l'unité, ou bien à une seconde grandeur connue; 9°, ou bien de maniere que les racines de la proposée soient égales aux racines de la transformée, plus ou moins une grandeur connue, divisée ou multipliée par les racines de la transformée, ou par quelque multiple de ces racines; 10°, ou bien enfin de maniere que les racines de la transformée ayent avec celles de la proposée tel raport qu'on voudra, comme celui de f à g.

METHODE.

1°. IL faut prendre une seconde inconnue y, qui represente chaque racine de la transformée, & se servir de l'inconnue x, de la proposée, pour en marquer chaque racine, & faire une équation qui exprime le raport qui doit être entre les racines de la proposée & celles de la transformée.

2°. Il faut prendre dans cette équation la valeur de l'inconnue x de la proposée, & substituer cette valeur & ses puissances à la place de l'inconnue x & de ses puissances dans la proposée.

L'équation qu'on trouvera étant ordonnée & abregée, sera la transformée qu'on cherche.

I. Pour augmenter les racines de la proposée de la grandeur f.

On supposera l'inconnue y pour exprimer les racines de la transformée ; & se servant de l'inconnue x de la proposée, on fera l'équation $x+f=y$, qui exprime que la racine x de la proposée étant augmentée de la grandeur connue f, est égale à la racine y de la transformée.

On prendra dans cette équation la valeur de x, qui est $x=y-f$.

On substituera cette valeur & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans la proposée $x^3-nxx+px-q=0$.

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3-3fyy+3ffy-f^3 \\ -nxx & = & -nyy+2nfy-nff \\ +px & = & +py-pf \\ -q & = & -q. \\ \hline & & y^3-3fyy+3ffy-f^3=0. \\ & & -nyy+2nfy-nff \\ & & +py-pf \\ & & -q. \end{array}$$

& l'on trouvera l'équation transformée, dont les racines sont celles de la proposée, augmentées chacune de la grandeur f.

Quand on aura la valeur de y dans la transformée, on la substituera dans $x=y-f$, à la place de y, & l'on aura la valeur de x de la proposée.

II. Pour diminuer les racines de la proposée de la grandeur f.

On supposera $x-f=y$, d'où l'on déduira $x=y+f$: on substituera $y+f$ à la place de x, & les puissances de $y+f$ à la place des puissances de x, dans la proposée

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3+3fyy+3ffy+f^3 \\ -nxx & = & -nyy-2fny-nff \\ +px & = & +py+pf \\ -q & = & -q. \\ \hline & & y^3+3fyy+3ffy+f^3=0. \\ & & -nyy-2nfy-nff \\ & & +py+pf \\ & & -q. \end{array}$$

& l'on trouvera la transformée, dont les racines sont celles de la proposée, diminuées chacune de la grandeur f.

III. Pour trouver la transformée, dont les racines y soient celles de la proposée, retranchées de la grandeur f.

On supposera $f-x=y$; d'où l'on déduira $f-y=x$; on substituera $f-y$ & ses puissances, à la place de x & des puissances de x, dans la proposée

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & f^3-3ffy+3fyy-y^3 \\ -nxx & = & -nff+2nfy-nyy \\ +px & = & +pf-py \\ -q & = & -q. \\ \hline & & f^3-3ffy+3fyy-y^3=0. \\ & & -nff+2nfy-nyy \\ & & +pf-py \\ & & -q. \end{array}$$

& l'on trouvera la transformée, dont les racines sont celles de la proposée, retranchées chacune de la grandeur f.

IV. Pour trouver la transformée, dont les racines y soient celles de la proposée, multipliées par la grandeur f.

On supposera $fx=y$, d'où l'on déduira $x=\frac{y}{f}$; on substituera $\frac{y}{f}$ & ses puissances à la place de x & de ses puissances, dans la proposée ; & l'on trouvera $\frac{y^3}{f^3}-\frac{nyy}{ff}+\frac{py}{f}-q=0$.

Otant les fractions, on aura la transformée $y^3-nfyy+pffy-f^3q=0$, dont les racines sont celles de la proposée, multipliées par f.

Abregé de la transformation précedente.

Pour multiplier les racines d'une équation par une grandeur f, il faut simplement changer l'inconnue x en une nouvelle inconnue y ; & sans toucher au premier terme, multiplier le second par la grandeur f, le troisiéme par ff, le quatriéme par f^3 ; & ainsi de suite.

V. Pour trouver la transformée, dont les racines y soient celles de la proposée, divisées par la grandeur f.

On supposera $\frac{x}{f}=y$, d'où l'on déduira $x=fy$; on substituera fy & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans la proposée, & l'on trouvera $f^3y^3 - nffyy + pfy - q = 0$; divisant l'équation par f^3, on aura la transformée $y^3 - \frac{nyy}{f} + \frac{py}{ff} - \frac{q}{f^3} = 0$, dont les racines sont celles de la proposée divisées par f.

Abregé.

Pour diviser les racines d'une équation par une grandeur f, il faut simplement changer l'inconnue x en y; & sans toucher au premier terme, diviser le second par f, le troisiéme par ff, le quatriéme par f^3; & ainsi de suite.

VI. Pour trouver une transformée, dans laquelle les valeurs de y soient les racines secondes, troisiémes, &c. des racines de la proposée.

On supposera $\sqrt{x} = y$, ou bien $\sqrt[3]{x} = y$, &c. d'où l'on déduira $x = yy$, ou bien $x = y^3$, &c. on substituera yy, ou y^3 & les puissances de yy ou de y^3, à la place de x & de ses puissances, dans la proposée, & l'on trouvera la transformée $y^6 - ny^4 + pyy - q = 0$, ou bien $y^9 - ny^6 + py^3 - q = 0$; les valeurs de y dans la premiere, sont les racines quarrées des racines de la proposée; les valeurs de y dans la seconde, sont les racines troisiémes des racines de la proposée.

Si la proposée étoit $x^6 - nx^4 + pxx - p = 0$, ou bien $x^9 - nx^6 + px^3 - q = 0$, en supposant pour la premiere $xx = y$, & pour la seconde $x^3 = y$, l'on trouveroit la transformée $y^3 - nyy + py - q = 0$, dont les racines seroient les quarrés des valeurs de x dans la premiere proposée, & les cubes des valeurs de x dans la seconde.

VII. Pour trouver une transformée dans laquelle les valeurs de l'inconnue y soient moyennes proportionnelles entre une grandeur connue f, & les racines de la proposée.

On supposera $y = \sqrt{fx}$, d'où l'on déduira $yy = fx$, & $x = \frac{yy}{f}$; on substituera cette valeur de x & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans la proposée; & l'on trouvera la transformée $y^6 - nfy^4 + pffyy - qf^3 = 0$, dans laquelle les valeurs de y sont moyennes proportionnelles entre f & les racines de la proposée $x^3 - nxx + px - q = 0$.

VIII. Pour trouver une transformée de maniere que y . f :: 1 . x.

On supposera $x = \frac{f}{y}$; & par substitution on trouvera la transformée $f^3 - nffy + pfyy - qy^3 = 0$, & par transposition $qy^3 - pfyy + nffy - f^3 = 0$; & divisant le tout par q, $y^3 - \frac{pfyy + nffy - f^3}{q} = 0$, sera la transformée qu'on cherche.

IX. Pour trouver la transformée de $x^3 - pxx - q = 0$, qui soit telle que les racines x de la proposée soient égales à celles de la transformée plus ou moins une grandeur connue divisée ou multipliée par les racines de la transformée, ou par un multiple de ces racines.

Par exemple, pour trouver la transformée de $x^3 - px \pm q = 0$, qui soit telle que $x = y + \frac{p}{3y}$, on substituera $y + \frac{p}{3y}$ & son cube à la place de x, x^3;

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + py + \frac{pp}{3y} + \frac{p^3}{27y^3} \\ -px &= - py - \frac{pp}{3y} \\ \pm q &= \phantom{y^3 + py + \frac{pp}{3y}} \pm q. \end{aligned}$$

& l'on trouvera $y^3 \; * \; * \pm q + \frac{p^3}{27y^3} = 0$; multipliant le tout par y^3, l'on aura $y^6 \pm qy^3 + \frac{p^3}{27} = 0$, pour la transformée qu'on cherche. Cette transformée n'est que du second degré.

Si la proposée étoit $x^3 + px \pm q = 0$, on supposeroit $x = y - \frac{p}{3y}$, & l'on trouveroit la transformée $y^6 \pm qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$.

REMARQUE.

Cette derniere transformation sert à réduire toutes les équations du troisiéme degré, qui n'ont point de second terme, à une transformée du second degré.

Quand on aura trouvé la valeur de y dans la transformée, on substituera cette valeur dans l'équation $x = y \pm \frac{p}{3y}$, & l'on aura la valeur de x; c'est à dire, l'on connoîtra une des racines de la proposée.

X. Pour trouver une transformée dont les racines ayent tel raport qu'on voudra avec celles de la proposée, par exemple, celui de f à g.

On supposera $f . g :: y . x$, d'où l'on déduira $x = \frac{gy}{f}$; on substituera cette valeur & ses puissances à la place de x & de ses puissances dans la proposée $x^3 - nxx + px - q = 0$; & l'on trouvera la transformée $y^3 - \frac{nfyy}{g} + \frac{pffy}{gg} - \frac{f^3q}{g^3} = 0$, qui est celle qu'on cherchoit.

Démonstration du Problême.

POUR démontrer ce Problême, il ne faut faire attention qu'aux équations simples dont une équation composée est le produit.

Soient $x-a=0$. $x-b=0$, les équations simples de l'équation composée $xx \begin{array}{l}-ax\\-bx\end{array} + ab = 0$, qu'on veut transformer.

Il est évident que les équations simples de la transformée, dont les racines seront les racines de la proposée, augmentées de f, seront $y-f-a=0$. $y-f-b=0$; car la premiere donne $y=a+f$; la seconde donne $y=b+f$.

Les équations simples de la transformée, dont les racines seront celles de la proposée, diminuées de f, seront $y+f-a=0$. $y+f-b=0$; car la premiere donne $y=a-f$, la seconde donne $y=b-f$.

Il en est de même des autres transformations.

Il est aussi évident qu'en substituant $y-f$, ou bien $y+f$, au lieu de x, dans les équations simples de la proposée $x-a=0$, $x-b=0$, l'on aura aprés la substitution, les équations simples de la transformée $y-f-a=0$, $y-f-b=0$, &c.

Mais il est clair qu'en substituant $y-f$, par exemple, à la place de x; & le quarré de $y-f$ à la place de xx, dans l'équation $xx \begin{array}{l}-ax\\-bx\end{array} + ab = 0$, qui est le produit des simples $x-a=0$, $x-b=0$, l'on a le même produit qu'on auroit en multipliant les simples $y-f-a=0$, $y-f-b=0$, dans lesquelles les simples $x-a=0$, $x-b=0$, ont été changées par la substitution de $y-f$, à la place de x: Et ce produit est évidemment l'équation transformée. L'on a donc par la méthode du Problême, la transformée qu'on cherche.

Corollaires, qui suivent des trois premieres transformations.

I.

Il suit de cette démonstration, que s'il y avoit des racines imaginaires dans une équation, elles demeureroient encore imaginaires dans sa transformée.

II.

37. Quand il y a des racines positives & négatives dans l'équation qu'on transforme en une autre, dont les racines sont celles de la proposée, augmentées d'une grandeur connue f, en substituant $y-f$ à la place de x; il est évident qu'il n'y a que les racines positives qui soient augmentées dans la transformée, & que les négatives y sont diminuées de la grandeur f; car si les équations simples, dont la proposée est le produit, sont $x-a=0$, $x+b=0$, en substituant $y-f$ à la place de x dans ces équations, l'on aura $y-f-a=0$, $y-f+b=0$, qui sont les équations simples, dont la transformée est le produit; & il est évident que $y-f-a=0$, donne $y=a+f$, dans laquelle la racine positive a est augmentée de f; & que $y-f+b=0$, donne $y=-b+f$, dans laquelle la racine négative $-b$, est diminuée de la grandeur $+f$.

D'où il suit que si la grandeur f est égale à une des racines négatives, cette racine devient égale à zero; son produit par toutes les autres, qui fait le dernier terme de la transformée, devient par consequent égal à zero; & la transformée peut s'abaisser d'un degré.

Si la grandeur f surpasse toutes les racines négatives de la proposée, elles deviennent toutes positives dans la transformée; & alors la transformée ne contenant que des racines positives, tous ses termes ont alternativement les signes $+$ & $-$.

D'où l'on voit que si tous les termes de la transformée ont alternativement $+$ & $-$, on est assuré que la grandeur f surpasse toutes les racines négatives de la proposée; & quand cette alternative est interrompue, on est assuré que f ne surpasse pas toutes les racines négatives de la proposée, puisqu'il en reste quelqu'une; & dans ce cas f est moindre que la plus grande des racines négatives de la proposée.

Dans le cas où f surpasse toutes les racines négatives de la proposée, & où par consequent toutes les racines de la transformée sont positives, il est évident que la plus petite des racines de la transformée, répond à la plus grande des négatives de la proposée, qui est devenue positive. Car le surplus de la grandeur f sur les racines négatives de la proposée, est precisément ce qui fait que ces négatives deviennent positives dans la transformée; & le surplus de f sur la plus grande des racines négatives de la proposée, est le moindre de tous ; ainsi la moindre racine de la transformée est celle qui répond à la plus grande des négatives de la proposée.

D'où il est évident que les racines positives de la transformée, moindres que f, sont celles des racines négatives de la proposée, qui sont devenues positives dans la transformée.

Enfin lorsque f est moindre que chacune des racines négatives de la proposée, ces racines demeurent négatives dans la transformée.

III.

38. Lorsqu'il y a des racines positives & négatives dans une équation, & que par la substitution de $y+f$ à la place de x, on la transforme en une autre, dont les racines sont celles de la proposée, diminuées chacune de la grandeur f, il est évident qu'il n'y a que les racines positives qui soient diminuées de la grandeur f, & que les négatives sont augmentées de la grandeur f. Car si les équations simples de la proposée sont $x-a=0$, $x+b=0$; en substituant $y+f$ à la place de x dans ces équations, l'on aura $y+f-a=0$, $y+f+b=0$, qui sont les équations simples dont la transformée est le produit ; & il est évident que $y+f-a=0$, donne $y=a-f$, dans laquelle la racine positive a est diminuée de la grandeur f ; & que $y+f+b=0$, donne $y=-b-f$, dans laquelle la racine négative est augmentée (dans sa négation) de la grandeur $-f$.

D'où il suit que si f est égale à une des racines positives de la proposée, cette racine devient égale à zero dans la transformée ; & par consequent le dernier terme de la transformée, qui est le produit de cette racine égale à zero par toutes les autres, devient égal à zero ; & l'équation peut être abaissée d'un degré.

Si f surpasse toutes les racines positives, elles deviennent toutes négatives dans la transformée, & dans ce cas tous les termes de la transformée ont le signe +.

Ainsi l'on est assuré que f surpasse toutes les racines positives de la proposée, lorsque tous les termes de la transformée ont + : mais si quelqu'un a le signe —, il reste dans la transformée quelque racine positive, & l'on est assuré que f est moindre que la plus grande racine positive de la proposée ; on suppose que toutes les racines sont réelles.

Quand tous les termes de la transformée ont le signe +, c'est à dire quand f surpasse toutes les racines positives de la proposée, la plus petite des racines de la transformée répond à la plus grande des positives de la proposée, qui est devenue négative dans la transformée ; car le surplus de f sur les racines positives de la proposée, est precisément ce qui fait que ces racines positives deviennent négatives dans la transformée, & le surplus de f sur la plus grande des racines positives de la proposée, est le moindre de tous.

D'où il est évident que les racines négatives de la transformée moindres que f, sont celles des racines positives de la proposée, qui sont devenues négatives dans la transformée.

Enfin quand f est moindre que chacune des racines positives de la proposée, ces racines demeureront positives dans la transformée.

IV.

39. Si l'on substitue une grandeur connue négative $-f$ dans une équation $x^3-nxx+px-q=0$, à la place de l'inconnue x, la somme des produits qu'on aura aprés la substitution, qui est $-f^3-nff-pf-q$, est évidemment le dernier terme tout connu de la transformée, qu'on trouveroit en substituant dans la proposée $y-f$ à la place de l'inconnue x, dans laquelle transformée les racines positives de la proposée seroient augmentées de la grandeur f, & les négatives diminuées de la même grandeur f.

Et si l'on substitue une grandeur connue positive $+f$ dans une équation $x^3-nxx+px-q=0$, à la place de l'inconnue x, la somme des produits qu'on aura aprés la substitution, qui est $f^3-nff+pf-q$, est évidemment le dernier terme tout connu de la transformée, qu'on trouveroit en substituant dans la proposée $y+f$ à la place de x ; dans laquelle transformée les racines positives de la proposée seroient diminuées de la grandeur f, & les négatives augmentées de la même grandeur f.

Il n'y a qu'à faire les operations de la premiere & de la seconde transformation, pour en voir la démonstration.

V.

40. Dans la transformée qu'on trouve en substituant une grandeur connue moins une nouvelle inconnue comme $f-y$, à la place de l'inconnue x de la proposée, les racines positives

de la proposée deviennent négatives, mais chacune est diminuée de la grandeur positive f; & les racines négatives deviennent positives, mais chacune est augmentée de la grandeur f.

Car soient, par exemple, $x - a = 0$, $x + b = 0$, les équations simples de la proposée; en substituant $f - y$ dans ces équations, l'on a les équations simples de la transformée $f - a - y = 0$, $f + b - y = 0$; la premiere donne $y = -a + f$, où l'on voit que la racine a qui étoit positive dans $x - a = 0$, ou bien $x = a$, est devenue négative, mais diminuée de la positive $+f$: la seconde donne $y = b + f$, où la racine b, qui étoit négative dans $x + b = 0$, ou bien $x = -b$, est devenue positive, mais augmentée de $+f$.

D'où il suit que si la grandeur f est égale à une des racines positives de la proposée, cette racine devient égale à zero, & par consequent le dernier terme de la transformée est zero, & l'équation peut s'abaisser d'un degré.

Si la grandeur f surpasse toutes les racines positives de la proposée, elles deviennent encore toutes positives dans la transformée, puisque l'excés de f sur chacune de ces racines, est une grandeur positive dans les équations simples de la transformée; dans ce cas toutes les racines de la transformée sont positives, & tous ses termes ont alternativement $+$ & $-$.

Si la grandeur f est moindre que toutes les racines positives de la proposée, elles deviennent negatives dans la transformée.

REMARQUE.

En substituant $f - y = x$, à la place de x, dans $x - a = 0$, $x + b = 0$, l'inconnue y est négative dans les équations simples $f - a - y = 0$, $f + b - y = 0$ de la transformée; ce qui est cause que le premier terme de la transformée est négatif dans les équations des degrés impairs, c'est à dire du troisiéme, cinquiéme, &c.

Il est facile de rendre l'inconnue y positive dans les équations simples de la transformée; car puisque $f - a - y = 0$, & $f + b - y = 0$, par transposition l'on aura $y + a - f = 0$, $y - b - f = 0$; & les valeurs de y seront les mêmes qu'elles étoient avant la transposition, puisque $y + a - f = 0$, donne $y = -a + f$, aussi-bien que $f - a - y = 0$; & $y - b - f = 0$, donne $y = b + f$, aussi-bien que $f + b - y = 0$;

& par cette transposition, le premier terme de la transformée sera toujours positif dans les équations des degrés impairs. Il suffira dans la pratique, aprés avoir trouvé la transformée par la substitution de $f - y$, au lieu de x, dans la proposée, de transposer le premier membre de la transformée des degrés impairs dans le second, & zero qui est dans le second, dans le premier; ce qui se fait en changeant les signes de tous les termes.

SECTION IV.

Où l'on explique plusieurs usages des transformations qui servent à préparer les équations composées.

PROBLÊME II.

41. *OTER le second terme d'une équation composée; c'est à dire, la transformer en une autre qui n'ait pas de second terme.*

Il faut supposer l'inconnue x de la proposée, égale à une nouvelle inconnue y, plus ou moins le coéficient du second terme de la proposée, divisé par le nombre qui exprime le degré de l'équation proposée; c'est à dire par 2, si elle est du second degré; par 3, si elle est du troisiéme; plus, si le second terme de la proposée a le signe $-$; & moins, s'il a le signe $+$.

Il faut substituer cette valeur de x, & ses puissances, à la place de x & de ses puissances, dans la proposée; & l'on aura la transformée, où le second terme manque.

EXEMPLE I.

Pour ôter le second terme de $xx - nx + p = 0$, on supposera $x = y + \frac{n}{2}$; on substituera dans la proposée $y + \frac{n}{2}$, & son quarré, à la place de x, xx,

$$\begin{array}{rcl} xx & = & yy + ny + \frac{nn}{4} \\ -nx & = & \quad\;\, - ny - \frac{nn}{2} \\ +p & = & \qquad\qquad\;\; + p. \\ \hline & & yy \;\; * \;\; - \frac{nn}{4} = 0 \\ & & \qquad\quad\;\; + p. \end{array}$$

& l'on trouvera cette transformée, qui n'a pas de second terme.

REMARQUE.

Toutes les équations du second degré peuvent être résolues par ce Problême; car par transposition, l'on aura $yy = \frac{nn}{4} - p$; & tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $y = \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$; & substituant cette valeur de y dans $x = y + \frac{n}{2}$, l'on aura $x = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{nn}{4} - p}$, qui est une racine de la proposée.

EXEMPLE II.

Pour ôter le second terme de $x^3 + nxx - px - q = 0$, on supposera $x = y - \frac{n}{3}$; on substituera dans la proposée $y - \frac{n}{3}$, & ses puissances, à la place de x & de ses puissances.

$$\begin{array}{rcrrrr} x^3 & = & y^3 - nyy & + \frac{nny}{3} & - \frac{n^3}{27} \\ + nxx & = & + nyy & - \frac{2nny}{3} & + \frac{n^3}{9} \\ - px & = & & - py & + \frac{np}{3} \\ - q & = & & & - q. \\ \hline \end{array}$$

& l'on trouvera cette transformée, qui n'a pas de second terme.

$$\begin{array}{rrrr} y^3 & * & - \frac{nny}{3} & + \frac{2n^3}{27} = 0. \\ & & - py & + \frac{np}{3} \\ & & & - q \end{array}$$

Si l'on trouve la valeur de y dans la transformée, en la substituant dans $x = y - \frac{n}{3}$, l'on aura la valeur de x; c'est à dire, l'on aura une racine de la proposée.

La démonstration de ce Problême est évidente, si l'on fait attention dans le dernier exemple, que le second terme de la troisiéme puissance de $y - \frac{n}{3}$, est $- nyy$; que $+ nxx$ donne, aprés la substitution, $+ nyy$, &c. que ces deux grandeurs font seules le second terme de la transformée, & qu'elles se détruisent toujours par des signes contraires, parceque l'on suppose toujours $x = y - \frac{n}{3}$, quand il y a dans la proposée $+ nxx$; & $x = y + \frac{n}{3}$, quand il y a dans la proposée $- nxx$.

Il est facile d'apliquer ce raisonnement aux équations de tous les degrés.

Si on veut le voir sur un exemple general, on se servira de $x^m \pm nx^{m-1}$, pour representer les deux premiers termes des équations de tous les degrés: Il suffit de considerer les deux premiers termes dans ce Problême: m sera égal à 2 dans

dans les équations du second degré; m sera égal à 3 dans celles du troisiéme degré, &c. En supposant $x = y \mp \frac{n}{m}$, les deux premiers termes de $y \mp \frac{n}{m}$, élevée à la puissance m, seront $y^m \mp ny^{m-1}$; $\pm nx^{m-1}$, sera égal à $\pm ny^{m-1}$, &c. Il est évident que $\mp ny^{m-1} \pm ny^{m-1}$, qui sont les seules grandeurs qui font le second terme de la transformée, se détruisent par des signes contraires.

REMARQUE.

On peut aussi ôter le second terme d'une équation, en supposant, pour les équations du second degré, $x = \frac{n}{2} - y$, quand le second terme de la proposée a $-$, & en supposant $x = - \frac{n}{2} - y$, quand le second terme a $+$; en supposant pour le troisiéme degré $x = \frac{n}{3} - y$, quand le second terme de la proposée a $-$, & $x = - \frac{n}{3} - y$, quand il a $+$, &c. & faisant ensuite la substitution.

On peut encore ôter le second terme d'une équation, en supposant, pour le second degré, $x = \frac{y}{2} - \frac{n}{2}$, quand le second terme de la proposée a $+$; en supposant $x = \frac{y}{2} + \frac{n}{2}$, quand il a $-$; en supposant pour le troisiéme degré $x = \frac{y}{3} - \frac{n}{3}$, quand le second terme de la proposée a $+$, & $x = \frac{y}{3} + \frac{n}{3}$, quand il a $-$, &c. & faisant ensuite la substitution.

Quand on aura trouvé la valeur de y dans la transformée, en la substituant dans l'équation simple supposée $x = \frac{n}{2} - y$, &c. ou $x = \frac{y}{2} - \frac{n}{2}$, &c. on aura la valeur de x.

Si le premier terme de l'équation avoit un coëficient different de l'unité, comme dans l'équation $ax^3 - nxx + px - q = 0$, on pourroit en faire évanouir le second terme, en supposant $x = \frac{y}{a} + \frac{n}{3a}$, car on auroit

$$\begin{array}{rcrrrr} ax^3 & = & \frac{y^3}{aa} + \frac{n}{aa}yy & + \frac{nn}{3aa}y & + \frac{n^3}{27aa} \\ - nxx & = & - \frac{n}{aa}yy & - \frac{2nn}{3aa}y & - \frac{n^3}{9aa} \\ + px & = & & + \frac{p}{a}y & + \frac{n}{3a}p \\ - q & = & & & - q \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} \frac{y^3}{aa} & * & - \frac{nn}{3aa}y & - \frac{2n^3}{27aa} = 0. \\ & & + \frac{p}{a}y & + \frac{n}{3a}p \\ & & & - q \end{array}$$

Cette transformée n'a pas de second terme; multipliant toutes les grandeurs par aa, on auroit

$$\begin{array}{lll} y^3 - \frac{1}{3}nny & - \frac{2n^3}{27} & = 0. \\ + apy & + \frac{1}{3}np & \\ & - aaq & \end{array}$$

dans laquelle le premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité.

Si l'équation étoit du second degré comme $axx - nx + p = 0$, il faudroit supposer $x = \frac{y}{a} + \frac{n}{2a}$.

Si elle étoit du quatriéme, comme $ax^4 - nx^3 +$ &c. il faudroit supposer $x = \frac{y}{a} + \frac{n}{4a}$; & ainsi des autres.

PROBLÉME III.

TROUVER par Analyse quelle doit être la grandeur propre à ôter le second terme d'une équation, par exemple de $x^3 + nxx + px - q = 0$.

JE suppose que cette grandeur inconnue est z, ainsi je suppose $x = y - z$, lorsque le second terme de la proposée a $+$, & $x = y + z$, lorsqu'il a $-$: Je substitue $y - z$ & ses puissances, à la place de x & de ses puissances

$$\begin{array}{rcllll} x^3 & = & y^3 & - 3zyy & + 3zzy & - z^3 \\ + nxx & = & & + nyy & - 2nzy & + nzz \\ + px & = & & & + py & - pz \\ - q & = & & & & - q \\ \hline & & y^3 & - 3zyy & + 3zzy & - z^3 = 0, \\ & & & + nyy & - 2nzy & + nzz \\ & & & & + py & - pz \\ & & & & & - q \end{array}$$

& je trouve cette transformée.

Je suppose son second terme $- 3zyy + nyy = 0$, ce qui me donne $n = 3z$, & $\frac{n}{3} = z$; cela me fait voir que $\frac{n}{3}$ est la grandeur, qui étant substituée dans $x = y - z$, à la place de z, me donnera $x = y - \frac{n}{3}$, qui est propre à faire évanouir le second terme, en substituant $y - \frac{n}{3}$ & ses puissances dans la proposée, à la place de x & de ses puissances.

Pour resoudre le Problême d'une maniere generale, on supposera que $x^m \pm nx^{m-1}$, representent les deux premiers termes de toutes les équations, $m = 2$ dans le second degré, $m = 3$ dans le troisiéme, &c. On supposera $x = y \mp z$, & l'on aura les deux premiers termes de $x = y \mp z$, élevés à la puissance m, $\quad x^m = y^m \mp mzy^{m-1}$, &c.

L'on aura aussi $\pm nx^{m-1} = \pm ny^{m-1}$, &c.

L'on supposera le second terme de la transformée $\mp mzy^{m-1} \pm ny^{m-1} = 0$, & l'on aura $\pm z = \pm \frac{n}{m}$; ce qui fait voir que pour ôter le second terme, il faut supposer $x = y \mp \frac{n}{m}$, & faire ensuite la substitution.

COROLLAIRE I.

42. SI l'on vouloit faire évanouir le troisiéme terme de la proposée $x^3 + nxx + px - q = 0$, & non pas le second, on se serviroit de la même methode, & l'on supposeroit le troisiéme terme de la transformée $3zzy - 2nzy + py = 0$, ce qui donneroit l'équation du second degré $zz - \frac{2}{3}nz + \frac{1}{3}p = 0$, laquelle étant resoluë, donneroit la valeur de $z = \frac{1}{3}n \pm \sqrt{\frac{1}{9}nn - \frac{1}{3}p}$. Substituant cette valeur de z dans $x = y - z$, l'on auroit $x = y - \frac{1}{3}n \mp \sqrt{\frac{1}{9}nn - \frac{1}{3}p}$. Substituant cette valeur de x & ses puissances dans la proposée, à la place de x & de ses puissances, on auroit une transformée, qui n'auroit pas de troisiéme terme.

REMARQUE.

CETTE methode ne peut pas servir à faire évanouir le quatriéme terme, ni les autres suivans, parceque l'équation qu'elle donneroit pour faire trouver la valeur de z propre à faire évanouir le quatriéme terme, seroit du troisiéme degré; celle qu'elle donneroit pour faire trouver la valeur de z propre à faire évanouir le cinquiéme terme, seroit du quatriéme degré; & ainsi de suite: Et l'on n'enseignera que dans la suite la maniere de résoudre ces équations.

COROLLAIRE II.

43. LA même methode peut encore servir à faire en sorte que le coëficient du second terme, ou celui du troisiéme terme de la proposée, soit une grandeur donnée a, en supposant le coëficient du second terme de la transformée, qui est $- 3z + n = a$, ou bien celui du troisiéme terme, qui est $3zz - 2nz + p = a$.

Il faut ensuite trouver la valeur de z dans l'une ou l'autre de ces deux équations, & substituer cette valeur de z prise dans la premiere, si l'on veut que a soit le coëficient du second terme; & prise dans la seconde, si l'on veut que a soit le coëficient du troisiéme terme : il faut, dis-je, substituer cette valeur de z dans l'équation $x = y - z$, & ensuite substituer cette valeur de x dans la proposée; & l'on aura une transformée qui aura la grandeur a pour coëficient de son second, ou bien de son troisiéme terme.

PROBLÊME IV.

44. *LORSQUE tous les termes moyens, ou seulement quelques-uns, manquent dans une équation, comme dans $x^3 - q = 0$, ou $x^3 - nxx - q = 0$, la transformer en une autre, où il ne manque aucun terme, & qui soit même, si l'on veut, plus élevée d'un degré.*

Il faut supposer $x = y$ − ou + a; la lettre a marque une grandeur connue telle qu'on voudra. Il faut substituer y − ou + a, à la place de x dans la proposée, & l'on aura une transformée qui aura tous ses termes.

Si l'on veut que la transformée soit plus élevée d'un degré que la proposée, on multipliera la proposée par x, & l'on substituera dans $x^4 - qx = 0$, y − ou + a, à la place de x; & la quatriéme puissance de y − ou + a, à la place de x^4; & l'on aura la transformée qu'on demande.

PROBLÊME V.

45. *QUAND une équation composée contient des racines négatives, ou seules, ou mêlées avec des positives, la transformer en une autre qui n'ait que des racines positives; c'est à dire, quand tous les termes d'une équation composée n'ont pas alternativement + & −, la transformer en une autre, dont tous les termes ayent alternativement + & −.*

PREMIER CAS.

Si tous les termes de la proposée ont +, en changeant tous les signes des termes pairs, c'est à dire du second, quatriéme, sixiéme, &c sans toucher aux autres, tous les termes auront alternativement + & −, & toutes les racines qui étoient
* 30. négatives seront changées en positives.* Ce cas n'a aucune difficulté.

SECOND CAS.

S'il y a des racines positives & négatives dans la proposée, on prendra le plus grand coëficient négatif, & aprés l'avoir rendu positif, on lui ajoutera l'unité, & l'on supposera ce coëficient plus l'unité, consideré comme une seule grandeur, moins une nouvelle inconnue y, égal à l'inconnue x de la proposée.

On substituera dans la proposée cette valeur de x, & ses puissances, à la place de x & de ses puissances; & l'on trouvera une transformée, dont tous les termes auront alternativement + & −.

EXEMPLE I.

Pour trouver la transformée de $xx - 2x - 3 = 0$, qui ait les signes alternatifs + & −, on prendra le plus grand coëficient négatif -3 de la proposée, & aprés l'avoir rendu positif, on lui ajoutera l'unité, & l'on aura $+4$; on supposera $4 - y = x$; on substituera $4 - y$, & le quarré de $4 - y$ dans la proposée, à la place de x, & de xx; & l'on aura la transformée $0 = 5 - 6y + yy$, dans laquelle les signes + & − sont alternatifs.

EXEMPLE II.

Soit la proposée $x^3 - 2xx + 3x + 6 = 0$; pour la transformer en une autre, dont tous les termes ayent alternativement + & −, on prendra le plus grand coëficient négatif -2, qu'on rendra positif; on lui ajoutera l'unité, & l'on aura $+3$. On supposera $3 - y = x$, & on substituera $3 - y$ dans la proposée, à la place de x,

$$\begin{aligned} x^3 &= +27 - 27y + 9yy - y^3 \\ -2xx &= -18 + 12y - 2yy \\ +3x &= +9 - 3y \\ +6 &= +6 \end{aligned}$$

& l'on trouvera la transformée; $0 = +24 - 18y + 7yy - y^3$

& par transposition l'on aura $y^3 - 7yy + 18y - 24 = 0$, où tous les termes ont alternativement + & −. Quand on aura la valeur de y, en la substituant dans $3 - y = x$, on aura celle de x.

Préparation pour la démonstration.

Pour rendre la démonstration plus facile, on prendra un exemple seulement du troisiéme degré, & l'on pourra appliquer à tous les degrés ce que l'on dira du troisiéme. On le prendra Algebrique, c'est à dire litteral, pour rendre la démonstration generale. Enfin on supposera tous les coëficients négatifs, la démonstration de ce cas contenant celle de tous les autres; & l'on supposera premierement que le coëficient du second terme est le plus grand, ensuite que c'est le coëficient du troisiéme, & ainsi de suite, afin qu'on puisse voir tous les cas dans un seul exemple.

Soit l'équation $x^3 - nxx - px - q = 0$, qu'il faut transformer en une autre, dont tous les termes ayent alternativement $+$ & $-$.

1°. Soit $-n$ le plus grand coëficient négatif; l'ayant rendu positif, & augmenté de l'unité, l'on aura $\overline{n+1}$. On regarde $\overline{n+1}$ comme une seule grandeur, & c'est ce qu'on marque par la ligne qui est sur $\overline{n+1}$. Il faut supposer $\overline{n+1} - y = x$, & par la substitution, on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{array}{lllll} x^3 &= \overline{n+1}^3 & -3\times\overline{n+1}^2\,y & +3\times\overline{n+1}\,yy & -y^3 \\ -nxx &= -n\times\overline{n+1}^2 & +2n\times\overline{n+1}\,y & -n\times yy & \\ -px &= -p\times\overline{n+1} & +p\times y & & \\ -q &= -q & & & \end{array}$$

2°. Soit $-p$ le plus grand coëficient négatif; ainsi il faut supposer $\overline{p+1} - y = x$, & par la substitution on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{array}{lllll} x^3 &= \overline{p+1}^3 & -3\times\overline{p+1}^2\,y & +3\times\overline{p+1}\,yy & -y^3 \\ -nxx &= -n\times\overline{p+1}^2 & +2n\times\overline{p+1}\,y & -n\times yy & \\ -px &= -p\times\overline{p+1} & +p\times y & & \\ -q &= -q & & & \end{array}$$

3°. Soit $-q$ le plus grand coëficient négatif, il faut supposer $\overline{q+1} - y = x$, & par la substitution on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{array}{lllll} x^3 &= \overline{q+1}^3 & -3\times\overline{q+1}^2\,y & +3\times\overline{q+1}\,yy & -y^3 \\ -nxx &= -n\times\overline{q+1}^2 & +2n\times\overline{q+1}\,y & -n\times yy & \\ -px &= -p\times\overline{q+1} & +p\times y & & \\ -q &= -q & & & \end{array}$$

Il faut démontrer que dans les trois suppositions précédentes, les termes de la transformée ont alternativement $+$ & $-$; il suffira de le démontrer dans la seule premiere supposition, où $-n$ est supposé le plus grand coëficient négatif, la même démonstration pouvant aisément être appliquée aux deux autres.

Démonstration du cinquiéme Problême.

Il est évident que tous les termes de la plus haute puissance de $\overline{n+1} - y$, ont alternativement $+$ & $-$. C'est la même chose des autres puissances de $\overline{n+1} - y$; mais il suffit de faire attention aux termes de la plus haute puissance.

Il est de même évident que chaque terme de la plus haute puissance de $\overline{n+1} - y$, fait une partie du terme correspondant de la transformée; c'est à dire le terme tout connu de la plus haute puissance de $\overline{n+1} - y$, fait une partie du terme tout connu de la transformée; le terme de la plus haute puissance de $\overline{n+1} - y$, qui contient y lineaire, fait une partie du terme de la transformée, où y est lineaire; & ainsi des autres. Or chaque terme de la plus haute puissance de $\overline{n+1} - y$, est lui seul plus grand que les autres grandeurs du même terme de la transformée, qui pourroient avoir des signes contraires à son signe, comme on le va démontrer. Par consequent chaque terme de la transformée a le même signe que le terme de la plus haute puissance de $\overline{n+1} - y$, qui se trouve dans ce même terme de la transformée.

Car, 1°, dans le terme tout connu de la transformée, $\overline{n+1}^3$ surpasse les autres grandeurs qui ont un signe contraire dans le même terme; ce qu'on verra clairement en remarquant que $\overline{n+1}^3 = \overline{n+1}\times\overline{n+1}^2$; d'où ôtant $-n\times\overline{n+1}^2$, il est évident que le reste ne sçauroit être moindre que $+\overline{n+1}^2 = \overline{n+1}\times\overline{n+1}$; d'où ôtant $-p\times\overline{n+1}$, le reste ne sçauroit être moindre que $+\overline{n+1}$, puisque p est supposé moindre que n; ôtant de ce reste positif la grandeur $-q$, qui est moindre que n, il est évident qu'il y aura un reste positif.

2°. Dans le terme suivant, on verra de même que $-3\times\overline{n+1}^2\,y$, surpasse les autres grandeurs $+2n\times\overline{n+1}\,y + p\times y$, qui ont des signes contraires, en concevant $-3\times\overline{n+1}^2\,y = -3\times\overline{n+1}\times\overline{n+1}\,y$; car en ôtant $+2n\times\overline{n+1}\,y$ de -3

$\times \overline{n+1} \times \overline{n+1}\, y$, il eſt clair que le reſte ne ſçauroit être moindre que $- \overline{n+1}\, y$, d'où ôtant $+ p \times y$, il doit reſter une grandeur négative, p étant ſuppoſé moindre que n.

3°. Il eſt évident que dans le terme ſuivant, $+ 3 \times \overline{n+1}\, yy$ ſurpaſſe $- n \times yy$; Donc chaque terme de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, ſurpaſſe les autres grandeurs du même terme de la transformée, qui ont des ſignes contraires; ainſi les termes de la transformée ont les mêmes ſignes qu'ont les termes de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$; par conſequent tous les termes de la plus haute puiſſance de $\overline{n+1} - y$, ayant alternativement + & —, tous les termes de la transformée ont les mêmes ſignes alternatifs + & —. Ce qu'il faloit démontrer.

Il eſt évident que ce ſera la même démonſtration, ſi $-p$ eſt le plus grand coëficient négatif, ou ſi c'eſt $-q$; & qu'elle peut de plus s'appliquer aux équations de tous les degrés.

COROLLAIRES.

I.

Il eſt clair que tous les termes de chaque puiſſance de $\overline{n+1} - y$, ayant alternativement + & —, les coëficients poſitifs qui les multiplient, ne changent point cette alternative dans les termes de la transformée, il n'y a que les négatifs; ainſi les ayant ſuppoſés tous négatifs, la démonſtration convient à tous les cas.

II.

46\. Dans la ſuppoſition de $\overline{n+1} - y = x$, la ſubſtitution de $\overline{n+1} - y$, à la place de x dans la propoſée, change toutes les racines de la propoſée;* les négatives deviennent poſitives dans la transformée, & elles ſont même augmentées chacune de la grandeur $\overline{n+1}$; les poſitives de la propoſée deviennent négatives dans la transformée, mais elles ſont diminuées de la grandeur poſitive $\overline{n+1}$, & elles en ſont tellement diminuées, qu'il y a du ſurplus poſitif ſur chacune, qui les rend encore poſitives dans la transformée; puiſque toutes les racines en ſont poſitives, tous les termes ayant alternativement + & —.

*40.

III.

47\. D'où il ſuit, que puiſqu'il y a du ſurplus du plus grand coëficient négatif augmenté de l'unité ſur chaque racine poſitive de la propoſée, il faut que le plus grand coëficient négatif de la propoſée, rendu poſitif & augmenté de l'unité, ſurpaſſe toutes les racines poſitives de la propoſée.

IV.

48\. Si on vouloit trouver une grandeur qui ſurpaſſât auſſi toutes les racines négatives de la propoſée, il n'y auroit qu'à changer les ſignes de tous les termes pairs, du ſecond, du quatriéme, &c. & alors toutes les racines négatives étant devenues poſitives par ce changement, le plus grand coëficient négatif de l'équation ainſi changée, étant rendu poſitif, & augmenté de l'unité, ſurpaſſeroit toutes les racines poſitives de l'équation changée, c'eſt à dire toutes les racines négatives de la propoſée.

V.

Si le premier terme d'une équation avoit un coëficient different de l'unité, comme $2x^3 - 2xx + 3x + 6 = 0$, il faudroit diviſer le plus grand coëficient négatif -2, rendu poſitif $+2$, par le coëficient du premier terme qui eſt 2, & ajouter l'unité au quotient 1, ce qui fait 2, & ſuppoſer $2 - y = x$. Il faudroit enſuite ſubſtituer $2 - y$, & les puiſſances de $2 - y$, à la place de x & des puiſſances de x, dans la propoſée, & l'on auroit la transformée $2y^3 - 10yy + 19y - 20 = 0$, dont les termes ont alternativement + & —.

La démonſtration eſt la même que la précedente; car ſuppoſant que la propoſée eſt $ax^3 - nxx - px - q = 0$, & que n, par exemple, eſt le plus grand coëficient négatif, il faut ſuppoſer $\frac{n}{a} + 1 - y = x$, ou, ce qui eſt la même choſe, $\frac{\overline{n+a}}{a} - y = x$; & ſubſtituant $\frac{\overline{n+a}}{a} - y$ à la place de x dans la propoſée, on trouvera la transformée ſuivante,

$$
\begin{aligned}
ax^3 &= + \frac{\overline{n+a}^3}{aa} - \frac{3 \times \overline{n+a}^2}{a}\, y + 3 \times \overline{n+a} \times yy - ay^3 \\
-nxx &= - \frac{n \times \overline{n+a}^2}{aa} + \frac{2n \times \overline{n+a}}{a}\, y - nyy \\
-px &= - \frac{p \times \overline{n+a}}{a} + py \\
-q &= -q
\end{aligned}
$$

& l'on démontrera, comme l'on a fait ci-deſſus, que les termes de cette transformée ont alternativement + & —.

PROBLÊME VI.

49. *TRANSFORMER une équation en une autre qui ait ces deux conditions : 1°, que le coéficient du troisiéme terme surpasse le quarré de la moitié du coéficient du second terme. 2°. Que tous les termes ayent alternativement + & —.*

M. DESCARTES se sert de ce Problême pour préparer une équation du sixiéme degré à être construite par la Geometrie.

Soit l'équation proposée $x^6 - nx^5 - px^4 - qx^3 - rxx - sx - t = 0$.

Pour trouver par Analyse la grandeur propre à former la transformée qu'on cherche, soit cette grandeur égale à l'indeterminée z.

Il faut supposer $z - y = x$, & substituer dans la proposée, $z - y$ & ses puissances, à la place de x & de ses puissances, & l'on trouvera la transformée suivante,

$$\begin{array}{lcl} x^6 & = & z^6 - 6z^5y + 15z^4yy - 20z^3y^3 + 15zzy^4 - 6zy^5 + y^6 \\ -nx^5 & = & -nz^5 + 5nz^4y - 10nz^3yy + 10nzzy^3 - 5nzy^4 + ny^5 \\ -px^4 & = & -pz^4 + 4pz^3y - 6pzzyy + 4pzy^3 - py^4 \\ -qx^3 & = & -qz^3 + 3qzzy - 3qzyy + qy^3 \\ -rxx & = & -rzz + 2rzy - ryy \\ -sx & = & -sz + sy \\ -t & = & -t \end{array}$$

Il faut prendre la moitié du coéficient du second terme de cette transformée ; cette moitié est $-3z + \frac{1}{2}n$; & ôter le quarré de cette moitié, qui est $9zz - 3nz + \frac{1}{4}nn$ du coéficient du troisiéme terme, qui est $+15zz - 5nz - p$; & l'on aura le reste $+6zz - 2nz - \frac{1}{4}nn - p$: afin que ce reste soit positif, il faut que $+6zz$ surpasse $-2nz - \frac{1}{4}nn - p$.

Pour trouver la valeur de z qui soit telle que $+6zz$ surpasse $-2nz - \frac{1}{4}nn - p$, il faut auparavant trouver une valeur de z qui soit telle, que $+6zz$ soit égale à $2nz + \frac{1}{4}nn + p$, en feignant cette équation $+6zz = 2nz + \frac{1}{4}nn + p$, qui donne $6zz - 2nz = \frac{1}{4}nn + p$. Divisant chaque membre par 6, l'on aura $zz - \frac{1}{3}nz = \frac{1}{24}nn + \frac{1}{6}p$. Ajoutant à chaque membre $\frac{1}{36}nn$, qui est le quarré de la moitié du coéficient, $\frac{1}{3}n$ du second terme, l'on aura $zz - \frac{1}{3}nz + \frac{1}{36}nn = \frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p$, dont le 1er membre est un quarré qui a pour sa racine $z - \frac{1}{6}n$; ainsi tirant la racine quarrée de chaque membre,

on aura $z - \frac{1}{6}n = \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$, & par transposition $z = \frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$: ce qui fait voir qu'en supposant $z = \frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$, l'on auroit $6zz = 2nz + \frac{1}{4}nn + p$.

Ainsi en prenant z plus grande que $\frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$, le reste du coéficient du troisiéme terme de la transformée, aprés en avoir ôté le quarré de la moitié du coéficient du second terme, sera positif ; lequel reste est marqué dans la transformée par $+6zz - 2nz - \frac{1}{4}nn - p$. L'on a donc déja accompli une des conditions du Problême.

Pour accomplir l'autre, il faut, si la valeur de z qu'on vient de trouver, ne surpasse pas le plus grand coéficient négatif de la proposée au moins d'une unité, augmenter cette valeur jusqu'à ce que cela arrive : ce qui est possible.

Ensuite aprés avoir mis dans $z - y = x$, la valeur de z plus grande, 1°, que $\frac{1}{6}n + \sqrt{\frac{5}{72}nn + \frac{1}{6}p}$; 2°, plus grande au moins d'une unité que le plus grand coéficient négatif de la proposée, il faut substituer cette valeur moins y, à la place de x dans la proposée ; & l'on trouvera une transformée, dont, 1°, le coéficient du troisiéme terme surpassera le quarré de la moitié du coéficient du second terme ; 2°, dont les termes auront alternativement + & —. Ce qui étoit proposé.

Quand on aura trouvé la valeur de y dans la transformée, en la substituant dans $z - y = x$; comme aussi la valeur de z, on aura la valeur de l'inconnue x ; c'est à dire on aura une racine de la proposée.

PROBLÊME VII.

50. *LORSQUE le premier terme d'une équation composée a un coéficient different de l'unité, la transformer en une autre dont le premier terme n'ait que l'unité pour coéficient.*

PAR exemple, transformer l'équation $ax^3 - nnx + px - q = 0$, dont le premier terme a le coéficient a, en une autre dont le premier terme n'ait que l'unité pour coéficient.

1°. Il faut supposer l'inconnue x de la proposée, égale à une autre inconnue y, divisée par le coéficient a du premier terme de la proposée ; & l'on aura $x = \frac{y}{a}$. 2°. Il faut substituer $\frac{y}{a}$ & ses puissances, dans la proposée, à la place de x & de ses puissances ; & l'on aura la transformée $\frac{ay^3}{a^3} - \frac{nnyy}{aa}$

$+ \frac{py}{a} - q = 0$. 3°. Il faut ôter les fractions de cette transformée, & diviser tous les termes par a; & l'on aura la transformée $y^3 - my + apy - aaq = 0$, dont le premier terme n'a pas d'autre coéficient que l'unité, & qui est la transformée qu'on cherche.

Si l'on trouve la valeur de y dans la transformée, en la substituant dans $x = \frac{y}{a}$, on aura la valeur de l'inconnue x de la proposée.

Abregé.

Il suffit, dans la pratique, de changer l'inconnue x de la proposée en une autre y, d'ôter le coéficient a du premier terme, & de multiplier le troisiéme terme par le coéficient a; le quatriéme par le quarré aa de ce coéficient; le cinquiéme terme par le cube a^3 de ce coéficient; & ainsi de suite.

PROBLÊME VIII.

51. *Faire en sorte que le coéficient de quel terme on voudra d'une équation, & même, si l'on veut, le dernier terme, devienne une grandeur connue; c'est à dire, transformer l'équation en une autre où cela se trouve.*

Pour le chercher par Analyse, soit la grandeur connue a, soit l'indéterminée z, qui represente la quantité propre à faire en sorte que le coéficient de quel terme on voudra d'une équation, devienne égal à a; & soit l'équation proposée $x^3 - nxx + px - q = 0$.

On supposera $x = \frac{y}{z}$; on substituera $\frac{y}{z}$ à la place de x, dans la proposée; & l'on aura la transformée $y^3 - nzyy + pzzy - qz^3 = 0$.

Si c'est le coéficient du second terme qu'on veille rendre égal à a, on supposera $nz = a$; ce qui donnera $z = \frac{a}{n}$.

Si c'est le coéficient du troisiéme terme qu'on veille rendre égal à a, on supposera $pzz = a$; ce qui donnera $z = \sqrt{\frac{a}{p}}$.

Si c'est le dernier terme, on supposera $qz^3 = a$; ce qui donnera $z = \sqrt[3]{\frac{a}{q}}$.

On changera l'inconnue x de la proposée en y; & on multipliera le second terme de la proposée par la valeur de z; le troisiéme par le quarré de cette valeur; le quatriéme par le cube de cette valeur, &c. & l'on aura la transformée qu'on cherche. Ou bien on substituera la valeur de z

dans $x = \frac{y}{z}$, & la substitution de cette valeur de x dans la proposée, à la place de x, donnera la transformée qu'on cherche. Ou bien enfin on substituera la valeur de z dans la transformée indéterminée $y^3 - nzyy + pzzy - qz^3 = 0$, & l'on aura la transformée qu'on demande.

Quand on connoîtra la valeur de y dans la transformée, en la substituant dans $x = \frac{y}{z}$, comme aussi la valeur de z, l'on aura la valeur de x.

PROBLÊME IX.

52. *Faire en sorte dans les équations numeriques, que les coéficients des termes soient divisibles par tel nombre qu'on voudra; ce qui est quelquefois commode pour faciliter le calcul des racines.*

Il faut multiplier par la methode de la quatriéme transformation, chaque racine de l'équation proposée, par le nombre, ou par le produit des nombres par lesquels on veut que les coéficients de l'équation se puissent diviser; & on trouvera la transformée qu'on cherche.

Par exemple, si l'on propose de faire en sorte que le coéficient du troisiéme terme de $x^3 - 14x - 55 = 0$, devienne divisible par 2, & le dernier terme par 3, on multipliera chaque racine de la proposée par 6, produit de 2 par 3; c'est à dire, aprés avoir changé x en y, on multipliera le troisiéme terme par 36, quarré de 6; le quatriéme par 216, cube de 6; & l'on aura la transformée $y^3 - 504y - 11880 = 0$, qui a les conditions qu'on demande.

PROBLÊME X.

53. *Oter toutes les fractions d'une équation, dont le premier terme n'a pas d'autre coéficient que l'unité, de maniere que le premier terme de la transformée n'ait pas aussi d'autre coéficient que l'unité.*

Il faut multiplier toutes les racines de la proposée par le dénominateur de la fraction, s'il n'y en a qu'une, ou par le produit de tous les dénominateurs des fractions, s'il y en a plusieurs; & l'on aura la transformée qu'on demande.

Par exemple, pour ôter les fractions de $x^3 - \frac{n}{a}xx + \frac{px}{b} - \frac{q}{c} = 0$, on prendra le produit abc de tous les dénominateurs des fractions, & on supposera $x = \frac{y}{abc}$, on substituera $\frac{y}{abc}$ dans la proposée, à la place de x; & aprés avoir ôté les fractions, on trouvera la transformée $y^3 - bcnyy + aabccpy - a^4b^4ccq = 0$, qui n'a point de fractions, & dont le premier terme n'a pas d'autre coéficient que l'unité.

Quand on connoîtra la valeur de y, en la substituant dans $x = \frac{y}{abc}$, à la place de y, on aura la valeur de x.

PROBLÊME XI.

54. *LORSQU'IL y a des incommensurables dans les coéficiens des termes d'une équation, comme dans* $x^3 - xx\sqrt{n} + px - q\sqrt{n} = 0$, *les ôter dans plusieurs cas.*

IL faut multiplier les racines de la proposée par la grandeur incommensurable $\sqrt{n}$, en supposant $x = \frac{y}{\sqrt{n}}$; & substituant ensuite dans la proposée $\frac{y}{\sqrt{n}}$, à la place de x, on trouvera la transformée $y^3 - nyy + npy - nnq = 0$, qui n'a plus d'incommensurables.

De même pour ôter les incommensurables de $x^4 - x^3\sqrt[3]{nn} + pxx\sqrt[3]{n} - qx + \frac{r}{\sqrt[3]{n}} = 0$, il faut mutiplier les racines par $\sqrt[3]{n}$, en supposant $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$; & substituant $\frac{y}{\sqrt[3]{n}}$ dans la proposée, à la place de x, on trouvera la transformée $y^4 - ny^3 + npyy - nqy + nr = 0$, qui n'a plus d'incommensurables.

Quand on connoîtra la valeur de y dans la transformée, on trouvera la valeur de x, en substituant la valeur de y dans $x = \frac{y}{\sqrt{n}}$, dans le premier exemple; & dans $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$ dans le second exemple.

Remarque où l'on distingue les cas dans lesquels on peut ôter les incommensurables par cette methode.

* 56. 4e Transformation. ON a vû * que pour multiplier les racines d'une équation par une grandeur donnée, qu'on suppose dans ce Problême être une incommensurable, il faloit multiplier le second terme par l'incommensurable donnée; le troisiéme par son quarré; le quatriéme par sa troisiéme puissance; & ainsi de suite.

D'où il suit que pour ôter l'incommensurable $\sqrt{n}$ de l'équation, il faut que $\sqrt{n}$ se trouve au second, quatriéme, sixiéme terme de la proposée, & que $\sqrt{n}$ ne se trouve point dans les autres termes.

Pour ôter l'incommensurable $\sqrt[3]{n}$, il faut que $\sqrt[3]{nn}$, qui est le quarré de $\sqrt[3]{n}$, se trouve au second terme de la proposée; que $\sqrt[3]{n}$ se trouve au troisiéme terme; qu'il n'y ait point d'incommensurable au quatriéme terme; que $\sqrt[3]{nn}$ se trouve au cinquiéme terme, $\sqrt[3]{n}$ au sixiéme; & qu'il n'y ait point d'incommensurable au septiéme terme; & ainsi de suite.

D'où il est facile de juger comment les autres incommensurables $\sqrt[4]{n}$, $\sqrt[5]{n}$, &c. doivent être distribuées dans les termes d'une équation, afin qu'on les puisse ôter par cette methode.

PROBLÊME XII.

55. *FAIRE évanouir le penultiéme terme d'une équation* $x^4 + pxx - qx + r = 0$, *dans laquelle le second terme est évanoui.*

IL faut supposer $x = \frac{r}{y}$, & substituer $\frac{r}{y}$ dans la proposée, à la place de x; & aprés avoir ôté les fractions, & divisé les termes par r, on aura la transformée $y^4 - qy^3 + pryy + r^3 = 0$, où le penultiéme terme est évanoui.

Quand on connoîtra la valeur de y dans la transformée, on aura la valeur de x, en mettant la valeur de y dans $x = \frac{r}{y}$.

REMARQUE.

ON peut mettre dans l'équation supposée $x = \frac{r}{y}$, telle grandeur connue qu'on voudra, à la place de r; mais alors le premier terme de la transformée aura un coéficient, ou bien la transformée aura des fractions: Mais en mettant le dernier terme tout connu r dans $x = \frac{r}{y}$, la transformée n'aura pas de fractions, & le premier terme n'aura pas d'autre coéficient que l'unité.

On peut par la même methode, quand ce n'est pas le second terme qui manque dans la proposée, mais le troisiéme, ou le quatriéme, &c. faire en sorte que le terme également éloigné du dernier terme, manque dans la transformée.

Enfin quand le penultiéme terme manque dans la proposée, on peut par la même methode, faire en sorte que le second terme soit évanoui dans la transformée.

Les exemples en sont faciles à faire, sans qu'il soit necessaire d'en prolonger ce Traité.

ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui se réduisent à des équations composées.

LIVRE IV.

Où l'on explique la résolution des équations en general, c'est à dire de tous les degrés, lorsque leurs racines sont commensurables; la maniere de réduire les équations composées au plus simple degré; & ce qui regarde les équations qui ont des racines égales.

SECTION I.

Où l'on explique la résolution des équations en general, lorsque leurs racines sont commensurables.

PROBLEME I.

56. *TROUVER les racines commensurables d'une équation composée numerique ou litterale, de quelque degré qu'elle puisse être, dont zero est le second membre, lorsque son premier terme n'a pas d'autre coéficient que l'unité; qu'il n'y a dans ses termes ni fractions, ni incommensurables; & que tous les termes sont homogenes lorsque l'équation est litterale.*

METHODE GENERALE.

1°. IL faut trouver tous les diviseurs du dernier terme, dont l'unité & le dernier terme lui-même, sont toujours du nombre, & écrire tous ces diviseurs de suite & par ordre,

c'eſt à dire, les plus ſimples les premiers. 2°. Il faut diviſer l'équation propoſée ſucceſſivement par l'inconnue lineaire de l'équation moins chacun de ces diviſeurs du dernier terme, en commençant par les plus ſimples, ſuppoſé qu'on connoiſſe par les ſignes qu'il y a des racines poſitives dans l'équation. Il faut enſuite la diviſer ſucceſſivement par l'inconnue lineaire plus chacun des diviſeurs du dernier terme, en allant par ordre des plus ſimples aux plus composés, ſuppoſé qu'on connoiſſe par les ſignes qu'il y a des racines négatives dans l'équation. Le premier des diviſeurs par lequel
*26. l'équation ſera diviſée ſans reſte, * contiendra une des racines qu'on cherche, qui ſera poſitive, ſi dans le diviſeur elle eſt jointe à l'inconnue par le ſigne $-$; & négative, ſi c'eſt par le ſigne $+$. 3°. Aprés avoir trouvé une racine de l'équation, on continuera d'operer de la même maniere ſur le quotient qu'on aura trouvé, & ſi on trouve une ſeconde racine, on operera de la même maniere ſur le nouveau quotient; ce que l'on continuera juſqu'à ce qu'on ait trouvé toutes les racines de l'équation: & on les trouvera toutes par cette methode, ſi elles ſont toutes commenſurables.

EXEMPLE I.

POUR trouver les racines de l'équation $x^3 - 3xx - 10x + 24 = 0$, 1°, il faut chercher tous les diviſeurs du dernier terme, & l'on trouvera 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. 2°. Il faut faire les équations ſimples $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 6 = 0$, $x - 8 = 0$, $x - 12 = 0$, $x - 24 = 0$, dont les racines ſont poſitives, & contiennent de ſuite tous les diviſeurs du dernier terme. Il faut faire de même les équations ſimples $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$, &c. dont les racines ſont négatives, & contiennent les mêmes diviſeurs.

S'il n'y avoit que des racines poſitives, les premieres équations ſimples ſuffiroient; & les dernieres ſuffiroient s'il n'y en avoit que de négatives: mais il faut ſe ſervir des unes & des autres, les ſignes des termes de l'équation propoſée faiſant voir qu'elle contient des racines poſitives & négatives.

Il faut enſuite diviſer l'équation propoſée par $x - 1 = 0$; & comme l'on trouve un reſte, & que la diviſion n'eſt pas exacte, on eſt aſſuré que $x - 1 = 0$ ne contient pas une racine poſitive de la propoſée, c'eſt à dire que $+1$ n'eſt pas une racine de la propoſée.

Il faut la diviſer par $x + 1 = 0$; & comme l'on trouve un reſte; $x + 1 = 0$ ne contient pas une racine négative de l'équation. Les deux diviſeurs $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$ n'ayant pas fait trouver de racines, il faut ſe ſervir par ordre des ſuivans, en commençant par $x - 2 = 0$: mais l'on trouve que la propoſée ſe diviſe exactement par $x - 2 = 0$, & le quotient eſt $xx - 1x - 12 = 0$. Cela fait voir que $x - 2 = 0$ contient une racine poſitive, qui eſt $+2$, de l'équation propoſée.

3°. Il ne faut plus diviſer la propoſée, mais ſeulement le quotient $xx - 1x - 12 = 0$, non par les diviſeurs $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, qui ont donné des reſtes, (car s'ils étoient des diviſeurs exacts de ce quotient, ils le ſeroient auſſi de la propoſée,) mais par les diviſeurs $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, & les autres ſuivans; & l'on trouve qu'en le diviſant par $x - 2 = 0$, par $x + 2 = 0$, par $x - 3 = 0$, il y a des reſtes; mais qu'il ſe diviſe exactement par $x + 3 = 0$, & le quotient eſt $x - 4 = 0$; ainſi $x + 3 = 0$, & $x - 4 = 0$, contiennent les deux autres racines de la propoſée, qui ſont la négative -3, & la poſitive $+4$. Et l'équation eſt reſolue; les trois racines ſont $+2$, -3, $+4$.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines de l'équation $x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0$:

1°. Il faut chercher tous les diviſeurs du dernier terme, qui ſont 1, 2, 4, 8.

2°. Il faut faire les ſeules équations ſimples $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 8 = 0$; parceque les ſignes alternatifs $+$ & $-$ de la propoſée, font voir que toutes ſes racines ſont poſitives.

Il faut diviſer la propoſée ſucceſſivement par ces équations ſimples, & l'on trouve que $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, donnent des reſtes; mais que la diviſion ſe fait exactement par $x - 4 = 0$; & le quotient eſt $xx - 5x + 2 = 0$. Cela fait voir que $+4$ eſt une racine de la propoſée.

3°. Il faut diviſer le quotient non par $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, qui ont donné des reſtes, mais par $x - 4 = 0$, $x - 8 = 0$,

& la division ne pouvant se faire exactement, le quotient ou l'équation $xx - 5x + 2 = 0$, n'a pas de racines commensurables.

Si l'on veut avoir la résolution entiere de la proposée $x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0$, dont on connoît déja une des racines, qui est $+4$, on cherchera les deux autres en résolvant l'équation $xx - 5x + 2 = 0$, qui est du second degré. Il faut faire passer le dernier terme dans le second membre, & l'on aura $xx - 5x = -2$; ajouter $+\frac{25}{4}$, qui est le quarré de la moitié du coëficient du second terme, à chaque membre, & l'on aura $xx - 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 2 = \frac{17}{4}$; & enfin tirer la racine quarrée de chaque membre, & l'on aura $x - \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{17}{4}}$, & par transposition $x = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}$, ou $x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$: & l'on aura encore $x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$, en divisant $xx - 5x + 2 = 0$, par $x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17} = 0$. Et la proposée sera entierement résolue.

EXEMPLE III.

Pour trouver les racines de

$$\begin{array}{llll} x^3 - 2axx & - 3aax & + 6aab & = 0 \\ - 2bxx & + 4abx & + 9aac & \\ - 3cxx & + 6acx & & \end{array}$$

1°. Il faut chercher tous les diviseurs du dernier terme, qui sont $1.\ 3.\ a.\ aa.\ 3a.\ 3aa.\ 2b + 3c.\ 6b + 9c.\ 2ab + 3ac.\ 6ab + 9ac.\ 2aab + 3aac.\ 6aab + 9aac.$

2°. Les équations simples qui doivent servir de diviseurs pour les racines positives, sont $x - 1 = 0.\ x - 3 = 0.\ x - a = 0.\ x - aa = 0.\ x - 3a = 0$, &c. Pour les racines négatives, $x + 1 = 0.\ x + 3 = 0.\ x + a = 0.\ x + aa = 0.\ x + 3a = 0$, &c.

En faisant la division de la proposée par $x - 1 = 0.\ x + 1 = 0.\ x - 3 = 0.\ x + 3 = 0.\ x - a = 0$, on trouve des restes: mais divisant la proposée par $x + a = 0$, la division est exacte, & le quotient est

$$\begin{array}{lll} xx - 3ax & + 6ab & = 0 \\ - 2bx & + 9ac & \\ - 3cx & & \end{array}$$

Ainsi $x + a = 0$ contient une racine négative de la proposée, qui est $-a$.

3°. Continuant de diviser ce quotient, qui ne contient que des racines positives, comme les signes alternatifs $+$ & $-$ le font voir, par les seuls diviseurs des racines positives, en

passant ceux qui ont déja donné des restes, on trouve que la division se fait exactement par $x - 3a = 0$, & que le quotient est $x - 2b - 3c = 0$; ainsi $+3a$, & $+2b + 3c$ sont les deux autres racines de la proposée, qui sont positives: & la proposée est resolue.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir clairement la methode du premier Problême, dont la démonstration est évidente par la formation des équations composées.

COROLLAIRES.

I.

57. Lorsque l'inconnue n'est pas lineaire dans le penultiéme terme, mais regardant la puissance de l'inconnue qui est dans ce penultiéme terme comme lineaire, les autres termes, excepté le dernier, en contiennent les puissances exactes, comme dans l'équation

$$\begin{array}{lllll} x^6 + aax^4 & - a^4xx & - a^6 & & = 0. \\ - 2ccx^4 & + c^4xx & - 2a^4cc & & \\ & & - aac^4 & & \end{array}$$

Dans ce cas il ne faut pas prendre dans les équations simples qui doivent être les diviseurs de la proposée, l'inconnue lineaire, mais la puissance de l'inconnue qui est dans le penultiéme terme.

Dans cet exemple, où les diviseurs du dernier terme sont $1.\ a.\ aa.\ aa + cc$, &c. les équations simples qui doivent servir de diviseurs seront $xx - 1 = 0$, $xx - a = 0$, $x^2 - aa = 0$, $xx - aa - cc = 0$, &c. En faisant la division de la proposée par $xx - aa - cc = 0$, on trouve qu'elle se fait sans reste; ainsi $+aa + cc$ est une racine positive de la proposée, & le quotient

$$\begin{array}{lll} x^4 + 2aaxx & + a^4 & = 0, \\ - ccxx & + aacc & \end{array}$$

contient les deux autres racines qui sont incommensurables.

En resolvant ce quotient, qui est une équation du second degré, on trouvera que les deux autres racines sont $\frac{1}{2}cc - aa + \frac{1}{2}c\sqrt{cc - 8aa}$, & $\frac{1}{2}cc - aa - \frac{1}{2}c\sqrt{cc - 8aa}$.

II.

58. Au lieu de faire la division de la proposée par l'inconnue $-$ ou $+$ chacun des diviseurs du dernier terme, on peut substituer successivement dans la proposée, chacun des diviseurs du dernier terme & ses puissances, à la place de l'inconnue & de ses puissances; celui des diviseurs dont la substi-

tution fera que tous les termes se détruiront par les signes
* 35. contraires, * sera une des racines de l'équation; & les diviseurs dont la substitution ne fera pas détruire tous les termes par des signes contraires, ne seront pas les racines de l'équation: ceux de ces diviseurs du dernier terme qui étant substituez dans la proposée avec le signe +, feront détruire
* 33. tous les termes de l'équation,* seront les racines positives: ceux qui étant substituez avec le signe —, feront détruire
* 35. tous les termes de la proposée,* seront les racines négatives.

En substituant par ordre dans le premier exemple $x^3 - 3xx - 10x + 24 = 0$, les diviseurs du dernier terme $+1, +2, +3$, &c. ou $-1, -2, -3$, &c. on trouve que la substitution de $+1$, & de -1, ne fait pas détruire les termes; mais la substitution de $+2$ à la place de x, donne $+8 - 12 - 20 + 24$, dont tous les termes se détruisent; ainsi $+2$ est une racine positive de la proposée.

On abaissera ensuite la proposée, en la divisant par $x - 2 = 0$; & l'on trouvera le quotient $xx - 1x - 12 = 0$, qui contient les deux autres racines de la proposée; & substituant dans ce quotient, non les diviseurs $+1, -1$, qui n'ont pas fait évanouir tous les termes de la proposée, mais les autres $+2, -2, +3, -3$, &c. l'on trouve que la substitution de -3 fait détruire tous les termes, les rendant égaux à zero, ainsi -3 est une racine négative de l'équation proposée.

Divisant le quotient $xx - 1x - 12 = 0$, par $x + 3 = 0$, l'on trouve le quotient juste $x - 4 = 0$, qui fait voir que $+4$ est la troisiéme racine de la proposée.

La démonstration de ce Corollaire est évidente *par 31.*

III.

Le coéficient du second terme d'une équation composée contenant les racines de l'équation, il est évident que les diviseurs du dernier terme, qui ont plus de dimensions que le coéficient du second terme, sont inutiles, & qu'ils ne peuvent servir pour former les équations lineaires qui peuvent exactement diviser la proposée; ainsi dans le troisiéme exemple, où le coéficient du second terme est lineaire, les diviseurs du dernier terme qui ont plus d'une dimension, sont inutiles, & ne peuvent être les racines de l'équation.

Dans les équations numeriques, s'il y avoit des diviseurs

qui surpassassent le plus grand coéficient négatif augmenté de l'unité, ils seroient inutiles pour trouver les racines positives, étant plus grands que les racines positives.* * 47.

IV.

Lorsque la methode du Problême fait trouver quelques racines, mais non pas toutes, il est évident que l'équation contient des racines commensurables, qui sont celles que fait trouver la methode; & d'autres incommensurables, qui sont celles qu'on ne peut pas trouver par la methode: Et si l'on n'en peut trouver aucune par le Problême, elles sont toutes incommensurables.* * 35.

V.

Il y a des cas où quand même l'équation composée contiendroit des incommensurables, on ne laisseroit pas d'en trouver les racines par la methode generale, il faut dans ces cas que la grandeur incommensurable soit un diviseur exact du dernier terme de l'équation, ou qu'elle soit une partie d'un diviseur exact du dernier terme, comme dans cet exemple:

$$\begin{matrix} x^3 + bxx & + 2bx\sqrt{ab + 3bb} + 18b^3 & = 0 \\ - xx\sqrt{ab + 3bb} & - 6bb\sqrt{ab + 3bb} & \end{matrix}$$

La grandeur $-3b + \sqrt{ab + 3bb}$, est un diviseur exact du dernier terme. En divisant la proposée par $x + 3b - \sqrt{ab + 3bb} = 0$, la division est exacte, & l'on trouve le quotient $xx - 2bx + 6bb = 0$; ainsi $-3b + \sqrt{ab + 3bb}$, est une racine de la proposée, & le quotient contient les deux autres racines, qui sont imaginaires, l'une étant $b + \sqrt{-5bb}$, & l'autre $b - \sqrt{-5bb}$.

VI.

Lorsqu'une équation composée est le produit d'autres équations composées d'un moindre degré que la proposée, & qu'il y en a quelqu'une parmi ces dernieres qui n'a que le premier & le dernier terme, comme $xx - aa = 0$, $x^3 - a^3 = 0$, &c. & que ce dernier terme $-aa$, ou $-a^3$ est une grandeur commensurable, on peut trouver par la methode generale ces équations d'un moindre degré, qui n'ont que le premier & le dernier terme.

Par exemple, on veut resoudre l'équation $x^4 - 2bx^3 - aaxx + 2aabx - 4aabb = 0$, les diviseurs du dernier
$+ 4bbxx$

terme sont $1 . a . b . ab . aa . bb . aab . abb . aabb$. On trouve qu'en divisant la proposée par les équations $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - a = 0$, $x + a = 0$, $x - b = 0$, $x + b = 0$; la division n'est pas exacte.

Il faut voir ensuite si la proposée ne peut point être divisée par $xx - ab = 0$, $xx + ab = 0$, $xx - aa = 0$; & l'on trouve qu'elle se divise exactement par $xx - aa = 0$; & que le quotient est $xx - 2bx + 4bb = 0$: Ainsi $xx - aa = 0$ est une des équations dont la proposée est le produit, & l'autre est le quotient $xx - 2bx + 4bb = 0$.

En resolvant $xx - aa = 0$, on trouve $xx = aa$, $x = \sqrt{aa}$, & $x = -\sqrt{aa}$, qui sont deux racines de la proposée.

Le quotient $xx - 2bx + 4bb = 0$, contient les deux autres racines $+b + \sqrt{-3bb}$, $+b - \sqrt{-3bb}$, qui sont imaginaires.

PROBLÊME II.

59. *LORSQU'UNE équation composée, de quelque degré qu'elle puisse être, a un coéficient different de l'unité dans son premier terme; qu'elle n'a ni fractions, ni incommensurables; trouver toutes les racines commensurables qu'elle peut avoir.*

METHODE GENERALE.

1°. IL faut trouver tous les diviseurs du coéficient du premier terme, & tous les diviseurs du dernier terme; & aprés avoir multiplié tous les diviseurs du premier terme par l'inconnue lineaire, il faut faire des équations simples de ces produits, & de chacun des diviseurs du dernier terme, mettant le signe $-$ devant chacun de ces diviseurs du dernier terme, pour trouver les racines positives de la proposée; & $+$ pour trouver les négatives.

2°. Il faut diviser la proposée successivement par ces équations simples, jusqu'à ce qu'on en trouve une qui fasse la division sans reste: Elle contiendra une des racines de la proposée.

3°. Il faut continuer l'operation sur le quotient, jusqu'à ce qu'on trouve une seconde racine de la proposée, & faire la même operation sur le quotient que fera trouver cette seconde racine.

En continuant cette operation, on trouvera toutes les racines de la proposée, si elles sont commensurables.

S'il se trouve des quotiens dont on ne puisse trouver les racines par cette methode, la proposée aura des racines incommensurables, qui sont celles de ces quotiens. Et si l'on ne pouvoit trouver aucune racine de la proposée par cette methode, elles seroient toutes incommensurables.

EXEMPLE.

POUR trouver les racines de
$$\begin{array}{llll} ccfx^3 & - aacfxx & + aabbcx & - 3aab^4 = 0 \\ & - bbccxx & + 3aabbfx & \\ & - 3bbcfxx & + 3b^4cx & \end{array}$$

1°, tous les diviseurs du coéficient ccf du premier terme sont $1 . c . cc . f . cf . ccf$. Tous les diviseurs du dernier terme $3aab^4$ sont $1 . 3 . a . 3a . aa . 3aa . b . 3b . ab . 3ab . aab . 3aab . bb . 3bb$, &c. Tous les produits des diviseurs du coéficient du premier terme par l'inconnue x, sont $x . cx . ccx . fx . cfx . ccfx$. Les équations simples par lesquelles il faut diviser la proposée qui n'a que des racines positives, comme les signes alternatifs $+$ & $-$ le font voir, sont $x - 1 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - a = 0$, $x - 3a = 0$, &c. $cx - 1 = 0$, $cx - 3 = 0$, $cx - a = 0$, $cx - 3a = 0$, $cx - aa = 0$, &c. $ccx - 1 = 0$, $ccx - 3 = 0$, &c. $fx - 1 = 0$, $fx - 3 = 0$, &c. & ainsi de suite.

Si la proposée avoit des racines négatives, il faudroit encore faire les équations simples $x + 1 = 0$, $x + 3 = 0$, &c. $cx + 1 = 0$, $cx + 3 = 0$, &c. $ccx + 1 = 0$, $ccx + 3 = 0$, &c. & ainsi de suite.

2°. Il faut diviser la proposée par ces équations simples, & l'on trouve que $cx - aa = 0$, fait la division sans reste; & que le quotient est
$$\begin{array}{lll} cfxx & - 3bbfx & + 3b^4 = 0. \\ & - bbcx & \end{array}$$
Ainsi $cx - aa = 0$, contient une racine de la proposée qui est $x = \frac{aa}{c}$.

3°. Il faut continuer la même operation sur le quotient; mais il ne faut se servir que des équations simples, dont le premier terme est le produit d'un des diviseurs du coéficient cf du premier terme du quotient par x, & dont le second terme est un des diviseurs du dernier terme $3b^4$ du quotient, & passer toutes les autres comme inutiles, comme aussi celles qui ont donné des restes dans la premiere operation; & l'on trouvera que le quotient
$$\begin{array}{lll} cfxx & - 3bbfx & + 3b^4 = 0, \\ & - bbcx & \end{array}$$
se divise

exactement par $fx - bb = 0$, & que le quotient qui en vient est $cx - 3bb = 0$. Ainsi l'on a les deux autres racines de la proposée, qui sont $x = \frac{bb}{f}$, & $x = \frac{3bb}{c}$.

La démonstration de ce Problême est évidente par la formation des équations composées, dont le premier terme
*27. a un coëficient different de l'unité. *

AVERTISSEMENT.

On verra l'usage du second Problême dans la suite, lorsqu'on enseignera à abaisser une équation composée au plus simple degré ; & l'on voit assez qu'il sert à trouver les racines des équations composées qui ont des fractions, lorsqu'on ne veut pas prendre la peine de les transformer en d'autres qui n'ayent que l'unité pour le coëficient du premier terme.

SECTION II.

Où l'on explique d'autres methodes pour résoudre le premier & le second Problême, qui abregent souvent les operations.

PREMIERE METHODE.

60. 1°. Il faut partager toutes les grandeurs de l'équation en deux sommes, & chercher par la methode qu'on a donnée pour trouver le plus grand diviseur commun, un diviseur commun à ces deux sommes : si ce diviseur commun contient l'inconnue lineaire, il contient necessairement une racine de l'équation ; & l'équation étant divisée par ce diviseur commun ; le quotient contiendra les autres racines, qu'on cherchera de la même maniere.

2°. Si ce diviseur commun contient differentes puissances de l'inconnue, il faut diviser l'équation proposée par ce diviseur commun ; & si le quotient exact, qui en viendra necessairement, contient l'inconnue lineaire, ce quotient contiendra une des racines de la proposée, & le diviseur commun contiendra les autres. Si ce quotient contient differentes puissances de l'inconnue, on est assuré que ce quotient & le diviseur commun, sont deux équations dont la proposée est le produit : On operera sur chacune comme l'on a fait sur la proposée ; c'est à dire, on partagera le diviseur commun en deux sommes, dont on cherchera le diviseur commun ; & on partagera de même le quotient en deux sommes, dont on cherchera le diviseur commun, &c. Et en continuant d'operer de cette maniere, si l'on arrive à un diviseur commun, ou à un quotient exact, où l'inconnue soit lineaire, il contiendra une racine de la proposée ; & on les trouvera toutes les unes aprés les autres, si elles sont commensurables.

3°. Pour observer de l'ordre dans ce partage de toutes les grandeurs d'une équation en deux sommes, on mettra dans une des deux sommes toutes les quantités de l'équation où se trouve une même lettre, & toutes les autres dans l'autre. Et si cela ne réussit pas, on mettra dans une des sommes les grandeurs de l'équation, où une même lettre a un même nombre de dimensions, & les autres dans la seconde somme ; ou bien on mettra dans la premiere somme les grandeurs où sont deux lettres differentes, & les autres dans la seconde, &c.

4°. Quand on a fait le partage de l'équation en deux sommes, on peut chercher le diviseur commun de la proposée & de l'une des deux sommes, au lieu de chercher celui des deux sommes.

EXEMPLE I.

Pour trouver les racines de
$$\begin{array}{llll} x^3 - 2axx & - 3aax & - 3aab & = 0 \\ - cxx & + 3acx & + 3abc & \\ + bxx & - 2abx & & \\ & - bcx & & \end{array}$$

1°, il faut partager toutes les quantités de l'équation en deux sommes, on mettra toutes celles où se trouve c dans l'une, & les autres dans l'autre somme ; & l'on aura
$$\begin{array}{lll} x^3 - 2axx & - 3aax & - 3aab \\ + bxx & - 2abx & \end{array} \quad \text{Et} \quad \begin{array}{lll} - cxx & + 3acx & + 3abc \\ & - bcx & \end{array}$$
La seconde somme contenant c dans toutes ses grandeurs, il faut la diviser par $-c$, & l'on aura pour la seconde $\begin{array}{ll} xx & - 3ax \\ & + bx \end{array}$ $- 3ab$. Il faut diviser la premiere par cette seconde, & l'on trouvera que la division se fait exactement ; ainsi cette seconde somme est un diviseur commun de la premiere & de la seconde somme, & par consequent de la proposée.

2°. Ce diviseur commun $\begin{array}{ll} xx & - 3ax - 3ab = 0 \\ & + bx \end{array}$, étant une équation composée, & non pas lineaire, il faut diviser la proposée par ce diviseur commun, & l'on trouvera pour quotient exact l'équation lineaire $x + a - c = 0$, qui contient une racine de la proposée qui est $x = -a + c$. Le diviseur commun $\begin{array}{l} xx - 3ax - 3ab = 0, \\ \quad\ + bx \end{array}$ contient les deux autres racines de la proposée.

Pour les trouver, on partagera $\begin{array}{l} xx - 3ax - 3ab = 0 \\ \quad\ + bx \end{array}$ en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où est b, & les autres dans la seconde; & l'on aura $bx - 3ab$, & $xx - 3ax$. Divisant la premiere par b, & la seconde par x, elles seront réduites à $x - 3a = 0$, $x - 3a = 0$, qui étant la même grandeur, ont pour diviseur commun $x - 3a = 0$, qui est necessairement un diviseur exact de la proposée; & étant lineaire, il contient une seconde racine de la proposée, qui est $x = 3a$.

On divisera $\begin{array}{l} xx - 3ax - 3ab = 0, \\ \quad\ + bx \end{array}$ qui contient les deux dernieres racines de la proposée, par l'équation lineaire $x - 3a = 0$, qui contient l'une de ces racines; & le quotient $x + b = 0$, contiendra la derniere racine, qui est $x = -b$.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines de l'équation

$$\begin{array}{lllll} x^4 - 2ax^3 & - 3aaxx & + 15aabx & - 18aabb & = 0 \\ \quad - c & + 3ac & - 15abc & + 18abbc & \\ \quad - 5b & + 10ab & - 3aad & + 9aabd & \\ \quad + d & - 2ad & + 3acd & - 9abcd & \\ & + 5bc & - 12abb & & \\ & - dc & + 6abd & & \\ & + 6bb & - 6bbc & & \\ & - 3bd & + 3bcd & & \end{array}$$

1°, il faut partager toutes les quantités de l'équation en deux sommes; on peut mettre dans la premiere toutes les quantités où sont les deux lettres b & d, & toutes les autres dans la seconde; & l'on aura

$$\begin{array}{llll} - 5bx^3 & + 10abxx & + 15aabx & - 18aabb \\ + d & - 2ad & - 15abc & + 18abbc \\ & + 5bc & - 3aad & + 9aabd \\ & - dc & + 3acd & - 9abcd \\ & + 6bb & - 12abb & \\ & - 3bd & + 6abd & \\ & & - 6bbc & \\ & & + 3bcd & \end{array} \quad \text{Et} \quad \begin{array}{ll} x^4 - 2ax^3 & - 3aaxx \\ \quad\ - cx^3 & + 3acxx \end{array}$$

La seconde peut être divisée par xx; & faisant la division, l'on trouve pour la seconde $\begin{array}{l} xx - 2ax - 3aa \\ \quad\ - cx \ + 3ac \end{array}$

Il faut chercher le plus grand diviseur commun de la premiere somme & de cette seconde somme, & l'on trouve que $\begin{array}{l} xx - 2ax - 3aa = 0, \\ \quad\ - cx \ + 3ac. \end{array}$ est elle-même le plus grand diviseur commun.

2°. Il faut diviser la proposée par ce diviseur commun, & l'on trouve le quotient exact $\begin{array}{l} xx - 5bx + 6bb = 0; \\ \quad\ + dx - 3bd \end{array}$ on est assuré que la proposée est le produit de ces deux équations

$$\begin{array}{l} xx - 2ax - 3aa = 0, \\ \quad\ - cx \ + 3ac \end{array} \qquad \begin{array}{l} xx - 5bx + 6bb = 0, \\ \quad\ + dx - 3bd \end{array}$$

Il faut chercher séparément les racines de chacune, de la même maniere qu'on a cherché celles de la proposée; c'est à dire, il faut partager la premiere en deux sommes, en mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve la lettre c, & les autres dans la seconde; & l'on trouve

$$-cx + 3ac, \quad \text{Et} \quad xx - 2ax - 3aa.$$

Divisant la premiere par $-c$, l'on trouve $x - 3a$, qui est un diviseur commun de la premiere & de la seconde; par consequent $x - 3a = 0$, contient une racine de l'équation $\begin{array}{l} xx - 2ax - 3aa = 0; \\ \quad\ - cx \ + 3ac \end{array}$ & par consequent une racine de la proposée, qui est $x = 3a$. En divisant $\begin{array}{l} xx - 2ax - 3aa = 0, \\ \quad\ - cx \ + 3ac \end{array}$ par $x - 3a = 0$, le quotient $x + a - c = 0$, contient une autre racine.

Il faut à present trouver les racines de $\begin{array}{l} xx - 5bx + 6bb \\ \quad\ + dx - 3bd \end{array} = 0$; pour cela on partagera cette équation en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve d, & les autres dans la seconde; & l'on aura

$$+ dx - 3bd, \quad \text{Et} \quad xx - 5bx + 6bb.$$

On divisera la premiere par d, & l'on aura $x - 3b$, qui est un diviseur de la seconde $xx - 5bx + 6bb$. Ainsi $x - 3b = 0$, contient une racine de $\begin{array}{l} xx - 5bx + 6bb = 0. \\ \quad\ + dx - 3bd \end{array}$ Divisant cette équation par $x - 3b = 0$, l'on trouvera le quotient $x - 2b + d = 0$, qui contient l'autre racine ; & l'on a les quatre racines de la proposée.

Démonstration de cette methode.

ELLE dépend de cet axiome, qu'un diviseur commun aux deux parties d'un tout, est diviseur du tout ; & qu'un diviseur commun du tout & d'une partie, est diviseur de l'autre partie.

Les équations faites de l'inconnue de l'équation proposée, & de quelques-unes des grandeurs connues de la proposée, quand elles sont des diviseurs exacts de la proposée, contiennent les racines de la proposée. Or il est évident par l'axiome précedent, qu'on trouve par la methode ces équations qui divisent exactement la proposée ; on trouve donc par la methode les racines de la proposée ; où quand elles n'en ont pas de commensurables, on trouve les équations plus simples que la proposée, qui contiennent ces racines, quand elle est le produit d'autres équations plus simples commensurables.

Application de la même methode au second Problême.

POUR trouver les racines de

$$\begin{array}{l} ccfx^3 - aacfxx + aabbcx - 3aab^4 = 0 \\ \qquad\quad - bbccxx + 3aabbfx \\ \qquad\quad - 3bbcfxx + 3b^4cx \end{array}$$

1°, on partagera l'équation en deux sommes, mettant dans la premiere toutes les grandeurs où se trouve b, & les autres dans la seconde ; & l'on aura

$$\begin{array}{l} - bbccxx + aabbcx - 3aab^4 \\ - 3bbcfxx + 3aabbfx \\ \qquad\qquad + 3b^4cx \end{array} \qquad \text{Et} \quad ccfx^3 - aacfxx$$

Divisant la premiere par $- bb$, & la seconde par $cfxx$, on aura

$$\begin{array}{l} ccxx - aacx + 3aabb \\ + 3cfxx - 3aafx \\ \qquad\quad - 3bbcx \end{array} \qquad \text{Et} \quad cx - aa$$

On cherchera le plus grand diviseur commun, & on trouvera que $cx - aa = 0$, est le plus grand diviseur commun ; par consequent $cx - aa = 0$ contient une racine de la proposée, qui est $x = \frac{aa}{c}$.

On divisera la proposée par $cx - aa = 0$, & l'on aura le quotient $\begin{array}{l} cfxx - 3bbfx + 3b^4 = 0, \\ - bbcx. \end{array}$ qui contient les deux

autres racines de la proposée. On le partagera en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où est f, & les autres dans la seconde ; & l'on aura

$$cfxx - 3bbfx, \qquad \text{Et} \quad - bbcx + 3b^4.$$

Divisant la premiere par fx, & la seconde par $- bb$, l'on aura $cx - 3bb$, Et $cx - 3bb$. Ces deux sommes contenant les mêmes grandeurs, chacune est leur diviseur commun ; par consequent $cx - 3bb = 0$, contient une seconde racine de la proposée, qui est $x = \frac{3bb}{c}$.

Enfin divisant $\begin{array}{l} cfxx - 3bbfx + 3b^4 = 0, \\ - bbcx \end{array}$ par $cx - 3bb = 0$, on trouvera pour quotient $fx - bb = 0$, qui contient la troisiéme racine de la proposée, qui est $x = \frac{bb}{f}$.

La démonstration est la même.

REMARQUES.

I.

ON pourroit proposer la même methode de cette autre maniere. Il faut supposer toutes les grandeurs de l'équation proposée où se trouve une même lettre, ou deux lettres differentes, égales à zero, en supposant que cette lettre, ou chacune de ces lettres, est égale à zero, & feindre une équation de toutes ces grandeurs, & si l'on veut une autre de toutes les autres grandeurs de l'équation, & chercher un diviseur commun à ces deux équations ; ou bien (si l'on veut) chercher un diviseur commun à la proposée, & à l'une de ces deux équations, & faire le reste de l'operation marquée dans la methode.

II.

Lorsque toutes les racines d'une équation composée sont incommensurables, & qu'elle ne peut pas être le produit d'équations simples commensurables, elle le peut être souvent de deux ou de plusieurs équations composées plus simples, chacune d'un moindre degré que la proposée, lesquelles équations composantes, quoiqu'elles n'ayent pas leurs racines commensurables, peuvent pourtant être elles-mêmes commensurables ; c'est à dire, elles peuvent ne contenir aucunes incommensurables. Or il est évident que la methode qu'on vient d'expliquer, ne sert pas seulement à trouver les racines commensurables de la proposée, mais aussi les équations composantes plus simples que la proposée, & dont elle est le produit, lorsque ces équations plus simples sont commensurables; ce qui sert à abaisser la proposée à un moindre degré.

III.

Lorsqu'aprés avoir fait le partage de toutes les grandeurs d'une équation composée en deux sommes, de toutes les manieres qu'il est possible, on ne trouve aucune équation simple qui la divise exactement, c'est une marque qu'elle n'a aucune racine commensurable; & lorsqu'on ne trouve aucune équation composée plus simple que la proposée qui la divise exactement, c'est une marque qu'elle ne peut être abaissée à un degré plus simple; c'est à dire, qu'elle ne peut être le produit d'autres équations composées plus simples qui soient commensurables.

IV.

Cette methode s'étend aussi aux équations qui ont des incommensurables, lorsque ces équations sont le produit d'autres équations plus simples qui contiennent les mêmes incommensurables, ou du moins dont une les contient.

Pour trouver, par exemple, les racines de

$$\begin{array}{l} x^3 + bxx \\ \quad - xx\sqrt{ab+3bb} \\ + 2bx\sqrt{ab+3bb} + 18b^3 \\ \quad - 6bb\sqrt{ab+3bb} \end{array} = 0,$$

on partagera cette équation en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve l'incommensurable $\sqrt{ab+3bb}$, & les autres dans la seconde; & l'on aura

$$-xx\sqrt{ab+3bb} + 2bx\sqrt{ab+3bb} - 6bb\sqrt{ab+3bb}.$$

Et $x^3 + bxx + 18b^3$. Divisant la premiere par $-\sqrt{ab+3bb}$, l'on aura pour la premiere $xx - 2bx + 6bb$. On cherchera le plus grand diviseur commun de la premiere & de la seconde somme, & l'on trouvera que $xx - 2bx + 6bb = 0$, est ce diviseur commun, par lequel divisant la proposée, on trouvera le quotient exact $x + 3b - \sqrt{ab+3bb} = 0$, qui contient une racine de la proposée, qui est $x = -3b + \sqrt{ab+3bb}$. Le diviseur $xx - 2bx + 6bb = 0$, contient les deux autres qui sont imaginaires, la premiere étant $x = b + \sqrt{-5bb}$; la seconde, $x = b - \sqrt{-5bb}$.

SECONDE METHODE.

61. 1°. Il faut regarder une des grandeurs connues de l'équation composée dont on veut trouver les racines, ou bien les équations commensurables plus simples qui la divisent exactement, comme l'inconnue de l'équation; & considerer l'inconnue de l'équation comme une grandeur connue, & ordonner l'équation par raport à cette inconnue supposée.

2°. Il faut ensuite appliquer à l'équation ainsi ordonnée, la methode du second Problême, ou la premiere methode de cette section; & si l'on trouve des équations, dans lesquelles l'inconnue de la proposée soit lineaire, qui divisent exactement cette équation, on aura les racines de la proposée. Si l'on trouve des équations qui divisent exactement cette équation, qui contiennent des puissances de l'inconnue de la proposée, l'on aura les équations composées plus simples que la proposée, dont elle est le produit. L'on operera sur chacune de ces équations composées plus simples, comme l'on a fait sur la proposée.

3°. Dans le choix qu'on fera d'une grandeur connue de la proposée, pour en faire l'inconnue de l'équation, il faut en prendre une dont la plus haute puissance soit moindre que celle de l'inconnue de la proposée, pour avoir une équation d'un moindre degré que la proposée, & qui soit par consequent plus facile à resoudre.

EXEMPLE.

POUR trouver les racines de cette équation du troisiéme degré,

$$\begin{array}{llll} x^3 - 2cxx & - acx & + ccd & = 0, \\ \quad + axx & - bcx & - acd & \\ \quad + bxx & + abx & - bcd & \\ \quad + dxx & + ccx & + abd & \\ & - 2cdx & & \\ & + adx & & \\ & + bdx & & \end{array}$$

1°, on regardera la connue c comme inconnue, & l'inconnue x comme connue; & aprés avoir ordonné l'équation par raport à l'inconnue c, on aura l'équation suivante du second degré

$$\begin{array}{llll} dcc & - adc & + abd & = 0 \\ + xcc & - bdc & + abx & \\ & - axc & + adx & \\ & - bxc & + bdx & \\ & - 2dxc & + axx & \\ & - 2xxc & + bxx & \\ & & + dxx & \\ & & + x^3 & \end{array}$$

2°. Pour se servir de la methode du second Problême, il faut trouver tous les diviseurs du coëficient du premier terme $d + x$, qui sont $1 . d + x$; & leurs produits par l'inconnue c, qui sont c, $cd + cx$. Il faut aussi trouver tous les diviseurs du dernier terme. Pour les trouver, on feindra que ce dernier terme est une équation, & l'on aura

$$\begin{array}{llll} x^3 & + dxx & + bdx & + abd = 0. \\ & + bxx & + adx & \\ & + axx & + abx & \end{array}$$

On cherchera tous les diviseurs de son dernier terme abd, qui sont $1 . a . b . d . ab . ad . bd . abd$. On fera les équations simples $x + 1 = 0$. $x + a = 0$. $x + b = 0$. $x + d = 0$. Il est inutile d'en faire d'autres, parceque les racines de cette équation feinte sont toutes négatives, & les diviseurs ab, ad, &c. ont plus de dimensions qu'il n'en faut dans ces équations simples. L'on trouvera que la division de cette équation feinte se fait exactement par $x + a = 0$, $x + b = 0$, $x + d = 0$.

Si l'on avoit besoin de tous les diviseurs du dernier terme, il n'y auroit qu'à multiplier ces équations simples les unes par les autres deux à deux; mais ces diviseurs seroient inutiles, ayant plus de dimensions qu'il n'en faut.

Ayant les diviseurs du dernier terme, dont on a besoin, on fera, selon la methode du second Problême, les équations simples de l'inconnue c, & de chacun des diviseurs du dernier terme; & l'on aura $c - x - a = 0$, $c - x - b = 0$, $c - x - d = 0$, &c. On ne fait pas les équations simples $dc + xc - x - a = 0$, &c. parceque le premier terme $dc + xc$, a plus de dimensions qu'il ne faut. On divisera l'équation, dont c est supposée l'inconnue, par ces équations simples, & on trouvera qu'elle se divise sans reste par $c - x - a = 0$, & par $c - x - b = 0$. Ainsi ces équations simples contiennent chacune une racine de la proposée. La premiere est $x = c - a$; la seconde, $x = c - b$; & l'on trouvera, aprés avoir divisé la proposée par les équations simples $x + a - c = 0$, $x + b - c = 0$, le quotient exact $x + d = 0$, qui contient la troisiéme racine $x = - d$.

REMARQUE.

On auroit beaucoup abregé l'operation précedente, si l'on avoit examiné, avant de chercher les diviseurs du dernier

terme de l'équation dont c a été supposée l'inconnue, si un des diviseurs du premier terme $dcc + xcc$, par exemple $d + x$, ne le seroit point aussi de toute cette équation; & comme l'on auroit trouvé qu'il la divise sans reste, & que le quotient est

$$\begin{array}{lll} cc & - ac & + ab = 0, \\ & - bc & + ax \\ & - 2xc & + bx \\ & & + xx \end{array}$$

le diviseur $d + x = 0$, contiendroit déja une racine de la proposée, qui est $x = - d$. L'on trouveroit les deux autres en operant seulement sur le quotient: mais on ne s'est pas servi de cet abregé, afin de faire mieux concevoir cette seconde methode.

Autre maniere par la premiere Methode de cette Section.

On partagera l'équation ordonnée par raport à la lettre c, considerée comme inconnue, en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve la lettre d, & les autres dans la seconde; & l'on aura

$$\begin{array}{lll} + dcc & - adc & + abd \\ & - bdc & + adx \\ & - 2dxc & + bdx \\ & & + dxx \end{array} \quad \text{Et} \quad \begin{array}{lll} xcc & - axc & + abx \\ & - bxc & + axx \\ & - 2xxc & + bxx \\ & & + x^3 \end{array}$$

Divisant la premiere par d, & la seconde par x, on aura pour l'une & l'autre,

$$\begin{array}{lll} cc & - ac & + ab \\ & - bc & + ax \\ & - 2xc & + bx \\ & & + xx \end{array}$$

Ainsi le plus grand diviseur commun des deux sommes est

$$\begin{array}{lll} cc & - ac & + ab = 0, \\ & - bc & + ax \\ & - 2xc & + bx \\ & & + xx \end{array}$$

On divisera l'équation, dont c est supposée l'inconnue, par ce diviseur commun, & l'on trouvera le quotient $d + x = 0$, qui contient une racine de la proposée, qui est $x = - d$; pour avoir les deux autres, on partagera le diviseur commun en deux sommes, mettant dans la premiere les grandeurs où se trouve a, & les autres dans la seconde; & l'on aura

$$\begin{array}{ll} - ac & + ab \\ & + ax \end{array} \quad \text{Et} \quad \begin{array}{lll} cc & - bc & + bx \\ & - 2xc & + xx \end{array}$$

Divisant la premiere par $-a$, l'on aura pour la premiere $c-b-x$, qui divise exactement la seconde; ainsi $c-b-x=0$ contient une seconde racine de la proposée, qui est $x=c-b$. Divisant

$$\begin{array}{llll} cc & -ac & +ab & =0, \\ & -bc & +ax & \\ & -2xc & +bx & \\ & & +xx & \end{array}$$

par $c-b-x=0$, l'on trouvera le quotient $c-a-x=0$, qui contient la troisiéme racine, qui est $x=c-a$.

Démonstration de la seconde methode.

Il est évident que les diviseurs exacts de l'équation qu'on a ordonnée par raport à une des lettres connues de la proposée, regardée comme inconnue, sont aussi des diviseurs exacts de la proposée; & que s'ils contiennent l'inconnue
*16 & 17. lineaire x de la proposée, * ils en contiennent les racines; s'ils contiennent les puissances de l'inconnue x de la proposée, ce sont les équations commensurables plus simples que la proposée, dont elle est le produit: Or la methode fait trouver ces diviseurs exacts, lorsqu'il y en a; elle fait donc trouver les racines commensurables de la proposée, ou les équations commensurables plus simples que la proposée, dont elle est le produit.

Troisiéme methode par le moyen des transformations.

Remarques necessaires pour concevoir clairement cette methode.

Cette troisiéme methode servira à abreger la methode generale du premier Problême, principalement dans les équations numeriques; elle s'étend aussi aux équations litterales; mais les deux methodes qui précedent, sont ordinairement les plus courtes de toutes pour ces équations.

La longueur de la methode generale du premier Problême pour trouver les racines d'une équation composée, vient de ce qu'étant necessaire de diviser cette équation par une équation simple qui contienne l'inconnue plus ou moins un des diviseurs du dernier terme; quand ce dernier terme a beaucoup de diviseurs, il y a beaucoup de divisions à faire, avant de trouver les équations simples, qui en sont les diviseurs; ainsi la maniere d'abreger cette methode, seroit de diminuer le nombre des diviseurs du dernier terme de la proposée, ou de pouvoir distinguer parmi ces diviseurs ceux-là seulement qui sont utiles, & de laisser les autres.

Cela se peut faire par le moyen des transformations; 1°, en trouvant une transformée dont le dernier terme contienne moins de diviseurs que la proposée, par cette maniere on trouvera plus facilement les racines de la transformée, qui feront ensuite connoître celles de la proposée. 2°. En trouvant une ou plusieurs transformées, dont les racines soient celles de la proposée augmentées ou diminuées d'une grandeur connue; car les racines de ces transformées étant diminuées ou augmentées de la même grandeur connue, seront celles de la proposée; & ces racines des transformées devant être des diviseurs de leurs derniers termes, en diminuant ou augmentant tous les diviseurs des derniers termes de ces transformées de la même grandeur connue, il est évident qu'il n'y aura que les diviseurs ainsi diminués & augmentés, qui seront communs avec les diviseurs du dernier terme de la proposée, qui pourront être les racines de la proposée: ce qui fera distinguer parmi tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, ceux-là seulement qui en pourront être les racines.

Mais comme l'on n'a besoin que des seuls derniers termes des transformées, il faut se souvenir pour abreger le calcul, 1°, qu'en substituant une grandeur connue positive dans la proposée à la place de l'inconnue, * la somme de toutes les *39.
grandeurs de l'équation, aprés la substitution, est le dernier terme de la transformée, dont les racines seroient celles de la proposée diminuées de cette même grandeur connue: 2°, qu'en substituant une grandeur connue négative dans la proposée à la place de l'inconnue, * la somme de toutes les *39.
grandeurs de l'équation, aprés la substitution, est le dernier terme de la transformée, dont les racines seroient celles de la proposée augmentées de la même grandeur connue. Et dans ce dernier cas, il suffit de substituer la grandeur connue comme si elle étoit positive, & de changer tous les signes des termes où les puissances de l'inconnue ont des exposans impairs; c'est à dire, où il y a x, x^3, x^5, &c. Ces choses supposées, voici la troisiéme methode.

62. *Methode pour transformer une équation proposée en une autre, dont le dernier terme ait moins de diviseurs que le dernier terme de la proposée.*

PREMIER CAS. *QUAND les puissances de suite d'un diviseur du coéficient du second terme, sont des diviseurs de tous les termes suivans ; & quand le second terme étant évanoui, les puissances de suite d'un quarré diviseur du coéficient du troisiéme terme, sont des diviseurs de tous les termes suivans.*

IL faut trouver la transformée, dont les racines soient les racines de l'équation, divisées par le diviseur du second terme, dont les puissances prises de suite, sont des diviseurs des coéficients suivans & du dernier terme ; & le dernier terme de la transformée aura beaucoup moins de diviseurs que celui de la proposée.

Lorsque le second terme est évanoui, il faut trouver la transformée, dont les racines soient les racines de la proposée, divisées par la racine du quarré diviseur du troisiéme terme, dont les puissances prises de suite, sont des diviseurs des coéficients suivans & du dernier terme.

EXEMPLE I.

POUR transformer l'équation $x^3 - 4xx + 12x - 144 = 0$, en une autre, dont le dernier terme ait moins de diviseurs que 144, qui en a beaucoup, je remarque que les puissances 4 & 8 de 2, qui est un diviseur du second terme 4, sont des diviseurs de 12 & de 144 ; c'est à dire 4, quarré de 2, est diviseur de 12, & 8 cube de 2, l'est de 144.

Je divise chaque racine de la proposée par 2, c'est à dire,
* 36, 5e Transformation. je suppose * $\frac{x}{2} = y$, d'où je tire $x = 2y$; je fais la substitution de cette valeur de x, à la place de x, dans la proposée, ce qui se fait par abregé, en divisant 4 par 2, 12 par 4, 144 par 8 ; je trouve la transformée $y^3 - 2yy + 3y - 18 = 0$, dont le dernier terme 18 a bien moins de diviseurs que 144. Les diviseurs de 18 sont 1. 2. 3. 6. 9. 18.

Je trouve que $y^3 - 2yy + 3y - 18 = 0$, se divise exactement par $y - 3 = 0$, & que le quotient est $yy + 1y + 6 = 0$. Ainsi $+3$ est une racine positive de la transformée, le quotient contient les deux autres qui sont imaginaires. En

substituant 3 à la place de y dans $x = 2y$, l'on aura $x = 6$; ainsi 6 est la racine de la proposée.

EXEMPLE II.

SOIT la proposée $x^3 - 144x - 10368 = 0$, dont le dernier terme a beaucoup de diviseurs, mais il est divisible par la troisiéme puissance de 12 ; & le troisiéme terme $144x$ est divisible par le quarré de 12.

Il faut transformer cette équation en une autre qui soit telle, que les racines de la proposée, divisées par 12, soient celles de la transformée ; ainsi il faut supposer $x = 12y$; & aprés la substitution, qui se fait par abregé,* en divisant 144 par 144 quarré de 12, & 10368 par 1728 cube de 12, l'on aura la transformée $y^3 - 1y - 6 = 0$, dont le dernier terme 6, n'a que les diviseurs 1. 2. 3. 6. * 36, 5e Transformation.

Divisant cette transformée par $y - 2 = 0$, la division se fait sans reste, & l'on trouve le quotient $yy + 2y + 3 = 0$. Ainsi $+2$ est une racine positive de la transformée ; & les deux autres que contient le quotient, sont imaginaires.

Substituant $+2$ à la place de y dans $x = 12y$, l'on a $x = 24$, ainsi $+24$ est la racine de la proposée.

Second cas pour toutes les équations.

2°. *TRANSFORMER une équation, dont le dernier terme a beaucoup de diviseurs, en une autre dont le dernier terme en ait moins, lorsque l'équation n'a pas les conditions du premier cas.*

SOIT la proposée $x^3 - 10xx + 19x - 24 = 0$, qu'il faut transformer en une autre, dont le dernier terme ait moins de diviseurs que celui de la proposée.

Il faut substituer dans la proposée, à la place de x & de ses puissances, 1°, l'unité, c'est à dire $+1$; 2°, -1 ; 3°, $+2$ & ses puissances ; 4°, -2 & ses puissances ; & ainsi de suite $+3$, -3, &c. Il faut prendre la somme des grandeurs de l'équation aprés chaque substitution.

Quand on en trouvera une qui a moins de diviseurs que le dernier terme de la proposée, il faudra supposer l'inconnue de la proposée $x = y +$ ou $-$ le nombre dont la substitution a donné la somme qui a le moins de diviseurs, & substituer cette valeur de x, à la place de x, dans la proposée; & l'on aura une transformée, dont le dernier terme aura moins de diviseurs que celui de la proposée.

Il faut en chercher les racines; & quand on les aura trouvées, elles feront connoître celles de la proposée.

En substituant $+ 1$ dans l'exemple proposé $x^3 - 10xx + 19x - 24 = 0$, à la place de x, l'on trouve $1 - 10 + 19 - 24 = - 14$: or 14 a moins de diviseurs que 24. C'est pourquoi je suppose $x = y + 1$; & substituant $y + 1$ & ses puissances, à la place de x & de ses puissances, dans la proposée, je trouve la transformée suivante $y^3 - 7yy + 2y - 14 = 0$. Les diviseurs du dernier terme sont 1. 2. 7. 14. Cette transformée se divise exactement par $y - 7 = 0$, & le quotient est $yy + 2 = 0$; ainsi $y = 7$, & substituant 7 à la place de y, dans $x = y + 1$, je trouve $x = 8$; ainsi 8 est une racine positive de la proposée.

63. *Methode pour faire distinguer parmi les diviseurs du dernier terme d'une équation, ceux qui en peuvent être les racines.*

1°. Il faut substituer successivement dans la proposée 1. 2. 3. 4, &c. à la place de l'inconnue.

2°. Il faut prendre la somme de toutes les grandeurs de l'équation, aprés la substitution de chacun de ces nombres, & l'on aura autant de sommes qu'on a substitué de nombres.

3°. Il faut trouver tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, & tous les diviseurs de chacune de ces sommes.

4°. Il faut ajouter à tous les diviseurs de chaque somme, le nombre dont la substitution a donné la somme de laquelle ils sont diviseurs; & aprés les avoir ainsi augmentés, leur ajouter le signe $+$, c'est à dire, les regarder comme positifs.

Il faut retrancher de tous les mêmes diviseurs de chaque somme, le même nombre dont la substitution a donné la somme de laquelle ils sont les diviseurs, marquant $+$ devant les restes de ceux qui étoient moindres que le nombre qu'on en a retranché, & le signe $-$ devant les restes de ceux qui étoient plus grands.

5°. Il faut choisir parmi tous les diviseurs augmentés positifs de chaque somme, ceux-là seulement qui sont communs avec les diviseurs du dernier terme de la proposée; & ce seront les seuls qui pourront être les racines positives de la proposée; ainsi il faudra diviser la proposée par x moins chacun

chacun de ces diviseurs communs; & les divisions qui se feront sans reste, feront connoître les racines positives de la proposée.

On choisira de même parmi les diviseurs négatifs diminués, ceux-là seulement qui sont communs avec les diviseurs du dernier terme de la proposée, & on divisera la proposée par x plus chacun de ces diviseurs; & lorsque la division se fera sans reste, on connoîtra les racines négatives de la proposée.

EXEMPLE.

L'ÉQUATION proposée est $x^3 - 10xx + 19x - 24 = 0$; on substituera 1. 2. 3. 4, &c. à la place de x, comme on le voit ici.

$$x^3 - 10xx + 19x - 24 = 0.$$

x^3	xx	x
1	1	1
8	4	2
27	9	3
64	16	4

					Sommes.
Substitution de 1,	$+1$	-10	$+19$	-24	$= -14$
Substitution de 2,	$+8$	-40	$+38$	-24	$= -18$
Substitution de 3,	$+27$	-90	$+57$	-24	$= -30$
Substitution de 4,	$+64$	-160	$+76$	-24	$= -44.$

Diviseurs de 24, 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24.

Diviseurs de 14, 1. 2. 7. 14.
Diviseurs de 18, 1. 2. 3. 6. 9. 18.
Diviseurs de 30, 1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30.
Diviseurs de 44, 1. 2. 4. 11. 22. 44.

Diviseurs de 14 augmentés de l'unité, $+2, +3, +8, +15.$
Diviseurs de 14 diminués de 1, $0, -1, -6, -13.$
Diviseurs de 18 augmentés de 2, $+3, +4, +5, +8, +11, +20.$
Diviseurs de 18 diminués de 2, $+1, 0, -1, -4, -7, -16.$
Diviseurs de 30 augmentés de 3, $+4, +5, +6, +8, +9, +13, +18, +33.$
Diviseurs de 30 diminués de 3, $+2, +1, 0, -2, -3, -7, -12, -27.$
Diviseurs de 44 augmentés de 4, $+5, +6, +8, +15, +26, +48.$
Diviseurs de 44 diminués de 4, $+3, +2, 0, -7, -18, -40.$

Aprés avoir ainsi fait les substitutions de 1, 2, 3, 4; trouvé les sommes aprés les substitutions, & tous les diviseurs de chaque somme, & augmenté & diminué tous les diviseurs de chaque somme, du nombre dont la substitution a fait trouver la somme, & bien distingué les positifs & les négatifs; il faut choisir parmi les positifs les seuls qui sont communs à chaque somme & aux diviseurs du dernier terme 24 de la proposée.

L'on trouve qu'il n'y a que 8 qui soit commun; ainsi l'on est réduit à diviser la proposée par $x - 8 = 0$, & la division étant exacte, l'on a une racine de la proposée qui est $x = 8$.

L'on chercheroit de même si parmi tous les diviseurs négatifs de toutes les sommes, il n'y en auroit point de commun à toutes les sommes & aux diviseurs de 24; & s'il y en avoit quelqu'un, on feroit la division de la proposée par $x +$ ce diviseur commun; & si la division étoit juste, on auroit une racine négative: Mais il n'y en a aucun dans notre exemple, qui ne peut avoir que des racines positives, tous les termes ayant alternativement $+$ & $-$.

Démonstration de cette methode.

CHACUNE des sommes qu'on trouve aprés les substitutions des nombres à la place de x dans la proposée, est le dernier terme de la transformée, dont les racines positives sont les racines positives de la proposée, diminuées du nombre dont la substitution a donné cette somme, & dont les racines négatives sont les négatives de la proposée, augmentées du nombre dont la substitution a donné la somme, & dont enfin les racines négatives moindres chacune que le nombre substitué, sont encore celles des racines positives de la proposée moindres que le même nombre, qui étant diminuées de ce même nombre plus grand qu'elles, sont devenues négatives dans la transformée, par le surplus de ce nombre sur ces racines positives. Cela est évident par le troisiéme & quatriéme Corollaires des transformations*, qu'il faut se rendre familiers pour bien entendre cette démonstration.

* 38 & 39.

D'où il suit que les racines positives des transformées étant augmentées du nombre dont la substitution a donné leur dernier terme, sont les racines positives de la proposée; & les racines négatives des transformées étant diminuées du même nombre, sont les racines négatives de la proposée; enfin les racines négatives des transformées moindres que le nombre dont la substitution a donné leur dernier terme, étant retranchées de ce nombre, les quantités de surplus sont les racines positives de la proposée qui sont moindres que ce nombre.

Mais dans le temps qu'on ignore les racines des transformées & de la proposée, on regarde tous les diviseurs des derniers termes des transformées comme leurs racines; ainsi aprés les avoir augmentés du nombre qui a donné le dernier terme de chaque transformée, on peut regarder ces diviseurs ainsi augmentés, comme les racines positives de la proposée; & aprés les avoir diminués du même nombre, on les peut regarder comme les racines négatives de la proposée; & enfin aprés avoir retranché du nombre qui a donné le dernier terme d'une transformée, les diviseurs moindres que ce nombre, on peut regarder les restes comme les racines positives de la proposée, qui sont moindres que ce nombre.

Cependant les transformées n'ayant pas d'autres racines que la proposée, sçavoir les positives de la proposée, diminuées du nombre qui a donné le dernier terme de la transformée, & les négatives augmentées du même nombre, il faut que ceux des diviseurs de leurs derniers termes qui sont leurs racines, étant augmentés ou diminués du même nombre qui a donné le dernier terme de la transformée, soient égaux aux racines de la proposée; & par consequent ceux d'une transformée à ceux de l'autre; & que les mêmes soient égaux à ceux des diviseurs du dernier terme de la proposée qui en sont les racines.

D'où il suit que ceux qui ne sont pas communs, ne peuvent être les racines de la proposée, & qu'il n'y a que ceux qui sont communs qui puissent en être les racines. La methode fait donc distinguer les diviseurs du dernier terme de la proposée, qui en peuvent être les racines; ce qui étoit proposé.

Application de la methode précedente aux équations litterales.

SOIT $x^3 - 2axx + aax + aab = 0$, dont il faut trouver
$ - abx$
les racines par cette methode.

Il faut d'abord trouver tous les diviſeurs de ſon dernier terme, qui ſont $1, a, b, aa, ab, aab$.

Il n'y aura que les trois premiers qui ſerviront ; les autres ayant deux dimenſions, ne peuvent ſervir à former les équations ſimples par leſquelles il faut diviſer la propoſée, pour en trouver les racines.

Il faut transformer la propoſée en une autre, dont les racines poſitives ſoient celles de la propoſée, diminuées d'une grandeur connue, & les négatives ſoient les négatives de la propoſée, augmentées de la même grandeur connue ; c'eſt à dire, il faut trouver le ſeul dernier terme de cette transformée.

On prendra cette grandeur connue parmi les grandeurs connues de la propoſée ; on ſuppoſera, par exemple, que c'eſt $2a$.

On fera la ſubſtitution de $2a$, au lieu de x dans la propoſée, & on trouvera que la ſomme des grandeurs de l'équation, aprés la ſubſtitution, eſt $2a^3 - aab$; c'eſt à dire, c'eſt le dernier terme de la transformée.

Les diviſeurs lineaires de cette ſomme ſont $1, a, 2a - b$; ceux de deux dimenſions ſont inutiles.

Les augmentant de $2a$, on aura $+2a+1$, $+3a$, $+4a-b$.

Retranchant de $2a$ les diviſeurs moindres 1 & a, l'on aura $+2a-1$, $+a$.

Les ſeules grandeurs poſitives que donne la transformée pour trouver les racines poſitives de la propoſée, ſont donc $+2a+1$, $+3a$, $+4a-b$, $+2a-1$, $+a$.

Retranchant $2a$ du diviſeur $2a-b$, l'on aura $-b$ pour la ſeule grandeur négative que donne la transformée, pour trouver les racines négatives de la propoſée.

Or il n'y a que la grandeur $+a$, parmi les poſitives, de commune avec le diviſeur $+a$ du dernier terme de la propoſée ; ainſi il faut voir ſi la propoſée peut être diviſée par $x-a=0$, & la diviſion ſe faiſant ſans reſte, $x-a=0$ contient une racine de la propoſée, qui eſt $x=a$; & le quotient $xx-ax-ab=0$, contient les deux autres, qui ſont $x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+ab}$, & $x=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+ab}$.

SECTION III.

Où l'on explique la methode generale pour trouver par Analyſe toutes les équations commenſurables plus ſimples, dont une équation compoſée eſt le produit ; c'eſt à dire, la methode de la réduire au moindre degré.

DÉFINITION.

TOUTE équation compoſée, qu'on ſuppoſe ſans incommenſurables, peut être diviſée ſans reſte par des équations commenſurables plus ſimples qu'elle n'eſt ; ou bien elle ne le peut pas.

Lorſqu'elle peut être ainſi diviſée, on dit qu'elle eſt *réductible*, & qu'elle n'eſt pas du degré où elle ſe trouve, mais ſeulement des degrés plus ſimples, dont ſont les équations plus ſimples, par leſquelles elle peut être exactement diviſée, ſuppoſé que ces équations plus ſimples ne puiſſent pas être diviſées par d'autres équations commenſurables encore plus ſimples.

Mais lorſqu'elle ne peut être ainſi diviſée ſans reſte par d'autres équations commenſurables plus ſimples, on dit qu'elle eſt *irréductible*, & qu'elle eſt du degré où elle ſe trouve.

Ainſi une équation du cinquiéme degré, par exemple, qui ne peut être diviſée ſans reſte, par aucune équation commenſurable plus ſimple, eſt *irréductible*, & elle eſt proprement du cinquiéme degré.

Mais une équation du cinquiéme degré, qui peut être diviſée ſans reſte par une équation irréductible du ſecond degré, & par une équation irréductible du troiſiéme degré, eſt *réductible*, & elle n'eſt pas proprement du cinquiéme degré, mais du ſecond & du troiſiéme degré.

REMARQUES.

POUR faire le dénombrement exact des équations commenſurables plus ſimples, par leſquelles les équations compoſées réductibles de chaque degré, peuvent être diviſées ſans reſte, on peut dire que dans chaque degré elles ne le peuvent être que par autant d'équations plus simples qu'on peut partager le nombre qui en exprime le degré en d'autres nombres entiers, y comprenant l'unité, qui joints ensemble, feront ce même nombre.

On peut partager le nombre 3 qui exprime le troisiéme degré : 1°, en 1, 1, 1 ; 2°, en 1, 2.

Ainsi les équations du troisiéme degré ne peuvent être réductibles qu'en trois équations du premier degré, ou en deux équations, l'une du premier, & l'autre du second degré.

On peut partager le nombre 4 qui exprime le quatriéme degré : 1°, en 1, 1, 1, 1 ; 2°, en 1, 1, 2 ; 3°, en 1, 3 ; 4°, en 2, 2. Ainsi les équations réductibles du 4ᵉ degré ne peuvent être divisées sans reste que par quatre équations chacune du premier degré, ou par trois, dont deux soient du premier, & la troisiéme du second degré ; ou par deux, dont l'une soit du premier, & l'autre du troisiéme degré ; ou par deux, dont chacune soit du second degré.

On peut appliquer facilement ce qu'on vient de dire aux degrés plus élevés.

Lorsqu'on cherche les équations commensurables plus simples, par lesquelles une équation composée peut être exactement divisée, l'ordre naturel & la facilité de l'operation exigent qu'on commence par les plus simples ; c'est à dire ; 1°, qu'on cherche les équations du premier degré par lesquelles elle peut être divisée ; & aprés en avoir trouvé une, qu'on cherche encore si le quotient peut être divisé par une équation du premier degré, en continuant ainsi jusqu'à ce qu'on trouve un quotient qui ne puisse être divisé par une équation du premier degré : 2°, si la proposée ne peut être divisée par une équation du premier degré, ou si l'on est arrivé à un quotient qui ne le puisse être, il faut chercher si elle, ou le quotient ne peuvent point être divisés par une du second degré ; & si on n'en peut trouver du second degré, il en faut chercher une du troisiéme ; & ainsi de suite, ne passant aux degrés plus composés, qu'aprés être assuré qu'on ne peut trouver d'équations plus simples, qui fassent exactement la division de la proposée.

Il faut même remarquer, qu'en cherchant ainsi les équations commensurables plus simples, qui sont des diviseurs exacts d'une proposée, il faut se borner à celle dont le

degré est la moitié du degré de la proposée, lorsque la proposée est d'un degré pair ; par exemple, si elle est du quatriéme degré, il ne faut pas passer le second ; si elle est du sixiéme, ne pas passer le troisiéme, &c. & si la proposée est d'un degré impair, il faut se borner à l'équation qui est moindre d'un demi que la moitié du degré de la proposée ; ainsi il faut se borner à une équation du second degré, lorsque la proposée est du cinquiéme degré ; à une du troisieme, lorsque la proposée est du septiéme, &c.

La raison est que, quand on aura ces équations moindres jusqu'à celle du degré, qui est la moitié de celui de la proposée, ou d'un demi moindre que la moitié de celui de la proposée, en divisant la proposée par ces équations moindres, les quotiens sont les équations plus élevées, dont la proposée est le produit ; & si l'on ne trouve aucune de ces équations moindres, on est assuré que la proposée n'est pas divisible par les équations plus élevées, puisqu'elle ne le sçauroit être par ces équations plus élevées, qu'elle ne le soit aussi par les moindres, dont le degré joint avec celui des plus élevées, feroit le degré de l'équation proposée.

D'où il suit, que si une équation du troisiéme degré ne se peut diviser par une du premier degré, elle est irréductible ; si une du quatriéme ne peut être divisée par une du premier, & par une du second, elle est irréductible ; si une du cinquiéme ne le peut être par une du premier, ou par une du second, elle est irréductible, & ainsi de suite.

On a déja donné la methode generale pour trouver les équations commensurables du premier degré, par lesquelles une équation composée peut être exactement divisée ; ainsi on supposera dans cette section, qu'on a déja trouvé toutes les équations simples commensurables du premier degré, par lesquelles une équation composée peut être exactement divisée, & qu'il ne s'agit plus que de trouver les autres équations commensurables du second, troisiéme degré, &c. par lesquelles elle peut se diviser exactement. On ne parlera point du troisiéme degré, puisqu'il suffit de trouver si une équation du troisiéme degré peut ou ne peut pas se diviser sans reste par une équation du premier degré, pour sçavoir si elle est réductible ou irréductible.

On n'appliquera aussi les methodes qu'on va donner, qu'aux équations du quatriéme, cinquiéme & sixiéme degré; parceque dans l'usage ordinaire, on n'a pas besoin des degrés plus élevés, où les calculs sont immenses; cependant ces methodes peuvent s'étendre à tous les degrés.

Pour mettre de l'ordre dans cette section, on expliquera, 1°. la methode de trouver les équations commensurables du second degré, par lesquelles les équations du quatriéme, cinquiéme & sixiéme degré peuvent être divisées exactement, lorsqu'il manque quelque terme dans une de ces équations du second degré, dont elles sont le produit; comme aussi la methode de trouver les équations du second, troisiéme & quatriéme degré, dont les équations du cinquiéme & sixiéme peuvent être le produit, lorsqu'il manque quelque terme dans celle de ces deux équations plus simples, qui est du troisiéme degré, ou du quatriéme. 2°. La methode de trouver les mêmes équations commensurables plus simples, par lesquelles les équations du quatriéme, cinquiéme & sixiéme degré peuvent être divisées sans reste, lorsqu'il ne manque aucun terme dans ces équations plus simples.

PROBLÊME III.

64. *TROUVER les équations commensurables du second degré, par lesquelles une équation réductible du quatriéme peut être divisée sans reste, lorsque le second terme manque dans une de ces équations du second degré. Trouver l'équation du second degré, & celle du troisiéme ou du quatriéme, par lesquelles les équations réductibles du cinquiéme & sixiéme degré, peuvent être divisées sans reste, lorsqu'il manque quelque terme dans l'une ou l'autre de ces équations du second & troisiéme, ou quatriéme degré. Trouver enfin les deux équations chacune du troisiéme degré, par lesquelles une équation réductible du sixiéme degré, peut être divisée sans reste, lorsqu'il manque un ou plusieurs termes dans une de ces équations plus simples du troisiéme degré.*

METHODE.

1°. POUR le trouver generalement, il faut supposer que toutes les équations du quatriéme, cinquiéme & sixiéme degré, sont exprimées par ces formules,

$$x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0.$$
$$x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0.$$
$$x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0.$$

Les

Les lettres n, p, q, &c. marquent d'une maniere generale les coéficients avec leurs signes; c'est à dire, quoique ces lettres n, p, q, &c. ayent les signes $+$, il faut supposer que ces signes marquent ceux des termes des équations qu'expriment ces formules; & quand ils marquent des moins, il faut changer les signes dans les formules qu'on trouvera dans les résolutions devant ces lettres, aux degrés impairs; par exemple, si $+n$ marque un coéficient négatif, on marquera dans les formules des résolutions le signe $-$ devant n, n^3, &c. Lorsqu'il manquera quelques termes dans les équations que representent les formules, on supposera les mêmes termes des formules égaux à zero.

2°. Il faut supposer les deux équations plus simples qu'on cherche, exprimées d'une maniere indéterminée; c'est à dire, de maniere que chacune ait la même inconnue x que la proposée, & que les coéficients de leurs termes soient marqués par des lettres indéterminées; on prendra pour ces lettres indéterminées, les lettres f, g, h, i, k, l, m, laissant les lettres a, b, c, d, e, pour marquer les grandeurs connues & déterminées; les lettres v, x, y, z, pour marquer les inconnues; & les lettres n, p, q, r, s, t, pour marquer les coéficients des formules d'une maniere generale.

Ainsi pour le quatriéme degré, on supposera que les équations du second degré qu'on cherche, sont $xx + fx + g = 0$, & $xx + hx + i = 0$; pour le cinquiéme degré, $xx + fx + g = 0$, & $x^3 + hxx + ix + k = 0$; pour le sixiéme degré, $xx + fx + g = 0$, & $x^4 + hx^3 + ixx + kx + l = 0$; ou bien lorsque l'on cherche pour le sixiéme degré deux équations chacune du troisiéme degré, on supposera $x^3 + fxx + gx + h = 0$, & $x^3 + ixx + kx + l = 0$.

Mais parceque dans ce Problême on suppose que le second terme manque dans une des deux équations plus simples, on supposera dans le quatriéme degré $xx + fx + g = 0$, & $xx + i = 0$; pour le cinquiéme degré, $xx + fx + g = 0$, & $x^3 + ix + k = 0$; pour le sixiéme, $xx + fx + g = 0$, & $x^4 + ixx + kx + l = 0$; ou bien $x^3 + gx + h = 0$, & $x^3 + ixx + kx + l = 0$.

Si c'étoit quelqu'autre terme qui manquât dans l'une ou l'autre des deux équations plus simples de chaque degré, on supposeroit dans les équations indéterminées qu'on vient de former, que ces termes sont évanouis.

S

3°. Il faut multiplier les deux équations indéterminées qui sont pour chaque degré, l'une par l'autre, & leur produit sera une équation indéterminée du même degré que la proposée.

On supposera chaque terme de cette équation indéterminée (excepté le premier) égal à celui qui lui répond dans la formule; c'est à dire, le second terme de l'indéterminée égal au second terme de la proposée, le troisiéme égal au troisiéme, &c. ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'on a supposé de lettres indéterminées.

4°. On regardera toutes ces équations particulieres comme les équations du Problême, qu'il faut réduire à une seule, dont l'inconnue soit la lettre indéterminée de celle des deux équations indéterminées plus simples, qui n'a que les seuls premier & dernier terme, ou dont l'inconnue soit la lettre indéterminée qui marque le coéficient du second terme de la plus simple des deux équations indéterminées, ou si le second terme en est évanoui, la lettre indéterminée qui marque le coéficient du troisiéme terme de la même équation; c'est à dire, on dégagera toutes les déterminées comme étant des inconnues, observant de ne pas dégager l'indéterminée, qui doit servir d'inconnue à l'équation du Problême.

Cette équation qui a pour inconnue une des lettres indéterminées des équations indéterminées, s'appelle *la Réduite.*

5°. On cherchera la valeur commensurable de l'indéterminée de la réduite par la methode generale, ou lorsque la réduite n'est que du second degré, par la methode qu'on a donnée pour le second degré.

Ou bien on trouvera une seconde réduite qui ait pour inconnue la même indéterminée, & on cherchera le diviseur commun des deux réduites, & ensuite la valeur de l'inconnue du diviseur commun.

La valeur de l'indéterminée de la réduite étant connue, en la substituant dans les équations particulieres, on déterminera tous les coéficients indéterminés, & par consequent on aura les deux équations qu'on cherche.

Ou bien on substituera la valeur de l'indéterminée de la réduite dans la plus simple des deux équations indéterminées qu'on a supposées, & l'on aura aprés les substitutions, les formules qui marquent une des équations plus simples, par lesquelles la proposée peut se diviser exactement, si elle n'est pas irréductible, ou bien on aura les formules des deux équations plus simples, si on a fait toutes les substitutions. On s'en servira ensuite pour réduire une équation composée aux plus simples dont elle est composée.

Tout ceci s'éclaircira par les applications qu'on en va faire aux équations du quatriéme, cinquiéme & sixiéme degré.

Application de la methode aux équations du quatriéme degré.

POUR trouver les équations commensurables du second degré, par lesquelles une équation réductible du quatriéme degré peut se diviser sans reste, dans les cas où le second terme manque dans l'une des deux équations du second degré qui en sont les diviseurs.

1°. On supposera la formule du quatriéme degré $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$.

2°. On supposera les deux équations indéterminées du second degré $xx + fx + g = 0$, $xx + i = 0$, dans lesquelles f, g, i, sont des indéterminées, & le second terme est évanoui dans la seconde $xx + i = 0$.

3°. On prendra le produit de ces deux équations du second degré, & l'on aura l'équation indéterminée du quatriéme degré

$$x^4 + fx^3 \begin{array}{l} + gxx \\ + ixx \end{array} + fix + gi = 0.$$

On comparera les termes de cette équation (excepté le premier) avec ceux de la formule, qui leur répondent; c'est à dire, on les supposera égaux; ce qui donnera ces quatre équations, 1°, $f = n$; 2°, $g + i = p$; 3°, $fi = q$; 4°, $gi = r$.

4°. On regardera ces quatre équations particulieres comme les équations du Problême; les indéterminées f, g, i, seront considerées comme des inconnues qu'il faut dégager, & il faut réduire ces équations à une seule équation qui ait pour inconnue l'indéterminée i de l'équation $xx + i = 0$.

La premiere équation $f = n$, détermine déja la valeur de f; & la substituant dans la troisiéme $fi = q$, l'on aura $ni = q$; & divisant chaque membre par n, l'on aura $i = \frac{q}{n}$.

Cette égalité rendant i déterminée, l'équation indéterminée $xx + i = 0$, devient déterminée, & l'on a $xx + \frac{q}{n}$

$= 0$, pour l'une des deux équations du ſecond degré, par leſquelles une équation du quatriéme degré peut ſe diviſer exactement, lorſqu'elle eſt le produit de deux équations du ſecond degré, dans l'une deſquelles le ſecond terme eſt évanoüi.

On peut déterminer l'autre équation indéterminée $xx + fx + g = 0$, en ſubſtituant la valeur de i, qui eſt $\frac{q}{n}$, dans la ſeconde équation $g + i = p$, ou dans la quatriéme $gi = r$; car la ſeconde donnera, aprés la ſubſtitution, $g = p - \frac{q}{n}$; & la quatriéme $g = \frac{nr}{q}$; ainſi l'équation indéterminée $xx + fx + g = 0$, ſe changera en l'équation déterminée $xx + nx + p - \frac{q}{n} = 0$, ou bien en $xx + nx + \frac{nr}{q} = 0$.

On peut encore trouver une autre équation pour déterminer la lettre indéterminée i: car en prenant les valeurs de g dans la ſeconde & dans la quatriéme équation particuliere $g + i = p$, & $gi = r$, l'on aura $g = p - i$, $g = \frac{r}{i}$; par conſequent $p - i = \frac{r}{i}$; & multipliant par i, l'on aura l'équation du ſecond degré $ii - pi + r = 0$, qui eſt celle qu'on a nommée la réduite; & la reſolvant, on trouvera $i = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r}$.

Application des formules qu'on vient de trouver, à une équation particuliere du quatriéme degré.

SOIT l'équation du quatriéme degré $x^4 + 3ax^3 + abxx - aaxx - 3a^3x - a^3b = 0$. Il s'agit de trouver ſi elle n'eſt point réductible en deux équations du ſecond degré, dans l'une deſquelles le ſecond terme ſoit évanoüi.

1°. Afin que la formule du quatriéme degré $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, repreſente cette équation, il faut ſuppoſer $+n = +3a$; $+p = ab - aa$; $+q = -3a^3$; $+r = -a^3b$.

2°. Il faut mettre dans la formule $xx + \frac{q}{n} = 0$, la grandeur repreſentée par $+\frac{q}{n}$, qui eſt $-3a^3$ diviſée par $+3a = -aa$; & l'on aura au lieu de $xx + \frac{q}{n} = 0$, l'équation $xx - aa = 0$.

3°. Il faut diviſer la propoſée par $xx - aa = 0$, & l'on trouve que la diviſion ſe fait ſans reſte, & que le quotient exact eſt $xx + 3ax + ab = 0$.

Ainſi la propoſée n'eſt pas du quatriéme degré, mais elle

ſe réduit aux deux équations du ſecond degré $xx - aa = 0$, $xx + 3ax + ab = 0$.

On trouveroit auſſi l'équation $xx + 3ax + ab = 0$, en mettant dans la formule $xx + nx + p - \frac{q}{n} = 0$, les grandeurs repreſentées par n, p, $\frac{q}{n}$.

Application de la methode du troiſiéme Problême aux équations du cinquiéme degré.

POUR trouver les équations commenſurables du ſecond & du troiſiéme degré, par leſquelles une équation réductible du cinquiéme degré peut ſe diviſer ſans reſte, ſuppoſé que le ſecond terme manque dans l'équation du ſecond degré;

1°. Aprés avoir ſuppoſé la formule du cinquiéme degré $x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, on ſuppoſera, 2°, les deux équations indéterminées $xx + g = 0$, $x^3 + hxx + ix + k = 0$, dans leſquelles g, h, i, k, ſont indéterminées, & le ſecond terme eſt évanoüi dans $xx + g = 0$.

3°. On en prendra le produit $x^5 + hx^4 + ix^3 + kxx + gix + gx^3 + ghxx + gk = 0$; & comparant les termes de cette équation avec ceux de la formule, on aura les cinq équations particulieres qui ſuivent, 1^re^, $h = n$; 2°, $i + g = p$; 3°, $k + gh = q$; 4°, $gi = r$; 5°, $gk = s$.

4°. Regardant ces équations comme celles du Problême, on les réduira à une ſeule, qui n'aura pour inconnuë que la lettre indéterminée g.

On trouve d'abord que l'indéterminée h eſt égale à n; & prenant dans la ſeconde & la quatriéme la valeur de i, & comparant ces valeurs de i, l'on trouve la réduite qu'on cherche, $i = p - g = \frac{r}{g}$; donc $gg - pg + r = 0$.

Reſolvant cette réduite, on trouve $g = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r}$; par conſequent $xx + g = 0$, ſe change en $xx + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r} = 0$.

On peut trouver une autre réduite en comparant les valeurs de k priſes dans la troiſiéme & la cinquiéme équation; car l'on aura $k = q - ng = \frac{s}{g}$; donc $ngg - qg + s = 0$, ou bien $gg - \frac{q}{n}g + \frac{s}{n} = 0$; & reſolvant cette équation, on trouve $g = \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}}$; par conſequent $xx + g = 0$, ſe change en $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}} = 0$.

On peut, si l'on veut, par les substitutions déterminer l'équation $x^3 + hxx + ix + k = 0$; mais cela est assez inutile, car quand on voudra voir si une équation particuliere du cinquiéme degré se peut diviser sans reste par une plus simple du second degré, dans laquelle le second terme soit évanoui, & par une du troisiéme degré, il suffira de substituer dans la formule $xx + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - r} = 0$, ou dans $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}} = 0$, les grandeurs representées par n, p, q, r, s, & diviser ensuite l'équation proposée par cette équation du second degré qu'on vient de trouver; car si la proposée se peut diviser sans reste par cette équation du second degré, le quotient sera l'équation du troisiéme degré, dont la proposée est composée; & si elle ne peut se diviser sans reste par cette équation du second degré, la proposée ne sçauroit être réduite en deux équations dont l'une soit du second degré, où le second terme est évanoui, & l'autre du troisiéme degré.

Application de la methode du troisiéme Problême aux équations du sixiéme degré.

LORSQU'UNE équation du sixiéme degré dont la formule generale est $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, peut être exactement divisée par une équation du second degré dont le second terme est évanoui, & par une du 4e degré, qui a tous ses termes; on supposera, 1°, pour les trouver, les deux équations indéterminées $xx + g = 0$, & $x^4 + hx^3 + ixx + kx + l = 0$; & aprés en avoir trouvé le produit

$$\begin{array}{l} x^6 + hx^5 + ix^4 + kx^3 + lxx + gkx + gl = 0, \\ + gx^4 + ghx^3 + gixx \end{array}$$

on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale qui leur répondent; ce qui donnera les six équations particulieres suivantes.

1re, $h = n$; 2e, $i + g = p$; 3e, $k + gh = q$; 4e, $l + gi = r$; 5e, $gk = s$; 6e, $gl = t$.

2°. Regardant ces équations comme celles du Problême, on cherchera la réduite, qui n'ait pour inconnue que la lettre indéterminée g.

On la trouvera en comparant les deux valeurs de k prises dans la troisiéme & la cinquiéme, car on aura $k = q - ng = \frac{s}{g}$; d'où l'on déduira $ngg - qg + s = 0$, ou bien $gg - \frac{q}{n}g$

$+ \frac{s}{n} = 0$, qui étant résolue, donnera $g = \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}}$; substituant cette valeur de g dans $xx + g = 0$, elle sera changée en $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}} = 0$, qui est la formule dont on a besoin:

Car quand on aura une équation particuliere du sixiéme degré, pour voir si elle peut être divisée par une du second, où le second terme manque, & par une du quatriéme qui ait tous ses termes, on substituera dans la formule $xx + \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\frac{qq}{4nn} - \frac{s}{n}} = 0$, les grandeurs représentées par les lettres n, q, s; & on divisera ensuite la proposée par l'équation qu'on trouvera, & si la division est exacte, on aura ce qu'on cherche.

Autre application de la methode du troisiéme Problême aux équations du cinquiéme degré.

QUAND une équation du cinquiéme degré, dont la formule generale est $x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, se peut diviser exactement par une équation du second degré qui a tous ses termes, & par une autre du troisiéme degré, dont le second terme est évanoui; on supposera pour les trouver, 1°, ces deux équations indéterminées $xx + fx + g = 0$, $x^3 + ix + k = 0$; & aprés avoir trouvé leur produit

$$\begin{array}{l} x^5 + fx^4 + ix^3 + kxx + fkx + gk = 0, \\ + gx^3 + fixx + gix \end{array}$$

on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale qui leur répondent; ce qui donnera les cinq équations particulieres suivantes; 1re, $f = n$; 2e, $i + g = p$; 3e, $k + fi = q$; 4e, $fk + gi = r$; 5e, $gk = s$.

2°. On cherchera par ces équations une réduite qui n'ait pour inconnue que l'indéterminée g, & on la trouvera en prenant la valeur de i dans la 2e, qui est $i = p - g$; & substituant cette valeur de i dans la 3e, on aura une valeur de $k = q - np + ng$; enfin comparant cette valeur de k avec une autre valeur de k prise dans la 5e, qui est $k = \frac{s}{g}$, l'on aura la réduite $q - np + ng = \frac{s}{g}$, qui se réduit à $\begin{array}{l} ngg - npg \\ + qg \end{array} - s = 0$, ou bien $\begin{array}{l} gg - pg \\ + \frac{q}{n}g \end{array} - \frac{s}{n} = 0$, laquelle étant résolue, l'on aura $g = \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\overline{\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n}}^2 + \frac{s}{n}}$.

Substituant les valeurs de $f = n$ & de g dans $xx + fx + g = 0$, l'on aura $xx + nx + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}p - \tfrac{q}{2n}}^2 + \frac{s}{n}} = 0$, qui est la formule dont on a besoin.

On peut encore trouver une seconde réduite qui n'ait d'inconnue que l'indéterminée g, en prenant les valeurs de k dans la troisiéme & la quatriéme équation; car l'on aura $k = q - ni = \frac{r - gi}{n}$; & mettant dans cette équation la valeur de i prise dans la seconde, qui est $i = p - g$, l'on aura $q - np + ng = \frac{r - pg + gg}{n}$, qui se réduit à

$$\begin{array}{l} gg - pg + r = 0 \\ \quad - nng + nnp \\ \qquad\qquad - nq \end{array}$$

Cette équation étant résolue, on aura $g = \frac{1}{2}p + \frac{nn}{2} \pm \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}p + \tfrac{nn}{2}}^2 - r - nnp + nq}$.

Substituant les valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, on aura $xx + nx + \frac{1}{2}p + \frac{nn}{2} \pm \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}p + \tfrac{nn}{2}}^2 - r - nnp + nq} = 0$, qui est une seconde formule pour la résolution.

Application de ces formules à une équation particuliere du cinquiéme degré.

SOIT une équation du 5ᵉ degré $x^5 + ax^4 - aax^3 + aabxx$
$\qquad\qquad + abx^3 - a^3xx$
$+ a^3bb = 0$; il faut voir si elle ne peut point se réduire à deux équations plus simples, l'une du second degré, & l'autre du troisiéme dont le second terme soit évanoui, qui en soient des diviseurs.

1°. Pour la raporter à la formule generale, il faut supposer $+n = +a$, $+p = -aa + ab$, $+q = +aab - a^3$, $+r = 0$, $+s = +a^3bb$.

2°. Il faut substituer dans la formule $xx + nx + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} \pm \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}p - \tfrac{q}{2n}}^2 + \frac{s}{n}} = 0$, les valeurs des lettres n, p, &c. & l'on trouve que $\frac{1}{2}p - \frac{q}{2n} = -\frac{aa - ab}{2} - \frac{ab - aa}{2} = 0$; ainsi le quarré $\overline{\tfrac{1}{2}p - \tfrac{q}{2n}}^2 = 0$; mais $\sqrt{+\frac{s}{n}} = \sqrt{+aabb} = ab$; ainsi la formule se change en $xx + ax + ab = 0$.

Divisant la proposée par $xx + ax + ab = 0$, on trouve le quotient exact $x^3 - aax + aab = 0$. Ce qui étoit proposé.

On trouveroit la même équation $xx + ax + ab = 0$, en se servant de la seconde formule $xx + nx + \frac{1}{2}p + \frac{nn}{2} \pm \sqrt{\overline{\tfrac{1}{2}p + \tfrac{nn}{2}}^2 - r - nnp + nq} = 0$.

Autre

Autre application de la methode du troisiéme Problême aux équations du sixiéme degré.

LORSQU'UNE équation du sixiéme degré, representée par la formule generale $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, est le produit d'une équation du second degré qui a tous ses termes, & d'une autre du quatriéme, dont le second terme est évanoui; pour trouver les formules propres à la réduire à ces deux équations plus simples:

1°. Aprés avoir supposé ces deux équations indéterminées $xx + fx + g = 0$, $x^4 + ixx + kx + l = 0$, & pris leur produit

$$\begin{array}{l} x^6 + fx^5 + gx^4 + kx^3 + lxx + gkx + gl = 0; \\ \qquad\quad + ix^4 + fix^3 + gixx + flx \\ \qquad\qquad\qquad\quad + fkxx \end{array}$$

on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale qui leur répondent; & l'on trouvera les six équations particulieres qui suivent: 1ʳᵉ, $f = n$; 2ᵉ, $g + i = p$; 3ᵉ, $k + fi = q$; 4ᵉ, $l + gi + fk = r$; 5ᵉ, $gk + fl = s$; 6ᵉ, $gl = t$.

2°. Considerant ces six équations comme celles du Problême, on cherchera, en dégageant les indéterminées comme si c'étoit des inconnues, une réduite dont l'inconnue soit l'indéterminée g; & l'on trouvera par la 2ᵉ, $i = p - g$, par la 3ᵉ, $k = q - fi = q - np + ng$, par la 4ᵉ, $l = r - gp + gg - nq + nnp - nng$; par la 5ᵉ, $l = \frac{s - qg + npg - ngg}{n}$.

Comparant ces deux valeurs de l, on aura la réduite qu'on cherche, qui étant ordonnée, est

$$\begin{array}{l} 2ngg - 2npg + n^3p = 0; \\ \qquad\quad + qg \quad - nnq \\ \qquad\quad - n^3g \quad + nr \\ \qquad\qquad\qquad - s \end{array}$$

ou bien divisant le tout par $2n$, $gg - \frac{2pg + \frac{q}{n}g - nng}{2} + \frac{nnp - nq + r - \frac{s}{n}}{2} = 0$.

On peut encore trouver une seconde réduite du second degré dont g soit l'inconnue; 1°, en comparant les valeurs de l prises dans la cinquiéme & sixiéme équation; car l'on aura $l = \frac{s - qg + npg - ngg}{n} = \frac{t}{g}$, qui se réduit à

$$\begin{array}{l} ngg - npg - s \\ \qquad + qg + \frac{nt}{g} \end{array} = 0;$$

d'où l'on déduira

$$\begin{array}{l} gg = pg + \frac{s}{n} \\ \qquad - \frac{q}{n}g - \frac{t}{g} \end{array}$$

L'on a déja par la

premiere réduite $gg = \frac{2pg - \frac{s}{n}g + nng}{2} - \frac{nnp + nq - r + \frac{s}{n}}{2}$

par conséquent $pg + \frac{t}{n} = \frac{2pg - \frac{s}{n}g + nng - nnp + nq - r + \frac{s}{n}}{2}$
$- \frac{s}{n}g - \frac{t}{g}$

ôtant les fractions, ordonnant cette équation, & faisant en sorte que le premier terme n'ait pour coéficient que l'unité, on aura la seconde réduite $gg - \frac{nnpg + nqg - rg - \frac{s}{n}}{nn + \frac{2}{n}}$

$+ \frac{2t}{nn + \frac{2}{n}} = 0.$

Quand on voudra examiner si une équation particuliere du sixiéme degré est le produit de deux équations commensurables plus simples, dont l'une est du second degré avec tous ses termes, & l'autre du quatriéme, dont le second terme est évanoui, il faudra, aprés avoir substitué dans laquelle on voudra des deux réduites précedentes, les grandeurs de l'équation proposée, representées par les lettres n, p, q, &c. trouver la valeur de l'indéterminée g, & substituer ensuite cette valeur, & celle de f, dans $xx + fx + g = 0$, & diviser la proposée par l'équation réelle dans laquelle $xx + fx + g = 0$ aura été changée; & si la division se fait exactement, on aura les deux équations plus simples du second & du quatriéme degré, ausquelles la proposée peut être réduite.

Ou bien, si l'on veut, on pourra substituer les grandeurs de la proposée, representées par n, p, q, &c. dans les deux réduites, & trouver ensuite le plus grand diviseur commun des deux réduites aprés la substitution; ce plus grand diviseur commun fera trouver facilement la valeur de g, aprés quoi on la substituera avec la valeur de f dans $xx + fx + g = 0$, & on divisera la proposée par l'équation du second degré qui en naîtra.

Autre application de la methode du troisiéme Probléme aux équations du sixiéme degré.

QUAND une équation du sixiéme degré, representée par la formule generale $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, est le produit de deux équations plus simples chacune du troisiéme degré, dans l'une desquelles le second terme est évanoui; pour trouver les formules ou les réduites propres à trouver ces deux équations plus simples;

1°. Aprés avoir supposé les deux équations indéterminées $x^3 + gx + h = 0$, $x^3 + ixx + kx + l = 0$, & pris leur produit $x^6 + ix^5 + gx^4 + hx^3 + hixx + hkx + hl = 0$, on com-
$+ kx^4 + lx^3 + gkxx + glx$
$+ gix^3$

parera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale; ce qui donnera les six équations particulieres qui suivent: 1re, $i = n$; 2e, $g + k = p$; 3e, $h + l + gi = q$; 4e, $hi + gk = r$; 5e, $hk + gl = s$; 6e, $hl = t$.

2°. Pour trouver la réduite dont g soit l'inconnue, on aura par la 2e $k = p - g$; par la 3e, $l = q - h - ng$; par la 4e, $k = \frac{r - nh}{g}$; par la 5e, $l = \frac{s - hk}{g}$.

Comparant les deux valeurs de k, l'on aura $p - g = \frac{r - nh}{g}$; d'où l'on déduit $h = \frac{gg - pg + r}{n}$. Il faut remarquer cette valeur de h.

Comparant ensuite les deux valeurs de l, on aura $q - h - ng = \frac{s - hp + hg}{g}$, qui se réduit à $-ngg + qg - s = 2hg - hp$; d'où l'on deduit $h = \frac{-ngg + qg - s}{2g - p}$.

Comparant ensemble les deux valeurs de h, on trouvera $\frac{gg - pg + r}{n} = \frac{-ngg + qg - s}{2g - p}$, qui se réduit à $2g^3 + nngg - nqg + ns$
$- 3pgg + 2rg - pr$
$+ ppg$

$= 0$, qui est la réduite qu'on cherche.

Pour trouver une seconde réduite dont g soit l'inconnue, on comparera ensemble la valeur de $h = \frac{gg - pg + r}{n}$, déja trouvée, avec la valeur de h prise dans la sixiéme équation, qui est $h = \frac{t}{l}$, aprés avoir mis dans $h = \frac{t}{l}$ la valeur de $l = q - h - ng = \frac{-gg + pg - r}{n} - ng + q = \frac{-gg + pg - nng - r + nq}{n}$, & l'on aura $\frac{gg - pg + r}{n} = \frac{nt}{-gg + pg - nng - r + nq}$; aprés en avoir ôté les fractions, on aura

$$\begin{array}{l} g^4 - 2pg^3 - nnpgg + nnrg - nqr = 0; \\ \quad + nng^3 + ppgg \quad - 2prg + rr \\ \quad\quad\quad - nqgg \quad + nqpg + nnt \\ \quad\quad\quad + 2rgg \end{array}$$

qui est une seconde réduite, qu'on abaissera au second degré en prenant dans la réduite précedente la valeur de g^3 & de g^3, & les substituant dans cette équation. L'operation se fait de la maniere suivante.

Il faut multiplier la seconde réduite par 2, & l'on aura

$$\begin{array}{l} 2g^4 - 4pg^3 - 2nnpgg + 2nnrg - 2nqr = 0; \\ \quad + 2nng^3 + 2ppgg \quad - 4prg + 2rr \\ \quad\quad\quad - 2nqgg \quad + 2nqpg + 2nnt \\ \quad\quad\quad + 4rgg \end{array}$$

Il faut multiplier la premiere réduite par g, & l'on aura

$$\begin{array}{llll} 2g^4 = & -nng^3 & +nqgg & -nrg, \\ & +2pg^3 & -2rgg & +prg \\ & & -ppgg & \end{array}$$

& substituer dans la seconde la valeur de $2g^4$, & l'on aura

$$\begin{array}{lllll} -pg^3 & -2nnpgg & +2nnrg & -2nqr = 0, \\ +nng^3 & +ppgg & -3prg & +2rr \\ & -nqgg & +2npqg & +2nnr \\ & +2rgg & -nrg & \end{array}$$

Il faut substituer la valeur de g^3, prise de la premiere réduite, dans cette équation. Pour cela il faut multiplier cette équation par 2, & l'on aura

$$\begin{array}{lllll} -2pg^3 & -4nnpgg & +4nnrg & -4nqr = 0, \\ +2nng^3 & +2ppgg & -6prg & +4rr \\ & -2nqgg & +4npqg & +4nnr \\ & +4rgg & -2nrg & \end{array}$$

& substituer la valeur de $-2pg^3 + 2nng^3$, que l'on voit ici, (qui est prise de la premiere réduite multipliée par $-p+nn$) dans l'équation précedente; & on trouvera enfin cette seconde réduite du 2^{e} degré,

$$\left.\begin{array}{l} -2pg^3 \\ +2nng^3 \end{array}\right\} = \begin{array}{lll} +nnpgg & -npgg & +nqr \\ -n^4gg & +n^3gg & -n^3r \\ -3ppgg & +2prg & -ppr \\ +3nnpgg & -2nnrg & +nnpr \\ & +p^3g & \\ & -nnppg & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} -ppgg & -4prg & +4rr & = 0. \\ -n^4gg & +3npqg & +4nnr & \\ +4rgg & +2nnrg & -4nqr & \\ -2nqgg & -2nrg & -ppr & \\ & +p^3g & +npr & \\ & +n^3qg & +nnpr & \\ & -nnppg & -n^3r & \end{array}$$

ou bien en changeant tous les signes, on aura cette seconde réduite du 2^{e} degré.

$$\begin{array}{llll} +ppgg & +4prg & -4rr & = 0. \\ +n^4gg & -3npqg & -4nnr & \\ -4rgg & -2nnrg & +4nqr & \\ +2nqgg & +2nrg & +ppr & \\ & -p^3g & -npr & \\ & -n^3qg & -nnpr & \\ & +nnppg & +n^3r & \end{array}$$

Quand on voudra voir si une équation particuliere du sixiéme degré est le produit de deux plus simples commensurables chacune du troisiéme degré, dont l'une des deux n'ait pas son second terme, 1°, il faudra substituer les grandeurs de l'équation representées par n, p, q, &c. dans ces deux réduites; trouver leur plus grand commun diviseur; & par le plus grand diviseur commun, trouver la valeur de g; ou bien la trouver seulement en resolvant la seconde réduite du second degré.

2°. Il faudra substituer la valeur de g qu'on vient de trouver, dans l'équation $h = \frac{gg - pg - r}{n}$, ce qui donnera la valeur de h.

3°. Il faudra substituer les valeurs de g & de h dans $x^3 + gx + h = 0$, & diviser la proposée par l'équation qui naîtra de la substitution; & si la division est exacte, on aura les deux équations, dont la proposée est le produit.

AVERTISSEMENT.

Les applications qu'on vient de faire de la methode du troisiéme Problême, suffisent pour la faire concevoir, & pour apprendre à trouver soi-même les formules des résolutions de tous les cas où il manque un ou plusieurs termes dans les équations simples, dont la composée est le produit; on les peut voir dans l'onziéme regle de M^{r} Hudde, dans la lettre de la réduction des équations, qui est à la fin du premier Volume de la Geometrie de M^{r} Descartes.

Démonstration du troisiéme Problême.

Les deux équations indéterminées qu'on suppose, comme dans le premier exemple $xx + fx + g = 0$, $xx + i = 0$, representent par leurs coéficients indéterminés f, g, i, les deux équations réelles plus simples, dont la proposée, qui est representée par la formule generale $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, est le produit; par consequent le produit de ces deux équations indéterminées, qui est $\begin{array}{l} x^4 + fx^3 + gxx + fix \\ + ixx \end{array}$ $+ gi = 0$, represente l'équation proposée, & n'est qu'une même équation, que quelques-uns appellent *identique*; ainsi l'une est égale à l'autre, & l'on a l'équation $\begin{array}{l} x^4 + fx^3 + gxx + fix + gi = x^4 + nx^3 + pxx + qx + r; \\ + ixx \end{array}$ ou bien

$$\begin{array}{l} x^4 + fx^3 + gxx + fix + gi = 0. \\ + ixx \\ -x^4 - nx^3 - pxx - qx - r \end{array}$$

Les termes de l'une sont égaux aux termes correspondans de l'autre, ou (si l'on veut) chaque terme de l'une moins le terme correspondant de l'autre, est égal à zero; l'on a donc autant d'équations particulieres pour déterminer les indéterminées, qui peuvent être regardées comme les inconnues du Problême, qu'on a supposé d'interminées; ainsi on les peut toutes déterminer.

Or il est évident qu'aprés qu'on aura trouvé les valeurs réelles des indéterminées, si on substitue ces valeurs à leur place dans les deux équations indéterminées $xx+fx+g=0$, $xx+i=0$, ces deux équations étant devenues réelles, de feintes qu'elles étoient, leur produit fera precisément la proposée : car les valeurs réelles des indéterminées n'ont été trouvées qu'en vertu de cette supposition. Elles sont donc, étant devenues réelles, les deux équations plus simples qu'on cherchoit, par lesquelles la proposée peut être exactement divisée.

La methode du troisiéme Problême fait donc trouver ce qui étoit proposé.

Remarques sur la methode qui employe dans les équations, outre les inconnues, des grandeurs indéterminées.

65. La methode de se servir d'équations qui contiennent des grandeurs indéterminées, est un des principes les plus féconds de l'Analyse pour faire des découvertes ; c'est à dire, pour résoudre les Problêmes les plus composés. Cette methode consiste à representer par des grandeurs indéterminées, les grandeurs veritables que l'on cherche ; à supposer que cette expression indéterminée est égale à l'expression de ces mêmes grandeurs que l'on a trouvée par le Problême qu'on veut résoudre ; c'est à dire, que cette expression indéterminée est égale à l'équation qui exprime ce Problême ; & à supposer aussi que chacun des termes de l'expression indéterminée est égal au terme correspondant de l'équation qu'on veut résoudre ; à trouver par le moyen des équations particulieres que fournit cette supposition, les valeurs des indéterminées que l'on a supposées ; enfin à substituer ces valeurs à la place des indéterminées dans l'expression indéterminée qui represente les grandeurs veritables que l'on cherche, qui par ces substitutions devient la veritable expression de ces grandeurs. Comme on se servira beaucoup de cette methode dans le reste de ce Traité, il est bon de faire ici quelques remarques qui serviront à la faire mieux concevoir, & à en rendre l'usage plus facile.

1°. Pour former ces équations feintes ou indéterminées, qui deviennent ensuite réelles, il faut que les grandeurs indéterminées qu'on y employe, expriment les raports de celles qu'on cherche par leur moyen : par exemple, quand on

veut chercher les équations plus simples ausquelles une équation composée réductible peut être réduite, lorsqu'il manque quelque terme dans quelqu'une de ces équations plus simples, on doit aussi supposer qu'il est évanoui dans les équations indéterminées ; les coéficients de ces équations indéterminées doivent representer les coéficients connus des équations réelles qu'elles representent ; c'est pourquoi il doit y avoir une indéterminée pour chacun, afin qu'en déterminant chaque indéterminée, on puisse trouver chacun de ces coéficients ; lorsque quelqu'une des équations plus simples ausquelles une équation composée peut être réduite, renferme des racines égales, il faut ne mettre qu'une même indéterminée pour chacune des racines égales ; & ainsi de tous les autres raports possibles, qu'il faut representer par les indéterminées.

2°. Il ne faut employer dans les équations indéterminées, qu'autant de lettres indéterminées, qu'on peut faire d'équations particulieres ; parcequ'autrement on ne pourroit pas les dégager toutes, c'est à dire, trouver la valeur de toutes.

3°. On doit faire en sorte que toutes les équations particulieres qui servent à trouver les valeurs des indéterminées, & les réduites qui en naissent, ne soient pas aussi difficiles ou plus difficiles à résoudre, que les équations mêmes dont on cherche la résolution par ces équations indéterminées, puisqu'autrement cette voye seroit inutile.

Ainsi il faut que ces équations soient ou lineaires, ou du second degré, ou du moins d'un degré inferieur à celui de l'équation qu'on veut résoudre par cette voye : où s'il arrivoit que ces équations particulieres, ou les réduites, fussent d'un degré égal à celui de l'équation qu'on veut résoudre, ou même plus elevé, il faudroit que la valeur de l'indéterminée qui sert d'inconnue à ces réduites, se pût trouver en divisant la réduite par une équation lineaire de l'inconnue de la réduite plus ou moins un diviseur de son dernier terme, ou qu'elle pût se trouver par une équation du second degré : car alors, quoique la réduite fût d'un degré plus élevé que l'équation qu'on veut résoudre, la résolution en seroit plus facile.

4°. Lorsque pour la résolution d'un Problême ou d'une équation composée, par exemple du cinquiéme degré, on n'a besoin que d'une équation d'un degré inferieur, par exemple du second degré; on supposera une équation indeterminée ou feinte du second degré, qui representera par le moyen des indeterminées l'équation du second degré dont on a besoin, & ensuite on la multipliera par une équation indeterminée du degré, qui étant joint avec celui du second, fait le degré de la proposée; dans le cinquiéme degré, il faudra multiplier l'équation du second par une du troisiéme, laquelle équation du troisiéme degré ait une indeterminée dans chacun de ses termes, excepté le premier; il faudra ensuite comparer les termes de l'équation indeterminée qui naîtra de cette multiplication, avec ceux de la proposée qui leur répondent, & l'on aura autant d'équations particulieres que l'on a supposé d'indeterminées, & l'on pourra en trouver les valeurs. Ou bien au lieu d'élever l'équation indeterminée du degré inferieur à celui de la proposée, en la multipliant par une autre équation indeterminée, on pourra diviser la proposée par l'équation indeterminée du degré inferieur à celui de la proposée, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste où l'inconnue soit d'un degré moindre que dans l'équation indeterminée qui a servi de diviseur: & alors il faudra supposer ce reste égal à zero, & chacun de ses termes égal à zero, & l'on aura par ces suppositions autant d'équations particulieres qu'on a supposé d'indeterminées; & l'on s'en servira pour trouver les réduites qui donneront les valeurs des indeterminées de l'équation indeterminée qu'on a supposée; Et on aura la résolution qu'on cherche.

Tout ce qu'on vient de dire s'éclaircira par l'usage qu'on en fera dans la suite.

PROBLÊME IV.

66. *TROUVER les équations commensurables plus simples, par lesquelles une équation composée du 4^e^, 5^e^, & 6^e^ degré, qui est réductible, peut se diviser exactement, lorsqu'il n'y a aucun terme évanoui dans ces équations plus simples, & que la moindre est au moins du second degré.*

METHODE.

On fera les mêmes choses qu'au Problême précedent, excepté qu'on ne supposera aucun terme évanoui dans les équations

indeterminées, & qu'on laissera dans les réduites la lettre indeterminée qui fait le dernier terme de l'une des deux équations indeterminées, sans en dégager la valeur; & elle marquera un des diviseurs du dernier terme de la proposée: cela abregera de beaucoup le calcul des formules, & rendra les réduites plus simples, comme on le verra dans l'application de ce Problême au 4^e, 5^e, & 6^e degré.

Pour le quatriéme degré.

TOUTES les équations du quatriéme degré sont representées par la formule generale $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$.

Pour trouver les deux équations du second degré qui ont tous leurs termes, par lesquelles une équation reductible du quatriéme, peut être exactement divisée, on supposera les deux équations indeterminées $xx + fx + g = 0$, $xx + hx + i = 0$; & aprés en avoir pris le produit

$$\begin{array}{l} x^4 + fx^3 + gxx + ghx + gi = 0; \\ \quad\; + hx^3 + ixx + fix \\ \qquad\qquad\quad + fhxx \end{array}$$

on en comparera les termes avec ceux de la formule generale qui leur répondent, & l'on aura les quatre équations particulieres suivantes: 1^{re}, $f + h = n$; 2^e, $g + i + fh = p$; 3^e, $gh + fi = q$; 4^e, $gi = r$.

On regardera g comme connue, & elle marquera un diviseur exact du dernier terme de la proposée, puisque le dernier terme de la proposée est le produit des deux derniers termes des deux équations du second degré, dont la proposée est le produit. On cherchera une valeur de f qui ne contienne que des connues avec g; pour la trouver, on prendra la valeur de h dans la premiere & la troisiéme équation, & l'on aura $h = n - f = \frac{q - fi}{g}$; on prendra ensuite la valeur de i dans la quatriéme équation, qui est $i = \frac{r}{g}$, & on la substituera dans l'équation qu'on vient de trouver, & l'on aura $n - f = \frac{q - \frac{fr}{g}}{g}$, d'où l'on déduira $f = \frac{q - gn}{\frac{r}{g} - g}$, on substituera cette valeur de f dans $xx + fx + g = 0$; & l'on aura $xx + \frac{q - gn}{\frac{r}{g} - g} x + g = 0$.

Quand on voudra examiner si une équation particuliere du quatriéme degré, peut se diviser exactement par deux autres du second degré, on prendra tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, & si elle est litterale & homogene, il suffira de prendre les diviseurs de deux dimensions. On substituera ces diviseurs successivement avec le signe de +, & ensuite celui de —, dans la formule $xx + \frac{q - gn}{\frac{r}{g} - g} x + g = 0$, au lieu de g; comme aussi les valeurs de n, q, r; & on divisera la proposée par l'équation qui naîtra de la substitution; & si la division est exacte, on aura ce qu'on cherche.

Par exemple, on voudroit sçavoir si l'équation

$$\begin{array}{l} x^4 + 2ax^3 - acxx + 2abbx + aabc = 0, \\ \quad\;\; - 2bx^3 - 5abxx - 2aacx \end{array}$$

est reductible en deux équations du second degré.

1°. Afin que la formule generale du quatriéme degré $x^4 + nx^3$, &c. represente la proposée, il faut supposer $n = 2a - 2b$, $p = -ac - 5ab$, $q = 2abb - 2aac$, $r = + aabc$.

2°. Il faut prendre parmi les diviseurs du dernier terme de la proposée, ceux qui sont de deux dimensions, c'est à dire aa, ab, ac, bc.

3°. Il faut substituer chacun de ces diviseurs successivement avec le signe +, & ensuite avec le signe —, dans la formule $xx + \frac{q - gn}{\frac{r}{g} - g} x + g = 0$, à la place de g, & y substituer aussi les valeurs de n, q, r: l'on trouvera qu'en y substituant à la place de g, $+ aa$, $- aa$, $+ ab$, l'on n'auroit pas un diviseur exact de la proposée, mais en substituant $- ab$ à la place de g, la formule est changée en $xx + 2ax - ab = 0$, par laquelle la proposée se divise sans reste, & l'on trouve le quotient $xx - 2bx - ac = 0$.

Ainsi la proposée n'est pas du quatriéme degré, mais elle se réduit aux deux équations précedentes du second degré.

On peut encore trouver une réduite dont f soit l'inconnue, & dans laquelle g soit regardée comme une connue qui represente un diviseur du dernier terme de la proposée, en prenant deux valeurs de l'indéterminée i, l'une dans la 2°, & l'autre dans la 4° équation particuliere; & l'on aura $i = p - g - fh = \frac{r}{g}$; substituant la valeur de $h = n - f$ dans cette équation, l'on aura $p - g - nf + ff = \frac{r}{g}$, ou bien

$$\begin{array}{l} ff - nf + p = 0, \\ \qquad\qquad\;\; - g \\ \qquad\qquad\;\; - \frac{r}{g} \end{array}$$

qui est la réduite qu'on cherche.

Resolvant cette équation du second degré, on aura $f = \frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{1}{4}nn - p + g + \frac{r}{g}}$; substituant cette valeur de f dans $xx + fx + g = 0$, on aura la formule $xx + x \times \frac{1}{2}n \pm \sqrt{\frac{1}{4}nn - p + g + \frac{r}{g}} + g = 0$. Cette formule servira à faire trouver les équations du second degré, dans lesquelles se peut reduire une équation particuliere du quatriéme degré, comme dans l'exemple précedent.

Pour le cinquiéme degré.

POUR trouver les deux équations commensurables, l'une du second degré, & l'autre du troisiéme, qui ayent tous leurs termes, par lesquelles une équation reductible du 5° degré, representée par la formule generale $x^5 + nx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0$, peut se diviser exactement, on supposera, 1°, $xx + fx + g = 0$, $x^3 + hxx + ix + k = 0$: Et aprés avoir pris leur produit

$$\begin{array}{l} x^5 + fx^4 + ix^3 + kxx + fkx + gk = 0, \\ \qquad\;\; + hx^4 + gx^3 + ghxx + gix \\ \qquad\qquad\quad\;\; + fhx^3 + fixx \end{array}$$

on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule; & l'on aura les cinq équations particulieres qui suivent: 1°, $f + h = n$; 2°, $i + g + fh = p$; 3° $k + gh + fi = q$; 4°, $fk + gi = r$; 5°, $gk = s$.

2°. On cherchera une reduite du second degré, dont f soit l'inconnue, & on regardera g comme une connue qui represente un diviseur du dernier terme de l'équation du cinquiéme degré qu'on veut resoudre. Pour la trouver, on prendra les valeurs de h dans la premiere & la seconde, & l'on aura $h = n - f = \frac{p - i - g}{f}$; d'où l'on déduira $i = ff - nf + p - g$: On prendra une autre valeur de i dans la quatriéme, & l'on aura $i = \frac{r - fk}{g}$; substituant dans cette valeur de i celle de k prise dans la cinquiéme équation, qui est $k = \frac{s}{g}$, l'on aura $i = \frac{r - \frac{sf}{g}}{g} = ff - nf + p - g$. Cette équation étant mise en ordre, on aura la réduite qu'on cherche,

$$\begin{array}{l} ff - nf + p = 0. \\ \quad\;\; + \frac{sf}{gg} - g \\ \qquad\qquad\; - \frac{r}{g} \end{array}$$

On peut trouver une autre réduite du second degré, en prenant la valeur de h dans la premiere & la troisiéme équation, car l'on aura $h = n - f = \frac{q - fi - k}{g}$; ou bien $gn - gf = q - fi - k$; substituant dans cette équation la valeur de i prise dans la quatriéme, qui est $i = \frac{r - fk}{g}$, l'on aura $gn - gf = q - \frac{fr - ffk}{g} - k$: Enfin substituant dans cette équation la valeur de k prise dans la cinquiéme, qui est $k = \frac{s}{g}$, on aura $gn - gf = q - \frac{rf}{g} + \frac{ffs}{gg} - \frac{s}{g}$, qui se reduit à

$$ff - \frac{grf}{s} - \frac{g^3n}{s} = 0,$$
$$+\frac{g^3f}{s} - g$$
$$+\frac{ggq}{s}$$

C'est la seconde reduite qu'on cherchoit.

Quand on voudra voir si une équation particuliere du cinquiéme degré est reductible en deux plus simples, l'une du second & l'autre du troisiéme degré, on prendra tous les diviseurs de son dernier terme; & si elle est litterale & homogene, il suffira de prendre ceux qui sont de deux dimensions; on les substituera les uns aprés les autres dans laquelle on voudra de ces deux reduites sous le signe $+$, & ensuite sous le signe $-$; on y substituera aussi les grandeurs de la proposée representées par n, p, q, &c. on prendra ensuite la valeur de f, & on la substituera, comme aussi le diviseur pris pour g, dans $xx + fx + g = 0$; & si la proposée se divise exactement par l'équation qui naîtra de la substitution, on aura ce qu'on cherche: sinon, on mettra un autre diviseur du dernier terme à la place de g dans la réduite, & on continuera l'operation comme on vient de le prescrire.

On pourroit aussi substituer les diviseurs du dernier terme les uns aprés les autres avec le signe $+$, & ensuite avec le signe $-$, dans les deux réduites, avec les valeurs de n, p, q, &c. & trouver ensuite le plus grand diviseur commun des réduites; & par le plus grand diviseur commun, trouver la valeur de f, & la substituer avec celle de g, dans $xx + fx + g = 0$, & diviser ensuite la proposée par l'équation qui en naîtroit.

Voici un exemple qui fera concevoir les deux manieres d'appliquer la methode à une équation particuliere.

Pour voir si l'équation

$$x^5 + 2ax^4 - 3aax^3 - aabxx + a^3bx$$
$$- 4abx^3 \qquad\qquad + 3aabbx$$
$$+ a^3bb = 0,$$

peut être exactement divisée par une équation

du second degré, & par une du troisiéme degré, qui ayent tous leurs termes: 1°, il faut prendre les diviseurs du dernier terme qui sont de deux dimensions; ces diviseurs sont ab, aa, bb.

2°. Afin que la formule generale $x^5 + nx^4$, &c. represente la proposée, il faut supposer $n = 2a$, $p = -3aa - 4ab$, $q = -aab$, $r = +a^3b + 3aabb$, $s = +a^3bb$.

3°. Il faut substituer dans laquelle on voudra des deux réduites, $+ab$ à la place de g, & les valeurs de n, p, q, &c. à leur place; & comme la valeur de f qu'on trouve aprés la substitution de $+ab$ à la place de g, étant substituée dans $xx + fx + ab = 0$, l'équation qui en vient n'est pas un diviseur exact de la proposée, il faut substituer $-ab$ à la place de g, dans laquelle on voudra des réduites, & les valeurs de n, p, q, &c. & l'on trouvera au lieu de la premiere réduite cette équation $ff - af - 2aa = 0$; & au lieu de la seconde réduite, l'on trouvera

$$ff + af + 2ab = 0.$$
$$+ 2bf$$

4°. Ayant trouvé par le moyen de l'une ou l'autre de ces deux réduites, que $f = -a$, on substituera $-a$ au lieu de f dans $xx + fx + g = 0$, & $-ab$ à la place de g; & l'on aura $xx - ax - ab = 0$, par laquelle divisant la proposée, on trouvera le quotient juste $x^3 + 3axx - 3abx - aab = 0$; ainsi la proposée n'est pas du cinquiéme degré, mais elle se réduit aux deux équations précedentes du second & du troisiéme degré.

On peut aussi trouver la valeur de f, en prenant le plus grand diviseur commun des deux réduites, aprés qu'on y aura substitué $-ab$ à la place de g, & les valeurs de n, p, q, &c. car l'on trouvera que le plus grand diviseur commun est $f + a = 0$, par consequent $f = -a$.

Cette maniere de trouver la valeur de f par le plus grand diviseur commun des réduites, aprés qu'on y a fait les substitutions, est d'usage, lorsque les réduites sont au dessus du second degré; mais quand les réduites ne passent pas le second degré, il est d'ordinaire plus court de prendre la valeur de f dans une seule réduite.

Pour le sixiéme degré.

LORSQU'IL peut se réduire à une équation du second degré & à une autre du 4e; dans lesquelles aucun terme n'est évanoui.

IL faut supposer les deux équations indéterminées $xx + fx + g = 0$, $x^4 + hx^3 + ixx + kx + l = 0$; & aprés avoir pris leur produit

$$\begin{array}{lllllll} x^6 + hx^5 + ix^4 + kx^3 + lxx + flx + gl = 0, \\ \quad + fx^5 + gx^4 + ghx^3 + gixx + gkx \\ \qquad + fhx^4 + fix^3 + fkxx \end{array}$$

il faut comparer les termes du produit avec ceux de la formule generale du sixiéme degré $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, qui leur répondent, ce qui donnera les six équations particulieres qui suivent : 1re, $h + f = n$; 2e, $i + g + fh = p$; 3e, $k + gh + fi = q$; 4e, $l + gi + fk = r$; 5e, $fl + gk = s$; 6e, $gl = t$.

Pour trouver une réduite dont f soit l'inconnue, & dans laquelle g represente un diviseur du dernier terme de la proposée, on prendra deux valeurs de h dans la premiere & la seconde équation, & l'on aura $h = n - f = \frac{p-g-i}{f}$, d'où l'on déduira $i = ff - nf + p - g$; comparant cette valeur de i avec une autre prise dans la quatriéme, on aura $i = \frac{r-l-fk}{g} = ff - nf + p - g$; ou bien $r - l - fk = gff - gnf + gp - gg$; mettant dans cette équation la valeur de l prise dans la sixiéme équation, qui est $l = \frac{t}{g}$, l'on aura $r - \frac{t}{g} - fk = gff - gnf + gp - gg$; substituant la valeur de $l = \frac{t}{g}$ dans la cinquiéme, on aura $k = \frac{s - \frac{ft}{g}}{g}$. Cette valeur étant substituée à la place de k dans $r - \frac{t}{g} - fk = gff - gnf + gp - gg$, l'on aura la réduite $r - \frac{t}{g} - \frac{sf + \frac{tff}{g}}{g} = gff - gnf + gp - gg$, qui se réduit à

$$\begin{array}{l} ff - \frac{tff}{g^3} - nf + p \\ \qquad\qquad\quad + \frac{sf}{gg} - g \\ \qquad\qquad\qquad\quad - \frac{r}{g} \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{t}{gg} \end{array}$$

$= 0$; c'est la réduite qu'on cherche.

On peut trouver une seconde réduite en comparant la valeur de i déja trouvée, qui est $i = ff - nf + p - g$, avec une autre valeur de i prise dans la troisiéme équation, & l'on aura $i = \frac{q-k-gh}{f} = ff - nf + p - g$; il faut substituer

dans cette équation la valeur de h prise dans la premiere équation, qui est $h = n - f$, & la valeur de k prise dans la cinquiéme équation, qui est $k = \frac{s-fl}{g}$; & substituant à la place de l sa valeur $l = \frac{t}{g}$ prise dans la sixiéme équation, on aura $k = \frac{s - \frac{tf}{g}}{g}$; substituant donc les valeurs de k & de h dans $\frac{q-k-gh}{f} = ff - nf + p - g$, l'on aura

$$\frac{q - \frac{s + \frac{tf}{g}}{g} - gn + gf}{f} = ff - nf + p - g$$

qui se réduit à

$$\begin{array}{l} f^3 - nff - 2gf + gn = 0; \\ \qquad\quad + pf \;\; + \frac{s}{g} \\ \qquad\quad - \frac{tf}{gg} \; - q \end{array}$$

c'est la seconde réduite qu'on cherchoit.

On se servira de ces réduites pour trouver si une équation du sixiéme degré se peut réduire en deux plus simples qui ayent tous leurs termes, dont l'une soit du second degré, & l'autre du quatriéme, comme on l'a enseigné dans le cinquiéme degré.

Pour le sixiéme degré, lorsqu'il peut se reduire à deux équations du troisiéme degré qui ont tous leurs termes.

IL faut supposer les deux équations indéterminées $x^3 + fxx + gx + h = 0$, $x^3 + ixx + kx + l = 0$; & aprés avoir trouvé leur produit

$$\begin{array}{l} x^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + hixx + hkx + hl \\ \quad + ix^5 + kx^4 + lx^3 + flxx + glx \\ \qquad + fix^4 + gix^3 + gkxx \\ \qquad\qquad + fkx^3 \end{array}$$

$= 0$; on comparera les termes de ce produit avec ceux de la formule generale du sixiéme degré $x^6 + nx^5 + px^4 + qx^3 + rxx + sx + t = 0$, qui leur répondent; ce qui donnera les six équations particulieres qui suivent : 1re, $f + i = n$; 2e, $g + k + fi = p$; 3e, $h + l + gi + fk = q$; 4e, $hi + fl + gk = r$; 5e, $hk + gl = s$; 6e, $hl = t$.

Pour trouver une réduite dont f soit l'inconnue, & dans laquelle h represente un diviseur du dernier terme de la proposée, lequel diviseur est de trois dimensions dans les équations litterales & homogenes; il faut prendre dans la premiere & la seconde équation deux valeurs de i, & l'on aura $i = n - f = \frac{p-g-k}{f}$, d'où l'on déduira $k = ff - nf$

$+ p - g$; on prendra une autre valeur de k dans la cinquiéme $k = \frac{r - gl}{h}$; par consequent $ff - nf + p - g = \frac{r - gl}{h}$. On substituera dans $\frac{r - gl}{h}$, la valeur de l prise dans la sixiéme équation $l = \frac{s}{h}$; & l'on aura $ff - nf + p - g = \frac{r - \frac{gs}{h}}{h}$ d'où l'on déduira $g = \frac{-hff + hnf - ph + r}{\frac{s}{h} - h}$. Il faut remarquer cette premiere valeur de g.

Pour avoir une seconde valeur de g à comparer avec cette premiere, on se servira de la troisiéme équation, qui donnera $g = \frac{q - h - l - fk}{i}$; substituant dans cette valeur celle de $l = \frac{s}{h}$ prise dans la sixiéme équation, celle de i prise dans la premiere, qui est $i = n - f$, & celle de k prise dans la seconde, qui est $k = p - g - fi = p - g - nf + ff$, l'on aura $g = \frac{q - h - \frac{s}{h} - pf + gf + nff - f^3}{n - f}$; d'où l'on déduira $g = \frac{f^3 - nff + pf + \frac{s}{h} + h - q}{2f - n}$, qui est la seconde valeur de g ; comparant les deux valeurs de g, on aura $\frac{-hff + hnf - ph + r}{\frac{s}{h} - h} = \frac{f^3 - nff + pf + \frac{s}{h} + h - q}{2f - n}$, qui se réduit à

$$f^3 - \frac{\frac{s}{h}nff - 2hnff}{\frac{s}{h} + h} + \frac{hnnf - 2rf}{\frac{s}{h} + h} - \frac{hnp + nr - \frac{s}{h}q}{\frac{s}{h} + h}$$
$$\qquad\qquad\qquad + pf \qquad\qquad + \frac{s}{h} - h$$

$= 0$; c'est la premiere réduite qu'on cherche.

Pour trouver une seconde réduite dont f soit l'inconnue, on prendra deux valeurs de k, l'une dans la seconde équation particuliere, & l'autre dans la quatriéme ; & l'on aura $k = p - g - fi = \frac{r - hi - fl}{g}$; substituant dans cette équation la valeur de i prise dans la premiere équation $i = n - f$, celle de l prise dans la sixiéme, qui est $l = \frac{s}{h}$, & la premiere valeur de g, qu'on a fait remarquer ci-dessus, l'équation $-g + p - fi = \frac{r - hi - fl}{g}$, sera changée en celle-ci,

$$\frac{hff - hnf + hp - r}{\frac{s}{h} - h} + p - nf + ff = \frac{r - hn + hf - \frac{sf}{h}}{\frac{-hff + hnf - hp + r}{\frac{s}{h} - h}}$$; d'où

ôtant les fractions, & faisant en sorte que le premier terme n'ait que l'unité pour coéficient, l'on trouvera l'équation suivante,

suivante, qui est la seconde réduite qu'on cherchoit,

$$\begin{array}{llll}
f^6 - 2nf^5 & - \frac{hsff}{s} & + \frac{hnsf}{s} & - \frac{hps}{s} = 0. \\
 & + 2pff & - 2npf & + pp \\
 & + nnff & + \frac{nsf}{h} & + \frac{ss}{s} \\
 & - \frac{sff}{h} & - \frac{ssf}{hh} & - \frac{ps}{h} \\
 & & + \frac{hsf}{s} & - \frac{ns}{h} \\
 & & - 3hf & + \frac{rs}{hh} \\
 & & + \frac{hhf}{s} & + 2hn \\
 & & & - 2r \\
 & & & - \frac{hhn}{s} \\
 & & & + \frac{hhr}{s}
\end{array}$$

On se servira de ces réduites pour trouver si une équation du sixiéme degré peut se réduire en deux du troisiéme qui ayent tous leurs termes, comme on l'a enseigné dans le cinquiéme degré : Mais il faut remarquer que quand on aura trouvé une valeur de f, il faudra la substituer dans l'une des deux valeurs de g, laquelle on voudra, pour déterminer la valeur de g, afin de la substituer avec celle de f, & avec le diviseur pris pour h dans $x^3 + fxx + gx + h = 0$; & aprés ces substitutions, on divisera la proposée par cette équation ainsi changée.

Ceux qui voudront prendre la peine du calcul, pourront abaisser cette seconde réduite par le moyen de la premiere, au second degré, comme on l'a fait dans le Problême précedent, *pag. 147 & 148*.

La démonstration de ce quatriéme Problême est la même que celle du troisiéme.

COROLLAIRE I.

IL est évident que ce quatriéme Problême comprend le précedent ; car quand il arrive qu'il y a un terme évanoui dans l'une des deux équations plus simples, dans lesquelles une équation du 4^e, 5^e & 6^e degré se peut réduire, on trouve alors une valeur de l'indéterminée qui répond à ce terme, prise dans les réduites de ce quatriéme Problême, égale à zero.

COROLLAIRE II.

LORSQU'APRE'S avoir substitué successivement tous les diviseurs du dernier terme de la proposée dans les réduites, on ne peut trouver aucunes valeurs des indéterminées, qui étant substituées dans $xx + fx + g = 0$, ou $x^3 + fxx + gx + h = 0$, les rendent des diviseurs exacts de la proposée; c'est une marque certaine que la proposée est irréductible.

PROBLÊME V.

qui contient les deux précedents.

67. *TROUVER les équations plus simples commensurables, par lesquelles une équation reductible de quelque degré qu'elle puisse être, peut se diviser exactement, soit que ces équations plus simples ayent tous leurs termes, soit qu'elles en ayent d'évanouis.*

AVERTISSEMENT.

LA methode qu'on va expliquer suffit seule pour réduire toutes les équations composées réductibles aux plus simples degrés, ou pour s'assurer si elles sont irréductibles; mais dans la crainte que l'extrême longueur du calcul ne rebutât le Lecteur, on a cru qu'il étoit necessaire de faire précéder les methodes du troisiéme & quatriéme Problême, dont le calcul est bien moins embarassant, & qui cependant suffisent pour réduire les équations. Pour faire concevoir clairement cette methode, on l'appliquera en l'énonçant aux équations du 4^e degré: Il faut se rendre cette application familiere pour entendre la démonstration.

METHODE GENERALE.

1°. IL faut d'abord supposer que $xx + fx + g = 0$, represente par ses indéterminées f, g, l'équation du second degré, par laquelle une équation composée se peut diviser exactement.

2°. Il faut diviser la formule generale du degré de l'équation qu'on voudra réduire, par $xx + fx + g = 0$, & continuer la division jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste où l'inconnue x soit moins élevée d'un degré que dans $xx + fx + g = 0$.

3°. Il faut supposer chaque terme de ce reste égal à zero, ce qui donnera autant d'équations qu'on a supposé d'indéterminées.

Au lieu de faire ce qui est marqué dans le second & troisiéme article, on pourra multiplier $xx + fx + g = 0$, par

une autre équation indéterminée, dont le degré joint avec celui de $xx + fx + g = 0$, fasse celui de l'équation qu'on veut réduire; par exemple, pour le 4^e degré, il faudra multiplier $xx + fx + g = 0$, par $xx + hx + i = 0$; pour le 5^e degré, par $x^3 + hxx + ix + k = 0$; pour le 6^e, par $x^4 + hx^3 + ixx + kx + l = 0$; & ainsi des autres.

Il faudra ensuite comparer les termes du produit avec ceux de la formule generale du degré de l'équation qu'on veut réduire, qui leur répondent, comme dans le troisiéme & quatriéme Problême; ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'il y a d'indéterminées dans les deux équations indéterminées qu'on a multipliées l'une par l'autre.

Il faudra dégager les indéterminées de l'équation indéterminée $xx + hx + i = 0$, ou $x^3 + hxx + ix + k = 0$, &c. en se servant des premieres équations particulieres, & en substituant leurs valeurs dans les deux dernieres, on aura precisément les deux mêmes équations trouvées par le second & troisiéme article.

Par exemple, pour réduire une équation du 4^e degré, on prendra la formule generale du 4^e degré $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, & l'équation indeterminée $xx + fx + g = 0$, on divisera la premiere par la seconde, comme on le voit ici:

AVERTISSEMENT. z marque que la grandeur est effacée: ainsi z x^4 marque que x^4 est tranchée par une ligne.

$$
\begin{array}{lllll}
z\,x^4 & + z\,nx^3 & + z\,pxx & + qx & + r \\
 & - z\,fx^3 & - z\,gxx & - ngx & - pg \\
 & & - z\,nfxx & + fgx & + gg \\
 & & + z\,ffxx & - pfx & + nfg \\
 & & & + fgx & - ffg \\
 & & & + nffx & \\
 & & & - f^3x &
\end{array}
\left(\begin{array}{l}
\underline{xx + fx + g} \\
xx + nx + p \\
\quad - fx - g \\
\qquad\quad - nf \\
\qquad\quad + ff
\end{array}\right.
$$

Et la division sera continuée jusqu'à ce qu'on ait trouvé le reste $- f^3x + nffx + fgx - pfx + fgx - ngx + qx - ffg + nfg + gg - pg + r$, dans lequel x est d'un degré moins élevée que dans le diviseur $xx + fx + g$.

On supposera chaque terme de ce reste égal à zero, & l'on aura les deux équations

$$
\begin{array}{l}
-f^3 + nff - pf - ng = 0, \\
\qquad\qquad\quad + 2gf + q
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-gff + ngf + gg = 0; \\
\qquad\qquad\quad - pg \\
\qquad\qquad\quad + r
\end{array}
$$

ou bien en transposant,

$$
\begin{array}{l}
f^3 - nff + pf + ng = 0, \\
\qquad\qquad - 2gf - q
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
gff - ngf - gg = 0. \\
\qquad\qquad\quad + pg \\
\qquad\qquad\quad - r
\end{array}
$$

On trouveroit les deux mêmes équations en comparant les termes du produit de $xx + fx + g = 0$, par $xx + hx + i = 0$, qui est

$$\begin{array}{l} x^4 + fx^3 + gxx + ghx + gi = 0, \\ + hx^3 + ixx + fix \\ + fhx \end{array}$$

avec ceux de la formule generale $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$; car en dégageant les indéterminées h & i dans les premieres des quatre équations particulieres que donneront ces comparaisons, qui sont: 1^er^, $f + h = n$; 2^e^, $g + i + fh = p$; 3^e^, $gh + fi = q$; 4^e^, $gi = r$, l'on trouveroit $h = n - f$, $i = p - g - nf + ff$; & substituant les valeurs de h & de i dans la 3^e^ & la 4^e^, l'on auroit $f = \frac{q - ng + gf}{p - g - nf + ff}$; d'où l'on déduiroit

$$\begin{array}{l} f^3 - nff - 2gf + ng = 0; \\ + pf - q \end{array}$$

& $g = \frac{r}{p - g - nf + ff}$, d'où l'on déduiroit

$$\begin{array}{l} gff - ngf - gg = 0. \\ + pg \\ - r \end{array}$$

4°. Pour trouver les valeurs de f & de g par le moyen de ces deux équations, on choisira laquelle on voudra des deux indéterminées f, g, pour en faire l'inconnue de la réduite; supposé qu'on se détermine à g, on ordonnera chacune de ces deux équations par raport à l'inconnue f qu'on veut faire disparoître de la réduite, & on regardera g comme connue, jusqu'à ce qu'on ait trouvé la réduite dont g soit l'inconnue.

Pour trouver cette réduite, on cherchera le plus grand diviseur commun des deux équations précedentes; & quand on sera arrivé à un reste où f soit lineaire, on mettra ce reste à part; & le supposant égal à zero, on prendra dans l'équation lineaire faite de ce reste, la valeur de f lineaire, laquelle ne contiendra que des grandeurs connues avec la seule inconnue g. Il faut remarquer cette valeur de f, parceque quand on aura trouvé la valeur de g dans la réduite, en la substituant dans cette valeur de f, on rendra f toute connue.

On continuera de chercher le plus grand diviseur commun avec le reste où f est lineaire, comme si on n'avoit pas mis ce reste à part; & quand l'inconnue f aura disparu, on supposera le reste qui n'aura point d'autre inconnue que g, égal à zero; & ordonnant l'équation qui en naîtra par

raport à l'inconnue g, elle sera la réduite qu'on cherche.

Dans notre exemple on cherchera le plus grand diviseur commun de

$$\begin{array}{l} f^3 - nff - 2gf + ng = 0, \\ + pf - q \end{array}$$

& de

$$\begin{array}{l} gff - ngf - gg = 0; \\ + pg \\ - r \end{array}$$

& quand on sera arrivé au reste

$$\begin{array}{l} - ggf + ngg - qg, \\ + rf \end{array}$$

où f est lineaire, on le supposera égal à zero, d'où l'on déduira $f = \frac{ngg - qg}{gg - r}$. Il faut remarquer cette équation lineaire, qui fera trouver la valeur de f, quand g sera connue.

On continuera ensuite la recherche du plus grand diviseur commun des deux équations précedentes, comme si on ne s'étoit pas arrêté à mettre à part la valeur de f, en divisant

$$\begin{array}{l} gff - ngf - gg = 0, \\ + pg \\ - r \end{array}$$

par le reste

$$\begin{array}{l} - ggf + ngg = 0, \\ + rf - qg \end{array}$$

jusqu'à ce que l'inconnue f ait disparu; & l'on supposera le reste qui ne contiendra plus f, égal à zero; & aprés avoir ordonné ce reste par raport à l'inconnue g, on aura la réduite

$$\begin{array}{l} g^6 - pg^5 + nqg^4 - qqg^3 + nqrgg - prrg + r^3 = 0. \\ - rg^4 - nnrg^3 - rrgg \\ + 2prg^3 \end{array}$$

Si l'on vouloit trouver la réduite où f fût l'inconnue, on ordonneroit les deux équations trouvées par le second & troisiéme article de la methode, par raport à l'inconnue g, & l'on auroit

$$\begin{array}{l} gg + nfg + r = 0, \\ - pg \\ - ffg \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{l} 2fg - f^3 = 0. \\ - ng + nff \\ - pf \\ + q \end{array}$$

On chercheroit leur plus grand diviseur commun, & on feroit d'abord l'operation, jusqu'à ce qu'on fut arrivé à un reste où g fût lineaire. Mais comme g est lineaire dans la seconde équation, ce reste est tout trouvé sans operer, & l'on a $g = \frac{f^3 - nff + pf - q}{2f - n}$.

Il faudroit ensuite continuer l'operation pour trouver le plus grand diviseur commun, jusqu'à ce que g eût disparu dans le reste. Il faudroit supposer ce reste où g n'est plus, égal à zero, & ordonner l'équation par raport à l'inconnue f, & l'on auroit la réduite

$$\begin{array}{l} f^6 - 3nf^5 + 3nnf^4 - 4npf^3 + ppff - nnqf - qq = 0; \\ \quad\quad + 2pf^4 - n^3f^3 + nqff - nppf + npq \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad + 2nnpff + 4nrf - nnr \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad - 4rff \end{array}$$

Si le second terme étoit évanoui dans une équation du quatriéme degré, alors n étant zero, toutes les grandeurs de la réduite précedente où se trouve n, devenant zero, l'on auroit la réduite du 3^e^ degré $f^6 + 2pf^4 + ppff - qq = 0$.
$$- 4rff.$$

Pour trouver, par le moyen de ces reduites, si une équation particuliere du quatriéme degré, par exemple $\begin{array}{l} x^4 + 2ax^3 - acxx + 2abbx + aabc = 0, \\ \quad - 2bx^3 - 5abxx - 2aacx \end{array}$ peut se diviser exactement par deux équations commensurables du second degré, il faut supposer, afin que la formule generale represente la proposée, $n = 2a - 2b$, $p = -ac - 5ab$, $q = 2abb - 2aac$, $r = + aabc$: & ensuite substituer dans laquelle on voudra des deux réduites, à la place de n, p, q, &c. les grandeurs qu'elles representent.

Il faut ensuite trouver tous les diviseurs du dernier terme de la réduite ainsi changée; & si la proposée est litterale & homogene, il faudra prendre les seuls diviseurs de deux dimensions dans la réduite dont g est l'inconnue, & ceux d'une seule dimension dans la réduite dont f est l'inconnue.

Si l'on se sert de la réduite dont g est l'inconnue, comme g represente un diviseur de deux dimensions du dernier terme de la proposée, il n'y a parmi tous les diviseurs du dernier terme de la réduite, qui sont de deux dimensions, que ceux qui sont communs avec ceux du dernier terme de la proposée, qui peuvent servir; ce qui est un abregé lorsqu'on se sert de la réduite dont g est l'inconnue.

Il faut substituer les diviseurs dont on vient de parler successivement avec le signe de + & celui de −, à la place de g, dans la réduite, ou à la place de f, si l'on se sert de la seconde réduite; ou bien diviser successivement la réduite par g ou f plus ou moins chacun de ces diviseurs.

Celui de ces diviseurs dont la substitution rendra toutes les grandeurs de la réduite égales à zero, ou par le moyen duquel la division se fera sans reste, sera la valeur de g ou de f.

Dans notre exemple, aprés avoir mis dans la réduite dont g est l'inconnue, à la place de n, p, &c. les grandeurs de la proposée qu'elles representent, elle se trouve changée en celle-ci.

$$\begin{array}{l} g^6 + acg^5 + 4aabbg^4 - 4aab^3g^3 + 4a^3b^3cgg + a^4bbc^3g + a^4b^4c^3 = 0. \\ \quad + 5abg^5 - 4ab^3g^4 + 6a^3bbcg^3 - 4a^3b^3cgg + 5a^4b^3cg \\ \quad\quad - 4a^3cg^4 - 4a^4ccg^3 - 4a^5bccgg \\ \quad\quad + 3aabcg^4 - 4a^4bcg^3 + 3a^4bbccgg \\ \quad\quad\quad - 4aab^3cg^3 \\ \quad\quad\quad - 2a^3bccg^3 \end{array}$$

Les diviseurs du dernier terme, qui sont de deux dimensions, sont ab, ac, bc, aa, bb, cc, parmi lesquels il n'y en a de communs avec les diviseurs du dernier terme de la proposée, que ab, ac, bc, aa. Ainsi il ne faut se servir que de ces quatre.

Or on trouve que substituant $-ab$ à la place de g, dans la réduite, toutes les grandeurs se détruisent par des signes contraires; ou bien qu'en faisant la division de la réduite par $g + ab = 0$, la division se fait sans reste: Ainsi $g = -ab$.

Il faut aprés avoir trouvé cette valeur de g, la substituer avec les valeurs de n, q, r, dans l'équation où f est lineaire, qui est $f = \frac{ngg - qg}{gg - r}$, & l'on trouve $f = 2a$.

Il faut mettre ces valeurs de f & de g dans l'équation indéterminée $xx + fx + g = 0$, & l'on aura $xx + 2ax - ab = 0$, qui est l'équation commensurable du second degré, par laquelle la proposée peut être exactement divisée: si l'on fait la division, le quotient $xx - 2bx - ac = 0$, sera l'autre équation, par laquelle la proposée se peut exactement diviser.

On trouveroit aussi la seconde équation du second degré, en substituant les valeurs de n, p, q, r, f, g, dans le quotient indéterminé, qui est $\begin{array}{l} xx + nx + p = 0. \\ \quad - fx - g \\ \quad\quad - nf \\ \quad\quad + ff \end{array}$

Démonstration du cinquiéme Problême.

On suppose que $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, represente toute l'équation du quatriéme degré, qui se peut exactement diviser par deux autres commensurables du 2^e^ degré, dont l'une est representée par $xx + fx + g = 0$:

Ainsi f & g representent des grandeurs commensurables. Selon cette supposition, en divisant $x^4 + nx^3$, &c. par $xx + fx + g = 0$, la division doit être exacte, & le quotient est

$$\begin{array}{l} xx + nx + p = 0. \\ \quad - fx - g \\ \qquad\quad - nf \\ \qquad\quad + ff \end{array}$$

Puisque la division est supposée se faire sans reste, le reste

$$\begin{array}{ll} + qx & + r \\ - ngx & - pg \\ + 2fgx & + gg \\ - pfx & + nfg \\ + nffx & - ffg \\ - f^3x & \end{array}$$

doit donc être égal à zero, & les grandeurs de chaque terme du reste se doivent détruire, & effectivement elles se détruiroient si l'on mettoit à la place des lettres n, p, q, r, f, g, les grandeurs qu'elles representent; car autrement la division ne se feroit pas sans reste, contre la supposition.

Chacun des termes du reste donne donc une équation, dont le 2^e membre est zero. Ainsi $\begin{array}{l} - f^3 + nff - pf - ng \\ \qquad\qquad + 2gf + q \end{array} = 0$, $\begin{array}{l} - gff + ngf + gg = 0. \\ \qquad\qquad - pg \\ \qquad\qquad + r \end{array}$

Si l'on conçoit dans chacune à la place des lettres, les grandeurs qu'elles representent, toutes les grandeurs se détruiront par des signes contraires. Donc f + ou — la grandeur commensurable qu'elle represente, est une équation lineaire, qui est un diviseur exact de l'une & de l'autre de ces deux équations, par la nature des équations.

De même g + ou — la grandeur commensurable qu'elle represente, est une équation lineaire, qui est un diviseur exact de ces deux mêmes équations, supposé qu'on les ordonne par raport à l'indéterminée g; par consequent en recherchant le plus grand diviseur commun de ces deux équations, qui en ont un où f est lineaire, ou bien un où g est lineaire: Quand on sera arrivé à un reste dans lequel f ou bien g seront lineaires, ce sera un diviseur commun des deux équations. Ce reste est $f = \frac{ngg - gg}{gg - r}$, ou bien $g = \frac{f^3 - nff + pf - q}{2f - n}$. Ce reste est donc une équation lineaire, qui contient une racine commensurable de chacune de ces deux équations.

Si on continue la recherche du plus grand diviseur commun, jusqu'à ce que f ou g disparoissent, le nouveau reste qui ne contiendra point f, ou point g, sera donc égal à zero, puisque le reste précedent où f, ou bien où g étoit lineaire, est supposé un diviseur exact, qui doit laisser zero pour reste de la division: Ce dernier reste qui est la réduite, est donc tel, qu'en mettant à la place de l'inconnue f ou g de cette réduite, la grandeur commensurable qu'elle represente, & y mettant aussi les grandeurs representées par n, p, q, &c. toutes les quantités se détruiront par des signes contraires.

Par consequent, selon la nature des équations, aprés avoir substitué dans la réduite les grandeurs representées par n, p, q, &c. f + ou — un diviseur du dernier terme de la réduite, ou bien g + ou — un diviseur du dernier terme de la réduite, est une équation lineaire qui divise exactement la réduite, & qui en contient la racine; c'est à dire, la valeur de f ou de g.

La methode fait donc trouver, lorsque l'équation proposée est réductible, les valeurs de f & de g, qui étant mises à leur place dans $xx + fx + g = 0$, changent cette équation indéterminée en une autre déterminée, qui est un diviseur exact de la proposée. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarques sur la methode du cinquiéme Probléme.

I.

68. Il suffit ici d'avoir fait concevoir, & d'avoir demontré la methode; ceux qui voudront prendre la peine du calcul, pourront supputer deux réduites pour le cinquiéme degré, & deux pour le sixiéme, dont les inconnues soient f & g; & de plus trois réduites pour le sixiéme degré, lorsqu'il peut se réduire à deux équations chacune du troisiéme degré, dont les inconnues seront les indéterminées f, g, h, de l'équation indéterminée $x^3 + fxx + gx + h = 0$.

Ils pourront toujours trouver par le moyen de ces réduites, si une équation quelconque du 4^e, 5^e & 6^e degré est réductible; & les équations plus simples ausquelles on la peut réduire, par les seules substitutions des grandeurs de la proposée, representées par n, p, q, &c.

Pour abreger le calcul qu'il faut faire pour trouver ces réduites, on pourra supposer le second terme, où est n, de chaque formule generale, évanoui; & alors il faudra faire évanouir le second terme d'une équation proposée, lorsqu'on voudra voir si elle est réductible.

II.

Lorsqu'on se sert de la réduite dont l'inconnue g ou h est le dernier terme de l'equation indéterminée $xx + fx + g = 0$, ou bien $x^3 + fxx + gx + h = 0$; la grandeur representée par g ou h, devant être un diviseur exact du dernier terme de la proposée, lorsque cette grandeur est commensurable; on a cet avantage de n'avoir besoin pour trouver la racine de la réduite, que des diviseurs du dernier terme de la proposée, communs avec ceux du dernier terme de la réduite: & de plus si l'équation proposée est litterale & homogéne, on n'a besoin que des diviseurs du dernier terme de la proposée qui sont de deux dimensions, lorsque l'on cherche une équation representée par $xx + fx + g = 0$ du second degré; & de ceux qui sont de trois dimensions, lorsqu'on cherche une équation du troisiéme degré representée par $x^3 + fxx + gx + h = 0$.

Lorsqu'on se sert de la réduite dont l'indéterminée f des équations $xx + fx + g = 0$, $x^3 + fxx + gx + h = 0$ est l'inconnue, ou bien l'indéterminée g de l'équation $x^3 + fxx + gx + h = 0$, on a cet avantage que quand l'équation du second ou du troisiéme degré, par laquelle la proposée se peut exactement diviser, a le second terme évanoui, on le trouve tout d'un coup; car aprés la substitution des grandeurs representées par n, p, &c. dans la réduite, cette réduite se peut abaisser d'un degré; c'est à dire, f se trouve avoir une valeur égale à zero.

Il faut entendre la même chose de la réduite, dont l'inconnue est l'indéterminée g de l'équation $x^3 + fxx + gx + h = 0$.

III.

Lorsqu'en examinant par la methode qu'on vient d'expliquer, si une équation proposée est réductible, on ne trouve aucune valeur commensurable de l'inconnue de la réduite, on est assuré que la proposée est irréductible.

AVERTISSEMENT.

Les methodes qu'on vient de donner pour trouver si une équation est réductible, demandent un long calcul; c'est pourquoi il seroit à souhaiter qu'on eût une methode courte pour trouver quand une équation est irréductible. En voici une qui peut servir en plusieurs rencontres.

Methode pour trouver tout d'un coup, en plusieurs cas, si une équation litterale est irréductible.

69. Il faut supposer chaque lettre differente de l'équation proposée égale à un nombre, comme à 1, ou à 2, &c. ou bien supposer toutes les lettres differentes égales, ou seulement quelques-unes. On peut aussi supposer l'unité ou le même nombre égal à plusieurs lettres differentes de la proposée; (on suppose qu'on n'a point abregé l'équation proposée en supposant plusieurs connues differentes exprimées par une seule lettre.)

Il faut ensuite substituer les nombres ou les lettres qu'on a supposé égales à celles de l'équation, à leur place dans la proposée. Si la nouvelle équation qui en resulte, est irréductible, c'est une marque certaine que la proposée est irréductible.

Démonstration. Par la supposition, l'équation nouvelle qui resulte des substitutions, est irréductible. Mais si la proposée étoit réductible en deux autres équations plus simples, cette équation qui resulte des substitutions seroit necessairement réductible, comme on va le montrer: Ainsi si l'équation qui resulte des substitutions est irréductible, la proposée l'est aussi. Car si la proposée étoit réductible en deux autres plus simples, on pourroit concevoir qu'on substituât dans ces deux plus simples, à la place des lettres differentes qu'elles contiennent, les mêmes nombres ou lettres qu'on leur a supposées égales dans la proposée; & on conçoit évidemment que le produit de ces plus simples ainsi changées, donneroit l'équation même qui a resulté des substitutions. Elle seroit donc réductible en ces deux plus simples changées par les substitutions qu'on y a conçues. Elle ne seroit donc pas irréductible. Ce qui est contre la supposition.

REMARQUE.

CEPENDANT, quand en substituant des nombres ou des lettres à la place des lettres differentes d'une équation proposée, l'équation qui en resulte est réductible, ce n'est pas une marque certaine que la proposée soit réductible; car si on suppose dans l'équation irréductible $x^3 - 3axx + 3abx - aab = 0$, que $b = a$, l'équation $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0$, qui en resultera, sera réductible.

Cela vient de ce que les lettres connues dans une équation litterale, representant toutes les grandeurs possibles, on peut supposer de ces grandeurs à leur place qui soient telles, qu'elles donnent une nouvelle équation de même forme que la proposée qui ait des racines commensurables; car il y a des équations réductibles possibles de la même forme que la proposée, & la generalité ou l'indétermination, pour ainsi parler, des lettres de la proposée, est cause qu'elle represente ces équations réductibles de même forme, aussi bien que les autres qui ne sont pas réductibles.

COROLLAIRE DU CINQUIÉME PROBLÊME,

Où l'on explique la methode de trouver tous les diviseurs du dernier terme d'une équation, lorsque ce dernier terme est tres composé.

70. LA methode du Problême précedent peut servir à trouver tous les diviseurs du dernier terme d'une équation litterale, quelque composé qu'il puisse être, comme on le va voir dans l'exemple suivant.

Soit l'équation
$$\begin{array}{lllll} x^4 + abx^3 & + aadxx & + a^3dx & + a^4d & = 0, \\ - acx^3 & - abdxx & - aabdx & - a^3bd & \\ + bbx^3 & + bcdxx & + abcdx & - a^3cd & \\ & + aabxx & + a^3bx & + aabbd & \\ & - a^3xx & - aabcx & + 2aabcd & \\ & + aacxx & + ab^3x & - ab^3d & \\ & - abbcx & & - abccd & \\ & & & + b^3cd & \end{array}$$
dont le dernier terme est tres composé.

Pour trouver tous les diviseurs de ce dernier terme, 1°, on feindra que c'est une équation; & prenant une des lettres qui s'y trouvent, comme a, pour l'inconnue de cette équation feinte, on ordonnera l'équation feinte par raport à l'inconnue a; & l'on aura l'équation feinte,
$$\begin{array}{l} da^4 - bda^3 + bbdaa - b^3da + b^3cd = 0. \\ \quad\;\; - cda^3 + 2bcdaa - bccda \end{array}$$

2°. On verra si tous les termes ne sont point multipliés par une même grandeur, & comme on trouve qu'ils le sont par d, on les divisera par d, qui est déja un des diviseurs simples du dernier terme; il le faut mettre à part, & l'équation feinte sera
$$\begin{array}{l} a^4 - ba^3 + bbaa - b^3a + b^3c = 0. \\ \quad - ca^3 + 2bcaa - bcca \end{array}$$

3°. Il faut chercher par le premier Problême, si une équation lineaire de l'inconnue a plus ou moins un diviseur du dernier terme b^3c, ne seroit point un diviseur exact de cette équation feinte: Si l'on en trouvoit une qui fût un diviseur exact, on la mettroit à part, comme étant un diviseur lineaire du dernier terme de la proposée, & on chercheroit de même si le quotient n'auroit point de semblables diviseurs lineaires; ce qu'on continueroit jusqu'à ce qu'on trouvât un quotient qui n'eût plus de ces diviseurs lineaires.

Si le premier terme a^4 de l'équation feinte avoit un autre coéficient que l'unité, on se serviroit du second Problême pour trouver les diviseurs de l'équation feinte, dans lesquels l'inconnue a fût lineaire. Mais comme l'équation feinte qui sert d'exemple n'a aucun de ces diviseurs dans lesquels a soit lineaire, il faut trouver les diviseurs dans lesquels a soit du second degré.

4°. Pour les trouver, on y appliquera la methode du cinquiéme Problême; c'est à dire, supposant que la formule $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, represente cette équation feinte, on supposera $n = - b - c$, $p = bb + 2bc$, $q = - b^3 - bcc$, $r = b^3c$.

On substituera ces valeurs à la place de n, p, q, r, dans la réduite
$$\begin{array}{l} g^6 - pg^5 + nqg^4 - qqg^3 + nqrg - prg + r^3 = 0; \\ \qquad\quad - rg^4 - nnrg^3 - rrgg \\ \qquad\qquad\quad + 2prg^3 \end{array}$$
& elle sera changée en cette autre réduite,
$$\begin{array}{l} g^6 - bbg^5 + b^4g^4 - b^6g^3 + b^7cgg - b^8ccg + b^9c^3 = 0. \\ \quad - 2bcg^5 + bbccg^4 - bbc^4g^3 + b^5c^3gg - 2b^7c^3g \\ \qquad\quad + bc^3g^4 + b^3cg^3 + b^6c^4gg \\ \qquad\qquad\quad - b^3c^3g^3 \end{array}$$
Il faudra chercher les diviseurs de deux dimensions communs au dernier terme b^9c^3 de cette réduite, & au dernier terme b^3c de l'équation feinte: ces diviseurs sont bb, bc. Il faudra ensuite substituer successivement $+ bb$, $- bb$, $+ bc$

$-bc$, à la place de g dans la réduite ; & parcequ'on trouve que la substitution de $+bb$ fait détruire toutes les quantités de la réduite par des signes contraires, bb est une valeur de g, c'est à dire $g = bb$.

Il faut substituer bb au lieu de g, & les valeurs de n, q, r, à leur place, dans $f =$ [illegible] ; & l'on trouvera $f = -c$. Substituant ces valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, qui est dans cet exemple $aa + fa + g = 0$, on la changera en $aa - ca + bb = 0$, qui est un diviseur exact de la proposée ; le quotient est $aa - ab + cd = 0$. Ainsi les diviseurs de deux dimensions de la proposée sont $aa - ac + bb$, $aa - ab + cd$.

Comme il n'y a pas d'autres diviseurs plus composés à chercher dans notre exemple, pour avoir tous les diviseurs du dernier terme de la proposée, il n'y a qu'à multiplier ceux qu'on a trouvés les uns par les autres, & on les aura tous. Ce qui étoit proposé.

REMARQUE.

Si le dernier terme de l'équation feinte du dernier terme de la proposée, étoit encore fort composé, on feroit de ce dernier terme de l'équation feinte, une seconde équation feinte, & on en trouveroit tous les diviseurs, comme on les a trouvé de la premiere, & ils serviroient ensuite à trouver tous les diviseurs de la premiere équation feinte.

Cette methode n'a pas besoin de démonstration aprés celle du cinquiéme Problême.

SECTION IV.

Où l'on explique la maniere de résoudre les équations qui ont toutes leurs racines égales, ou qui en ont seulement quelques-unes d'égales & commensurables, & la maniere d'abaisser à un moindre degré les équations qui ont quelques-unes de leurs racines égales & incommensurables, & de diminuer le nombre de leurs inconnues, lorsqu'elles en ont plusieurs.

PROBLÊME VI.

71. RESOUDRE *une équation composée, dont toutes les racines sont égales ; c'est à dire, trouver toutes les racines égales.*

Il est évident qu'il suffit d'en trouver une seule ; pour cela il faut prendre la racine du dernier terme de la proposée, dont l'exposant soit égal à celui du degré de la proposée, & elle sera la racine de la proposée.

Par exemple, l'équation $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0$, contient trois racines égales ; pour les trouver, il faut tirer la racine troisiéme du dernier terme a^3, & l'on aura a pour la racine de la proposée, c'est à dire $x = a$.

De même supposé qu'on sçache que l'équation $x^4 - 4x^3\sqrt[4]{2} + 6xx\sqrt[4]{4} - 4x\sqrt[4]{8} + 2 = 0$, a toutes ses racines égales, la racine quatriéme du dernier terme, qui est $\sqrt[4]{2}$, est la racine de la proposée, c'est à dire $x = \sqrt[4]{2}$.

La démonstration est évidente, si l'on fait reflexion que le dernier terme de l'équation est le produit de toutes les racines.

PROBLÊME VII.

72. LORSQU'IL *y a plusieurs racines égales positives dans une équation composée quelconque, les trouver lorsqu'elles sont commensurables, & abaisser l'équation à un moindre degré, lorsque les racines égales sont incommensurables.*

METHODE GENERALE.

1°. On supposera que chaque racine égale est representée par f, ainsi $x = f$, $x - f = 0$; & $xx - 2fx + ff = 0$, represente une équation de deux racines égales ; $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, represente une équation de trois racines égales ; $x^4 - 4fx^3 + 6ffxx - 4f^3x + f^4 = 0$, en represente une de quatre racines égales, &c.

2°. Il faudra diviser la formule generale des équations du second degré, du troisiéme, du quatriéme, &c. par $xx - 2fx + ff = 0$, lorsque l'on cherchera deux racines égales ; il faudra diviser la formule du troisiéme, quatriéme degré, &c. par $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, lorsqu'on cherchera trois racines égales ; & ainsi de suite. Il faudra continuer la division jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste, dans lequel x soit moins élevée d'un degré que dans le diviseur.

3°. Il faudra supposer chacun des termes de ce reste égal à zero, & y mettre l'inconnue $x = f$ à la place de f.

Ces équations seront les formules generales propres à faire trouver les racines égales dans chaque degré, quand elles sont commensurables ; ou à abaisser l'équation qui aura des racines égales à un moindre degré, quand elles sont incommensurables.

Application de la methode aux équations du 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, & 6^e degré, qui ont deux racines égales.

Pour le second degré.

1°. Il faut diviser $xx + nx + p = 0$, par $xx - 2fx + ff = 0$; & l'on aura le reste $+ nx + 2fx + p - ff$, où x est d'un degré moins élevée que dans le diviseur.

2°. Il faut supposer chaque terme de ce reste égal à zero, & l'on aura $2f + n = 0$, $- ff + p = 0$; il faut substituer dans ces équations $x = f$, à la place de f, & l'on aura $2x + n = 0$, $- xx + p = 0$; ce qui donne immédiatement la valeur de x dans le second degré : car $x = - \frac{n}{2}$; ou bien encore $xx = p$, d'où l'on déduit $x = \sqrt{p}$.

Pour le troisiéme degré.

1°. On divisera $x^3 + nxx + px + q = 0$, par $xx - 2fx + ff = 0$, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au reste $+ px + 2nfx + 3ffx$, $+ q - nff - 2f^3$.

2°. On supposera chaque terme de ce reste égal à zero ; & aprés avoir mis dans les deux équations qui en naîtront, x à la place de f, l'on aura $3xx + 2nx + p = 0$, & $- 2x^3 - nxx + q = 0$.

Pour

Pour le quatriéme degré.

On trouvera par une semblable operation ces deux formules $+ 4x^3 + 3nxx + 2px + q = 0$, & $- 3x^4 - 2nx^3 - pxx + r = 0$.

Pour le cinquiéme degré.

On trouvera $5x^4 + 4nx^3 + 3pxx + 2qx + r = 0$, & $- 4x^5 - 3nx^4 - 2px^3 - qxx + s = 0$.

Pour le sixiéme degré.

On trouvera ces deux formules $6x^5 + 5nx^4 + 4px^3 + 3qxx + 2rx + s = 0$, & $- 5x^6 - 4nx^5 - 3px^4 - 2qx^3 - rxx + t = 0$.

Application de la methode aux équations qui ont trois racines égales.

Pour le troisiéme degré.

Il faut diviser $x^3 + nxx + px + q = 0$, par $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, & le reste
$$\begin{array}{llll} + nxx & + px & + q & = 0, \\ + 3fxx & - 3ffx & + f^3 & \end{array}$$
contenant xx, qui est moins élevée d'un degré que x^3 dans le diviseur ; on supposera chacun des termes de ce reste égal à zero, & l'on y substituera x à la place de f : ce qui donnera les trois formules suivantes $3x + n = 0$, $- 3xx + p = 0$, $+ x^3 + q = 0$.

Pour le quatriéme degré.

On trouvera par une semblable operation en divisant $x^4 + nx^3$, &c. par $x^3 - 3fxx$, &c. le reste $+ 6ffxx + 3nfxx + pxx - 8f^3x - 3nffx + qx + 3f^4 + nf^3 + r = 0$; on supposera chaque terme égal à zero ; & aprés avoir substitué $x = f$ à la place de f, on aura les trois formules suivantes, $+ 6xx + 3nx + p = 0$, $- 8x^3 - 3nxx + q = 0$, $+ 3x^4 + nx^3 + r = 0$.

Pour le cinquiéme degré.

En divisant $x^5 + nx^4$, &c. par $x^3 - 3fxx$, &c. on trouvera le reste
$$\begin{array}{lll} + 10f^3xx & - 15f^4x & + 6f^5 \\ + 6nffxx & - 8nf^3x & + 3nf^4 \\ + 3pfxx & - 3pffx & + pf^3 \\ + qxx & + rx & + s \end{array}$$

dont on ſuppoſera chaque terme égal à zero, & on ſubſtituera $x = f$ à la place de f, dans les trois équations qui en viendront; ce qui donnera les trois formules ſuivantes,

$$10x^3 + 6nxx + 3px + q = 0$$
$$-15x^4 - 8nx^3 - 3pxx + r = 0$$
$$6x^5 + 3nx^4 + px^3 + s = 0$$

Pour le ſixiéme degré.

En diviſant $x^6 + nx^5$, &c. par $x^3 - 3fxx$, &c. on trouvera le reſte

$$\begin{array}{lll} +15f^4xx & -24f^5x & +10f^6 \\ +10nf^3xx & -15nf^4x & +6nf^5 \\ +6pffxx & -8pf^3x & +3pf^4 \\ +3qfxx & -3qffx & +qf^3 \\ +rxx & +sx & +t \end{array}$$

on ſuppoſera chaque terme de ce reſte égal à zero; & après avoir ſubſtitué $x = f$, à la place de f, dans les trois équations qui en viendront, on aura les trois formules ſuivantes,

$$15x^4 + 10nx^3 + 6pxx + 3qx + r = 0.$$
$$-24x^5 - 15nx^4 - 8px^3 - 3qxx + s = 0$$
$$+10x^6 + 6nx^5 + 3px^4 + qx^3 + t = 0$$

AVERTISSEMENT.

On trouvera par de ſemblables operations, en diviſant les formules generales $x^4 + nx^3$, &c. $x^5 + nx^4$, &c. $x^6 + nx^5$, &c. par $x^4 - 4fx^3 + 6ffxx - 4f^3x + f^4 = 0$, les formules pour trouver les quatre racines égales des équations du 4^e, 5^e, & 6^e degré; & ainſi de ſuite.

On pourroit trouver les mêmes formules, ſi on élevoit l'équation qui repreſente les racines égales au degré de la propoſée, en la multipliant par une autre équation indéterminée, & comparant enſuite les termes de ce produit avec ceux de la formule generale du même degré.

Remarque ſur les formules qui doivent ſervir à trouver les racines égales d'une équation.

73. Les deux formules qu'on a trouvées dans chaque degré pour découvrir les racines égales, lorſqu'il y en a deux dans une équation, ne ſont chacune que l'équation même dont les termes ſont multipliés de ſuite par les termes d'une progreſſion arithmetique, qui va en diminuant, le premier terme

de l'équation par le premier de la progreſſion, le ſecond par le ſecond, & ainſi de ſuite.

Le premier terme de la progreſſion arithmetique, qui fait trouver la premiere formule dans chaque degré, eſt toujours égal à l'expoſant de la puiſſance de l'inconnue dans le premier terme; dans le ſecond degré, où l'expoſant de la puiſſance xx dans le premier terme eſt 2, le premier terme de la progreſſion arithmetique eſt 2; dans le 3^e degré, c'eſt 3; dans le 4^e, c'eſt 4; & ainſi de ſuite: d'où l'on voit que chaque terme de la progreſſion arithmetique, qui fait trouver la premiere formule, eſt égal à l'expoſant de la puiſſance de l'inconnue x, dans le terme de l'équation qu'il doit multiplier, & que zero ſe trouve ſous le dernier terme. Ainſi dans le ſecond degré, la progreſſion arithmetique pour trouver la premiere formule, eſt 2, 1, 0; dans le 3^e degré, 3, 2, 1, 0; dans le 4^e degré, 4, 3, 2, 1, 0; & ainſi de ſuite.

La progreſſion arithmetique qui fait trouver la ſeconde formule, eſt dans le ſecond degré $-1, 0, +1$; dans le 3^e degré, $-2, -1, 0, +1$; dans le 4^e, $-3, -2, -1, 0, +1$; dans le 5^e, $-4, -3, -2, -1, 0, +1$; dans le 6^e, $-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1$.

Les trois formules qu'on a trouvées pour découvrir les racines égales des équations, lorſqu'il y en a trois, ſont auſſi les termes de l'équation même de chaque degré, multipliés de ſuite par les termes du produit de deux progreſſions arithmetiques. Pour la premiere formule du 3^e degré, les deux progreſſions ſont

$$\begin{array}{llll} 3, & 2, & 1, & 0. \\ 2, & 1, & 0, & -1. \\ \hline 6, & 2, & 0, & 0. \end{array}$$

Leur produit eſt 6, 2, 0, 0.

Diviſant chaque terme par 2, l'on a 3, 1, 0, 0.

Pour la ſeconde formule du 3^e degré, les deux progreſſions arithmetiques ſont

$$\begin{array}{llll} 3, & 2, & 1, & 0. \\ -1, & 0, & +1, & +2. \\ \hline -3, & 0, & +1, & 0. \end{array}$$

Leur produit eſt $-3, 0, +1, 0$.

Pour la troiſiéme formule du 3^e degré, les deux progreſſions arithmetiques ſont

$$\begin{array}{llll} 2, & 1, & 0, & -1. \\ 1, & 0, & -1, & -2. \\ \hline 2, & 0, & 0, & +2. \end{array}$$

Leur produit eſt 2, 0, 0, +2.

Diviſant chaque terme par 2, l'on a 1, 0, 0, 1.

Pour la premiere formule du 4^e degré, les deux progressions arithmetiques sont

$$\begin{array}{rrrrr} 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ \hline 12, & 6, & 2, & 0, & 0. \end{array}$$

Leur produit est $12, 6, 2, 0, 0$.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 6, 3, 1, 0, 0.

Pour la seconde formule du 4^e degré, les deux progressions sont

$$\begin{array}{rrrrr} 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ -2, & -1, & 0, & +1, & +2. \\ \hline -8, & -3, & 0, & +1, & 0. \end{array}$$

Leur produit est $-8, -3, 0, +1, 0$.

Pour la troisiéme formule du 4^e degré, les deux progressions sont

$$\begin{array}{rrrrr} 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ 2, & 1, & 0, & -1, & -2. \\ \hline 6, & 2, & 0, & 0, & +2. \end{array}$$

Leur produit est $6, 2, 0, 0, +2$.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 3, 1, 0, 0, 1.

Pour la premiere formule du 5^e degré, les deux progressions sont

$$\begin{array}{rrrrrr} 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ \hline 20, & 12, & 6, & 2, & 0, & 0. \end{array}$$

Leur produit est $20, 12, 6, 2, 0, 0$.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 10, 6, 3, 1, 0, 0.

Pour la seconde formule du 5^e degré, les deux progressions sont

$$\begin{array}{rrrrrr} 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ -3, & -2, & -1, & 0, & +1, & +2. \\ \hline -15, & -8, & -3, & 0, & +1, & 0. \end{array}$$

Leur produit est $-15, -8, -3, 0, +1, 0$.

Pour la troisiéme formule du 5^e degré, les deux progressions sont

$$\begin{array}{rrrrrr} 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ 3, & 2, & 1, & 0, & -1, & -2. \\ \hline 12, & 6, & 2, & 0, & 0, & +2. \end{array}$$

Leur produit est $12, 6, 2, 0, 0, +2$.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 6, 3, 1, 0, 0, 1.

Pour la premiere formule du 6^e degré, les deux progressions sont

$$\begin{array}{rrrrrrr} 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ \hline 30, & 20, & 12, & 6, & 2, & 0, & 0. \end{array}$$

Leur produit est $30, 20, 12, 6, 2, 0, 0$.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 15, 10, 6, 3, 1, 0, 0.

Pour la seconde formule du 6^e degré, les deux progressions sont

$$\begin{array}{rrrrrrr} 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & +1, & +2. \\ \hline -24, & -15, & -8, & -3, & 0, & +1, & 0. \end{array}$$

Leur produit est $-24, -15, -8, -3, 0, +1, 0$.

Pour la troisiéme formule du 6^e degré, les deux progressions sont

$$\begin{array}{rrrrrrr} 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1, & -2. \\ \hline 20, & 12, & 6, & 2, & 0, & 0, & +2. \end{array}$$

Leur produit est $20, 12, 6, 2, 0, 0, +2$.
Divisant chaque terme par 2, l'on a 10, 6, 3, 1, 0, 0, 1.

S'il y avoit quatre racines égales, on trouveroit quatre formules pour les découvrir dans chaque degré, dont chacune seroit le produit des termes de l'équation proposée, par les termes du produit de trois progressions arithmetiques.

S'il y avoit cinq racines égales, on trouveroit cinq formules pour les découvrir dans chaque degré; chacune de ces formules seroit le produit des termes de l'équation, par les termes du produit de quatre progressions arithmetiques; & ainsi de suite. Il est facile de les trouver par la methode.

Application de la methode à des exemples, c'est à dire, aux équations particulieres qui ont plusieurs racines égales.

EXEMPLE I.

L'EQUATION $x^3 + 3xx - 9x + 5 = 0$, a deux racines égales; pour les trouver, il n'y a qu'à substituer dans les deux formules du troisiéme degré, $3xx + 2nx + p = 0$, $-2x^3 - nxx + q = 0$, les valeurs de n, p, q; ou bien, ce qui est plus court, il n'y a qu'à multiplier les termes de la proposée par les termes de la progression arithmetique 3, 2, 1, 0; ou bien, ce qui est la même chose, multiplier chaque terme de la proposée par le nombre qui est l'exposant du degré où l'inconnue x est élevée dans ce terme, & le dernier terme où x n'est point par zero; & l'on aura $3x^3 + 6xx - 9x = 0$, qui se réduit à $3xx + 6x - 9 = 0$, qui peut encore être divisée par 3, & l'on aura $xx + 2x - 3 = 0$.

Il faut ensuite multiplier les termes de la proposée par les termes de la progression arithmetique $-2, -1, 0, +1$; & l'on aura $-2x^3 - 3xx + 5 = 0$.

Pour trouver ensuite la racine égale de la proposée, il n'y a qu'à chercher le plus grand diviseur commun de deux de ces trois équations; sçavoir la proposée $x^3 + 3xx - 9x + 5 = 0$, & les deux autres qu'on vient de former, $xx + 2x - 3 = 0$, $-2x^3 - 3xx + 5 = 0$; l'on trouvera que $-x$

$+1=0$, ou bien $x-1=0$, est ce plus grand diviseur commun; ainsi $x=1$, & 1 est la racine égale qu'on cherche.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines égales de $x^4-4x+3=0$, qui en contient deux, on multipliera chaque terme par l'exposant de x, & le dernier terme par zero; & l'on aura $4x^4-4x=0$, qui se réduit à $4x^3-4=0$; divisant par 4, l'on aura $x^3-1=0$, d'où l'on déduit $x=1$: ainsi il est inutile de multiplier la proposée par l'autre progression arithmetique $-3, -2, -1, 0, +1$, puisque la racine qu'on cherche est $x=1$; & l'on trouvera que $x-1=0$, est un diviseur commun de la proposée, & de $x^3-1=0$.

EXEMPLE III.

POUR trouver chacune des trois racines égales que contient l'équation $x^4-6xx+8x-3=0$, on la multipliera par les termes du produit des deux progressions

$$\begin{array}{lrrrrr} & 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ & 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ \hline \text{qui est} \ldots & 12, & 6, & 2, & 0, & 0, \end{array}$$

ou plûtôt par la moitié de chaque terme de ce produit, qui étant divisé par 2, se réduit à 6, 3, 1, 0, 0; & l'on aura $6x^4-6xx=0$, qui se réduit à $xx-1=0$, d'où l'on déduit $x=1$; ainsi 1 est la racine égale qu'on cherche.

Si l'on n'avoit pas trouvé d'abord la racine égale qu'on cherche, on auroit multiplié la proposée par les termes du produit des deux progressions

$$\begin{array}{rrrrr} 4, & 3, & 2, & 1, & 0. \\ -2, & -1, & -0, & +1, & +2. \\ \hline -8, & -3, & 0, & +1, & 0, \end{array}$$

& ensuite par les termes du produit des deux autres progressions

$$\begin{array}{lrrrrr} & 3, & 2, & 1, & 0, & -1. \\ & 2, & 1, & 0, & -1, & -2. \\ \hline \text{qui est} \ldots & 6, & 2, & 0, & 0, & +2, \end{array}$$

ou plûtôt par les termes de la moitié de ce produit, qui sont 3, 1, 0, 0, 1.

Il auroit ensuite fallu chercher le plus grand diviseur commun de la proposée, & de quelqu'une des trois équations formées par le produit des progressions arithmetiques;

ou, ce qui est quelquefois plus facile, il auroit fallu trouver le plus grand diviseur commun de deux de ces trois équations, & il auroit fait connoître la racine qu'on cherche.

Démonstration du septiéme Problême.

POUR rendre cette démonstration plus claire, on l'appliquera à un exemple du troisiéme degré. On suppose que $x^3+nxx+px+q=0$, represente une équation qui a deux racines égales positives commensurables, & que $xx-2fx+ff=0$, represente l'équation composée de ces deux racines égales; ainsi f represente chacune de ces racines égales, & $x=f$, ou bien $x-f=0$.

1°. Il est évident que quand la proposée contient deux racines égales commensurables, $xx-2fx+ff=0$, divise la proposée sans reste; par consequent le reste

$$\begin{array}{rr} 3ffx & -2f^3 \\ +2nfx & -nff \\ +px & +q \end{array}$$

est égal à zero; & de plus, chaque terme de ce reste est égal à zero, autrement la division ne se feroit pas sans reste, contre la supposition.

2. Il est donc clair que si l'on conçoit la grandeur commensurable que represente f, mise à la place de f, dans les deux équations du reste $3ff+2nf+p=0$, $-2f^3-nff+q=0$; ou, ce qui est la même chose, $3xx+2nx+p=0$, $-2x^3-nxx+q=0$; toutes les quantités de chacune de ces équations se détruiront par des signes contraires: Donc x moins cette grandeur, est une équation lineaire qui divise exactement l'une & l'autre. Par la supposition, cette équation lineaire divise aussi la proposée; par consequent la proposée & ces deux équations ont un diviseur commun, qui est une équation lineaire faite de x, moins la grandeur representée par f, $=0$: Il est donc évident qu'en cherchant le diviseur commun de la proposée & de ces deux équations, on aura la racine qu'on cherche. Ainsi la methode fait trouver necessairement la racine égale commensurable qu'on cherche. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce même raisonnement peut s'appliquer à tous les degrés, & à toutes les racines égales que peut contenir chaque degré.

COROLLAIRE.

IL suit de là que quand on ne trouve point de diviseur commun, la racine égale est incommensurable.

Démonstration du cas où les racines égales sont incommensurables.

SUPPOSE' que $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, represente une équation qui a deux racines égales incommensurables, & que f represente chacune de ces racines égales; l'on aura $x - f = 0$; & $xx - 2fx + ff = 0$, representera l'équation composée de ces deux racines égales; $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, en representera une composée de trois racines égales, &c. Il est évident que si la grandeur incommensurable representée par f, étoit mise à sa place dans $xx - 2fx + ff = 0$, la proposée seroit divisée sans reste par cette équation ainsi changée; par consequent le reste $4f^3x + 3nffx + 2pfx + qx - 3f^4 - 2nf^3 - pff + r$, seroit égal à zero, & chaque terme égal à zero, puisqu'autrement la division ne seroit pas sans reste. Si donc l'on conçoit que la grandeur incommensurable representée par f, est substituée dans $4f^3 + 3nff + 2pf + q = 0$, & $- 3f^4 - 2nf^3 - pff + r = 0$; ou, ce qui revient au même, dans $4x^3 + 3nxx + 2px + q = 0$, $- 3x^4 - 2nx^3 - pxx + r = 0$, il est certain que les quantités de chacune de ces deux équations se détruiront par des signes opposés : Les deux équations representées par $4x^3 + 3nxx + 2px + q = 0$, & $- 3x^4 - 2nx^3 - pxx + r = 0$, ont donc une racine commune, quoiqu'elle soit incommensurable, laquelle est aussi une racine de la proposée.

La methode du septiéme Problême fait donc trouver, quand une équation a des racines égales incommensurables, une équation abaissée à un moindre degré, qui a neanmoins pour une de ses racines, une des racines égales de la proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

QUAND il y a deux racines égales dans une équation, on la peut abaisser à une équation d'un degré moindre que la proposée; quand il y en a trois, on la peut abaisser à une équation moindre de deux degrés que la proposée; & ainsi de suite.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

QUAND les racines égales étant commensurables, on abaisse l'équation qui les contient, en la divisant par l'équation composée des racines égales, il est évident que l'équation abaissée contient les autres racines de la proposée : Mais quand elles sont incommensurables, l'équation abaissée a encore la racine égale qui lui est commune avec la proposée; mais il ne s'ensuit pas qu'elle contienne les autres racines de la proposée.

Autre démonstration de l'usage des progressions arithmetiques, pour découvrir les racines égales des équations composées.

THEORÊME.

74. *LORSQU'UNE équation n'a que des racines égales positives, si on multiplie de suite ses termes par ceux d'une progression arithmetique quelconque, le produit sera une équation qui aura encore toutes les racines égales de la premiere, excepté une seule.*

Ainsi lorsqu'une équation est composée de deux racines égales positives, le produit aura encore une de ces racines; si elle est composée de 3, le produit en aura 2; si elle l'est de 4, le produit en aura 3; & ainsi de suite.

D'où il suit que quand l'équation est composée de trois racines égales, si on multiplie de suite ses termes par ceux de deux progressions arithmetiques quelconques; ou, ce qui est la même chose, par les termes du produit de deux progressions arithmetiques quelconques, l'équation qui en viendra aura encore une des racines égales de la premiere.

Si elle est composée de quatre racines égales, & qu'on multiplie de suite ses termes par trois progressions arithmetiques quelconques, ou par les termes de leur produit, l'équation qui en viendra aura encore une des racines égales de la premiere; & ainsi de suite.

DEMONSTRATION.

POUR le démontrer, il n'y a qu'à prendre les équations $xx - 2fx + ff = 0$, $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$, &c. qui representent toutes les équations composées de deux, de trois racines égales, &c. & multiplier les termes de suite de

A 2

ces équations par ceux de la progreſſion arithmetique a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, &c. qui repreſente en general toutes les progreſſions arithmetiques ; & diviſer par $x-f=0$, l'équation qui viendra du produit de la premiere $xx-2fx+ff=0$; diviſer par $xx-2fx+ff=0$, celle qui viendra du produit de la ſeconde x^3-3fxx, &c. & ainſi de ſuite ; & l'on trouvera que la diviſion ſe fera exactement.

Par exemple, ſi on multiplie $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$,
par . . . . . a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$
on aura le produit . . $\begin{array}{l} ax^3 - 3afxx + 3affx - af^3 = 0, \\ \quad\;\; - 3bfxx + 6bffx - 3bf^3 \end{array}$

diviſant ce produit par $xx-2fx+ff=0$, on trouvera que la diviſion ſe fait exactement, & que le quotient exact eſt $ax-af-3bf$.

De plus, le produit eſt toujours une équation ; car en ſubſtituant f à la place de x dans le produit, tous les termes ſe détruiſent par des ſignes oppoſés.

Si on multiplioit les termes du produit par la même progreſſion arithmetique generale, ou par quatre des termes de cette progreſſion pris de ſuite, le produit qu'on trouveroit, (qui ſeroit le même qu'on auroit trouvé en multipliant d'abord l'équation x^3-3fxx, &c. par les termes du produit des deux progreſſions, terme par terme) ſe pourroit diviſer exactement par $x-f=0$.

Et comme les formules des équations des racines égales ſont generales, & que l'expreſſion de la progreſſion arithmetique eſt auſſi generale, il eſt évident que la démonſtration eſt generale.

COROLLAIRE I.

Si tous les termes d'une équation $xx-2fx+ff=0$, $x^3-3fxx+3ffx-f^3=0$, &c. qui n'a que des racines égales, ſont multipliés par une même grandeur quelconque c, & qu'on multiplie les termes du produit $cxx-2cfx+cff=0$, par les termes d'une progreſſion arithmetique, il eſt évident que le produit qui en viendra, ſe pourra diviſer exactement par le même diviſeur $x-f=0$.

THEORÉME.

Une équation qui contient des racines égales, & des racines inégales, peut être conçue comme étant le produit de

l'équation compoſée des ſeules racines égales, par l'équation compoſée des ſeules racines inégales. Par exemple, une équation du cinquiéme degré qui contiendra deux racines égales, & trois inégales, peut être conçue comme le produit de $xx-2fx+ff=0$, par $x^3+nxx+px+q=0$.

Ce produit peut être conçu diſtingué en quatre parties, comme on le voit ici :

$$\begin{array}{lllllll}
\overline{xx-2fx+ff} \times x^3 = & x^5 - 2fx^4 + ffx^3 & & & & & \text{Premiere Partie.} \\
\overline{xx-2fx+ff} \times nxx = & & +nx^4 - 2nfx^3 + nffxx & & & & \text{Seconde Partie.} \\
\overline{xx-2fx+ff} \times px = & & & +px^3 - 2pfxx + pffx & & & \text{Troiſiéme.} \\
\overline{xx-2fx+ff} \times q = & & & & +qxx - 2qfx + qff & & \text{Quatr.} \\
\hline
 & a, & a+b, & a+2b, & a+3b, & a+4b, & a+5b
\end{array}$$

Si on multiplie les termes de ſuite de l'équation du cinquiéme degré, qui eſt le produit des deux autres, par la progreſſion arithmetique generale a, $a+b$, &c. il eſt évident que les trois termes de la premiere partie ſeront multipliés par les trois termes a, $a+b$, $a+2b$; les trois termes de la ſeconde partie, par $a+b$, $a+2b$, $a+3b$; les trois termes de la troiſiéme, par $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$; les trois termes de la quatriéme, par $a+3b$, $a+4b$, $a+5b$.

Il eſt évident, par le premier Corollaire, qu'aprés ces multiplications, le produit de chaque partie pourra ſe diviſer exactement par $x-f=0$; par conſequent l'équation entiere ſe pourra diviſer exactement par $x-f=0$.

COROLLAIRE II.

Ce qu'on vient de démontrer, fait voir clairement que quand une équation a des racines égales, & des racines inégales, ſi on en multiplie les termes de ſuite par ceux d'une progreſſion arithmetique quelconque, l'équation qui viendra du produit aura encore toutes les racines égales de la premiere, excepté une.

On prouvera de même que ſi une équation a trois racines égales, avec des racines inégales, & qu'on en multiplie les termes par ceux de deux progreſſions arithmetiques quelconques, ou par les termes de leur produit, l'équation qui en viendra aura encore une des racines égales de la premiere ; & ainſi des autres cas.

Usage des progressions arithmetiques, pour résoudre les équations qui ont des racines égales, ou pour les abaisser à un moindre degré.

75. QUAND par la nature du Problême on connoîtra qu'une équation composée a des racines égales, si elle en a deux, il faut multiplier ses termes par ceux d'une progression arithmetique arbitraire: On pourra encore les multiplier par les termes d'une autre progression; les équations qui viendront de ces multiplications auront une racine commune entr'elles & avec la proposée; ainsi il faudra chercher leur commun diviseur, qu'on trouvera toujours si la racine est commensurable: & si elle est incommensurable, il y aura quelqu'équation parmi celles qu'on a trouvées, qui sera d'un moindre degré, & qui aura encore parmi ses racines, la racine égale de la proposée.

S'il y avoit dans la proposée trois racines égales, on trouveroit des équations en multipliant les termes de la proposée par ceux de deux progressions arithmetiques arbitraires, qui auroient encore une des racines égales de la proposée.

S'il y avoit quatre racines égales, il faudroit se servir de trois progressions arithmetiques arbitraires; & ainsi de suite.

Il faut choisir parmi les progressions arithmetiques, celles qui donneront une équation plus facile à résoudre.

On remarquera que quand il y a des termes évanouis dans l'équation qui a des racines égales, comme dans l'équation $x^4 + 0x^3 + 0xx - 4x + 3 = 0$, il faut remplir par des zeros les termes évanouis, afin qu'en se servant de la progression arithmetique, on y puisse distinguer les termes qui doivent multiplier ceux de la proposée qui leur répondent.

Application de la methode précedente à des exemples de Geometrie; c'est à dire, à des équations qu'on trouve en résolvant des Problêmes de Geometrie, dont la résolution donne la résolution de ces Problêmes.

AVERTISSEMENT.

IL y a plusieurs Problêmes de Geometrie qu'on résout par cette methode des racines égales; car la résolution de plusieurs Problêmes dépend souvent de ce qu'en supposant qu'une des inconnues de l'équation du Problême a deux ou

plusieurs valeurs égales, ou que deux inconnues ont deux ou plusieurs valeurs égales, il arrive qu'en multipliant les termes de l'équation par ceux d'une ou de plusieurs progressions arithmetiques, on peut par le moyen des équations nouvelles qui en viennent, déterminer la valeur de celle des inconnues qui donne la résolution du Problême, ou faire évanouir une ou plusieurs des inconnues de l'équation du Problême; ce qui donne une nouvelle équation qui résout le Problême.

EXEMPLE I.

ON a l'équation $x^3 - ayx + y^3 = 0$, qui exprime un Problême de Geometrie; on demande la valeur de x, lorsque x a deux valeurs égales dans cette équation.

Il faut multiplier les termes de l'équation par ceux de la progression 3, 2, 1, 0, ou chaque terme de l'équation par l'exposant de la puissance de x dans ce terme,

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & +0xx & -ayx & +y^3 & =0. \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline 3x^3 & & -ayx & & =0. \end{array}$$

L'on trouve l'équation nouvelle $3x^3 - ayx = 0$, ou bien $3xx = ay$; d'où l'on déduit $y = \frac{3xx}{a}$, & $y^3 = \frac{27x^6}{a^3}$; mettant ces valeurs de y, y^3, dans la proposée, elle se change en celle-ci, $x^3 - 3x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = 0$; ou bien $27x^3 - 2a^3 = 0$; d'où l'on déduit $x = \sqrt[3]{\frac{2a^3}{27}} = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$. Ce qui étoit proposé.

On trouvera aussi $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$, en mettant la valeur de x dans $y = \frac{3xx}{a}$.

On détermineroit de même les valeurs de x & de y, en multipliant la proposée

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & -ayx & +y^3 & =0, \\ 0 & 1 \quad 2 & 3 & \\ \hline & -2ayx & +3y^3 & =0; \end{array}$$

par la progression 0, 1, 2, 3, car l'on auroit la nouvelle équation $-2ayx + 3y^3 = 0$, ou bien $-2ax + 3yy = 0$: en se servant des deux équations $3xx - ay = 0$, & $-2ax + 3yy = 0$, dans lesquelles x doit avoir une même valeur, on auroit par la premiere $xx = \frac{ay}{3}$; & par la seconde, $x = \frac{3yy}{2a}$; donc $xx = \frac{9y^4}{4aa} = \frac{ay}{3}$; d'où l'on déduit $y^3 = \frac{4a^3}{27}$, & $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$;

ſubſtituant cette valeur de y dans $x = \frac{3yy}{2a}$, l'on aura $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$, comme on l'avoit déja trouvé.

Enfin on trouveroit les mêmes valeurs de x & de y par la methode du plus grand commun diviſeur ; car puiſque la propoſée $x^3 - ayx + y^3 = 0$, & chacune des deux nouvelles équations trouvées par le moyen de la progreſſion arithmetique, $3xx - ay = 0$, $-2ax + 3yy = 0$, ont une racine commune, on doit trouver cette racine commune en cherchant le plus grand commun diviſeur de $x^3 - ayx + y^3 = 0$, & de laquelle on voudra des deux autres ; par exemple, de $3xx - ay = 0$, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé au diviſeur $-2ax + 3yy = 0$, dans lequel x eſt lineaire, qui ſera un diviſeur exact, en ſuppoſant égal à zero le reſte qu'il fait trouver, $27y^3 - 4a^3 = 0$, dans lequel x n'eſt plus ; car l'équation du reſte donne $y^3 = \frac{4a^3}{27}$, ou $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$, & ſubſtituant cette valeur dans le diviſeur où x eſt lineaire, $-2ax + 3yy = 0$, l'on trouve $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$, comme on l'avoit trouvé.

AVERTISSEMENT.

On a mis ces trois manieres de déterminer les valeurs de x & de y, lorſque x a deux racines égales, afin d'en faire concevoir le raport.

REMARQUE.

Il faut remarquer qu'on ne peut ſuppoſer que le dernier diviſeur où x eſt lineaire, ſoit un diviſeur exact, en faiſant le reſte qui ne contient plus x, égal à zero, que quand il y a une ou pluſieurs indéterminées dans ce reſte ; car s'il n'y avoit que des grandeurs déterminées dans le reſte, on ne pourroit pas les ſuppoſer toutes enſemble égales à zero, à moins qu'elles ne ſe détruiſiſſent par des ſignes oppoſés : mais quand il y a des indéterminées dans le reſte, elles ſe déterminent par cette ſuppoſition, que le reſte eſt égal à zero, ou que chacun des termes du reſte eſt égal à zero, de maniere que les valeurs des indéterminées trouvées par la ſuppoſition du reſte égal à zero, étant ſubſtituées à leur place dans la propoſée, & dans le diviſeur où x eſt lineaire, ce diviſeur ainſi déterminé, eſt neceſſairement un diviſeur exact de la propoſée.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $ax - yy = 0$, & $x = s - \sqrt{rr - tt - 2sy - yy}$; en ſubſtituant la valeur de x, priſe dans la ſeconde, dans $ax - yy = 0$, aprés avoir ôté les incommenſurables, on trouvera l'équation ſuivante,

$$\begin{array}{llll} y^4 & -\,2asyy & +\,2aasy & +\,aass = 0\,; \\ & +\,aayy & & -\,aarr \\ & & & +\,aatt \end{array}$$

on ſuppoſe que x, y, r, ſont des inconnues, & que a, s, t, ſont connues.

1°. Il s'agit d'abaiſſer l'équation précedente $\begin{array}{l} y^4 - 2asyy, \\ \quad\;\; + aayy \end{array}$ &c. à un moindre degré, & de trouver les valeurs de y par les ſeules grandeurs connues, en ſuppoſant que y a deux valeurs égales dans l'équation y^4, &c.

Il faut multiplier les termes de l'équation, chacun par l'expoſant de la puiſſance de y, qui eſt dans ce terme ; c'eſt à dire, par 4, 3, 2, 1, 0,

$$\begin{array}{llllll} y^4 & * & -\,2asyy & +\,2aasy & +\,aass = 0\,; \\ & & +\,aayy & & -\,aarr \\ & & & & +\,aatt \\ \hline 4, & 3, & 2, & 1, & 0 \end{array}$$

& l'on aura le produit

$$\begin{array}{lll} 4y^4 & -\,4asyy & +\,2aasy = 0, \\ & +\,2aayy & \end{array}$$

ou bien $\begin{array}{lll} 2y^3 & -\,2asy & +\,aas = 0, \\ & +\,aay & \end{array}$ qui eſt une équation du troiſiéme degré, par laquelle on peut déterminer la valeur de y, parcequ'elle ne contient que des grandeurs connues avec l'inconnue y ; ainſi l'on a trouvé l'équation propoſée.

2°. En ſuppoſant à preſent qu'il n'y a dans l'équation précedente

$$\begin{array}{lllll} y^4 & * & -\,2asyy & +\,2aasy & +\,aass = 0, \\ & & +\,aayy & & -\,aarr \\ & & & & +\,aatt \end{array}$$

que la grandeur a de connue, & que toutes les autres ſont inconnues, il s'agit de trouver la valeur de t, qui ne contienne d'inconnue que y, en ſuppoſant que y a trois valeurs égales dans l'équation précedente.

Il faut dans ce cas multiplier l'équation proposée par les termes des deux progressions arithmetiques ici marquées,

$$\begin{array}{cccccc} y^4 & * & -2asyy & +2aaty & +aass & =0, \\ & & +aayy & & -aast & \\ & & & & +aatt & \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & \\ 2, & 1, & 0, & -1, & -2, & \\ \hline 8y^4 & & & -2aaty & & =0, \end{array}$$

& l'on aura le produit $8y^4 - 2aaty = 0$, qui se réduit à $4y^3 - aat = 0$; d'où l'on déduit $t = \frac{4y^3}{aa}$. Ce qui étoit proposé.

3°. En supposant que toutes les lettres de la même équation sont des inconnues, excepté la grandeur a, & que y a trois valeurs égales; il faut trouver une équation qui ne contienne pour inconnues que s & t, & que toutes les autres inconnues ne s'y trouvent point.

Il faut multiplier l'équation $y^4 * -2asyy + 2aaty + aass$ $+ aayy$ $- aast$ $+ aatt$ $= 0$, par les termes des deux progressions arithmetiques ici marquées,

$$\begin{array}{cccccc} 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \\ \hline 0 & & -8asyy & +6aaty & & =0, \\ & & +4aayy & & & \end{array}$$

& l'on trouvera l'équation $0 - 8asyy + 4aayy + 6aaty = 0$, qui se réduit à $-4asy + 2aay + 3aat = 0$, d'où l'on déduit $y = \frac{3aat}{4as - 2aa} = \frac{3at}{4s - 2a}$; supposant, pour abreger le calcul, $4s - 2a = 4v$; c'est à dire, $s - \frac{1}{2}a = v$, l'on aura $y = \frac{3at}{4s - 2a} = \frac{3at}{4v}$; d'où l'on déduira $y^3 = \frac{27a^3t^3}{64v^3}$; mettant cette valeur de y^3 dans $4y^3 - aat = 0$, qu'on a trouvée dans le second article, l'on aura $\frac{27a^3t^3}{16v^3} - aat = 0$, qui se réduit à $27att - 16v^3 = 0$, qui est l'équation qu'on cherchoit : car en mettant $s - \frac{1}{2}a = v$, à la place de v dans $27att - 16v^3 = 0$, l'on aura $27att - 16s^3 + 24ass - 12aas + 2a^3 = 0$.

On trouveroit cette même équation en cherchant le plus grand diviseur commun des deux équations $4y^3 - aat = 0$, & $-4asy + 2aay + 3aat = 0$, trouvées par les progressions arithmetiques, & continuant la recherche jusqu'à ce que l'inconnue y ne fût plus dans le reste; car on trouveroit le reste $27att - 16s^3 + 24ass - 12aas + 2a^3 = 0$.

ANALYSE

ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui se réduisent à des équations composées.

LIVRE V.

De la résolution des équations composées en particulier.

SECTION I.

De la résolution des équations du second degré.

AVERTISSEMENT.

On a déja donné deux manieres de résoudre les équations du second degré *; mais on a remis le détail de tout ce qui regarde ces équations à cet endroit, qui en est le lieu propre; c'est pourquoi on va expliquer ici une methode generale de trouver les deux racines de toutes ces équations, & on l'appliquera à tous les cas possibles.

* 6, & 41, Remarque du premier exemple.

On suppose dans ce cinquiéme Livre, que les équations sont sans fractions & sans incommensurables.

PROBLÊME I.

76. *TROUVER les deux racines de toute équation du second degré.*

METHODE GENERALE.

On supposera que l'équation generale $xx + nx + p = 0$, represente toutes les équations du second degré; de maniere (comme on l'a déja dit plusieurs fois) que $+ n$

represente le coéficient du second terme avec son signe, & zero, si le second terme est évanoui; & $+p$ represente le dernier terme avec son signe: Ce qu'il faudra toujours entendre dans le 3^e, 4^e degré, &c. On supposera ensuite que l'équation lineaire $x-f+g=0$, represente par ses indéterminées f, g, celle des deux équations lineaires qui contient la premiere racine: Ainsi $+f-g$ represente la premiere racine.

Pour trouver cette premiere racine & la seconde, on se servira de laquelle on voudra des deux methodes suivantes.

1°. On supposera que la seconde équation lineaire est $x-f-g=0$; on multipliera $x-f+g=0$, par $x-f-g=0$, & on comparera chaque terme du produit $\begin{array}{l} xx-2fx+ff \\ \qquad\qquad\;\; -gg \end{array}=0$, excepté le premier terme, avec le terme correspondant de l'équation generale $xx+nx+p=0$; ce qui donnera ces deux équations particulieres $-2f=n$, $+ff-gg=+p$; d'où l'on déduira $f=-\frac{n}{2}$, & $g=\sqrt{\frac{nn}{4}-p}$; mettant ces valeurs de f & de g dans les deux équations lineaires indéterminées $x-f+g=0$, $x-f-g=0$, elles seront changées, la premiere en $x+\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{nn}{4}-p}=0$; la seconde en $x+\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{nn}{4}-p}=0$.

Ainsi la formule generale de la premiere racine sera $x=-\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{nn}{4}-p}$; la formule generale de la seconde racine sera $x=-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{nn}{4}-p}$.

2°. Ou bien on divisera l'équation generale $xx+nx+p=0$, par l'équation lineaire indéterminée $x-f+g=0$; & continuant la division jusqu'à ce que x ne soit plus dans le reste, on trouvera le reste $\begin{array}{l} gg-ng+p \\ \quad\;\; -2fg+nf \\ \qquad\qquad\;\; +ff \end{array}=0$, & le quotient $\begin{array}{l} x+n \\ \;\;\; +f \\ \;\;\; -g \end{array}=0$: En supposant ce reste égal à zero, & son second terme aussi égal à zero, l'équation indéterminée $x-f+g=0$, sera un diviseur exact de la proposée; & le quotient $\begin{array}{l} x+n \\ \;\;\; +f \\ \;\;\; -g \end{array}=0$ sera exact.

Or par la supposition de ce reste égal à zero, l'on a deux équations particulieres, sçavoir la premiere $2f=-n$, d'où l'on déduit $f=-\frac{n}{2}$; la seconde $\begin{array}{l} gg * +p \\ \qquad\;\, +nf \\ \qquad\;\, +ff \end{array}=0$, dans laquelle substituant $-\frac{n}{2}$ à la place de f, l'on trouve $gg-\frac{nn}{4}+p=0$, d'où l'on déduit $g=\sqrt{\frac{nn}{4}-p}$; substituant ces valeurs dans le diviseur $x-f+g=0$, & dans le quotient $x+n+f-g=0$, l'on trouve pour le diviseur $x+\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{nn}{4}-p}=0$, & pour le quotient $x+\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{nn}{4}-p}=0$.

Ainsi la formule generale de la premiere racine sera $x=-\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{nn}{4}-p}$; & la formule generale de la seconde sera $x=-\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{nn}{4}-p}$.

Application des formules de la résolution generale aux équations particulieres du second degré.

EXEMPLE I.

SOIT l'équation $xx-ab=0$, dont il faut trouver les deux racines.

Pour appliquer l'équation generale $xx+nx+p=0$, à cette équation particuliere, dont le second terme est évanoui, l'on supposera $n=0$, $+p=-ab$; ainsi dans les deux formules des racines on supposera $n=0$, & $+p=-ab$. Substituant donc $-ab$ au lieu de $+p$ dans les deux formules generales des racines, la premiere racine de la proposée sera $x=-\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{nn}{4}-p}=-\sqrt{ab}$; la seconde sera $x=-\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{nn}{4}-p}=+\sqrt{ab}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

EXEMPLE II.

POUR trouver les deux racines de l'équation $xx-2bx+cc=0$, on supposera $+n=-2b$, & $+p=+cc$; on substituera dans les deux formules des racines les grandeurs representées par n, p, & la premiere racine de la proposée sera $x=-\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{nn}{4}-p}=+b-\sqrt{bb-cc}$; & la seconde sera $x=-\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{nn}{4}-p}=+b+\sqrt{bb-cc}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

EXEMPLE III.

POUR trouver les racines de $xx + 1x - 2 = 0$, on supposera $+n = +1$, & $+p = -2$, on substituera ces valeurs de n, p, à leur place dans les formules des racines, & la premiere racine sera $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -2$. La seconde racine sera $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = +1$; ainsi l'une des racines de la proposée est la positive $x = +1$, & l'autre est la négative $x = -2$. *Ce qui étoit proposé.*

EXEMPLE IV.

POUR trouver les deux racines de l'équation $xx - 2x + 3 = 0$, on supposera $n = -2$, $+p = +3$, on substituera ces valeurs de n, p, à leur place dans les formules generales des racines, & la premiere sera $x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = +1 - \sqrt{1-3} = +1 - \sqrt{-2}$; la seconde sera $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{nn}{4} - p} = +1 + \sqrt{1-3} = +1 + \sqrt{-2}$; d'où l'on voit que les deux racines de la proposée sont imaginaires.

Démonstration du premier Problême.

77. L'ÉQUATION lineaire, dont x est l'inconnue, qui divise exactement une équation du second degré, representée par l'équation generale $xx + nx + p = 0$, contient une de ses racines, & le quotient exact contient l'autre, par la nature des équations.* Or l'équation lineaire que l'on trouve par la methode du premier Problême, divise exactement l'équation generale du second degré, puisque le reste de la division est égal à zero, & que ce n'est que par cette supposition qu'elle est déterminée; & le quotient est aussi exact : l'équation lineaire qu'on trouve par la methode, contient donc une racine de l'équation generale du second degré, & le quotient contient l'autre; l'on a donc par la methode les formules generales des deux racines de toute équation du second degré. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*26 & 35.

REMARQUES.

I.

78. LORSQUE le second terme est évanoui, & qu'il y a $+p$, comme dans l'équation $xx + p = 0$, les deux racines sont

imaginaires, puisque la premiere est $x = -\sqrt{-p}$; & la seconde, $x = +\sqrt{-p}$.

II.

Lorsqu'il y a $+p$ dans une équation du second degré, & que p surpasse le quarré de la moitié de n; c'est à dire, lorsque p surpasse $\frac{1}{4}nn$, les deux racines sont encore imaginaires, puisque $\sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ est la racine d'une grandeur négative.

III.

Lorsqu'il y a $-p$ dans une équation du second degré, les racines sont toujours réelles, car alors la grandeur $\frac{1}{4}nn + p$, qui est sous le signe radical, est toujours positive.

Il suit de la seconde & troisiéme remarque, qu'il ne peut y avoir de racines imaginaires dans une équation du second degré qui a tous ses termes, que quand il y a $+p$; c'est à dire, quand les deux racines sont toutes deux positives, ou toutes deux négatives; & qu'elles sont toujours réelles, quand l'une est positive & l'autre négative.

IV.

Quand l'inconnue a plus de deux dimensions dans le premier terme d'une équation du second degré, comme dans $x^4 + nxx + p = 0$, ou en general dans $x^{2m} + nx^m + p = 0$, (m representant un nombre quelconque entier & positif,) quoiqu'il n'y ait que deux racines en la considerant du second degré, qui sont $xx = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, $xx = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$; ou en general $x^m = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, $x^m = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$; cependant chacune de ces racines, ou chacune des équations simples formée par ces racines, $xx + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$; $xx + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$: ou bien en general $x^m + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, $x^m + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, pouvant encore être considerée comme une équation composée, on peut dire que chacune de ces équations simples contient encore autant de racines, que l'exposant 2 de la plus haute puissance de l'inconnue xx, ou l'exposant m de l'inconnue x^m, contient d'unités : car l'inconnue x a autant de valeurs dans ces équations plus simples, dont l'équation du second degré est composée, que cet exposant de l'inconnue a d'unités. Ce qu'il faut remarquer pour les cas semblables des autres degrés representés en general dans le troisiéme degré par $x^{3m} + nx^{2m} + px^{m} + q = 0$; dans le quatriéme degré, par $x^{4m} + nx^{3m} + px^{2m} + qx^{m} + r = 0$; & ainsi des autres.

V.

Si l'on ôte separément les incommensurables de chacune des équations lineaires $x + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, $x + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, qui contiennent les racines de l'équation proposée, il en viendra une même équation, qui est la proposée $xx + nx + p = 0$; ce qui peut servir en quelques rencontres à connoître si une équation lineaire contient une des racines de la proposée, lorsqu'elle a des grandeurs incommensurables.

VI.

La methode de resoudre les équations peut servir à déterminer une grandeur où il y a une ou plusieurs inconnues avec des connues, quoiqu'elles ne forment pas une équation; on en a déja vû un exemple en resolvant le 6e Problême du
* 49. 3e Livre *; en voici un autre, l'on a $x = b + \sqrt{aa - yy - by}$. Il s'agit de déterminer les cas où la valeur de x est réelle, & ceux où elle est imaginaire. Il n'y a qu'à supposer que $yy + by = aa$; & resolvant cette équation, on trouvera que la valeur de y est $y = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$. Ainsi quand y est égale à cette grandeur, ou moindre que cette grandeur, $\sqrt{aa - yy - by}$ est zero, ou positive, & la valeur de x est réelle : mais quand y surpasse cette grandeur $-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, alors $\sqrt{aa - yy - by}$, est la racine d'une grandeur négative; & la valeur de x est imaginaire.

SECTION II.

De la résolution des équations du troisiéme degré.

AVERTISSEMENT.

POUR abreger & faciliter le calcul, on supposera que le second terme est évanoui dans toutes les équations du troisiéme degré qu'on veut resoudre. On a donné la methode de le faire évanouir, dans l'usage des transformations, dans
* 41. le troisiéme Livre. * Ainsi l'équation generale $x^3 + px + q = 0$, representera toutes les équations du troisiéme degré, dont le second terme est évanoui.

Il faut remarquer que quand le second terme est évanoui, il y a dans l'équation deux racines positives, & une racine négative égale aux deux positives; ou bien deux racines négatives, & une positive égale aux deux négatives.* * 19, 11e Corol.

PROBLÊME II.

79. *DETERMINER, quand le second terme des équations du troisiéme degré est évanoui, 1°, les cas où les deux racines positives ou négatives sont égales, ceux où elles sont inégales; 2°, les cas où, étant inégales, les trois racines sont réelles, ceux où il y en a deux d'imaginaires; 3°, & trouver les racines, lorsque les deux positives ou négatives sont égales, & encore lorsque les trois racines, quoiqu'inégales, sont commensurables, ou lorsqu'il y en a quelqu'une de commensurable.*

METHODE GENERALE.

1°. ON supposera, lorsqu'il y a deux racines positives, que la premiere est $f - g$, la seconde $f + g$; & leur somme $2f$ sera la racine négative; & on fera les trois équations lineaires $x - f + g = 0$, $x - f - g = 0$, $x + 2f = 0$.

Lorsqu'il y a deux racines négatives, que la premiere est $-f + g$, la seconde $-f - g$; & leur somme $-2f$ sera la racine positive, en changeant son signe $-$, & supposant $+2f$; & on fera les trois équations lineaires $x + f - g = 0$, $x + f + g = 0$, $x - 2f = 0$. On suppose que f est plus grande que g; car autrement $f - g$ ne seroit pas positive, & $-f + g$ ne seroit pas négative.

2°. On multipliera les trois premieres les unes par les autres, & l'on aura le produit

$$A \quad \begin{array}{l} x^3 * - 3ffx + 2f^3 = 0, \\ - ggx - 2ggf \end{array}$$

qui est l'équation indéterminée qui represente les équations du troisiéme degré, dont deux racines sont positives, & la troisiéme est négative, & égale à la somme des deux positives. On multipliera de même les trois autres équations lineaires les unes par les autres, & leur produit

$$B \quad \begin{array}{l} x^3 * - 3ffx - 2f^3 = 0, \\ - ggx + 2ggf \end{array}$$

representera les équations du troisiéme degré, dont deux racines sont négatives, & la troisiéme positive, & egale à la somme des deux négatives.

REMARQUE.

80. On peut remarquer que le troisiéme terme de ces deux équations a toujours le signe $-$, & est une quantité réelle négative, quand les trois racines sont réelles; par consequent si le troisiéme terme a le signe $+$, ou s'il est zero, il y a necessairement deux racines imaginaires; ainsi dans la formule generale p doit avoir $-$, lorsque les trois racines sont réelles, & elle doit être $x^3 - px \pm q = 0$, sçavoir $+q$, quand deux racines sont positives, & $-q$, si deux sont négatives.

3°. On comparera les termes de chacune de ces deux équations indéterminées A & B, avec les termes correspondans de l'équations generale $x^3 - px \pm q = 0$, excepté le premier terme. L'on aura par le moyen de l'équation A ces deux équations particulieres $+3ff + gg = +p$, $+2f^3 - 2ggf = +q$; & par l'équation B, $+3ff + gg = +p$, $-2f^3 + 2ggf = -q$; d'où l'on déduira pour l'une & l'autre $+ff + \frac{gg}{3} = +\frac{p}{3}$; & pour l'équation A, $f^3 - ggf = +\frac{q}{2}$; & pour l'équation B, $-f^3 + ggf = -\frac{q}{2}$. Elevant $+ff + \frac{gg}{3} = \frac{p}{3}$ à la troisiéme puissance, l'on aura $+f^6 + ggf^4 + \frac{g^4}{3}ff + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27}$, pour l'équation A & pour l'équation B. Elevant aussi $f^3 - ggf = +\frac{q}{2}$ au quarré, l'on aura pour l'équation A, $f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{qq}{4}$. Elevant de même $-f^3 + ggf = -\frac{q}{2}$ au quarré, l'on aura pour l'équation B, $f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{qq}{4}$, qui est la même que celle de l'équation A. Retranchant à present chaque membre de l'équation $f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{qq}{4}$, du membre correspondant de l'équation $f^6 + ggf^4 + \frac{g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27}$, l'on aura l'équation $3ggf^4 - \frac{2g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$, qui conviendra à l'équation A & à l'équation B. Or chaque membre de cette équation est positif, car $+3ggf^4$ surpasse $-\frac{2}{3}g^4ff$, puisqu'en divisant l'une & l'autre par $ggff$, le quotient $3ff$ surpasse le quotient $-\frac{2}{3}gg$, car on a supposé que f surpassoit g. Tout cela supposé, le Problême est facile à résoudre.

1°. Quand $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, les deux racines positives ou négatives sont égales.

81. Quand les deux racines positives ou négatives sont égales,

$\bar{g}$ est égale à zero dans les équations lineaires $x - f + g = 0$, $x - f - g = 0$, $x + 2f = 0$; & dans les autres $x + f - g = 0$, $x + f + g = 0$, $x - 2f = 0$; par consequent chaque grandeur du premier membre de l'équation $3ggf^4 - \frac{2g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$, est égale à zero. Donc $\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4} = 0$; donc $\frac{1}{27}p^3 = \frac{qq}{4}$.

2°. Quand les trois racines sont inégales & réelles, $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}qq$.

82. Quand les trois racines sont inégales & réelles, le premier membre de l'équation $3ggf^4 - \frac{2g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$, est positif; le second membre $\frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$, est donc aussi positif; & par consequent $\frac{p^3}{27}$ surpasse $\frac{qq}{4}$.

3°. Quand $\frac{1}{27}p^3$ est moindre que $\frac{1}{4}qq$, il y a deux racines imaginaires.

83. Car si les racines étoient toutes réelles, on vient de démontrer que $\frac{1}{27}p^3$ seroit égal à $\frac{1}{4}qq$, ou surpasseroit $\frac{1}{4}qq$.

4°. Trouver les racines, lorsque les deux positives ou les deux négatives sont égales.

84. Quand les deux racines positives, ou les deux négatives sont égales, g est zero dans les équations lineaires $x - f + g = 0$, &c. par consequent l'équation particuliere qui vient de la comparaison des troisiémes termes $+3ff + gg = +p$, se réduit à $+3ff = p$; d'où l'on déduit $+ff = \frac{p}{3}$. Par la même raison, l'équation $2f^3 - 2ggf = +q$; ou $-2f^3 + 2ggf = -q$, se réduit à $2f^3 = q$; d'où l'on déduit $f^3 = \frac{q}{2}$. Divisant le premier membre de $f^3 = \frac{q}{2}$, par le premier membre de $ff = \frac{p}{3}$, & le second par le second, l'on trouve $\frac{f^3}{ff} = f = \frac{3q}{2p}$; chacune des racines égales representées par f, est donc $= \frac{3q}{2p}$; d'où l'on déduit cette résolution.

Résolution.

85. Quand une équation du troisiéme degré, dont le second terme est évanoui, a deux racines égales; il faut diviser le triple du dernier terme q, par le double du coéficient p du second terme, & le quotient sera une des racines égales.

La troisiéme racine est égale à deux fois la racine égale.

5°. Trouver les racines d'une équation du troisiéme degré, dont le second terme est évanoüi, lorsqu'elles sont commensurables, ou qu'il y en a quelqu'une de commensurable.

86. Si l'on ôte la grandeur p, representée par $3ff + gg = p$, de $4ff$ quarré de la grandeur $2f$, qui represente la racine qui est égale à la somme des deux autres, le reste $ff - gg$ est un diviseur exact de la grandeur $+ q$, representée par $2f^3 - 2ggf = + q$, pour l'equation A; & faisant la division, le quotient est $2f$, qui est la racine du quarré $4ff$.

Le même reste $ff - gg$ est aussi un diviseur exact de $- q$, representée par $- 2f^3 + 2ggf = - q$, pour l'équation B; & faisant la division, le quotient est $- 2f$, qui est aussi la racine du quarré $4ff$. On déduit de là cette premiere résolution.

Premiere Résolution.

QUAND la racine, representée par $+$ ou $- 2f$, qui est égale à la somme des deux autres, est commensurable, il y a toujours un quarré parfait plus grand que p, duquel ôtant p, & divisant q par le reste, la division se fait exactement; & il vient pour quotient exact $+$ ou $- 2f$, qui est la racine de la proposée, égale à la somme des deux autres, & qui est à même temps la racine quarrée juste du quarré parfait qu'on a pris plus grand que p.

De même si l'on prend le quarré de l'une des racines positives ou négatives, $f - g$, ou $- f + g$, qui est $ff - 2gf + gg$, & qu'on ôte ce quarré de $3ff + gg = p$, on aura le reste $2ff + 2gf$, qui est un diviseur exact de $2f^3 - 2ggf = + q$, pour l'équation A; & de $- 2f^3 + 2ggf = - q$, pour l'équation B; & faisant la division, le quotient sera dans le premier cas $+ f - g$, & dans le second, $- f + g$, dont chacun est la racine du quarré parfait $ff - 2gf + gg$, qu'on a pris moindre que p. On trouveroit la même chose en se servant de l'autre racine representée par $f + g$, ou $- f - g$; d'où l'on déduit la seconde résolution.

Seconde Résolution.

QUAND les deux racines positives ou négatives, sont commensurables, on peut toujours trouver un quarré parfait moindre que p, tel qu'étant retranché de p, le reste soit un diviseur exact de $+$ ou $- q$; & faisant la division, il vient un quotient exact, representé par $+ f - g$, ou $- f + g$, qui est une des deux racines positives ou négatives de la proposée, & qui est à même temps la racine exacte du quarré qu'on a pris moindre que p.

REMARQUE.

87. QUAND on aura trouvé une des racines d'une équation du troisiéme degré, en divisant l'équation par $x +$ ou $-$ cette racine, le quotient qui sera une équation du second degré, contiendra les deux autres, & on les trouvera en resolvant cette équation du second degré. Ou bien en supposant que la racine trouvée soit a, si c'est la racine égale à la somme des deux autres, elle sera le coéficient du second terme de l'équation du second degré qui les contient; & le dernier terme q de la proposée, divisé par cette racine a, c'est à dire $\frac{q}{a}$, sera le produit de ces deux autres racines, par la formation des équations: Ainsi l'équation du second degré, qui contient les deux autres, sera $xx - ax + \frac{q}{a} = 0$, quand elles sont positives; la premiere sera donc $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$; & la seconde, $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$.

L'équation du second degré, qui contient les deux autres, sera $xx + ax + \frac{q}{a} = 0$, quand elles sont négatives; la premiere sera donc $x = - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$; & la seconde, $x = - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}}$. Mais si la racine découverte a est une des deux positives ou négatives, elle sera aussi le coéficient du second terme de l'équation du second degré, qui contient les deux autres, puisque ce coéficient est l'excés de la racine égale à la somme des deux positives ou négatives, sur celle qui reste à découvrir; & que la racine découverte est aussi ce même excés; & $\frac{q}{a}$ est le produit des deux qui restent à découvrir: Ainsi l'équation qui contient les deux autres, dont une est toujours positive, & l'autre négative, sera $xx \pm ax - \frac{q}{a} = 0$. Il y aura $+ ax$, quand la racine découverte sera positive, & $- ax$, quand elle sera négative. La premiere racine sera donc $x = \mp \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{q}{a}}$; & la seconde sera $x = \mp \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{q}{a}}$. Il y aura $- \frac{1}{2}a$, quand la racine découverte sera positive; & $+ \frac{1}{2}a$, quand elle sera négative.

Application du second Problême à des exemples.

EXEMPLE I.

On propose de trouver les racines de $x^3 - 12x + 16 = 0$; pour y appliquer la résolution, on supposera, afin que la formule generale $x^3 - px + q = 0$, represente la proposée, que $-p = -12$, & $q = 16$. Or $\frac{p^3}{27} = 64$, & $\frac{1}{4}qq = 64$. Cela fait connoître que la proposée contient deux racines égales.

Pour trouver chaque racine égale, on se servira de la formule $f = \frac{3q}{2p} = \frac{48}{24} = +2$; ainsi la racine égale est $x = 2$; la racine inégale est donc $x = -4$.

EXEMPLE II.

Pour trouver les racines de
$$\begin{array}{llll} x^3 & - 27aax & + 54a^3 & = 0, \\ & + 18abx & - 54aab & \\ & - 3bbx & + 18abb & \\ & & - 2b^3 & \end{array}$$
il faut supposer $-p = -27aa + 18ab - 3bb$, & $q = 54a^3 - 54aab + 18abb - 2b^3$; & faisant le calcul, on trouvera que $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$; ce qui fait connoître qu'il y a deux racines égales.

La formule $f = \frac{3q}{2p}$, fera trouver, en divisant le triple du dernier terme par le double du coëficient du troisiéme terme, le quotient $3a - b$: ainsi la racine égale est $x = 3a - b$, & la racine inégale est $x = -6a + 2b$.

EXEMPLE III.

Pour trouver les racines de l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$, on supposera que la formule generale qui represente cette équation est $x^3 - px + q = 0$, & $p = +7$, $q = +6$; $\frac{p^3}{27} = \frac{343}{27}$, & $\frac{1}{4}qq = 9$. Comme $\frac{p^3}{27}$ surpasse $\frac{1}{4}qq$, cela fait connoître que les trois racines sont réelles & inégales; & le dernier terme $+6 = q$ étant positif, cela fait connoître qu'il y a deux racines positives, & une négative qui est égale aux deux positives, puisque le second terme est évanoui.

Pour trouver la plus grande racine qui est égale aux deux positives, on prendra un quarré parfait plus grand que $p = 7$: or le premier quarré plus grand que $p = 7$ est 9. On ôtera $p = 7$ du quarré 9, & l'on aura le reste 2. On divisera $q = 6$ par ce reste 2, & le quotient 3 étant la racine quarrée du quarré 9 qu'on a pris, c'est la racine négative qu'on cherche; ainsi $x = -3$.

On trouvera les deux autres en divisant la proposée par $x + 3 = 0$, car l'on aura pour quotient l'équation du second degré $xx - 3x + 2 = 0$, qui les contient; & on trouvera en resolvant cette équation du second degré, que l'une est $x = 1$, & l'autre $x = 2$. Ou bien nommant a la racine trouvée 3, l'une des deux positives sera $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{6}{3}} = +2$, & l'autre sera $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{q}{a}} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{6}{3}} = +1$.

Si l'on vouloit commencer la résolution par une des deux racines positives, il faudroit prendre un quarré parfait, comme 4, moindre que $p = 7$; & aprés avoir retranché ce quarré 4 de $p = 7$, diviser par le reste 3 le dernier terme $q = 6$; & le quotient 2 étant la racine du quarré 4 qu'on a pris, c'est aussi une des racines positives de la proposée; ainsi $x = 2$ est une des racines positives de la proposée.

On trouvera les deux autres par la methode dont on s'est servi, aprés avoir trouvé la racine négative $x = -3$.

EXEMPLE IV.

On propose de trouver les racines de l'équation $x^3 - 1x + 6 = 0$, qui est representée par l'équation generale $x^3 - px + q = 0$, de maniere que $p = 1$, & $q = 6$. Mais étant visible que $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$ est moindre que $\frac{1}{4}qq = 9$, l'on est assuré *que la proposée a deux racines imaginaires. On * 83.
en donnera la résolution aprés la démonstration du Problême.

Démonstration du Problême.

88. Quand les trois racines d'une équation du troisiéme degré, qui a le second terme évanoui, sont réelles, il est évident que $x - f + g = 0$, $x - f - g = 0$, $x + 2f = 0$, representent d'une maniere generale les trois équations lineaires dont cette équation est le produit, lorsqu'il y a deux racines positives; & leur produit
$$\begin{array}{lll} x^3 * & - 3ffx & + 2f^3 = 0, \\ & - ggx & - 2ggf \end{array}$$

represente d'une maniere generale cette équation du troisiéme degré.

Mais quand l'équation a deux racines négatives, il faut se servir des trois équations lineaires $x+f-g=0$, $x+f+g=0$, $x-2f=0$; & leur produit $x^3 * \begin{array}{l} -3ffx-2f^3 \\ -ggx+2ggf \end{array} = 0$, representera d'une maniere generale l'équation du troisiéme degré.

D'où il suit que ce qu'on découvre par ces équations indéterminées, convient à toutes les équations du troisiéme degré qu'elles representent.

Quand les deux racines, positives ou négatives, seront égales, il est évident que g sera égal à zero, & qu'en effaçant les quantités où se trouve g, dans les deux produits, ils representeront l'équation qui aura deux racines égales.

La formule generale $x^3-px+q=0$, represente aussi d'une maniere generale la même équation du troisiéme degré, lorsque deux de ses racines sont positives, & $x^3-px-q=0$, lorsque deux de ses racines sont négatives.

Ce que l'on découvre par les équations particulieres qui naissent de la comparaison des termes correspondans des produits & de la formule generale, convient donc aussi aux équations du troisiéme degré, representées par les produits & par la formule generale.

COROLLAIRE.

89. LORSQU'EN cherchant la racine qui est égale à la somme des deux autres, c'est à dire, la plus grande des trois racines, on ne trouve aucun quarré parfait qui soit tel, que retranchant p de ce quarré, & divisant q par le reste, il vienne un quotient exact qui soit la racine du quarré qu'on a pris; la plus grande racine est incommensurable.

De même si en cherchant une des deux moindres racines, on ne trouve aucun quarré parfait moindre que p, qui soit tel, que ce quarré étant retranché de p, & q étant divisé par le reste, il en vienne un quotient exact qui soit la racine du quarré qu'on a pris; les deux moindres racines sont incommensurables.

REMARQUE.

90. PAR le Problême précedent, on trouve toujours les racines d'une équation du troisiéme degré, lorsqu'il y en a deux d'égales, & lorsque les trois sont réelles, & qu'elles sont commensurables, ou du moins une.

Mais quand elles sont toutes trois réelles & inégales, ce qui arrive * lorsque $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}qq$, & qu'elles sont toutes * 81.
incommensurables: on n'a pas jusqu'à present trouvé de maniere de les exprimer exactement par Algebre; c'est à dire, on n'a pas pû trouver d'expression Algebrique réelle qui les exprimât d'une maniere incommensurable, avec le signe radical; & c'est ce cas qu'on appelle le cas irréductible du troisiéme degré: On les trouve cependant par approximation, & on les trouve exactement par la Geometrie.

PROBLÊME III.

91. *TROUVER la racine réelle commensurable ou incommensurable d'une équation du troisiéme degré, dont le second terme est évanoui, & dont deux racines sont imaginaires.*

METHODE.

LA methode est semblable à celle du Problême précedent; il faut seulement remarquer que les équations du troisiéme degré ont deux racines imaginaires dans ces trois cas; 1°, quand il y a $+px$ *; 2°, quand il y a $-px$, & que $\frac{1}{27}p^3$ * 80.
est moindre que $\frac{1}{4}qq$ *; 3°, quand le second & le troisiéme * 81.
terme sont évanouis *, comme dans $x^3 \pm q = 0$. Dans ce * 80.
dernier cas la racine réelle est $x = \sqrt[3]{\mp q}$. Dans le premier cas, l'équation generale est $x^3+px\pm q=0$; & dans le second, l'équation generale est $x^3-px\pm q=0$.

On supposera pour le premier & second cas, que les trois équations lineaires, dont la proposée est le produit, sont $x+f+\sqrt{-3gg}=0$, $x+f-\sqrt{-3gg}=0$, $x-2f=0$; & en les multipliant les unes par les autres, on aura le produit $\begin{array}{l} x^3-3ffx-2f^3 \\ A \quad +3ggx-6ggf \end{array} = 0$, qui represente les raports des racines de la formule $x^3-px-q=0$, lorsqu'il y a $-px-q$, en supposant f plus grande que g; mais ce produit repreſentera les raports des racines de la formule $x^3 + px - q = 0$, en ſuppoſant f moindre que g.

On ſuppoſera encore que les trois équations lineaires ſont $x - f + \sqrt{-3gg} = 0$, $x - f - \sqrt{-3gg} = 0$, $x + 2f = 0$; & en les multipliant les unes par les autres, on aura le produit $\begin{array}{l} x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0, \\ \quad\; + 3ggx + 6ggf \end{array}$ B qui repreſente les raports des racines des équations, dont les formules ſont $x^3 - px + q = 0$, en ſuppoſant f plus grande que g; mais il repreſentera les raports des racines des équations dont la formule eſt $x^3 + px + q = 0$, en ſuppoſant f moindre que g.

On a ſuppoſé dans les équations lineaires que la grandeur imaginaire eſt $\sqrt{-3gg}$, quoique cela ſoit arbitraire, mais cette expreſſion ſervira dans le calcul qu'on va faire, à trouver plus facilement les formules des réſolutions.

On comparera enſuite les termes correſpondans des produits des formules, excepté le premier, & l'on aura les équations particulieres qui ſuivent, lorſque la racine réelle $2f$ eſt poſitive; c'eſt à dire, dans l'équation A: 1^{re}, $-3ff + 3gg = \mp p$; d'où l'on déduit $ff - gg = \pm\frac{p}{3}$: 2^e, $-2f^3 - 6ggf = -q$; d'où l'on déduit $f^3 + 3ggf = +\frac{q}{2}$.

Et lorſque la racine réelle $-2f$ eſt négative; c'eſt à dire, dans l'équation B, on aura les deux équations: 1^{re}, $-3ff + 3gg = \mp p$; d'où l'on déduit $ff - gg = \pm\frac{p}{3}$: 2^e, $+2f^3 + 6ggf = +q$; d'où l'on déduit $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$.

Réſolution des équations du troiſiéme degré, dont deux racines ſont imaginaires, lorſque la racine réelle eſt commenſurable.

92. Si l'on prend le quarré poſitif $4ff$ de la racine réelle, & qu'on lui ajoute $\mp p = -3ff + 3gg$, la ſomme ſera $ff + 3gg$. Si l'on diviſe $+q = 2f^3 + 6ggf$, par $ff + 3gg = 4ff \mp p$, le quotient ſera la racine réelle $2f$; d'où l'on déduit cette maniere de trouver la racine réelle, quand elle eſt commenſurable.

Il faut prendre un quarré poſitif, & ajouter $\mp p$ au quarré parfait qu'on a pris; c'eſt à dire, quand il y a $-p$, il faut ajouter $-p$ négatif au quarré; & quand il y a $+p$, il faut ajouter $+p$ poſitif au quarré. Il faut diviſer $+q$ par la ſomme qu'on vient de trouver; & ſi la diviſion ſe fait exactement, & que le quotient ſoit la racine du quarré qu'on a pris, c'eſt la racine réelle. Si l'on ne peut pas trouver un tel quarré, la racine réelle eſt incommenſurable. Voici la maniere de la trouver.

Si l'on éleve l'équation $ff - gg = \pm\frac{p}{3}$ à la 3^e puiſſance, l'on aura $f^6 - 3ggf^4 + 3g^4ff - g^6 = \pm\frac{p^3}{27}$. Si l'on éleve auſſi l'équation $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$ au quarré, l'on aura $f^6 + 6ggf^4 + 9g^4ff = \frac{qq}{4}$. Si l'on ôte à preſent la premiere de ces deux équations de la ſeconde, l'on aura $+9ggf^4 + 6g^4ff + g^6 = \frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}$. Tirant la racine quarrée de chaque membre, on aura $3gff + g^3 = \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}$. Si l'on ajoute cette équation à l'équation $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$, l'on aura $f^3 + 3gff + 3ggf + g^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}$. Tirant la racine cubique de chaque membre, on aura

$$f + g = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}.$$

Diviſant l'équation $ff - gg = \pm\frac{p}{3}$ par la précedente, le premier membre par le premier membre, le ſecond par le ſecond, l'on aura pour quotient

$$f - g = \frac{\pm\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}}$$

Enfin ajoutant les deux équations qu'on vient de trouver, on aura la racine réelle $2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}$

$$+ \frac{\pm\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} \mp \frac{p^3}{27}}}}.$$

Quand il y a $-px$ dans l'équation generale $x^3 - px + q = 0$, la grandeur $\frac{1}{3}p$ aura le ſigne $+$, & la grandeur $\frac{p^3}{27}$ aura le ſigne $-$.

Ainſi quand l'équation generale eſt $x^3 - px \pm q = 0$, la formule generale qui marque la racine réelle eſt

$$2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}}.$$

Quand l'équation generale eſt $x^3 + px \pm q = 0$, la formule generale qui marque la racine réelle eſt.

$$2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}.$$

La grandeur $3gg$ qu'on a prise pour representer la grandeur imaginaire, sera égale à $3ff \mp p$, car $-3ff + 3gg = \mp p$; ajoutant $+3ff$ à chaque membre, on aura $3ff - 3ff + 3gg = 3ff \mp p = 3gg$; ainsi $\sqrt{-3gg} = \sqrt{-3ff \pm p}$.

On déduit de là cette résolution.

Résolution des équations du troisiéme degré, dont deux racines sont imaginaires, lorsque la racine réelle est incommensurable.

93. QUAND l'équation generale est $x^3 - px \pm q = 0$, il faut ôter $\frac{p^3}{27}$ de $\frac{1}{4}qq$; & aprés avoir tiré la racine quarrée du reste, l'ajouter à $\frac{1}{2}q$, & tirer la racine cubique de sa somme, & ce sera la premiere partie de la racine réelle.

Il faut diviser p par le triple de la premiere partie de la racine, & ajouter le quotient à la premiere partie, & la somme sera la racine réelle $2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

$$+ \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}.$$

Quand l'équation est $x^3 + px \pm q = 0$, on trouvera de même les deux parties de la racine réelle, excepté qu'on ajoutera $\frac{1}{27}p^3$ à $\frac{1}{4}qq$; mais on retranchera la seconde partie de la premiere, & l'on aura $2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$

$$- \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}.$$

Application du Probléme à des exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver la racine réelle de $x^3 - 1x + 6 = 0$, dont deux racines sont imaginaires, parceque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$, est moindre que $\frac{1}{4}qq = 9$; on prendra le quarré positif $+4$, & on lui ajoutera -1, & la somme sera $+3$: on divisera $q = 6$ par 3, & le quotient 2 étant la racine du quarré 4 qu'on a pris, c'est aussi la racine réelle de la proposée, qui est négative, parcequ'il y a une racine négative dans la proposée, puisqu'il y a $+6$ au dernier terme.

La grandeur imaginaire sera $\sqrt{-3+1} = \sqrt{-2}$.

EXEMPLE II.

POUR trouver la racine réelle de $x^3 + 2x - 12 = 0$, dont

les deux autres racines sont imaginaires, le troisiéme terme $+2x = +px$ ayant le signe $+$, on prendra le quarré parfait $+4$, auquel on ajoutera $+p = +2$; & l'on divisera par la somme $+6$ le dernier terme $q = 12$, & le quotient 2 étant la racine du quarré 4 qu'on a pris, c'est aussi la racine réelle de la proposée, qui est $x = 2$.

La grandeur imaginaire est $\sqrt{-3-2} = \sqrt{-5}$.

EXEMPLE III.

POUR trouver la racine réelle de $x^3 - 6x - 16 = 0$, qui a deux racines imaginaires, parceque $\frac{1}{4}qq = 64$ surpasse $\frac{1}{27}p^3 = 8$; il faut ôter $\frac{1}{27}p^3 = 8$ de $\frac{1}{4}qq = 64$, & la racine quarrée du reste 56 est $\sqrt{56}$. Il faut ajouter cette racine à $\frac{1}{2}q = 8$, & tirer la racine cubique de la somme, qui est $\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$, & elle sera la premiere partie de la racine qu'on cherche. Il faut diviser $p = 6$ par le triple de la premiere partie $3\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$, & le quotient $\frac{2}{\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}}$, sera la seconde partie de la racine réelle.

Ainsi la racine réelle est $x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}} + \frac{2}{\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}}$.

La démonstration de ce Problême est la même que du précedent, puisque la methode est la même.

COROLLAIRE.

QUAND la racine réelle est découverte, si l'on veut avoir les deux autres qui sont imaginaires, il n'y a qu'à diviser la proposée par $x +$ ou $-$ la racine réelle qu'on a trouvée, mettant $+$ quand elle est négative, & $-$ quand elle est positive: Le quotient, qui sera exact, sera une équation du second degré qui contiendra les deux autres racines qui sont imaginaires.

Seconde methode generale de resoudre les équations du troisiéme degré dont le second terme est évanoui.

94. TOUTES les équations du troisiéme degré, dont le second terme est évanoui, peuvent se representer par ces deux formules generales $x^3 - px \pm q = 0$, $x^3 + px \pm q = 0$; la seconde contient toujours deux racines imaginaires,* & *80.

une racine réelle, qui est positive, quand il y a $-q$, & négative quand il y a $+q$. La premiere contient trois racines réelles, quand $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}qq$,* dont deux sont positives, & la troisiéme, qui est égale à leur somme, est négative, quand il y a $+q$; mais les deux moindres sont négatives, & la plus grande positive, quand il y a $-q$; & elle contient deux racines imaginaires & une réelle quand $\frac{1}{27}p^3$ est moindre que $\frac{1}{4}qq$.*

* 82.

* 83.

On supposera qu'une des racines est égale à $f+g$ pour la premiere formule, & à $f-g$ pour la seconde; & l'équation lineaire $x-f-g=0$, representera une des trois équations lineaires, dont toute équation du 3^e^ degré, que la premiere formule represente, est le produit.

L'équation lineaire $x-f+g=0$, servira pour la seconde formule.

On divisera la premiere équation generale $x^3-px\pm q=0$, par $x-f-g=0$; & la seconde $x^3+px\pm q=0$, par $x-f+g=0$: & on continuera la division jusqu'à ce qu'on ait un reste dans lequel x ne soit plus, comme on le voit ici.

AVERTISSEMENT. 1 *signifie que la grandeur où cette marque se trouve, est tranchée par une ligne.*

Pour la premiere formule.

$$\begin{array}{rrl|l}
1x^3 & -1px & \pm q & x-f-g \\ \hline
+1fxx & +1ffx & -pf & xx+fx-p \\
+1gxx & +1\,2fgx & -pg & \quad +gx+ff \\
 & +1ggx & +f^3 & \qquad +2fg \\
 & & +3ffg & \qquad +gg \\
 & & +3fgg & \\
 & & +g^3 &
\end{array}$$

Pour la seconde formule.

$$\begin{array}{rrl|l}
1x^3 & +1px & \pm q & x-f+g \\ \hline
+1fxx & +1ffx & +pf & xx+fx+p \\
-1gxx & -1\,2fgx & -pg & \quad -gx+ff \\
 & +1ggx & +f^3 & \qquad -2fg \\
 & & -3ffg & \qquad +gg \\
 & & +3fgg & \\
 & & -g^3 &
\end{array}$$

Il est évident que chaque quotient sera exact, & que le diviseur $x-f-g=0$, ou $x-f+g=0$, fera la division sans reste, en supposant chaque reste égal à zero.

Le premier peut ainsi s'exprimer $f^3+g^3+3fg\times\overline{f+g}-p\times\overline{f+g}\pm q=0$; & le second, $f^3-g^3+3fg\times\overline{-f+g}-p\times\overline{-f+g}\pm q=0$.

Pour déterminer chacune des deux indéterminées f & g,

on fera deux équations particulieres de chaque reste, de cette maniere. Pour le premier reste; 1^re^, $f^3+g^3\pm q=0$; 2^e^, $+3fg\times\overline{f+g}-p\times\overline{f+g}=0$; & pour le second reste, 1^re^, $f^3-g^3\pm q=0$; 2^e^, $+3fg\times\overline{-f+g}-p\times\overline{-f+g}=0$. Chacune des secondes équations donnera $3fg=p$, & $f=\frac{p}{3g}$, & $f^3=\frac{p^3}{27g^3}$; substituant la valeur de f^3 dans chacune des premieres équations, on aura pour le premier reste $\frac{p^3}{27g^3}+g^3\pm q=0$, qui se réduit à $g^6\pm qg^3+\frac{p^3}{27}=0$, qui est une équation du second degré, dont les deux racines sont $g^3=\mp\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$, & $g^3=\mp\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$; d'où l'on déduit pour abreger,

$$g=\sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}.$$

Substituant de même la valeur de f^3 dans la premiere équation du second reste, on aura $\frac{p^3}{27g^3}-g^3\pm q=0$, qui se réduit à $-g^6\pm qg^3+\frac{1}{27}p^3=0$; & par transposition, $g^6\mp qg^3-\frac{1}{27}p^3=0$, qui est une équation du second degré, dont les racines sont $g^3=\pm\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$; & $g^3=\pm\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$; d'où l'on déduit pour abreger, $g=\sqrt[3]{\pm\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

Il faut à present substituer la valeur de g^3, qui convient au premier reste, dans la premiere équation $f^3+g^3\pm q=0$; & l'on aura $f^3\pm\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}=0$; d'où l'on déduit $f=\sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

Il faut de même substituer la valeur de g^3, qui convient au second reste, dans la premiere équation du second reste $f^3-g^3\pm q=0$; & l'on aura $f^3\pm\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=0$; d'où l'on déduit $f=\sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

Les deux indéterminées f & g étant connues, la racine qu'on cherche est connue, qui est pour la premiere équation $x^3-px\pm q=0$, $x=f+g=\sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q\mp\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

Pour la seconde équation $x^3+px\pm q=0$, la racine $x=+f-g=\sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\pm\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

Quand une des racines est découverte, les deux quotiens qu'on a trouvés en faiſant les diviſions de la premiere & de la ſeconde formule, ſeront chacun une équation du ſecond degré, laquelle aprés y avoir ſubſtitué les valeurs de f & de g, contiendra les deux autres racines, dont on trouvera les formules en reſolvant ces deux équations du ſecond degré, ſans en ôter les indéterminées f & g.

On trouveroit les formules de l'*art.* 93, de la valeur de x, qui eſt ici $= f \pm g$, ſi on ſubſtituoit la valeur de $g^3 = \frac{p^3}{27f^3}$, qui ſe tire de $f = \frac{p}{3g}$, changée en $g = \frac{p}{3f}$, dans $f^3 \pm g^3 \pm q = 0$, & enſuite la valeur de f, qu'on en déduiroit, dans $g = \frac{p}{3f}$.

DÉMONSTRATION.

La methode fait trouver des valeurs de f & de g, qui ſont telles, qu'aprés les avoir ſubſtituées dans l'équation lineaire $x - f - g = 0$, ou $x - f + g = 0$, cette équation lineaire ainſi changée eſt un diviſeur exact de la propoſée, puiſque le reſte de la diviſion eſt zero ; elle fait donc trou-
* 55. ver une racine de la propoſée.*

Application du Problême à des exemples.

EXEMPLE I.

Pour trouver par cette methode une racine de l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$, repreſentée par la formule $x^3 - px + q = 0$, dont les trois racines ſont réelles, puiſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{343}{27}$ ſurpaſſe $\frac{1}{4}qq = 9$; on ſe ſervira de la formule $x = f + g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, dans laquelle mettant les valeurs de p, q, la racine ſera $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}$; parceque $\frac{1}{4}qq = 9 = \frac{243}{27}$, & $\frac{1}{27}p^3 = \frac{343}{27}$; ainſi $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = \frac{243}{27} - \frac{343}{27} = -\frac{100}{27}$.

On verra dans les remarques la maniere de débaraſſer la racine réelle qu'on vient de trouver, des expreſſions imaginaires & incommenſurables, lorſqu'elle eſt commenſurable.

Comme la formule $x = f + g = \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ eſt double, & qu'elle ſe réduit à ces deux formules : 1°, $x = f + g = \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$;

Seconde, $x = f + g = \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\mp\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$; il eſt libre de prendre laquelle on voudra, en remarquant que s'il y avoit dans la propoſée $-q$, il faudroit mettre dans chacune $+\frac{1}{2}q$, au lieu de $-\frac{1}{2}q$.

EXEMPLE II.

Pour trouver par cette methode la racine réelle de l'équation $x^3 - 1x + 6 = 0$, dont deux racines ſont imaginaires, puiſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$ eſt moindre que $\frac{1}{4}qq = 9$; on ſuppoſera que cette équation eſt repreſentée par $x^3 - px + q = 0$; ainſi la formule de la racine eſt $x = f + g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$; on ſubſtituera les valeurs de p, q, dans cette formule, & on trouvera la racine $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}}$.

EXEMPLE III.

Pour trouver la racine réelle de l'équation $x^3 + 2x - 12 = 0$, dont deux ſont imaginaires, puiſqu'il y a $+px$, on ſuppoſera que cette équation eſt repreſentée par $x^3 + px - q = 0$; ainſi la formule de la racine eſt $x = f - g = \sqrt[3]{+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$; on ſubſtituera les valeurs de p, q, dans cette formule, & on trouvera la racine $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{980}{27}}} - \sqrt[3]{-6 + \sqrt{\frac{980}{27}}}$.

REMARQUES.

I.

Il faut bien remarquer, ſur les ſignes des formules de la racine, 1°, que chaque équation generale $x^3 - px \pm q = 0$, $x^3 + px \pm q = 0$, marquant deux formules, la premiere où il y a $+q$, la ſeconde où il y a $-q$, le premier des deux ſignes qui précede $\frac{1}{2}q$ dans la formule de la racine, a raport au premier ſigne $+q$ de chacune des deux équations generales ; & le ſecond a raport au ſecond ſigne $-q$ de chacune des équations generales.

Ainſi quand il y a $\mp\frac{1}{2}q$ dans la formule de la racine, cela veut dire que quand il y a $+q$ dans l'équation, il doit y avoir $-\frac{1}{2}q$ dans la formule de la racine ; & quand il y a

$-q$ dans l'équation, il doit y avoir $+\frac{1}{2}q$ dans la racine; & ainsi des autres.

Il faut bien remarquer, 2°, qu'il y a deux signes qui précedent dans la formule de la racine, la grandeur $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, & $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Cela vient de ce qu'il a fallu resoudre une équation du second degré, pour avoir les valeurs de f^3 & de g^3, & par consequent de f & de g: ainsi la résolution donne deux valeurs de f, & deux valeurs de g. On les a jointes ensemble pour abreger, & c'est ce qui est cause que les deux signes $\pm$ précedent la grandeur $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, ou $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$; le premier de ces deux signes marque la premiere valeur de f ou de g, & le second marque la deuxiéme valeur.

Dans l'usage il faut observer, si l'on se sert du premier signe dans la valeur de f, de se servir aussi du premier signe dans celle de g; & si l'on se sert du second signe dans la valeur de f, de se servir du second signe dans la valeur de g; parceque ce sont ces valeurs qui ont raport l'une à l'autre.

II.

Quand les trois racines sont réelles; c'est à dire, quand il y a $-p$ dans l'équation, & que $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}qq$, il est évident que l'expression de la racine réelle contient une imaginaire dans chaque partie de la formule de la racine: Ainsi quand les trois racines sont réelles, l'expression de la racine qu'on cherhe contient des grandeurs imaginaires.

Cela fait voir que cette methode n'est d'usage que pour les équations où il y a deux racines imaginaires; car dans ce cas l'expression de la racine réelle contient des grandeurs qui sont toutes réelles, & aucunes imaginaires.

Il y a encore cet inconvenient, que quand la racine qu'on cherche est commensurable, on ne la trouve que sous une expression incommensurable; ainsi dans ce cas, il est bien plus court de se servir des methodes du second & troisiéme Problême.

Cependant quand la racine qu'on cherche est commensurable, quoiqu'elle soit exprimée sous une forme incommensurable, & qui contient même des imaginaires quand les trois racines sont réelles, on peut réduire son expression incommensurable

incommensurable à une grandeur commensurable, par la methode suivante, & trouver la racine commensurable.

Methode pour changer l'expression incommensurable de la racine réelle qu'on a trouvée par la methode précedente, en une autre expression commensurable, lorsque la racine qu'on a trouvée est commensurable.

96. On a trouvé dans le premier exemple qu'une racine réelle de $x^3 - 7x + 6 = 0$, étoit $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}$: Pour changer cette expression incommensurable, & qui contient des grandeurs imaginaires, en une autre toute commensurable, on supposera $-h - \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, & $-h + \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}$.

On élevera chaque membre à la troisiéme puissance; & pour ôter toute confusion, on fera l'operation pour la seule premiere partie $-h - \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$. Elevant chaque membre à la troisiéme puissance, on aura $-h^3 - 3hh\sqrt{-i} + 3hi + i\sqrt{-i} = -3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}$.

On supposera les grandeurs commensurables $-h^3 + 3hi$ égales à la grandeur commensurable -3, & les grandeurs incommensurables $-3hh\sqrt{-i} + i\sqrt{-i}$ égales à la grandeur incommensurable $-\sqrt{-\frac{100}{27}}$; & l'on aura les deux équations suivantes: 1°, $-h^3 + 3hi = -3$; 2°, $-3hh\sqrt{-i} + i\sqrt{-i} = -\sqrt{-\frac{100}{27}}$.

On élevera chacune au quarré, & l'on aura $h^6 - 6h^4i + 9hhii = +9$, $-9h^4i + 6hhii - i^3 = -\frac{100}{27}$.

On ôtera la seconde équation de la premiere, & l'on aura $h^6 + 3h^4i + 3hhii + i^3 = 9 + \frac{100}{27} = \frac{141}{27}$.

On tirera la racine cubique de chaque membre, & l'on aura $hh + i = \frac{7}{3}$, d'où l'on déduit $i = \frac{7}{3} - hh$.

On mettra cette valeur de i dans la premiere équation $-h^3 + 3hi = -3$, & l'on aura $-h^3 + 7h - 3h^3 = -3$, qui se réduit à $4h^3 - 7h - 3 = 0$; d'où l'on déduit $h^3 - \frac{7}{4}h - \frac{3}{4} = 0$.

Pour ôter les fractions, on supposera $h = \frac{y}{4}$, & l'on aura la transformée $y^3 - 28y - 48 = 0$.

On resoudra cette équation par le second Problême; c'est à dire, on prendra le quarré 36 plus grand que 28, & aprés en avoir ôté 28, on divisera le dernier terme 48 par le reste 8, & le quotient 6 étant la racine du quarré qu'on a pris, est aussi la racine de l'équation $y^3 - 28y - 48 = 0$; ainsi $y = 6$.

Substituant cette valeur dans $b = \frac{y}{4}$, l'on aura $b = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, d'où l'on déduira $bb = \frac{9}{4}$.

On substituera cette valeur dans $i = \frac{7}{3} - bb$, & l'on aura $i = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{1}{12}$.

Par consequent $-b - \sqrt{-i} = -\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{1}{12}} = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, qui est la premiere partie de la racine de la proposée.

On trouvera par une semblable operation que $-b + \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}}$, est égale à $-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{12}}$, & c'est la seconde partie de la racine de la proposée.

On ajoutera ces deux parties, & l'on aura la racine qu'on avoit trouvée sous la forme incommensurable $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} = -\frac{6}{2} = -3$. *Ce qui étoit proposé.*

On trouvera de même dans le second exemple $x^3 - 1x + 6 = 0$, que la racine réelle qu'on a découverte, $x = \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{242}{27}}} + \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}}$, est égale à $-1 - \sqrt{\frac{2}{3}} - 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} = -2$.

Pour le trouver par une operation semblable à la précedente, on supposera que $-b - \sqrt{g}$ est égale à la premiere partie de la racine $\sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{242}{27}}}$; & $-b + \sqrt{g}$ est égale à la seconde partie $\sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{242}{27}}}$; & en faisant l'operation comme ci-dessus, on trouvera les deux parties de la racine qu'on vient de marquer, qui étant ajoutées ensemble, font la racine $x = -2$.

On trouvera de même dans le troisiéme exemple $x^3 + 2x - 12 = 0$, que la racine réelle qu'on a découverte, $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{980}{27}}} - \sqrt[3]{-6 + \sqrt{\frac{980}{27}}}$, est égale à $+1 + \sqrt{\frac{5}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{5}{3}} = +2$. On le trouvera, dis-je, en supposant $b + \sqrt{i} = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{980}{27}}}$, & $-b + \sqrt{i} = -\sqrt[3]{-6 + \sqrt{\frac{980}{27}}}$, & faisant l'operation comme ci-dessus.

On peut s'assurer que la methode qu'on vient de donner réussira toujours, quand la racine réelle de la proposée est commensurable, en appliquant la methode à la formule generale de la racine, qui est, par exemple,

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}};$$

car en supposant pour la premiere partie de la racine $-b - \sqrt{-i} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, on aura $-b^3 - 3bb\sqrt{-i} + 3bi + i\sqrt{-i} = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$; d'où l'on déduira, 1°, $-b^3 + 3bi = -\frac{1}{2}q$, & $b^6 - 6b^4i + 9bbii = \frac{1}{4}qq$; d'où l'on déduira, 2°, $-3bb\sqrt{-i} + i\sqrt{-i} = -\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, & $-9b^4i + 6bbii - i^3 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; ôtant la seconde de la premiere, on aura $b^6 + 3b^4i + 3bbii + i^3 = +\frac{1}{27}p^3$; donc $bb + i = \frac{1}{3}p$, & $i = \frac{1}{3}p - bb$: substituant cette valeur de i dans la premiere $-b^3 + 3bi = -\frac{1}{2}q$, on aura $-b^3 + pb - 3b^3 = -\frac{1}{2}q$, qui se réduit à $b^3 - \frac{p}{4}b - \frac{1}{8}q = 0$.

Supposant à present $b = \frac{y}{4}$, l'équation $b^3 - \frac{p}{4}b - \frac{1}{8}q = 0$, sera transformée en $y^3 - 4py - 8q = 0$.

Mais si la proposée $x^3 - px + q = 0$, ou $x^3 - px - q = 0$, (cette derniere n'étant que la premiere,*dont la plus * 30. dans la Cor.
grande racine positive est la racine négative de la premiere, & les deux autres négatives sont les positives de la premiere:) Si, dis-je, l'équation $x^3 - px - q = 0$, a sa plus grande racine commensurable, la plus grande racine de $y^3 - 4py - 8q = 0$, doit aussi être commensurable; car il est évident que $y^3 - 4py - 8q = 0$, est la transformée de $x^3 - px - q = 0$, & que les racines de la premiere sont les racines de la seconde multipliées par 2; ainsi $2x = y$, ou $x = \frac{y}{2}$: On trouvera donc la racine commensurable de $y^3 - 4py - 8q = 0$, par le second Problême, & par consequent on aura $b = \frac{y}{4} = \frac{x}{2}$, & $i = \frac{1}{3}p - bb$.

En supposant pour la seconde partie de la racine, $+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, que $-b + \sqrt{-i} = +\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$; & faisant la même operation qu'on a faite pour la premiere partie, on trouvera l'équation $b^3 - \frac{p}{4}b - \frac{1}{8}q = 0$; & supposant $b = \frac{y}{4}$, on aura la même transformée $y^3 - 4py - 8q = 0$, dont la racine ſera commenſurable, ſi x eſt commenſurable dans $x^3 - px - q = 0$, puiſque $y = 2x$: Ainſi on trouvera par le ſecond Problême la valeur commenſurable de y.

On aura donc encore $b = \frac{q}{2} = \frac{x}{2}$, & $i = \frac{1}{3}p - bb$.

Les deux parties $-b - \sqrt{-i}$, $-b + \sqrt{-i}$, qu'on trouve par les operations précedentes, ſont donc $= -2b = -\frac{2x}{2} = -x$; car les deux valeurs qu'on trouve de $-\sqrt{-i}$, $+\sqrt{-i}$, ſe détruiſent par des ſignes oppoſés.

On peut appliquer le même raiſonnement aux autres formules generales de la racine.

D'où l'on voit que, dans le cas où les trois racines de l'équation ſont réelles & incommenſurables, on ne ſçauroit dégager la racine réelle des expreſſions incommenſurables & imaginaires.

Troiſiéme methode generale pour réſoudre par transformation les équations du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoui.

97. ON ſuppoſera que toutes les équations du troiſiéme degré ſont repreſentées par ces deux formules $x^3 - px \pm q = 0$, $x^3 + px \pm q = 0$.

On ſuppoſera pour transformer la premiere $x = y + \frac{f}{y} = \frac{yy+f}{y}$; & pour transformer la ſeconde $x = y - \frac{f}{y} = \frac{yy-f}{y}$; y ſera l'inconnue de la transformée, & f une indéterminée.

On ſubſtituera dans la premiere, à la place de x, x^3, les valeurs de x & x^3, & l'on aura la transformée de la premiere

$$\begin{array}{l} y^6 + 3fy^4 \mp qy^3 + 3ffyy + f^3 = 0. \\ - py^4 - pfyy \end{array}$$

On ſubſtituera de même les valeurs de x & x^3 dans la ſeconde $x^3 + px \pm q = 0$, & l'on aura la transformée de la ſeconde

$$\begin{array}{l} y^6 - 3fy^4 \mp qy^3 + 3ffyy - f^3 = 0. \\ + py^4 - pfyy \end{array}$$

On ſuppoſera dans chacune, pour déterminer l'indéterminée f, que le ſecond terme eſt égal à zero ; & l'on aura pour l'une & l'autre $3f = p$, ou $f = \frac{p}{3}$, & $f^3 = \frac{p^3}{27}$; d'où il s'enſuivra que le quatriéme terme $+ 3ffyy - pfyy = 0$, puiſque $p = 3f$.

Subſtituant la valeur de f dans chaque transformée, la

premiere ſera $y^6 \mp qy^3 + \frac{1}{27}p^3 = 0$, & la ſeconde ſera $y^6 \mp qy^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$.

On reſoudra ces deux transformées, qui ne ſont que du ſecond degré ; & aprés avoir trouvé les valeurs de y par leur moyen, on ſubſtituera ces valeurs dans les équations ſuppoſées $x = y + \frac{f}{y}$, $x = y - \frac{f}{y}$, ſelon qu'elles leur conviennent ; & aprés la ſubſtitution on aura la valeur de x, ou la formule generale d'une racine de la propoſée.

Cette methode eſt démontrée par la démonſtration des transformations,* mais elle a les inconveniens de la précedente, qui ſont de donner dans le cas où les racines ſont toutes réelles & incommenſurables, la valeur de la racine qu'on cherche, avec des expreſſions imaginaires, & avec des expreſſions incommenſurables, lorſqu'elle eſt commenſurable.

* 36. 9e Transformation.

AVERTISSEMENT.

98 SI l'on vouloit une formule generale qui exprimât la racine d'une équation qui auroit tous ſes termes, comme $x^3 \pm nxx \pm px \pm q = 0$, on pourroit la trouver de cette maniere.

On feroit évanouir le ſecond terme de l'équation generale qui précede, en ſuppoſant $x = y \mp \frac{1}{3}n$. L'on chercheroit par la ſeconde methode generale la formule qui exprime la racine de la transformée : & aprés l'avoir trouvée, il eſt évident qu'en mettant audevant de cette formule de la racine de la transformée, la grandeur $\mp \frac{1}{3}n$, on auroit la formule de la racine de la propoſée égale à x.

Mais cette formule auroit les mêmes inconveniens que celle de la ſeconde methode, à l'égard des équations dont les racines ſont commenſurables, & de celles dont toutes les racines ſont réelles & incommenſurables ; & elle ne ſerviroit que pour les équations qui auroient deux racines imaginaires, & une réelle.

SECTION III.

De la résolution des équations du quatriéme degré.

PROBLÊME IV.

99. *DISTINGUER parmi les équations du quatriéme degré, celles qui ont des racines égales, & trouver ces racines égales.*

AVERTISSEMENT.

QUAND une équation du quatriéme degré a des racines égales, elle peut les avoir toutes quatre, ou seulement trois, ou enfin seulement deux ; & quand elle n'en a que deux égales, les deux autres peuvent être réelles ou imaginaires.

Premier cas quand les quatre racines sont égales.

1°. ON fera évanouir le second terme de l'équation si elle en a un, & on supposera que l'équation est representée par l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$.

2° On supposera que chaque racine égale est representée par l'indéterminée f ; ainsi les équations lineaires seront $x - f = 0$, $x - f = 0$, $x + f = 0$, $x + f = 0$, & leur produit sera $x^4 - 2ffxx + f^4 = 0$; d'où l'on voit que quand il y a quatre racines égales, & qu'il n'y a pas de second terme, deux doivent être positives & deux négatives ; que le troisiéme terme a le signe $-$; qu'il n'y a pas de quatriéme terme ; & que le cinquiéme terme a toujours $+$: ainsi l'équation est $x^4 - pxx + r = 0$.

3°. On comparera les termes du produit avec les termes correspondans de l'équation, & l'on aura $2ff = p$, $f^4 = r$; d'où l'on déduit $ff = \frac{p}{2}$, & $f^4 = \frac{pp}{4}$; par consequent $\frac{pp}{4} = r$.

Ainsi l'on connoîtra que les quatre racines sont égales, quand $\frac{pp}{4} = r$; & de plus l'équation ne sera que du second degré : chaque racine sera $x = f = \sqrt{\frac{p}{2}}$, ou $x = f = \sqrt[4]{r}$.

Second cas quand trois racines sont égales.

ON supposera de même le second terme évanoui, & que chaque racine égale est representée par f ; & si les trois

sont positives, leur produit sera $x^3 - 3fxx + 3ffx - f^3 = 0$; si elles sont négatives, leur produit sera $x^3 + 3fxx + 3ffx + f^3 = 0$. Il faudra multiplier le premier par $x + 3f = 0$, & le second par $x - 3f = 0$; & l'on aura le produit $x^4 - 6ffxx + 8f^3x - 3f^4 = 0$, quand les trois racines égales sont positives ; & $x^4 - 6ffxx - 8f^3x - 3f^4 = 0$, quand elles sont négatives ; & l'équation generale pour l'un & l'autre cas, sera $x^4 - pxx \pm qx - r = 0$.

On comparera les termes de chaque produit avec ceux de l'équation generale qui leur répondent, & l'on aura les trois équations suivantes : 1re, $6ff = p$; 2^{e}, $8f^3 = q$; 3^{e}, $3f^4 = r$.

L'on déduira de la 1re $ff = \frac{p}{6}$, & $f^4 = \frac{pp}{36}$; de la seconde, $f^3 = \frac{q}{8}$; de la troisiéme, $f^4 = \frac{r}{3}$.

Ainsi quand trois racines sont égales, $\frac{pp}{36} = \frac{r}{3}$, ou $\frac{pp}{12} = r$; & la racine égale sera $x = f = \sqrt{\frac{p}{6}}$, ou $x = f = \sqrt[4]{\frac{r}{3}}$.

Troisiéme cas quand deux racines sont égales.

ON supposera toujours le second terme évanoui, & que chaque racine égale est representée par f : ainsi les deux équations lineaires des racines égales, quand elles seront positives, seront $x - f = 0$, $x - f = 0$, & leur produit sera $xx - 2fx + ff = 0$; & quand elles seront négatives, leur produit sera $xx + 2fx + ff = 0$.

Les deux équations des deux racines inégales seront $x + f - b = 0$, $x + f + b = 0$, quand elles seront toutes deux négatives, & alors f surpassera b ; & si l'une est positive & l'autre négative, b surpassera f ; & leur produit sera $xx + 2fx + ff - bb = 0$.

Mais si elles sont positives, les équations lineaires seront $x - f - b = 0$, $x - f + b = 0$, & f surpassera b ; ou si l'une est positive & l'autre négative, b surpassera f ; & leur produit sera $xx - 2fx + ff - bb = 0$.

Quand les deux racines differentes des deux racines égales seront imaginaires, leurs équations lineaires seront $x - f - \sqrt{-bb} = 0$, $x - f + \sqrt{-bb} = 0$, & leur produit sera $xx - 2fx + ff + bb = 0$; ou bien, si on les conçoit négatives, elles seront $x + f - \sqrt{-hh} = 0$, $x + f + \sqrt{-hh} = 0$; & leur produit sera $xx + 2fx + \begin{array}{l} ff \\ +hh \end{array} = 0$.

On multipliera l'équation des deux racines égales par l'équation des deux autres racines réelles, propre à faire évanouir le second terme du produit; c'est à dire, $xx - 2fx + ff = 0$, par $xx + 2fx + \begin{array}{l} ff \\ -hh \end{array} = 0$; & $xx + 2fx + ff = 0$, par $xx - 2fx + \begin{array}{l} ff \\ -hh \end{array} = 0$; & l'on aura le produit $x^4 \begin{array}{l} -2ffxx \\ -hhxx \end{array} + 2fhhx + \begin{array}{l} f^4 \\ -ffhh \end{array} = 0$, lorsque les deux racines égales seront positives: On aura le produit $x^4 \begin{array}{l} -2ffxx \\ -hhxx \end{array} - 2fhhx + \begin{array}{l} f^4 \\ -ffhh \end{array} = 0$, lorsque les deux racines égales seront négatives.

L'équation generale sera dans le premier cas $x^4 - pxx + qx \pm r = 0$, & dans le second cas $x^4 - pxx - qx \pm r = 0$.

On comparera les termes de chaque produit avec ceux de l'équation generale qui leur répondent, ce qui donnera les trois équations particulieres qui suivent: 1°, $2ff + hh = p$; 2°, $2fhh = q$; 3°, $f^4 - ffhh = \pm r$. La premiere donnera $hh = p - 2ff$: Substituant cette valeur de hh dans la troisiéme, on aura $f^4 - pff + 2f^4 = \pm r$, qui se réduit à $f^4 - \frac{p}{3} ff \mp \frac{r}{3} = 0$: Et resolvant cette équation du second degré, on aura les deux valeurs de ff, sçavoir $ff = \frac{p}{6} + \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}$, $ff = \frac{p}{6} - \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}$; d'où l'on déduira $f = \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}}$.

D'où l'on déduit la maniere de connoître si une équation du quatriéme degré, dont toutes les racines sont réelles, a deux racines égales, & le moyen de les trouver: car l'équation lineaire qui contient la racine égale sera $x \mp f = x \mp \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}} = 0$.

Dans l'usage il faudra substituer les grandeurs de l'équation proposée dans la formule $x \mp \sqrt{\frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} \pm \frac{r}{3}}} = 0$; & ensuite diviser la proposée par cette équation lineaire ainsi changée; & si la division est exacte, la proposée aura deux

deux racines égales, que l'on aura à même temps trouvées. Les deux autres racines se trouveront ensuite facilement.

Quand les deux racines differentes des deux racines égales seront imaginaires, on multipliera l'équation des deux racines égales par l'équation des deux imaginaires propre à faire évanouir le second terme du produit; c'est à dire, on multipliera $xx - 2fx + ff = 0$, par $xx + 2fx + \begin{array}{l} ff \\ +hh \end{array} = 0$, & $xx + 2fx + ff = 0$, par $xx - 2fx + \begin{array}{l} ff \\ +hh \end{array} = 0$; & l'on aura le produit $x^4 \begin{array}{l} -2ffxx \\ +hhxx \end{array} - 2fhhx + \begin{array}{l} f^4 \\ +ffhh \end{array} = 0$, quand les deux racines égales seront positives: on aura le produit $x^4 \begin{array}{l} -2ffxx \\ +hhxx \end{array} + 2fhhx + \begin{array}{l} f^4 \\ +ffhh \end{array} = 0$, quand les deux racines égales seront négatives: & comme hh peut être moindre que $2ff$, ou surpasser $2ff$, le troisiéme terme pourra avoir + ou −, selon que l'un ou l'autre arrivera.

L'équation generale, lorsque les deux racines égales seront positives, sera $x^4 \pm pxx - qx + r = 0$; & $x^4 \pm pxx + qx + r = 0$, quand elles seront négatives.

On comparera les termes de chaque produit avec les termes correspondans de l'équation generale, & l'on aura les trois équations particulieres qui suivent: 1°, $-2ff + hh = \pm p$; 2°, $2fhh = q$; 3°, $f^4 + ffhh = +r$.

La premiere donnera $hh = \pm p + 2ff$: substituant cette valeur de hh dans la troisiéme, l'on trouvera $f^4 \pm pff + 2f^4 = r$, qui se réduit à $f^4 \pm \frac{p}{3} ff - \frac{r}{3} = 0$; & resolvant cette équation du second degré, on trouvera ces deux valeurs de ff, sçavoir $ff = \mp \frac{p}{6} + \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}$, $ff = \mp \frac{p}{6} - \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}$: il y aura $-\frac{p}{6}$, quand la proposée aura $+pxx$; & il y aura $+\frac{p}{6}$, quand la proposée aura $-pxx$.

L'on déduira de ces équations $f = \sqrt{\mp \frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}}$; par consequent l'équation lineaire $x \mp f = 0$, deviendra $x \mp \sqrt{\mp \frac{p}{6} \pm \sqrt{\frac{pp}{36} + \frac{r}{3}}} = 0$.

Dans l'usage, pour connoître si une équation proposée contient deux racines égales, & les deux autres imaginaires, on remarquera, 1°, que quand le second terme est évanoui, & qu'il y a $+p$, il y a des racines imaginaires dans l'équation : * mais il y en peut aussi avoir quoiqu'il y ait $-pxx$.

* 29. 23ᵉ Cor. 2°. On substituera les grandeurs de la proposée, representées par p, r, à leur place dans l'équation lineaire $x \mp \sqrt{\mp \frac{p}{4} \pm \sqrt{\frac{pp}{16} + \frac{r}{1}}} = 0$; & on divisera la proposée par l'équation lineaire qui viendra de la substitution : si la division se fait sans reste, la proposée contient deux racines égales chacune à celle que contient l'équation lineaire, & les deux autres sont imaginaires.

Comme ce Problême est facile à concevoir, il est inutile d'en apporter ici des exemples.

La démonstration est la même que celle dont on s'est servi pour démontrer le second Problême.

PROBLÊME V.

100. *RESOUDRE les équations du quatriéme degré, c'est à dire, en trouver les quatre racines.*

Pour abreger le calcul, on supposera que le second terme est évanoui.

I. *Lorsque toutes les racines sont commensurables, ou qu'il y en a quelqu'une.*

LA methode generale du premier Problême du quatriéme Livre est la plus courte ; c'est à dire, il faut diviser l'équation par l'inconnue x lineaire plus ou moins chaque diviseur du dernier terme de la proposée ; & lorsque la proposée aura ses racines commensurables, on les trouvera toujours par cette methode, c'est à dire, on trouvera toujours les équations lineaires de $x +$ ou $-$ un diviseur du dernier terme, qui diviseront exactement la proposée ; & si l'on ne trouve aucune de ces équations lineaires qui divise exactement la proposée, elle n'aura aucune racine commensurable ; si elle n'en avoit qu'une de commensurable, en divisant la proposée par l'équation lineaire qui contient cette racine, on réduiroit la proposée à une équation du troisiéme degré, qu'on résoudroit par les Problêmes de la Section précedente.

AVERTISSEMENT.

LORSQU'UNE équation du quatriéme degré n'a aucune de ses racines commensurables, on la peut concevoir comme composée de deux équations, dont chacune est du second degré, & supposant que $xx + fx + g = 0$, represente l'une de ces deux équations ; ou bien le coëficient du second terme represente par f, sera commensurable ; ou bien le dernier terme representé par g, sera commensurable ; ou bien enfin l'un & l'autre seront incommensurables. On va donner la methode de trouver dans le premier *cas*, le coëficient representé par f, & le dernier terme representé par g ; comme aussi de les trouver dans le second & troisiéme cas, quand les réduites où l'on arrivera dans ces cas, ne seront pas comprises dans le cas irréductible du troisiéme degré ; & l'on aura une des équations du second degré, dont la proposée est composée. La methode, qu'on va donner, fera trouver à même temps l'autre équation du second degré, qui avec la précedente, compose la proposée. Il ne faudra plus que résoudre chacune de ces équations du second degré par le premier Problême, & l'on aura les quatre racines de la proposée.

II. *Lorsque le coëficient du second terme d'une des deux équations du second degré, qui composent la proposée, est commensurable, ou du moins sa seconde puissance ; ou bien lorsque le dernier terme de la même équation du second degré est commensurable.*

METHODE.

101. ON supposera que l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, represente toutes les équations du quatriéme degré : On supposera aussi que $xx + fx + g = 0$, represente une des deux équations du second degré qui composent l'équation du quatriéme degré.

On divisera $x^4 + pxx + qx + r = 0$, par $xx + fx + g = 0$, & on continuera la division jusqu'à ce qu'on ait un reste dans lequel l'inconnue x soit lineaire. Le quotient sera $xx - fx \begin{array}{l} + p \\ - g \\ + ff \end{array} = 0$; & le reste sera $-f^3x + 2fgx - pfx + qx - ffg + gg - pg + r$. On suposera chaque terme de ce reste égal à zero, ce qui donnera les deux équations particulieres qui suivent, qui serviront à déterminer les indéterminées f & g.

$$1^{re},\ -f^3 + \begin{array}{l}2gf\\ -pf\end{array} + q = 0; \qquad 2^e,\ -ffg + \begin{array}{l}gg\\ -pg\\ +r\end{array} = 0.$$

Ou bien en transposant,

$$1^{re},\ f^3 - \begin{array}{l}2gf\\ +pf\end{array} - q = 0; \qquad 2^e,\ gff - \begin{array}{l}gg\\ +pg\\ -r\end{array} = 0.$$

On trouveroit les mêmes équations, en supposant les deux équations indéterminées du second degré $xx + fx + g = 0$, $xx - fx + h = 0$; & en comparant, aprés les avoir multipliées, les termes du produit avec les termes correspondans de l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, on auroit trois équations particulieres, par le moyen desquelles dégageant l'indéterminée h, on trouveroit les deux mêmes équations qui précedent.

On cherchera le plus grand diviseur commun de ces deux équations, en prenant f pour l'inconnue, & on continuera l'operation jusqu'à ce qu'on trouve un reste dans lequel f ne se trouve plus: ce reste, qui ne contiendra aucune autre inconnue que g, étant mis en ordre par raport à g, & supposé égal à zero, sera $g^6 - pg^5 - rg^4 + \begin{array}{l}2prg^3\\ -qqg^3\end{array} - rrgg - prrg + r^3 = 0$.

Ce sera la réduite qui servira à faire trouver le dernier terme g de l'équation $xx + fx + g = 0$, lorsqu'il est commensurable. On mettra à part le dernier diviseur $-\begin{array}{l}ggf\\ +rf\end{array} - qg = 0$, qui a servi à trouver la réduite; ou plutôt on prendra la valeur de f dans ce diviseur, qui est $f = \frac{-qg}{gg-r}$, & on la mettra à part: elle servira à faire trouver f, quand on aura découvert la valeur de g.

On cherchera de même une réduite qui n'ait point d'autre inconnue que f; & pour la trouver, on ordonnera les deux équations $f^3 - \begin{array}{l}2gf\\ +pf\end{array} - q = 0$, $gff - \begin{array}{l}gg\\ +pg\\ -r\end{array} = 0$,

par raport à l'inconnue g; & l'on aura ces deux équations,

$$1^{re},\ gg - \begin{array}{l}ffg\\ -pg\end{array} + r = 0; \qquad 2^e,\ 2fg - \begin{array}{l}f^3\\ -pf\\ +q\end{array} = 0.$$

On cherchera le plus grand diviseur commun de ces deux équations, & on continuera l'operation jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste qui ne contienne plus l'indéterminée g: ce reste, qui n'aura plus d'autre inconnue que f, étant mis en ordre par raport à f, & supposé égal à zero, sera $f^6 + 2pf^4 + \begin{array}{l}ppff\\ -4rff\end{array} - qq = 0$. Ce sera la réduite qui servira à faire trouver le coéficient f de l'équation $xx + fx + g = 0$, lorsqu'il est commensurable, ou du moins lorsque sa seconde puissance ff est commensurable.

On prendra la valeur de g dans le dernier diviseur qui a donné la réduite pour reste, qui est $2fg - \begin{array}{l}f^3\\ -pf\\ +q\end{array} = 0$; cette valeur sera $g = \frac{f^3+pf-q}{2f}$, & on la mettra à part, pour s'en servir à trouver la valeur de l'indéterminée g, quand on aura découvert la valeur de f par le moyen de la réduite.

Ces deux réduites, dont l'une des indéterminées f ou g est l'inconnue, avec les valeurs de l'autre indéterminée f ou g, qui répondent à chacune des réduites, serviront à trouver la premiere des deux équations du second degré, dont une équation proposée du quatriéme degré, qu'on veut resoudre, est composée; & le quotient $xx - fx + \begin{array}{l}p\\ -g\\ +ff\end{array} = 0$, servira à trouver l'autre.

La maniere de trouver les quatre racines d'une équation du quatriéme degré par les formules précedentes.

102. 1°. On substituera dans laquelle on voudra des deux réduites, les valeurs de $+p$, $+q$, $+r$, prises dans l'équation qu'on veut résoudre, en remarquant que $+p$ marque le coéficient du troisiéme terme de la proposée, avec son signe $+$ ou $-$; & ainsi des autres.

2°. On divisera la nouvelle réduite qui en resultera par g $+$ ou $-$ chaque diviseur du dernier terme, quand on se sert de la réduite où est g; & alors il ne faut se servir que des diviseurs communs au dernier terme de la réduite, & au dernier terme de la proposée: & si c'est la réduite dont f est l'inconnue, on la divisera par ff + ou — chaque diviseur du dernier terme de la réduite, qui n'aura que deux dimensions quand la proposée est litterale & homogene.

Si les grandeurs representées par ff & g de l'équation $xx + fx + g = 0$, sont commensurables, on trouvera toujours une équation faite de ff, ou de g plus ou moins un diviseur du dernier terme de la réduite, qui fera la division sans reste; & l'on aura par ce moyen une valeur de f ou de g.

Si la nouvelle réduite qu'on trouve, aprés avoir substitué dans la réduite dont f est l'inconnue, les valeurs de p, q, r, étoit abaissée d'un degré, une valeur de ff seroit zero.

3°. On substituera la valeur de f ou de g, qu'on vient de découvrir, dans l'équation de f ou de g lineaire, mise à part; & les valeurs de f & de g étant ainsi découvertes, on les substituera dans $xx + fx + g = 0$, & l'on aura la premiere des deux équations du second degré qui composent la proposée: On substituera encore les valeurs découvertes de f & de g, & celles de p, dans le quotient $xx - fx \begin{array}{l}+p\\-g\\+ff\end{array} = 0$, & l'on aura la seconde équation du second degré qui compose la proposée.

4°. On trouvera les racines de ces deux équations du
* 76. second degré,* & l'on aura les quatre racines de la proposée.

AVERTISSEMENT.

103. ON mettra ici avant les exemples, toutes les formules dont on a besoin pour les resoudre.

L'équation generale est $x^4 + pxx + qx + r = 0$.

La premiere des deux équations du second degré dont elle est composée, est $xx + fx + g = 0$; la seconde est $xx - fx \begin{array}{l}+p\\-g\\+ff\end{array} = 0$.

La réduite pour trouver f, ou ff, est $f^6 + 2pf^4 \begin{array}{l}+ppff\\-4rff\end{array} - qq = 0$.

Quand on aura trouvé la valeur de ff & de f par cette réduite, la formule pour trouver g, est $g = \frac{f^3 + pf - q}{2f} = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$; ainsi $xx + fx + g = 0$, $= xx + fx + \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f} = 0$; & $xx - fx \begin{array}{l}+p\\-g\\+ff\end{array} = 0$, $= xx - fx + \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2f} = 0$.

La formule pour trouver g, quand g est commensurable, est $g^6 - pg^5 - rg^4 \begin{array}{l}+2prg^3\\-qqg^3\end{array} - rrgg - prrg + r^3 = 0$.

Quand on aura trouvé la valeur de g par cette réduite, la formule pour trouver f, est $f = \frac{-qg}{gg - r}$.

On remarquera que le calcul est plus court en se servant de la formule de la réduite, dont f est l'inconnue, qui n'est que du troisiéme degré, & par laquelle on trouvera toujours la valeur de f, quand la grandeur representée par f, est commensurable; ou quand même f étant incommensurable, ff est commensurable; & que le calcul est plus long si l'on se sert de la formule de la réduite, dont g est l'inconnue, qui est du sixiéme degré, & qu'on ne peut resoudre que quand g est commensurable.

EXEMPLE I.

POUR trouver les quatre racines de l'équation $x^4 - 2ax^3 \begin{array}{l}+2aaxx\\-ccxx\end{array} - 2a^3x + a^4 = 0$, on ôtera d'abord le second terme de cette équation, en supposant $x = y + \frac{1}{2}a$; & substituant la valeur de x dans la proposée, on aura $y^4 \begin{array}{l}+\frac{1}{2}aayy\\-ccyy\end{array} \begin{array}{l}-a^3y\\-accy\end{array} \begin{array}{l}+\frac{1}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{array} = 0$, qui n'a pas de second terme.

Afin que l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, represente cette équation, on supposera $+p = +\frac{1}{2}aa - cc$, $+q = -a^3 - acc$, $+r = +\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{4}aacc$.

On substituera ces valeurs de p, q, r, dans la réduite $f^6 + 2pf^4 \begin{array}{l}+ppff\\-4rff\end{array} - qq = 0$; & l'on aura la réduite,

$$f^6 \begin{array}{l}+aaf^4\\-2ccf^4\end{array} \begin{array}{l}-a^4ff\\+c^4ff\end{array} \begin{array}{l}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{array} = 0,$$

On divisera cette réduite par $ff - aa - cc = 0$, ($aa + cc$

est un diviseur du dernier terme,) & la division se faisant sans reste, on aura $ff = aa + cc$; & $f = \sqrt{aa + cc}$.

On substituera ces valeurs de ff & de f, dans $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$, & l'on trouvera $g = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}cc + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = \frac{3}{4}aa + \frac{a\sqrt{aa+cc} \times \sqrt{aa+cc}}{2\sqrt{aa+cc}} = \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a \times \sqrt{aa+cc}$. On substituera les valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$; & on substituera les mêmes valeurs & celle de p, dans $xx - fx \begin{array}{l} +p \\ -g \\ +ff \end{array} = 0$, où l'on supposera que x représente y; & l'on aura $yy + y\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$; & $yy - y\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$: ce sont les deux équations du second dégré qui composent $y^4 \begin{array}{l} +\frac{1}{2}aayy \\ -ccyy \end{array}$, &c.

Enfin on trouvera par le premier Problême les racines de ces deux équations du 2^e^ degré, & l'on aura les quatre racines de $y^4 \begin{array}{l} +\frac{1}{2}aayy \\ -ccyy \end{array}$, &c. qui sont la 1^re^, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; la 2^e^, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; la 3^e^, $y = +\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; la 4^e^, $y = +\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Substituant les valeurs de y dans $x = y + \frac{1}{2}a$, on aura les quatre racines de la proposée: 1^re^, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; 2^e^, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; 3^e^, $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$; 4^e^, $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

EXEMPLE II.

POUR trouver les racines de l'équation $x^4 - 32xx + 5x + 12 = 0$, on supposera $+p = -32$, $+q = +5$, $+r = +12$. On substituera les valeurs de p, q, r, dans la réduite dont f est l'inconnue; & l'on aura pour la réduite de la proposée, $f^6 - 64f^4 + 976ff - 25 = 0$. On divisera cette réduite par $ff +$ ou $-$ un diviseur exact du dernier terme 25, & on trouvera que la division se fait sans reste par $ff - 25 = 0$; d'où l'on déduit $ff = 25$, & $f = 5$. Substituant cette valeur de f dans $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$, l'on trouve $g = \frac{25}{2} - \frac{32}{2} - \frac{5}{10} = -\frac{80}{20} = -4$. Substituant ces valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, & dans $xx - fx \begin{array}{l} +p \\ -g \\ +ff \end{array} = 0$, on aura pour la premiere des deux équations du second degré qui composent la proposée, $xx + 5x - 4 = 0$; & pour la seconde $xx - 5x - 3 = 0$.

En resolvant chacune de ces équations, on trouve que les quatre racines de la proposée sont $x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{41}{4}}$, $x = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{41}{4}}$, $x = +\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{37}{4}}$, $x = +\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{4}}$.

EXEMPLE III.

POUR trouver les racines de $x^4 - 18xx + 24x - 3 = 0$, on supposera $+p = -18$, $+q = +24$, $+r = -3$. On substituera ces valeurs de p, q, r, dans la réduite dont f est l'inconnue, & l'on aura pour la réduite de la proposée, $f^6 - 36f^4 + 336ff - 576 = 0$. On divisera cette reduite par $ff -$ ou $+$ chaque diviseur du dernier terme, & l'on trouvera que $ff - 12 = 0$, fait la division sans reste; d'où l'on déduira $ff = 12$, & $f = \sqrt{12}$. Substituant cette valeur de f dans $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$, on trouvera $g = \frac{12}{2} - \frac{18}{2} - \frac{24}{2\sqrt{12}} = -3 - \frac{24}{2\sqrt{12}} = -3 - \frac{12}{\sqrt{12}}$. Or $\frac{12}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{12}} = \sqrt{12}$; ainsi $g = -3 - \sqrt{12}$. Substituant les valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, & dans $xx - fx \begin{array}{l} +p \\ -g \\ +ff \end{array} = 0$, l'on aura $xx + x\sqrt{12} \begin{array}{l} -3 \\ -\sqrt{12} \end{array} = 0$, & $xx - x\sqrt{12} \begin{array}{l} -3 \\ +\sqrt{12} \end{array} = 0$, pour les deux équations du second degré qui composent la proposée. On en trouvera facilement les racines par le premier Problême.* * 76.

EXEMPLE IV.

POUR trouver les racines de $x^4 + 4xx - 4x + 15 = 0$, on supposera $+p = +4$, $+q = -4$, $+r = +15$. On substituera les valeurs de p, q, r, dans la réduite dont l'inconnue est f, & l'on aura la réduite de la proposée $f^6 + 8f^4 - 44ff - 16 = 0$: on divisera cette réduite par $ff -$ ou $+$ chaque diviseur du dernier terme, & on trouvera que $ff - 4 = 0$, fait la division sans reste; d'où l'on déduira $ff = 4$, & $f = 2$. Substituant la valeur de f dans $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$, on trouvera $g = \frac{4}{2} + \frac{4}{2} + \frac{4}{4} = 5$. Substituant les valeurs de f & de g dans $xx + fx + g = 0$, $xx - fx \begin{array}{l} +p \\ -g \\ +ff \end{array} = 0$, on aura $xx + 2x + 5 = 0$, & $xx - 2x + 3 = 0$. Ce sont les deux équations du second degré qui composent la proposée. On en trouvera facilement les racines par le premier

* 76. Problême,* qui sont toutes imaginaires.

La démonstration de ce cinquiéme Problême a déja été

* 67 donnée dans la quatriéme Section du quatriéme Livre.*

Demonstration du 5e Problême.

III. *Lorsque le coëficient représenté par* f *dans l'équation* $xx + fx + g = 0$, *& le dernier terme* g, *sont incommensurables.*

104. VOICI une methode pour resoudre ce cas dans plusieurs rencontres : On supposera les deux équations du second degré, qui representent par leurs indéterminées les deux équations qui composent la proposée ; on les supposera, dis-je, avec des incommensurables au second & au dernier terme ; par exemple, la premiere sera $xx - x\sqrt{f} \begin{array}{l} +g \\ \mp\sqrt{f} \end{array} = 0$, & la seconde $xx + x\sqrt{f} \begin{array}{l} +g \\ \pm\sqrt{f} \end{array} = 0$: on les multipliera l'une par l'autre, & l'on aura le produit $x^4 \begin{array}{l} -fxx \\ +2gxx \end{array} \mp 2fx \begin{array}{l} +gg \\ -f \end{array} = 0$.

L'équation generale sera $x^4 \mp pxx \mp qx \pm r = 0$.

On comparera les termes correspondans de ces deux équations, & l'on aura les trois équations particulieres qui suivent : 1re, $-f + 2g = \mp p$; d'où l'on déduira $g = \mp\frac{p}{2} + \frac{f}{2}$; 2e, $2f = q$, $f = \frac{q}{2}$; 3e, $+gg - f = \pm r$.

L'indéterminée f est connue par la seconde équation $f = \frac{q}{2}$: Substituant sa valeur dans la premiere, l'on aura $g = \mp\frac{p}{2} + \frac{q}{4}$.

L'équation $xx - x\sqrt{f} \begin{array}{l} +g \\ \mp\sqrt{f} \end{array} = 0$, sera $xx - x\sqrt{\frac{1}{2}q} \mp \frac{p}{2}$

$+ \frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q}{2}} = 0$; & $xx + x\sqrt{f} \begin{array}{l} +g \\ \pm\sqrt{f} \end{array} = 0$, sera $xx + x\sqrt{\frac{1}{2}q} \mp \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{2}q} = 0$.

Application de cette methode à un exemple.

POUR trouver les racines de $x^4 - 18xx + 24x - 3 = 0$, on supposera $-p = -18$, ou $p = 18$; $q = 24$, & $-r = -3$, ou $r = 3$. On substituera les valeurs de p, q, r, dans les deux formules précedentes, & l'on aura $xx - x\sqrt{12} - 9 + 6 - \sqrt{12} = 0$, c'est à dire $xx - x\sqrt{12} \begin{array}{l} -3 \\ -\sqrt{12} \end{array} = 0$, & $xx + x\sqrt{12} \begin{array}{l} -3 \\ +\sqrt{12} \end{array} = 0$. Ce sont les deux équations qui composent la proposée ; on en trouvera facilement les racines par le premier Problême.* * 76.

IV. *Lorsque* f *&* ff *sont incommensurables dans l'équation composante* $xx + fx + g = 0$.

105. IL peut arriver des cas où f & ff se trouveront incommensurables, & alors on ne trouvera pas d'équation simple de $ff -$ ou $+$ un diviseur du dernier terme de la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c. qui divise la réduite sans reste. Voici une methode pour ce cas dans plusieurs rencontres.

On pourra supposer que les deux équations composantes du second degré sont $xx - x\sqrt[4]{f} \begin{array}{l} +g \\ \mp\sqrt[4]{f} \end{array} = 0$, & $xx + x\sqrt[4]{f} \begin{array}{l} +g \\ \pm\sqrt[4]{f} \end{array} = 0$. Leur produit est $x^4 \begin{array}{l} -fxx \\ +2gxx \end{array} \mp 2fx \begin{array}{l} +gg \\ -f \end{array} = 0$.

La formule generale sera $x^4 \mp pxx \mp qx \pm r = 0$.

Les comparaisons des termes correspondans donneront les équations suivantes : 1re, $-f + 2g = \mp p$; d'où l'on déduit $g = \mp\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}f$: 2e, $2f = q$; d'où l'on déduit $f = \frac{1}{2}q$: 3e, $gg - f = \pm r$.

On déduira de la premiere & de la seconde $g = \mp\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q$. Substituant ces valeurs de f & de g dans les deux équations composantes, la premiere sera $xx - x\sqrt[4]{\frac{1}{2}q} \mp \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q \mp \sqrt[4]{\frac{1}{2}q} = 0$; & la seconde, $xx + x\sqrt[4]{\frac{1}{2}q} \mp \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}q} = 0$.

On appliquera ces formules aux exemples, comme on l'a fait dans le cas précedent.

REMARQUE.

On pourra distinguer quelles sont les équations du quatriéme degré qu'on pourra resoudre par la methode du 3[e] & 4[e] art. qui précedent, en substituant les valeurs de f & de g dans la troisiéme équation particuliere $gg - f = \pm r$; car l'on aura $\frac{1}{4}pp \mp \frac{1}{4}pq + \frac{1}{16}qq - \frac{1}{2}q = \pm r$; ainsi les équations dans lesquelles la quantité $\frac{1}{4}pp \mp \frac{1}{4}pq + \frac{1}{16}qq - \frac{1}{2}q$, ne sera pas égale au dernier terme representé par r, ne pourront se resoudre par ces methodes.

Methode pour trouver les deux équations du second degré, dont une équation du quatriéme est composée; dans les cas où se servant de la réduite dont f est l'inconnue, il arrive que la grandeur representée par ff est incommensurable.

106. Quand aucune équation simple de ff — ou + un des diviseurs du dernier terme de la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c. ne divise la réduite sans reste, dans ce cas ff est incommensurable. Pour résoudre dans ce cas la réduite $f^6 + 2pf^4 + ppff - 4rff - qq = 0$, tirée de l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, on ôtera le second terme de la réduite, en supposant $ff = y - \frac{2}{3}p$; & aprés avoir substitué $y - \frac{2}{3}p$ à la place de ff dans la réduite, on aura la transformée de la réduite

$$\begin{array}{lll} y^3 - \frac{1}{3}ppy & - \frac{2}{27}p^3 & = 0, \\ - 4ry & + \frac{8}{3}pr & \\ & - qq & \end{array}$$

qui n'a pas de second terme.

On substituera les valeurs de p, q, r, prises dans l'équation qu'on voudra résoudre, & où l'on aura trouvé que ff est incommensurable; on les substituera, dis-je, ces valeurs dans la transformée de la réduite qu'on vient de trouver; & on resoudra l'équation transformée par les methodes du troisiéme degré; & quand on aura trouvé la valeur de y, on la substituera dans $ff = y - \frac{2}{3}p$, & l'on aura la valeur de ff: on trouvera ensuite celle de $g = \frac{ff}{2} + \frac{p}{2} - \frac{q}{2f}$; aprés cela on trouvera les deux équations du second degré qui composent la proposée, & on aura par leur moyen les quatre racines de la proposée.

EXEMPLE.

Pour trouver les racines de $x^4 - 50xx + 100x - 100 = 0$, on supposera, afin que l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$, represente la proposée, que $+p = -50$, $+q = +100$, $+r = -100$; mettant ces valeurs de p, q, r, dans la formule de la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c. la réduite de la proposée sera $f^6 - 100f^4 + 2900ff - 10000 = 0$; ou plutôt on substituera les valeurs de p, q, r, immédiatement dans la transformée de la réduite

$$\begin{array}{lll} y^3 - \frac{1}{3}ppy & - \frac{2}{27}p^3 & = 0; \\ - 4ry & + \frac{8}{3}pr & \\ & - qq & \end{array}$$

& l'on aura $y^3 - \frac{3900}{3}y + \frac{340000}{27} = 0$; & l'équation $ff = y - \frac{2}{3}p$, sera $ff = y + \frac{100}{3}$. On ôtera les fractions de $y^3 - \frac{3900}{3}y + \frac{340000}{27} = 0$, en supposant $3y = z$, & $y = \frac{z}{3}$; & l'on aura $z^3 - 3900z + 340000 = 0$. On trouvera la valeur de z, en resolvant cette équation du troisiéme degré par la seconde methode generale,* & l'on trouvera $z = \sqrt[3]{-170000 - \sqrt{26703000000}} + \sqrt[3]{-170000 + \sqrt{26703000000}}$; *74.
on substituera cette valeur de z dans $y = \frac{z}{3}$, & l'on aura $y = \frac{1}{3} \times \sqrt[3]{-170000 - \sqrt{26703000000}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000 + \sqrt{26703000000}}$; on substituera cette valeur de y dans $ff = y + \frac{100}{3}$, & l'on aura $ff = \frac{100}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000 - \sqrt{26703000000}} + \frac{1}{3} \times \sqrt[3]{-170000 + \sqrt{26703000000}}$; d'où l'on déduira $f = \sqrt{\frac{100}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-170000}}$, &c. On substituera les valeurs de f & de ff dans $g = +\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}ff - \frac{q}{2f}$, & l'on aura $g = -25 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{100}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{-170000}}$, &c. On substituera les valeurs de f & de g, qu'on vient de découvrir, dans $xx + fx + g = 0$, & dans

$$\begin{array}{l} xx - fx + p = 0; \\ - g \\ + ff \end{array}$$

& l'on aura les deux équations du second degré qui composent la proposée.

On trouvera enfin les racines de chacune de ces deux équations du second degré,* & l'on aura les quatre racines de la proposée. *76.

REMARQUES.

107. QUAND les trois racines de la réduite, ou, ce qui revient à la même chose, de la transformée de la réduite, sont réelles & incommensurables, on ne peut en trouver la valeur qu'avec des expressions imaginaires qu'on ne sçauroit ôter, & les équations du quatriéme degré renferment alors le cas irréductible du troisiéme degré.

Pour distinguer les cas du quatriéme degré où cela peut arriver, il faut remarquer que les quatre racines du 4[e] degré peuvent être ou bien toutes réelles, ou bien deux réelles & deux imaginaires, ou bien enfin toutes imaginaires.

Pour déterminer ce qui regarde ces trois cas, il faut prendre des équations simples dont les indéterminées expriment les raports des quatre racines dans chacun de ces cas.

Premier cas où les quatre racines sont réelles.

108. ON supposera que les quatre équations simples sont $x - i - k = 0$, $x - i + k = 0$, $x + i - l = 0$, $x + i + l = 0$. L'équation du second degré faite des deux premieres, est $\begin{array}{l} xx - 2ix + ii \\ - kk \end{array} = 0$: celle qui est composée des deux autres est $\begin{array}{l} xx + 2ix + ii \\ - ll \end{array} = 0$; le produit de ces deux équations, qui est celui des quatre simples, est

$$\begin{array}{llll} x^4 & - 2iixx & - 2ikkx & + i^4 \\ & - kkxx & + 2illx & - iikk \\ & - llxx & & - iill \\ & & & + kkll \end{array}$$

$= 0$: ce produit est l'équation indéterminée qui exprime les raports des quatre racines de toute équation du 4[e] degré, lorsqu'elles sont toutes réelles, & que le second terme en est évanoui : Et comme les équations du 4[e] degré, dont le second terme est évanoui, & dont les quatre racines sont réelles, doivent avoir des racines négatives & positives : 1°, s'il y en a deux positives & deux négatives, i surpassera k, & i surpassera aussi l. 2°. S'il y en a trois positives & une négative, i surpassera k, mais l surpassera i. 3°. S'il y en a trois négatives & une positive, k surpassera i, & i surpassera l.

Il est évident par cette équation indéterminée, que quand les quatre racines sont réelles, le troisiéme terme a toujours

le signe $-$; ainsi les équations où il a le signe $+$, ont necessairement des racines imaginaires; ce que l'on a déja démontré dans le troisiéme Livre.* * 29. 12[e] Cor.

On supposera que cette équation indéterminée est la même que l'équation generale $x^4 + pxx + qx + r = 0$; ainsi $+p = -2ii - kk - ll$, $+q = -2ikk + 2ill$, $+r = +i^4 - iikk - iill + kkll$.

On substituera ces valeurs de p, q, r, dans la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c. & l'on aura pour la réduite de l'équation indéterminée, qui represente les raports des racines, l'équation suivante

$$\begin{array}{llll} f^6 & - 4iif^4 & + 8iikkff & - 4iik^4 \\ & - 2kkf^4 & + 8iillff & + 8iikkll \\ & - 2llf^4 & + k^4ff & - 4iil^4 \\ & & - 2kkllff & \\ & & + l^4ff & \end{array} = 0.$$

On fera ces remarques sur cette réduite : 1°. Elle peut être divisée exactement par chacune de ces trois équations simples $ff - 4ii = 0$, $ff - kk - 2kl - ll = 0$, $ff - kk + 2kl - ll = 0$; par consequent toutes les racines de la réduite sont réelles, & même positives, quand toutes celles de la proposée sont réelles. 2°. Le second terme de la réduite a toujours le signe $-$. 3°. Le troisiéme terme de la réduite a toujours le signe $+$; car $+8iikk + 8iill$ sont des grandeurs positives, & $+k^4 - 2kkll + l^4$, est le quarré de $kk - ll$, qui est par consequent positif.

Second cas lorsque deux racines sont réelles, & deux imaginaires.

109. LES quatre équations simples qui representent les raports des racines, seront $x - i - k = 0$, $x - i + k = 0$, $x + i - \sqrt{-ll} = 0$, $x + i + \sqrt{-ll} = 0$.

Le produit des deux premieres est $\begin{array}{l} xx - 2ix + ii \\ - kk \end{array} = 0$.

Le produit des deux imaginaires est $\begin{array}{l} xx + 2ix + ii \\ + ll \end{array} = 0$.

Le produit des quatre est

$$\begin{array}{llll} x^4 & - 2iixx & - 2ikkx & + i^4 \\ & - kkxx & - 2illx & - iikk \\ & + llxx & & + iill \\ & & & - kkll \end{array} = 0.$$

Ce produit est l'équation qui exprime les raports des quatre racines de toute équation du 4[e] degré, dont deux racines sont réelles, & deux imaginaires.

Pour trouver la réduite de cette équation, on ſuppoſera qu'elle eſt la même que $x^4 + pxx + qx + r = 0$; ainſi $+p = -2ii - kk + ll$, $+q = -2ikk - 2ill$, $+r = +i^4 - iikk + iill - kkll$. On ſubſtituera ces valeurs de p, q, r, dans la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c. & l'on aura

$$\begin{array}{llll} f^6 - 4iif^4 & + 8iikkff & - 4iik^4 & = 0. \\ \quad - 2kkf^4 & - 8iillff & + 8iikkll & \\ \quad + 2llf^4 & + k^4ff & - 4iil^4 & \\ & + 2kkllff & & \\ & + l^4ff & & \end{array}$$

On remarquera ſur cette réduite, qu'elle peut être exactement diviſée par chacune des trois équations ſimples $ff - 4ii = 0$, $ff - kk + ll - \sqrt{-4kkll} = 0$, $ff - kk + ll + \sqrt{-4kkll} = 0$; par conſequent quand une équation du quatriéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, a deux racines réelles & deux imaginaires, ſa reduite a une racine réelle, & deux racines imaginaires.

Troiſiéme cas lorſque les quatre racines ſont imaginaires.

110. Les quatre équations ſimples qui expriment par leurs indéterminées les raports des quatre racines des équations du 4^e degré, qui ont toutes leurs racines imaginaires, & le ſecond terme évanoui, ſont $x - i - \sqrt{-kk} = 0$, $x - i + \sqrt{-kk} = 0$, $x + i - \sqrt{-ll} = 0$, $x + i + \sqrt{-ll} = 0$: Le produit des deux premieres eſt $\begin{array}{l} xx - 2ix + ii = 0; \\ \qquad\qquad\;\; + kk \end{array}$ celui des deux autres eſt $\begin{array}{l} xx + 2ix + ii = 0: \\ \qquad\qquad\;\; + ll \end{array}$ Le produit des quatre eſt

$$\begin{array}{llll} x^4 - 2iixx & + 2ikkx & + i^4 & = 0. \\ \;\; + kkxx & - 2illx & + iikk & \\ \;\; + llxx & & + iill & \\ & & + kkll & \end{array}$$

Et l'on remarquera que dans toute équation du 4^e degré, dont les quatre racines ſont imaginaires, & le ſecond terme évanoui, le dernier terme a toujours le ſigne $+$.

Pour trouver la réduite de cette équation, on la ſuppoſera la même que $x^4 + pxx + qx + r = 0$; ainſi $+p = -2ii + kk + ll$, $+q = +2ikk - 2ill$, $+r = +i^4 + iikk + iill + kkll$. On ſubſtituera les valeurs de p, q, r, dans la réduite $f^6 + 2pf^4$, &c. & l'on aura

$$\begin{array}{llll} f^6 - 4iif^4 & - 8iikkff & - 4iik^4 & = 0. \\ \quad + 2kkf^4 & - 8iillff & + 8iikkll & \\ \quad + 2llf^4 & + k^4ff & - 4iil^4 & \\ & - 2kkllff & & \\ & + l^4ff & & \end{array}$$

On remarquera ſur cette réduite, 1°, qu'elle peut être exactement diviſée par chacune de ces trois équations ſimples $ff - 4ii = 0$, $ff + kk + 2kl + ll = 0$, $ff + kk - 2kl + ll = 0$; par conſequent la réduite de toute équation du quatriéme degré, dont les quatre racines ſont imaginaires, & le ſecond terme évanoui, a ſes trois racines réelles.

2°. Quand le ſecond terme de la réduite a le ſigne $-$, c'eſt à dire, quand $4ii$ ſurpaſſe $2kk + 2ll$, il eſt évident que le troiſiéme terme de la réduite a auſſi le ſigne $-$, car $kk + ll$ ſurpaſſe $kk - ll$; ainſi multipliant $kk + ll$ par $-8ii$, qui ſurpaſſe $kk - ll$, & multipliant $kk - ll$ par $kk - ll$, le premier produit $-8iikk - 8iill$ ſurpaſſera le ſecond $k^4 - 2kkll + l^4$.

Marques certaines pour diſtinguer les cas où les équations du 4^e degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, ont toutes leurs racines réelles; les cas où elles en ont deux imaginaires; ceux où les quatre ſont imaginaires; & enfin les cas où on peut les réſoudre.

111. Il ſuit de ces remarques, 1°, que quand le troiſiéme terme d'une équation du 4^e degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, a le ſigne $+$, il y a des racines imaginaires,* & ſi à * 108.
même temps les racines de ſa réduite ſont toutes réelles; & 19.
(ce que l'on connoîtra en faiſant évanouir le ſecond terme 13e Cor.
de la réduite; car ſi le cube du tiers du coéficient du troiſiéme terme de la transformée de la réduite, ſurpaſſe le quarré de la moitié de ſon dernier terme, ou lui eſt égal, les trois racines de la réduite ſeront réelles.*) Alors les * 81. 83.
quatre racines ſont imaginaires *; car s'il n'y avoit que * 110.
deux imaginaires dans la propoſée, deux racines de la réduite ſeroient imaginaires.* * 109.

De plus, quand le ſecond terme de la réduite d'une équation du 4^e degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, a le ſigne $-$, & que le troiſiéme terme de la même réduite a encore le ſigne $-$, les quatre racines de l'équation ſont imaginaires.* * 110.

Quand on a donc l'une ou l'autre de ces deux marques; l'équation eſt réſolue; car on ſçait que le Problême renferme contradiction, & ne peut avoir aucune réſolution réelle.

2°. Quand le troiſiéme terme d'une équation du 4e degré dont le ſecond terme eſt évanoui, a le ſigne +, & que le dernier terme a le ſigne —, il eſt certain qu'il y a deux racines imaginaires, & deux racines réelles, car le dernier
* 110. terme auroit + s'il y avoit quatre imaginaires.*

Quand le troiſiéme terme d'une équation du 4e degré, dont le ſecond terme eſt évanoui, a le ſigne —, & qu'en même temps la réduite de cette équation a une racine réelle, & deux racines imaginaires, il eſt certain que l'équa-
* 109. tion a deux racines imaginaires, & deux racines réelles.* Or on connoîtra que la réduite aura une racine réelle & deux imaginaires, en faiſant évanouir le ſecond terme de la réduite, car ſi le cube du tiers du coéficient du troiſiéme terme de la transformée de la réduite eſt moindre que le
* 83. quarré de la moitié de ſon dernier terme,* il eſt certain que la transformée aura une racine réelle & deux imaginaires; par conſequent la réduite auſſi; d'où il ſuivra que l'équation propoſée aura deux racines réelles & deux imaginaires.

On peut toujours reſoudre l'équation du 4e degré, lorſqu'elle a deux racines réelles & deux imaginaires, par la
* 106. ſeconde methode ci-deſſus,* & par la ſeconde methode
* 92. generale du troiſiéme Problême.*

3°. Quand une équation du 4e degré, *dont le ſecond* terme eſt évanoui, a le ſigne — au troiſiéme terme, & que le ſecond terme de ſa réduite a auſſi le ſigne —, & le troiſiéme terme de ſa même réduite a le ſigne +, & que de plus les trois racines de la réduite ſont réelles, il eſt cer-
* 108. tain que les quatre racines de l'équation ſont réelles.* On connoîtra que les trois racines de la réduite ſont réelles, en faiſant évanouir le ſecond terme de cette réduite; car ſi le cube du tiers du coéficient du troiſiéme terme de la transformée de cette réduite, ſurpaſſe le quarré de la moitié du dernier terme de la même transformée, ou lui eſt égal, il eſt certain que les trois racines de cette trans-
* 81. 84. formée, & par conſequent de la réduite, ſont réelles.*

Dans ce cas ſi les racines de la transformée de la réduite ſont commenſurables, ou du moins quelqu'une, on peut toujours trouver les quatre racines de l'équation par les methodes du Problême précedent. Mais ſi toutes les racines de cette transformée de la réduite ſont incommenſurables, la réſolution de la réduite de l'équation renferme alors le cas irréductible du troiſiéme degré.* * 90.

PROBLÊME VI.

112. *TROUVER les quatre racines d'une équation du 4e degré, ſans en faire évanouir le ſecond terme.*

On ſuppoſe que l'équation generale du quatriéme degré eſt $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$.

PREMIERE METHODE.

On ſuppoſera que les deux équations du ſecond degré, qui compoſent l'équation du 4e degré, ſont repreſentées par les deux équations indéterminées

$$xx + fx + h = 0.$$
$$\quad\;\; + gx + i$$
$$xx + fx + h = 0.$$
$$\quad\;\; - gx - i$$

Leur produit eſt

$$\begin{array}{l} x^4 + 2fx^3 + ffxx + 2fhx + hh = 0. \\ \qquad\qquad\;\; - ggxx - 2gix - ii \\ \qquad\qquad\;\; + 2hxx \end{array}$$

On comparera les termes de ce produit, excepté le premier, avec les termes correſpondans de l'équation generale, & l'on aura les quatre équations particulieres qui ſuivent, dont on ſe ſervira pour déterminer les indéterminées, & l'on conſervera l'indéterminée h pour en faire l'inconnue de la réduite: 1°, $+n = +2f$; 2°, $+p = +ff - gg + 2h$, 3°, $+q = +2fh - 2gi$; 4°, $+r = +hh - ii$: On aura par la premiere $f = \frac{n}{2}$, & $ff = \frac{nn}{4}$; on ſubſtituera la valeur de ff dans la ſeconde, & l'on aura $gg = \frac{nn}{4} + 2h - p$, & $g = \sqrt{\frac{nn}{4} + 2h - p}$. On ſubſtituera les valeurs de f & de g dans la troiſiéme, & l'on aura $q = nh - 2i\sqrt{\frac{nn}{4} + 2h - p}$; d'où l'on déduira $i = \frac{nh - q}{2\sqrt{\frac{nn}{4} + 2h - p}}$, & $ii = \frac{nnhh - 2nqh + qq}{nn + 8h - 4p}$; on ſubſtituera cette valeur de ii dans la quatriéme équation, & l'on aura $+r = hh - \frac{nnhh + 2nqh - qq}{nn + 8h - 4p}$. On mettra cette équation en ordre par raport à l'inconnue h, & l'on aura

$$\begin{array}{l} 8h^3 - 4phh + 2nqh - qq = 0. \\ \qquad\quad - 8rh \;\; - nnr \\ \qquad\qquad\qquad + 4pr \end{array}$$

On resoudra cette équation, c'est à dire, on trouvera la valeur de h par les methodes du troisiéme degré, (transformant auparavant l'équation en une autre dont le premier terme n'ait pas d'autre coéficient que l'unité.)

On substituera ensuite les valeurs de f, g, h, i, dans les deux équations $\begin{array}{l} xx + fx + h = 0, \\ \quad\; + gx + i \end{array}$ $\begin{array}{l} xx + fx + h = 0, \\ \quad\; - gx - i \end{array}$ laissant h au lieu de sa valeur pour abreger le calcul, & l'on aura ces deux équations du second degré,

$$1^{re},\quad \begin{array}{l} xx + \frac{1}{2} nx \\ + x\sqrt{\frac{1}{4} nn + 2h - p} \end{array} \begin{array}{l} + h \\ + \dfrac{nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4} nn + 2h - p}} \end{array} = 0,$$

$$2^{e},\quad \begin{array}{l} xx + \frac{1}{2} nx \\ - x\sqrt{\frac{1}{4} nn + 2h - p} \end{array} \begin{array}{l} + h \\ - \dfrac{nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4} nn + 2h - p}} \end{array} = 0.$$

On resoudra ensuite chacune de ces équations du second
* 76. degré par le premier Problême, * & l'on aura les quatre
racines de la proposée, ou plutôt les quatre formules qui les expriment d'une maniere generale.

Comme il est plus commode de trouver tout d'un coup la réduite dont h est l'inconnue, qui n'ait au premier terme que l'unité pour coéficient, au lieu de supposer les deux équations indéterminées $\begin{array}{l} xx + fx + h = 0, \\ \quad\; + gx + i \end{array}$ $\begin{array}{l} xx + fx + h = 0, \\ \quad\; - gx - i \end{array}$ on supposera celles-ci

$$\begin{array}{l} xx + \frac{1}{2} nx + \frac{1}{2} h = 0, \\ \quad\;\; + gx \quad + \frac{i}{2g} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} xx + \frac{1}{2} nx + \frac{1}{2} h = 0, \\ \quad\;\; - gx \quad - \frac{i}{2g} \end{array}$$

où il n'y a que trois indéterminées g, h, i. On supposera que leur produit

$$\begin{array}{l} x^4 + nx^3 + \frac{1}{4} nnxx + \frac{1}{2} nhx + \frac{1}{4} hh = 0, \\ \qquad\qquad\;\; - ggxx \quad\; - ix \quad\;\; - \frac{ii}{4gg} \\ \qquad\qquad\;\; + hxx \end{array}$$

est la même équation que $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$; ainsi chaque terme du produit est égal au terme correspondant de l'équation generale; ce qui donne trois équations, parceque le premier & le second terme n'en donnent pas: 1^{re}, $+ p = \frac{1}{4} nn - gg + h$; 2^{e}, $+ q = + \frac{1}{2} nh - i$; 3^{e}, $+ r = + \frac{1}{4} hh - \frac{ii}{4gg}$. La premiere donne $gg = \frac{1}{4} nn + h - p$, & $g = \sqrt{\frac{1}{4} nn + h - p}$: la seconde donne $i = \frac{1}{2} nh - q$, & $ii = \frac{1}{4} nnhh - nqh + qq$. On substituera les valeurs de gg & de ii dans la troisiéme équation, & l'on aura $+ r = \frac{1}{4} hh - \dfrac{\frac{1}{4} nnhh + nqh - qq}{nn + 4h - 4p}$; on ordonnera cette équation par raport à l'inconnue h, & l'on aura

$$\begin{array}{l} h^3 - phh + nqh - qq = 0; \\ \qquad\quad\; - 4rh \;\; - nnr \\ \qquad\qquad\qquad + 4pr \end{array}$$

c'est la réduite de l'équation; elle n'est que du troisiéme degré, & son premier terme n'a que l'unité pour coéficient.

On trouvera la valeur de h par le moyen de cette réduite, en se servant des methodes du troisiéme degré; on substituera ensuite les valeurs de h, g, i, dans les deux équations indéterminées $\begin{array}{l} xx + \frac{1}{2} nx + \frac{1}{2} h = 0, \\ \quad\;\; + gx \quad + \frac{i}{2g} \end{array}$ $\begin{array}{l} xx + \frac{1}{2} nx + \frac{1}{2} h = 0, \\ \quad\;\; - gx \quad - \frac{i}{2g} \end{array}$ laissant h au lieu de sa valeur, pour abreger le calcul; & l'on aura ces deux équations:

$$1^{re},\quad \begin{array}{l} xx + \frac{1}{2} nx \\ + x\sqrt{\frac{1}{4} nn + h - p} \end{array} \begin{array}{l} + \frac{1}{2} h \\ + \dfrac{\frac{1}{2} nh - q}{2\sqrt{\frac{1}{4} nn + h - p}} \end{array} = 0,$$

$$2^{e},\quad \begin{array}{l} xx + \frac{1}{2} nx \\ - x\sqrt{\frac{1}{4} nn + h - p} \end{array} \begin{array}{l} + \frac{1}{2} h \\ - \dfrac{\frac{1}{2} nh + q}{2\sqrt{\frac{1}{4} nn + h - p}} \end{array} = 0.$$

Application de cette methode à un exemple.

POUR réduire cette methode en pratique, quand on aura une équation à résoudre, par exemple, $\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0, \\ \qquad\qquad\quad\;\; - ccxx \end{array}$ on supposera que cette équation est representée par l'équation generale $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$; ainsi $+ n = - 2a$, $+ p = + 2aa - cc$, $+ q = - 2a^3$, $+ r = + a^4$. On substituera ces valeurs de n, p, q, r, dans la réduite $\begin{array}{l} h^3 - phh + nqh - qq = 0, \\ \qquad\quad\; - 4rh \;\; - nnr \\ \qquad\qquad\qquad + 4pr \end{array}$ & l'on aura pour la réduite de la proposée, $\begin{array}{l} b^3 - 2aabb - 4a^4cc = 0; \\ \quad\;\; + ccbb \end{array}$

On trouvera la valeur de b dans cette équation, en cherchant si elle ne peut point se diviser par $b -$ ou $+$ un diviseur du dernier terme $-4a^4cc$; & l'on trouvera qu'elle se peut exactement diviser par $b - 2aa = 0$; ainsi $b = 2aa$. On substituera cette valeur de b dans chacune des deux équations du second degré $\begin{array}{l} xx + \frac{1}{2}nx \\ + x\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p} \end{array} +$, &c.

& l'on aura pour la premiere $\begin{array}{l} xx - ax \\ + x\sqrt{aa + cc} \end{array} + aa = 0$,

& pour la seconde, $\begin{array}{l} xx - ax \\ - x\sqrt{aa + cc} \end{array} + aa = 0$.

* 76. On trouvera par le premier Problême * les racines de ces deux équations, & ce seront les quatre racines de la proposée:

1re, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$;

2e, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$;

3e, $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$;

4e, $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$.

DEMONSTRATION.

Cette methode est assez démontrée par les démonstrations de l'usage des indéterminées dans les équations; si l'on en veut une autre, il n'y a qu'à multiplier les deux équations

$$\begin{array}{ll} xx + \frac{1}{2}nx & + \frac{1}{2}b \\ + x\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p} & + \dfrac{\frac{1}{2}nb - q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p}} \end{array} = 0,$$

$$\begin{array}{ll} xx + \frac{1}{2}nx & + \frac{1}{2}b \\ - x\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p} & - \dfrac{\frac{1}{2}nb + q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn + b - p}} \end{array} = 0;$$

l'une par l'autre, & mettre dans le dernier terme du produit la grandeur $+r$, à la place de la grandeur $+\frac{1}{4}bb - \frac{\frac{1}{4}nnbb + nqb - qq}{nn + 4b - 4p}$, qui lui est égale, & le produit sera l'équation generale $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$; par

consequent les deux équations précedentes, sont les deux équations du second degré, dont l'équation $x^4 + nx^3$, &c. est composée.

REMARQUE.

On peut toujours resoudre les équations du quatriéme degré par cette methode, lorsque la valeur de b dans leur réduite est commensurable, & lorsqu'étant incommensurable, aprés avoir fait évanouir le second terme de la réduite, le cube du tiers du coéficient du troisiéme terme de la transformée qui en viendra, sera moindre que le quarré de la moitié du dernier terme de la même transformée: Mais lorsque ce cube surpassera ce quarré, & que la valeur de b sera incommensurable, la résolution renfermera le cas irréductible du troisiéme degré.

Cette remarque servira pour la methode suivante.

SECONDE METHODE.

On supposera que l'équation generale du quatriéme degré est $x^4 + nx^3 + pxx + qx + r = 0$, & on la disposera ainsi, $x^4 + nx^3 + pxx = -qx - r$.

1°. Il faut faire en sorte que le premier membre devienne un quarré parfait, en conservant cependant l'égalité entre les deux membres, ce qu'on pourra faire en introduisant une indéterminée b.

On supposera que la racine du quarré parfait, qui fera le premier membre de l'équation, est $xx + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}p + b$, dont le quarré est $\begin{array}{llll} x^4 + nx^3 + pxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ \quad + 2bxx & + nbx & + pb \\ \quad + \frac{1}{4}nnxx & & + bb \end{array}$

Afin que ce quarré soit égal au second membre, il faut ajouter au second membre les quantités $\begin{array}{lll} + 2bxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ + \frac{1}{4}nnxx & + nbx & + pb \\ & & + bb \end{array}$

& l'on aura l'équation $\begin{array}{llll} x^4 + nx^3 + pxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ \quad + 2bxx & + nbx & + pb \\ \quad + \frac{1}{4}nnxx & & + bb \end{array}$

$\begin{array}{lll} = 2bxx & + \frac{1}{2}npx & + \frac{1}{4}pp \\ + \frac{1}{4}nnxx & + nbx & + pb \\ & - qx & + bb \\ & & - r \end{array}$; ou bien en tirant la racine quarrée de chaque membre $\begin{array}{l} xx+\frac{1}{2}nx+\frac{1}{2}p \\ \qquad\qquad\quad +h \end{array} = \sqrt{\begin{array}{lll} +2hxx & +\frac{1}{2}npx & +\frac{1}{4}pp \\ +\frac{1}{4}nnxx & +nhx & +ph \\ & -qx & +hh \\ & & -r \end{array}}$

2°. Il faut maintenant faire en ſorte que le ſecond membre devienne auſſi un quarré parfait, de maniere pourtant que ce quarré ſoit égal au ſecond membre, & par conſequent au premier, & qu'il contienne les grandeurs du ſecond membre où ſe trouve x, afin qu'elles ſe détruiſent, & qu'il ne reſte d'inconnue que l'indéterminée h.

Pour le faire, on ſuppoſera que la racine de ce quarré parfait égal au 2^e membre, eſt $x\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h}+\frac{\frac{1}{2}np+nh-q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h}}$; dont le quarré eſt $\begin{array}{lll} \frac{1}{4}nnxx & +\frac{1}{2}npx & +\frac{\frac{1}{4}nnpp}{} \\ +2hxx & +nhx & +nnph \\ & -qx & +nnhh \\ & & -npq \\ & & -2nqh \\ & & +qq \\ \hline & & nn+8h \end{array}$

On pourra ſuppoſer ce quarré égal au ſecond membre, à cauſe de l'indéterminée h, à laquelle on peut concevoir une valeur propre à les rendre égaux; on aura donc cette équation $\begin{array}{lll} +\frac{1}{4}nnxx & +\frac{1}{2}npx & +\frac{1}{4}nnpp \\ +2hxx & +nhx & +nnph \\ & -qx & +nnhh \\ & & -npq \\ & & -2nqh \\ & & +qq \\ \hline & & nn+8h \end{array} = \begin{array}{lll} \frac{1}{4}nnxx & +\frac{1}{2}npx & +\frac{1}{4}pp \\ +2hxx & +nhx & +ph \\ & -qx & +hh \\ & & -r \end{array}$

laquelle ſe réduit à $\begin{array}{lll} nnhh & +nnph & +\frac{1}{4}nnpp \\ & -2nqh & -npq \\ & & +qq \\ \hline & nn+8h & \end{array} = hh+ph+\begin{array}{l}\frac{1}{4}pp \\ -r\end{array}$

Cette équation étant miſe en ordre par raport à l'inconnue h, l'on aura $8h^3+8phh\begin{array}{l}+2nqh \\ +2pph \\ -8rh\end{array}\begin{array}{l}+npq \\ -qq \\ -nnr\end{array}=0$, qui eſt une équation du troiſiéme degré, qui n'a pour toute inconnue que l'indéterminée h, & qui eſt comme une eſpece de réduite. On trouvera la valeur de h lorſqu'elle eſt commenſurable par 56, ou par les methodes du 3^e degré. On peut donc à preſent la ſuppoſer comme connue, mais on conſervera h au lieu de ſa valeur pour abreger; ainſi h doit être regardée comme connue.

3°. L'on a par ce qui précede $\begin{array}{l} xx+\frac{1}{2}nx+\frac{1}{2}p \\ \qquad\qquad\quad +h \end{array}$

$$= \sqrt{\begin{array}{lll} \frac{1}{4}nnxx & +\frac{1}{2}npx & +\frac{1}{4}pp \\ +2hxx & +nhx & +ph \\ & -qx & +hh \\ & & -r \end{array}} = \sqrt{\begin{array}{lll} \frac{1}{4}nnxx & +\frac{1}{2}npx & +nnhh \\ +2hxx & +nhx & +nnph \\ & -qx & -2nqh \\ & & +\frac{1}{4}nnpp \\ & & -npq \\ & & +qq \\ \hline & & nn+8h \end{array}}$$

$= x\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h}+\frac{\frac{1}{2}np+nh-q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h}}$; on a donc l'équation du 2^e degré $\begin{array}{l} xx+\frac{1}{2}nx+\frac{1}{2}p \\ \qquad\qquad\quad +h \end{array} = x\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h}+\frac{\frac{1}{2}np+nh-q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h}}$,

ou bien $\begin{array}{ll} xx+\frac{1}{2}nx & +\frac{1}{2}p \\ -x\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h} & +h \\ & \frac{-\frac{1}{2}np-nh+q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h}} \end{array} = 0.$

On reſoudra cette équation du ſecond degré,* & l'on aura deux racines de l'équation propoſée du quatriéme degré. *76.
L'équation du ſecond degré, qui contiendra les deux autres racines, ſera $\begin{array}{ll} xx+\frac{1}{2}nx & +\frac{1}{2}p \\ +x\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h} & +h \\ & \frac{+\frac{1}{2}np+nh-q}{2\sqrt{\frac{1}{4}nn+2h}} \end{array} = 0$;

car le produit de ces deux équations du ſecond degré eſt la propoſée elle-même $x^4+nx^3+pxx+qx+r=0$, en ſuppoſant que $\begin{array}{l} -nnhh \\ -nnph \\ +2nqh \\ -\frac{1}{4}nnpp \\ +npq \\ -qq \\ \hline nn+8h \end{array}\begin{array}{l} +hh \\ +ph \\ +\frac{1}{4}pp \end{array} = r$.

ce qui eſt évident par l'équation $\begin{array}{lll} nnhh & +nnph & +\frac{1}{4}nnpp \\ & -2nqh & -npq \\ & & +qq \\ \hline & & nn+8h \end{array}$

$= bb + pb + \frac{1}{4}pp - r$, puisqu'il n'y a qu'à transposer y dans le premier membre, & la quantité qui fait le premier membre dans le second membre.

On appliquera cette seconde methode aux exemples, comme on a fait la premiere, sans qu'il soit necessaire de s'y arrêter.

SECTION IV.

De la résolution des équations du cinquiéme & sixiéme degré, & des autres degrés plus élevés.

AVERTISSEMENT.

LES équations des degrés plus élevés que le quatriéme, viennent rarement en usage; ainsi il suffira de donner ici les ouvertures necessaires pour les resoudre quand il s'en presentera, sans entrer dans un détail semblable à celui où l'on est entré pour les autres degrés inferieurs, à cause de leur usage continuel dans les Problêmes de Geometrie; & même les methodes qu'on y a données pourront aider à en former de semblables pour les degrés plus élevés.

PROBLÊME VII.

113. *RESOUDRE les équations du cinquiéme & sixiéme degré, & même des degrés plus élevés.*

I.

Lorsque les racines sont commensurables, ou du moins quelqu'une.

ON se servira de la methode generale de la premiere Section du quatriéme Livre; c'est à dire, on divisera la proposée par une équation simple faite de l'inconnue de la proposée + ou − chaque diviseur du dernier terme; & s'il y a quelque racine commensurable, on trouvera toujours une de ces équations simples, qui fera la division sans reste. On operera ensuite sur le quotient, comme on a fait sur la proposée; & si les racines sont toutes commensurables, on les trouvera par cette methode les unes aprés les autres; s'il n'y en a que quelques-unes, on trouvera enfin pour quotient une équation d'un moindre degré que la proposée, dont on trouvera les racines par les Problêmes précedens, si elle ne passe pas le 4e degré: si elle le passe, on operera comme dans les cas qui suivent.

II.

Lorsque les racines étant toutes incommensurables, la proposée est composée d'équations plus simples commensurables.

On reduira toujours, par les Problêmes de la troisiéme Section du quatriéme Livre, les équations composées aux équations plus simples qui la composent, lorsqu'elles sont commensurables; & ensuite si ces équations plus simples ne passent pas le quatriéme degré, on les resoudra par les Problêmes des Sections précedentes.

III.

Lorsque les coéficients des équations plus simples qui composent la proposée (qu'on suppose sans incommensurables) renferment des incommensurables.

On tâchera de trouver des équations plus simples indéterminées, dont les coéficients indéterminés contiennent des incommensurables, & dont le produit fasse une équation indéterminée qui soit du même degré que la proposée, & sans incommensurables, comme l'on en a vu des exemples dans la Section précedente.* On comparera les termes du * 104.
produit indéterminé des équations composantes, avec les & 105.
termes correspondans de la proposée, & par les équations particulieres qui naîtront de ces comparaisons, on déterminera les grandeurs indéterminées des équations composantes, ce qui donnera la résolution de la proposée, lorsqu'on la peut trouver par cette voie.

Aprés les ouvertures qu'on vient de donner pour resoudre les équations qui passent le quatriéme degré, on ajoutera une methode qui convient à tous les degrés; mais comme elle demande des calculs rebutans, ce qui la rend assez inutile dans la pratique, on l'appliquera seulement au troisiéme degré.

Methode pour résoudre les équations de tous les degrés.

114. ON supposera une équation indéterminée moindre d'un degré que la proposée qu'on veut resoudre, dont l'inconnue soit celle de la proposée, qui ait une indéterminée pour le coéficient de chacun de ses termes, & deux indéterminées lineaires pour son dernier terme. Par exemple, si la propo-

sée est du 3^e degré, comme $x^3 - nxx + px - q = 0$, on supposera l'équation indéterminée $xx - fx \begin{matrix} - g \\ - h \end{matrix} = 0$.

Si la proposée est du 4^e degré, comme $x^4 - nx^3 + pxx - qx + r = 0$, on supposera l'équation indéterminée $x^3 - fxx - gx \begin{matrix} - h \\ - i \end{matrix} = 0$.

Si la proposée est du 5^e degré, comme $x^5 - nx^4 + px^3 - qxx + rx - s = 0$, on supposera l'équation indéterminée $x^4 - fx^3 - gxx - hx \begin{matrix} - i \\ - k \end{matrix} = 0$; & ainsi des autres.

Pour abreger le calcul, on fera d'abord évanouir *le second terme* de la proposée; ainsi l'on supposera que l'équation du troisiéme degré, à laquelle on va appliquer la methode, est par exemple, $x^3 - px - q = 0$.

On cherchera le plus grand diviseur commun de la proposée & de l'équation indéterminée $xx - fx \begin{matrix} - g \\ - h \end{matrix} = 0$; & l'on continuera l'operation jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste où l'inconnue x ne soit plus.

On prendra dans le dernier diviseur où x est lineaire, & qui a donné ce dernier reste, la valeur de x, & on la mettra à part. Ce dernier diviseur est $\begin{matrix} - px - q \\ + gx + fg \\ + hx + fh \\ + ffx \end{matrix} = 0$, & la valeur de x prise dans ce diviseur, supposé égal à zero, est $x = \frac{-fg - fh + q}{ff + g + h - p}$; on supposera le reste dans lequel *x n'est plus*, égal à zero, & on ordonnera l'équation de ce reste par raport à l'une des deux indéterminées du dernier terme de l'équation supposée laquelle on voudra, qui sera l'inconnue de ce reste, & l'on aura la réduite

$$\begin{array}{llll} g^3 - 2pgg & + ppg & + pph & = 0. \\ + 3hgg & - 4phg & - 2phh & \\ & - pffg & - pffh & \\ & + 3hhg & + h^3 & \\ & + 3qfg & - pqf & \\ & & + 3qfh & \\ & & + qf^3 & \\ & & - qq & \end{array}$$

On supposera le second & le troisiéme terme de cette ré-

duite chacun égal à zero, & que la réduite est elle-même égale à zero, ce qui donnera trois équations particulieres, qui serviront à déterminer les trois indéterminées h, f, g; sçavoir h par l'équation qui naîtra du second terme égal à zero, f par celle du troisiéme, & g par la supposition que le premier terme & le dernier sont ensemble égaux à zero: ces trois équations sont la 1re, $-2p + 3h = 0$, ainsi $h = \frac{2}{3}p$: la 2^e, $+pp - 4ph - pff + 3hh + 3qf = 0$; la 3^e, $g^3 + pph - 2phh - pffh + h^3 - pqf + 3qfh + qf^3 - qq = 0$. Substituant la valeur de h dans la seconde équation, & la mettant en ordre par raport à l'indéterminée f, on aura l'équation du second degré $ff - \frac{3qf}{p} + \frac{p}{3} = 0$; on trouvera par cette équation deux valeurs de f, la premiere $f = \frac{3q}{2p} + \sqrt{\frac{9qq}{4pp} - \frac{p}{3}}$; la seconde, $f = \frac{3q}{2p} - \sqrt{\frac{9qq}{4pp} - \frac{p}{3}}$; multipliant chaque terme de $-\frac{p}{3}$ par $9pp$, l'on changera l'expression $\sqrt{\frac{9qq}{4pp} - \frac{p}{3}}$ en celle-ci, $\sqrt{\frac{9qq}{4pp} - \frac{9p^3}{27pp}} = \frac{3}{p}\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, ainsi $f = \frac{3}{p} \times \frac{q}{2} \pm \frac{3}{p}\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}} = \frac{3}{p} \times \overline{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$: Substituant la valeur de h & celle de f dans la troisiéme équation particuliere, qui est $g^3 + pph - 2phh - pffh + h^3 - pqf + 3qfh + qf^3 - qq = 0$, on aura $g^3 + \frac{27q^4}{2p^3} + \frac{8p^3}{27} - 4qq + \overline{\frac{27q^3}{p^3} - 4q} \times \pm\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = 0$; d'où l'on déduira $g = \sqrt[3]{-\frac{27q^4}{2p^3} - \frac{8p^3}{27} + 4qq - \overline{\frac{27q^3}{p^3} + 4q} \times \pm\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

On substituera les valeurs qu'on vient de trouver des trois indéterminées f, g, h, dans $x = \frac{+q - fg - fh}{ff + g + h - p}$; mais pour abreger l'expression & le calcul, on laissera g au lieu de sa valeur, & l'on aura $x = \frac{\frac{-3qg}{2p} + \overline{\frac{3g}{p} + 2} \times \mp\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}{\frac{-2p}{3} + g + \frac{9qq}{2pp} + \frac{9q}{pp} \times \pm\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Cette valeur de x est une racine de la proposée.

Application de cette methode à un exemple.

POUR trouver par cette methode la racine de $x^3 - 24x - 72 = 0$, on supposera $p = 24$, & $q = 72$; & substituant ces valeurs de p, q, l'on aura $h = \frac{2}{3}p = 16$.

$+\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +28$, & $-\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = -28$.

$f = \frac{3q}{2p} + \frac{3}{p} \times +\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +8$, 1re valeur de f.

$f = \frac{3q}{2p} + \frac{3}{p} \times -\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +1$, 2^e valeur de f.

On trouvera de même la valeur de $g = \sqrt[3]{-\frac{27q^4}{2p^6} - \frac{8p^3}{27} + 4qq - \frac{27q^3}{p^3} + 4q \times + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$, en substituant les valeurs de p, q, comme on le voit ici : $-\frac{27q^4}{2p^6} = -26244$. $-\frac{8p^3}{27} = -4096$. $-\frac{27q^3}{p^3} + 4q \times + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = -12348$; ainsi $-\frac{27q^4}{2p^6} - \frac{8p^3}{27} - \frac{27q^3}{p^3} + 4q \times + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = -42688$; & $+4qq = +20736$; donc $-\frac{27q^4}{2p^6} - \frac{8p^3}{27} - \frac{27q^3}{p^3} + 4q \times + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} + 4qq = g^3 = -21952$; tirant la racine cubique, on aura $g = -28$: c'est la valeur de g déduite de la 1[re] valeur de f où il y a $+\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +28$.

On trouvera, si l'on veut, une seconde valeur de g, en se servant de la seconde valeur de f où il y a $-\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = -28$; en voici le calcul, $+4qq = +20736$, $-\frac{27q^3}{p^3} + 4q \times - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +12348$; ainsi $+4qq - \frac{27q^3}{p^3} + 4q \times - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +33084$; & $-\frac{27q^4}{2p^6} - \frac{8p^3}{27} = -30340$; donc $-\frac{27q^4}{2p^6} - \frac{8p^3}{27} + 4qq - \frac{27q^3}{p^3} + 4q \times - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = +2744 = g^3$; tirant la racine cubique, on aura $g = +14$, c'est la seconde valeur de g déduite de la 2[e] valeur de f, dans laquelle il y a $-\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3} = -28$. Aprés avoir trouvé les valeurs de f, g, h, on les substituera avec celles de p, q, dans l'équation de la racine mise à part $x = \frac{q - fg - fh}{ff + g + h - p}$, observant que si l'on substitue la premiere valeur de $g = -28$, il faut substituer à même temps la premiere valeur de $f = +8$; & que si l'on substitue la seconde valeur de $g = +14$, il faut substituer à même temps la seconde valeur de $f = +2$; & l'on trouvera toujours que la racine de la proposée est $x = +6$. *Ce qui étoit proposé.*

Démonstration de cette methode.

LE dernier diviseur $-px + gx + hx + ffx - q + fg + fh = 0$, d'où l'on déduit $x = \frac{+q - fg - fh}{ff + h + g - p}$, qui donne par la supposition un reste égal à zero, étant déterminé par la supposition des valeurs des trois indéterminées f, g, h, qu'on trouve en supposant la réduite égale à zero, & chacun de ses deux termes moyens aussi égal à zero; ce dernier diviseur, dis-je, dans lequel l'inconnue x est lineaire, étant devenu déterminé, est necessairement un diviseur exact de l'équation proposée, puisque par la démonstration de la methode de trouver le plus grand diviseur commun de deux équations qui ont la même inconnue, il est un diviseur exact de la proposée & de l'équation feinte ou indéterminée $xx - fx \begin{smallmatrix} -g \\ -h \end{smallmatrix} = 0$, lorsqu'elle est devenue réelle & déterminée; car il ne laisse point de reste, ou, ce qui est la même chose, il laisse un reste égal à zero. Mais une équation où x est lineaire, & qui divise exactement la proposée, en contient une racine par la formation des équations. La methode fait donc trouver une racine de la proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Remarques sur cette methode.

I.

L'ART de cette methode consiste, 1°, à pouvoir representer par le moyen des indéterminées f, g, h, une équation $xx - fx \begin{smallmatrix} -g \\ -h \end{smallmatrix} = 0$, moindre d'un degré que la proposée, qui ait une racine commune, c'est à dire un diviseur commun où x soit lineaire, avec la proposée; 2°, à trouver ce diviseur commun par la methode de trouver le plus grand diviseur commun, d'une maniere indéterminée; 3°, à pouvoir déterminer, en supposant que ce dernier diviseur commun ne laisse aucun reste, par le moyen du reste supposé égal à zero, & chacun de ses termes moyens aussi égal à zero, les valeurs des indéterminées f, g, h, propres à rendre réelle l'équation indéterminée $xx - fx \begin{smallmatrix} -g \\ -h \end{smallmatrix} = 0$, qui a une racine commune ou un diviseur commun avec la proposée dans lequel x est lineaire, & propres aussi à rendre réel ce diviseur commun qui contient une racine de la proposée.

II.

Quand on a trouvé les valeurs des indéterminées f, g, h, il est d'ordinaire plus court de les substituer immédiatement dans l'équation indéterminée de la valeur de la racine $x = \frac{+q - fg - fh}{ff + h + g - p}$, que de se servir de la formule $x = \dfrac{-\frac{27q}{2p} +, \&c.}{-\frac{2p}{3} +, \&c.}$

III.

On a mis deux indéterminées g & h au dernier terme de l'équation indéterminée $xx - fx \begin{array}{l}-g\\-h\end{array} = 0$; parceque si l'on n'en mettoit qu'une seule, on trouveroit une réduite dont le second terme n'auroit qu'une seule grandeur, ce qui obligeroit à faire évanouir ce second terme, & demanderoit un plus long calcul.

IV.

La valeur de f contenant la grandeur $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$, qui est imaginaire quand $\frac{1}{27}p^3$ surpasse $\frac{1}{4}qq$, cette methode n'est utile que quand $\frac{1}{4}qq$ surpasse $\frac{1}{27}p^3$, ou quand il y a $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$; ainsi cette methode fait à la verité toujours trouver une formule de la racine qu'on cherche, mais cette formule contient dans plusieurs cas des expressions imaginaires lorsque la racine est réelle.

V.

Cette methode s'étend à tous les degrés, pourvu qu'on aille de suite; car si on l'applique aux degrés les plus élevés, on verra que pour trouver la premiere indéterminée par l'équation du second terme de la réduite supposé égal à zero, l'équation à résoudre sera lineaire; l'équation du 3^e terme de la réduite supposé égal à zero, qui sert à trouver la seconde indéterminée, sera du second degré; l'équation du 4^e terme, qui servira à trouver la troisiéme indéterminée, sera du 3^e degré; & ainsi de suite.

Remarques sur les Problêmes précedents.

I.

115. LES Problêmes de ce Livre ne servent pas seulement à résoudre les équations composées qui n'ont qu'une inconnue, ils servent aussi à résoudre celles qui ont deux ou plusieurs inconnues; car dans ce cas il faut les regarder comme des grandeurs connues, excepté une seule, par raport à laquelle l'équation sera ordonnée, & ensuite résoudre l'équation par les Problêmes de ce Livre.

II.

On peut toujours trouver les racines commensurables des équations, de quelque degré qu'elles puissent être, par la methode generale du quatriéme Livre. On peut toujours trouver

trouver les racines des équations du second degré, quoiqu'elles soient incommensurables, par le premier Problême de ce Livre. On peut trouver celles des équations du 3^e degré quand elles sont commensurables & incommensurables, excepté dans le seul cas irréductible, où toutes les racines sont réelles & incommensurables; car on a vu que la formule de la racine dans ce cas, renferme des expressions imaginaires, qu'on ne peut pas faire evanouir par les Problêmes de la seconde Section.

On peut toujours trouver les racines des équations du quatriéme degré, excepté dans les cas où la résolution renferme le cas irréductible du troisiéme degré, par les Problêmes de la troisiéme Section. On a aussi donné plusieurs ouvertures pour trouver les racines des équations des degrés plus élevés que le quatriéme, dans cette Section.

SECTION V.

Où l'on explique la maniere de trouver les racines des grandeurs complexes incommensurables, par le moyen des équations.

DEFINITION.

QUAND une grandeur complexe contient plusieurs grandeurs incommensurables, ou seules, ou avec des grandeurs commensurables, comme $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, ou $a + \sqrt{b}$, &c. chacune des grandeurs incommensurables differentes est un *terme* de la grandeur complexe; & quand il y a des grandeurs commensurables, elles ne font toutes ensemble qu'un seul terme de la grandeur complexe, ainsi $a + \sqrt{b}$ contient deux termes, de même $a + b + \sqrt{c}$ ne contient que deux termes; $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ contient trois termes; & ainsi à l'infini. Une grandeur complexe incommensurable qui a deux termes, s'appelle un *binome*; quand elle a trois termes, un *trinome*; quand elle en a quatre, un *quadrinome*; & ainsi de suite; $a + b + \sqrt{c}$ est un binome; $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ est trinome, &c.

PROBLÊME VIII.

116. *TROUVER la racine 2^e, 3^e, 4^e, &c. d'une grandeur complexe incommensurable.*

METHODE.

1°. Il faut supposer une grandeur complexe incommensurable, qui represente par des grandeurs indéterminées la racine de la proposée qu'on cherche; cette grandeur qu'on supposé doit avoir ces conditions: 1°. qu'il y ait une indéterminée dans chaque terme de la grandeur qu'on suppose representer la racine qu'on cherche: 2°. qu'en élevant cette grandeur supposée à la puissance dont l'exposant est celui de la racine qu'on cherche; c'est à dire, l'élevant au quarré si on cherche la racine quarrée; à la troisiéme puissance, si on cherche la racine cubique, &c. la grandeur complexe incommensurable qu'on trouvera, ait precisément le même nombre de termes, & disposés de la même maniere & avec les mêmes signes que la proposée; c'est à dire, si la proposée est un binome, & qu'on en cherche la racine quarrée, il faut supposer une grandeur complexe qui represente la racine, telle que son quarré soit un binome semblable; si la proposée est un trinome, que le quarré de la supposée soit un trinome semblable; si l'on cherche la racine cubique de la proposée, que la troisiéme puissance de la grandeur supposée soit un binome, un trinome, &c. semblable à la proposée: si elle est un binome, un trinome, &c. cette condition doit regler les signes radicaux de la grandeur *qu'on supposera representer la racine*; ces signes radicaux doivent avoir ordinairement les mêmes exposans que dans la proposée; c'est à dire, si les signes radicaux de la proposée sont $\sqrt[3]{}$, ceux de la grandeur supposée doivent être pour l'ordinaire $\sqrt[3]{}$; si les signes radicaux de la proposée sont $\sqrt[4]{}$, ceux de la grandeur supposée doivent aussi être pour l'ordinaire $\sqrt[4]{}$, &c. il y a pourtant quelque cas où ils doivent être differens.

2°. Il faut élever au quarré la grandeur supposée, si l'on cherche la racine quarrée de la proposée; à la troisiéme puissance, si l'on cherche la racine cubique; & ainsi de suite; & supposant que la grandeur complexe ainsi élevée represente la proposée, on les comparera l'une avec l'autre terme à terme; c'est à dire, on supposera les termes de l'une égaux aux termes correspondans de l'autre; ce qui donnera les équations particulieres propres à trouver les valeurs des indéterminées qu'on a supposées.

3°. On réduira toutes ces équations particulieres à une seule qui ne contienne pour inconnue qu'une seule des indéterminées qu'on a supposées, & on trouvera les valeurs de cette indéterminée par les Problêmes precedents; & par le moyen de cette valeur, on trouvera, en se servant des équations particulieres qu'a donné la supposition des termes correspondans égaux, les valeurs de toutes les indéterminées qu'on a supposées.

4°. On substituera ces valeurs à la place des indéterminées dans la grandeur complexe indéterminée qu'on a prise pour representer la racine de la proposée qu'on cherche; & aprés les substitutions, elle sera la racine qu'on cherchoit.

REMARQUE.

Si l'indéterminée qui sert d'inconnue à l'équation du troisiéme article, qui ne contient qu'une seule indéterminée, a plusieurs valeurs réelles, chacune de ces valeurs pourra servir à trouver la racine qu'on cherche.

Tout ce qu'on vient de dire s'éclaircira par l'application qu'on en va faire à des exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver la racine quarrée du binome $+7+\sqrt{48}$: 1°, on supposera que le binome $+f+\sqrt{g}$ represente la racine qu'on cherche, f & g sont des grandeurs indéterminées. 2°. On élevera $+f+\sqrt{g}$ au quarré, & l'on aura $ff+g+2f\sqrt{g}$, qui est un binome semblale au proposé, en prenant la grandeur commensurable $ff+g$ pour un seul terme du binome $ff+g+2f\sqrt{g}$. On supposera que $ff+g+2f\sqrt{g}$ represente le binome proposé $+7+\sqrt{48}$, & que les termes correspondans sont égaux, sçavoir la grandeur commensurable $ff+g$ égale à la grandeur commensurable $+7$, & l'incommensurable $+2f\sqrt{g}$ égale à l'incommensurable $\sqrt{48}$. On a donc les deux équations particulieres: 1°, $ff+g=7$; 2°, $+2f\sqrt{g}=\sqrt{48}$. 3°. Pour dégager les indéterminées, on élevera au quarré chacune de ces équations, & l'on aura

$f^4 + 2ffg + gg = 49$, & $4ffg = 48$. On ôtera le premier membre $4ffg$ du premier membre $f^4 + 2ffg + gg$, & le second 48 du second 49; & l'on aura $f^4 - 2ffg + gg = 49 - 48 = 1$; tirant la racine quarrée de chaque membre, on trouvera $ff - g = \sqrt{1} = 1$, d'où l'on déduira $g = ff - 1$. On substituera cette valeur de g dans l'équation $ff + g = 7$, & l'on aura $2ff - 1 = 7$, d'où l'on déduira $ff = 4$, & $f = 2$; mettant cette valeur de ff dans $g = ff - 1$, on trouvera $g = 3$. 4°. On substituera les valeurs de f & de g dans $f + \sqrt{g}$, qui represente la racine qu'on cherche, & aprés les substitutions l'on aura $f + \sqrt{g} = 2 + \sqrt{3}$; c'est la racine quarrée de $7 + \sqrt{48}$ que l'on cherchoit.

EXEMPLE II.

POUR trouver la racine quarrée de $-1 + \sqrt{-8}$, 1°, on supposera que $+f + \sqrt{-g}$ represente la racine qu'on cherche; f & g sont indéterminées. 2°. On élevera $+f + \sqrt{-g}$ au quarré, & l'on aura $ff - g + 2f\sqrt{-g}$ (par la supposition) $= -1 + \sqrt{-8}$, on supposera $ff - g = -1$, & $2f\sqrt{-g} = +\sqrt{-8}$. 3°. Elevant chacune de ces équations au quarré, on trouvera $f^4 - 2ffg + gg = 1$, & $4ffg = 8$; on ajoutera ensemble ces deux équations, & l'on aura $f^4 + 2ffg + gg = 9$; tirant la racine quarrée de chaque membre, on trouvera $ff + g = 3$, d'où l'on déduira $g = 3 - ff$; on substituera cette valeur de g dans $ff - g = -1$, & l'on aura $2ff = 2$, $ff = 1$, & $f = 1$; on substituera cette valeur de ff dans $g = 3 - ff$, & l'on trouvera $g = 2$. 4°. On substituera les valeurs de f & de g dans $f + \sqrt{-g}$, & l'on aura $f + \sqrt{-g} = 1 + \sqrt{-2}$. C'est la racine quarrée de $-1 + \sqrt{-8}$ que l'on cherchoit.

EXEMPLE III.

POUR trouver la racine quarrée du quadrinome $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$: 1°, on supposera que $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h}$ est l'expression indéterminée de cette racine; f, g, h, sont indéterminées. 2°. On élevera $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h}$ au quarré, & l'on aura $f + g + h + 2\sqrt{fg} + 2\sqrt{fh} + 2\sqrt{gh}$ = (par la supposition) $= 10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$; en comparant les termes correspondans, on aura les équations suivantes: 1re, $2\sqrt{fg} = \sqrt{24}$; 2e, $2\sqrt{fh} = \sqrt{40}$; 3e, $2\sqrt{gh} = \sqrt{60}$; 4e, $f + g + h = 10$.

3°. Pour dégager les indéterminées qu'on regarde comme des inconnues, on ôtera les incommensurables, & l'on aura 1re, $4fg = 24$; 2e, $4fh = 40$; 3e, $4gh = 60$. On trouvera par la 1re $f = \frac{6}{g}$, & par la 2e, $f = \frac{10}{h}$; par consequent $\frac{6}{g} = \frac{10}{h}$, & $6h = 10g$, & $g = \frac{3h}{5}$. Par la 3e, on trouvera $g = \frac{15}{h}$; par consequent $\frac{3h}{5} = \frac{15}{h}$; d'où l'on déduira $hh = 25$, & $h = 5$. On mettra cette valeur de h dans $g = \frac{3h}{5}$, & l'on trouvera $g = 3$. On substituera cette valeur de g dans $f = \frac{6}{g}$, & l'on aura $f = 2$. Les valeurs de toutes les indéterminées étant trouvées, on les substituera dans la 4e équation $f + g + h = 10$; & comme l'on trouve $2 + 3 + 5 = 10$, c'est une marque qu'on a découvert les veritables valeurs des indéterminées. 4°. On substituera ces valeurs dans $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h}$, & l'on aura $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, *pour la racine* que l'on cherchoit de $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$.

AVERTISSEMENT.

TOUT *l'article 96* contient des exemples où l'on trouve par cette methode la racine cubique d'un binome qui n'a que le signe radical $\sqrt[3]{}$; ainsi il est inutile d'en mettre ici d'autres exemples.

Pour trouver la racine 4e d'une grandeur complexe incommensurable, il faudra d'abord chercher par la methode la racine 2e de la proposée, & ensuite la racine 2e de la racine qu'on vient de découvrir, & elle sera la racine 4e de la proposée.

De même pour trouver la racine 6e d'une grandeur complexe incommensurable, il faudra d'abord chercher la racine 2e de la proposée, & ensuite la racine 3e de cette racine, & elle sera la racine 6e de la proposée.

Pour en trouver la racine 9e, on cherchera d'abord la racine 3e, & ensuite la racine 3e de cette racine, & elle sera la racine 9e de la proposée; & ainsi des autres racines dont l'exposant peut se diviser par des nombres entiers.

EXEMPLE IV.

POUR trouver la racine 3e de $5 + \sqrt[3]{324} + \sqrt[3]{486}$, 1°, on supposera que l'expression indéterminée de cette racine est $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g}$; 2°. on prendra la troisiéme puissance de cette expression, & l'on aura $f + g + 3\sqrt[3]{ffg} + 3\sqrt[3]{fgg}$ pour l'expression indéterminée de la proposée; on supposera leurs termes correspondans égaux, & l'on aura les trois équations suivantes : 1re, $f + g = 5$; 2^{e}, $3\sqrt[3]{ffg} = \sqrt[3]{324}$; 3^{e}, $3\sqrt[3]{fgg} = \sqrt[3]{486}$. 3°. Pour dégager les indéterminées, on ôtera les incommensurables de la seconde & troisiéme équation, & l'on aura pour la seconde $27ffg = 324$; d'où l'on déduira $ffg = 12$, & $g = \frac{12}{ff}$; on aura pour la troisiéme $27fgg = 486$, d'où l'on déduira $fgg = 18$, & $f = \frac{18}{gg}$. On prendra la valeur de gg dans l'équation $g = \frac{12}{ff}$, & l'on aura $gg = \frac{144}{f^4}$; & on la substituera dans $f = \frac{18}{gg}$, & l'on trouvera $f = \frac{18f^4}{144}$, qui se réduit à $f = \frac{f^4}{8}$, qui donnera $f^3 = 8$, & $f = 2$. On substituera la valeur de $ff = 4$ dans $g = \frac{12}{ff}$, & l'on aura $g = 3$. Les valeurs de toutes les indéterminées étant découvertes, on les substituera dans la premiere équation $f + g = 5$; & comme l'on trouve $5 = 5$, c'est une marque qu'on a découvert les veritables valeurs de f & de g; 4°. On les substituera dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche, & l'on aura $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$; c'est la racine que l'on cherchoit.

EXEMPLE V.

POUR trouver la racine 5^{e} de $76 + \sqrt{5808}$, 1°, on supposera que $f + \sqrt{g}$ est l'expression indéterminée de cette racine; 2°, on l'élevera à la 5^{e} puissance, & l'on aura $f^5 + 10f^3g + 5fgg + \overline{5f^4 + 10ffg + gg} \times \sqrt{g}$, pour l'expression indéterminée de la proposée. On supposera leurs termes correspondans égaux, & l'on aura ces deux équations: 1re, $f^5 + 10f^3g + 5fgg = 76$; 2°, $\overline{5f^4 + 10ffg + gg} \times \sqrt{g} = \sqrt{5808}$; 3°. Pour dégager les indéterminées, on élevera chacune de ces équations au quarré, & l'on aura pour la premiere $f^{10} + 20f^8g + 110f^6gg + 100f^4g^3 + 25ffg^4 = 5776$; & pour la seconde, $25f^8g + 100f^6gg + 110f^4g^3 + 20ffg^4 + g^5 = 5808$. On ôtera la premiere de ces équations de la seconde, & l'on aura le reste $-f^{10} + 5f^8g - 10f^6gg + 10f^4g^3 - 5ffg^4 + g^5 = 32$. Le premier membre de cette équation est la 5^{e} puissance de $-ff + g$, & le second est la 5^{e} puissance de 2; ainsi tirant la racine 5^{e} de chaque membre, on aura $-ff + g = 2$; d'où l'on déduira $g = ff + 2$, & $gg = f^4 + 4ff + 4$. On

substituera ces valeurs de g & de gg dans $f^5 + 10f^3g + 5fgg = 76$, & l'on trouvera l'équation $16f^5 + 40f^3 + 20f - 76 = 0$, qui se réduit en divisant par 4, à $4f^5 + 10f^3 + 5f - 19 = 0$, qu'on transformera, en supposant $f = \frac{h}{4}$, en $h^5 + 40h^3 + 320h - 4864 = 0$, qui a pour diviseur exact $h - 4 = 0$; ainsi $h = 4$, & $f = \frac{4}{4} = 1$. On substituera la valeur de f dans $g = ff + 2$, & l'on trouvera $g = 3$. 4°. On substituera les valeurs de f & de g qu'on vient de découvrir, dans $f + \sqrt{g}$, & l'on aura $f + \sqrt{g} = 1 + \sqrt{3}$; c'est la racine 5^{e} que l'on cherchoit.

Cette methode n'a pas besoin de démonstration, n'étant qu'une application de la methode qui employe les indéterminées dans les équations.

AVERTISSEMENT.

L'EXTRACTION des racines des grandeurs complexes incommensurables, n'est pas de grand usage dans les Mathematiques; ainsi il suffit d'en avoir ici donné la methode generale; cependant comme l'on trouve dans l'application de cette methode plusieurs difficultés, on a cru devoir marquer les principales, & indiquer les moyens de les surmonter dans les remarques suivantes, pour ceux qui auroient de la curiosité pour cette matiere.

REMARQUES.

I.

117. LA premiere difficulté qu'on trouve, est sur le nombre des termes incommensurables qu'on doit donner à l'expression indéterminée, qu'on suppose representer la racine qu'on cherche : si l'on veut se mettre en état de la surmonter, il faut prendre par ordre des grandeurs complexes qui ayent deux, trois, quatre termes, &c. avec le signe $\sqrt[2]{}$, comme $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$, & ainsi de suite; les élever par ordre à la puissance 2^{e}, 3^{e}, 4^{e}, &c. & remarquer le nombre des termes qu'auront ces differentes puissances, & en faire une table. Il faut faire la même chose pour les grandeurs complexes incommensurables, dont les signes radicaux seront $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, &c.

On connoîtra par ce moyen, quand on voudra chercher la racine 2^e, 3^e, &c. d'une grandeur complexe incommensurable, le nombre des termes qu'on doit supposer dans l'expression indéterminée de la racine; car ayant remarqué par exemple, qu'un binome a pour quarré un binome, qu'un trinome a pour quarré un quatrinome, qu'un quatrinome a pour quarré une grandeur complexe de sept termes, &c. (on suppose qu'il n'y a de signe radical que $\sqrt[2]{\ }$;) quand on voudra chercher la racine quarrée d'une grandeur incommensurable, par exemple de sept termes, il faudra supposer que l'expression de la racine a quatre termes; & ainsi des autres. Il faut cependant remarquer qu'une grandeur complexe incommensurable, dont les grandeurs qui sont sous les signes radicaux dans tous les termes, n'ont aucun diviseur commun, étant élevée à une puissance quelconque, cette puissance aura plus de termes que n'en aura une semblable puissance d'une autre grandeur complexe incommensurable d'un même nombre de termes que la premiere, mais dont les grandeurs qui sont sous les signes radicaux, ont des diviseurs communs. Par exemple le quarré de $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$ a sept termes, mais le quarré de $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{fh} + \sqrt{gh}$, n'a que quatre termes; & le quarré de $-f + \sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{fg}$, n'a que trois termes. Ces remarques aideront à déterminer le nombre des termes que l'on doit supposer dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche; & les remarques qu'on pourra faire sur les signes radicaux des grandeurs complexes incommensurables qu'on aura élevées aux puissances 2^e, 3^e, 4^e, &c. serviront à faire connoître les signes radicaux qu'on doit supposer dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche.

II.

La seconde difficulté qu'on trouve en cherchant les racines des incommensurables complexes suivant la methode, est sur la comparaison des termes de la proposée avec les termes correspondans de son expression indéterminée; car dans la plûpart des cas, surtout lorsqu'ils sont fort composés, on a de la peine à bien distinguer les termes correspondans. Voici ce qu'on doit faire pour ôter cette difficulté: Il faut prendre par ordre des incommensurables complexes en nombres, 1°, avec le signe radical $\sqrt[2]{\ }$; 2°, avec le signe $\sqrt[3]{\ }$; & ainsi de suite, & mettre de l'ordre dans les termes, mettant, par exemple, le plus petit au premier terme, celui qui surpasse immédiatement le plus petit, au second terme; & ainsi de suite. Il faut prendre à même temps une incommensurable complexe en lettres avec les mêmes signes radicaux, & qui ait le même nombre de termes; par exemple si l'on prend $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$, on prendra à même temps $\sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$. Il faut élever l'une & l'autre successivement aux puissances 2^e, 3^e, 4^e, &c. & supposant que les lettres du quadrinome litteral répondent, selon l'ordre où elles sont, aux nombres du quadrinome numérique, & qu'elles les representent, on remarquera avec attention dans chaque puissance, quelles sont les grandeurs numeriques correspondantes aux grandeurs litterales; ce qui sera facile à distinguer: on remaquera aussi dans les puissances de la grandeur complexe numerique, l'ordre suivant lequel il faut arranger les termes, afin qu'ils soient correspondans à l'ordre naturel des termes de la semblable puissance de la grandeur complexe litterale. Si l'on prend la peine de se rendre ces operations familieres, en faisant plusieurs exemples de la maniere qu'on vient de l'indiquer, on distinguera aisément en pratiquant la methode, quels sont les termes correspondans de l'expression indéterminée, & de la grandeur proposée.

III.

Il arrive souvent qu'on trouve beaucoup plus d'équations particulieres, qu'on n'a supposé de grandeurs indéterminées dans l'expression indéterminée de la racine qu'on cherche; dans ces cas le plus court est, quand on a trouvé les valeurs des indéterminées par autant d'équations qu'on a supposé d'indéterminées, de substituer ces valeurs dans l'expression de la racine, & de l'élever ensuite à la puissance de la proposée, c'est à dire au quarré, si on cherche une racine quarrée; à la troisiéme puissance, si on cherche une racine cubique, &c. car si on trouve que cette puissance de la racine qu'on cherche, soit la même grandeur que la proposée, on a trouvé la racine qu'on cherchoit; si cela n'arrive pas, il faut chercher d'autres valeurs des indéterminées, & continuer jusqu'à ce que cela arrive.

IV.

Quand l'indéterminée qui sert d'inconnue à l'équation dont il est parlé dans le troisiéme article de la methode, qui ne contient que cette seule indéterminée, quand, dis-je, cette indéterminée n'a pas de valeur commensurable dans cette équation, il faut cesser la recherche de la racine qu'on cherchoit ; & il suffit de mettre au-devant de la proposée le signe radical avec l'exposant de la racine qu'on cherchoit ; par exemple, si l'on cherchoit la racine cubique de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, il suffiroit d'écrire $\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

EXEMPLE VI.

Où l'on fait l'application des remarques précedentes.

SOIT proposé de trouver la racine quarrée de la grandeur complexe incommensurable $15 + \sqrt{8} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{140} + \sqrt{56} + \sqrt{20}$, qui a sept termes.

1°. Il me faut chercher une grandeur complexe incommensurable, qui represente d'une maniere indéterminée la racine que je cherche, & dont le quarré contienne sept termes : Pour trouver combien cette racine elle-même doit contenir de termes, j'éleve au quarré le trinome $f + \sqrt{g} + \sqrt{h}$, & trouvant que le quarré ne contient que quatre termes, je prens le quadrinome $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$, je l'éleve au quarré, & trouvant que son quarré $ff + g + h + i + 2f\sqrt{g} + 2f\sqrt{h} + 2f\sqrt{i} + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gi} + 2\sqrt{hi}$, contient sept termes, cela me fait juger que je dois supposer pour l'expression indéterminée qui represente la racine que je cherche, un quadrinome indéterminé, comme $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$; l'élever au quarré, & j'aurai $ff + g + h + i + 2f\sqrt{g} + 2f\sqrt{h} + 2f\sqrt{i} + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gi} + 2\sqrt{hi}$, qui represente d'une maniere indéterminée la grandeur complexe proposée $15 + \sqrt{8} +$, &c.

2°. Pour distinguer les termes correspondans de ces deux grandeurs complexes, l'une litterale & l'autre numerique, que je suppose égales, je prens un quadrinome numerique $\sqrt{1}$ ou bien $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$, que je range de maniere que la plus petite grandeur soit la premiere, & ensuite celle qui est immédiatement plus grande ; & ainsi de suite : je la suppose representée par le quadrinome litteral $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$, de maniere que f represente 1, $\sqrt{g}$ represente $\sqrt{2}$, & ainsi de suite : j'éleve l'une & l'autre au quarré, & ordonnant les termes dans le quarré numerique dans le même ordre que dans le quarré litteral, je trouve $11 + \sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{20} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$, qui est representé par $ff + g + h + i + 2f\sqrt{g} + 2f\sqrt{h} + 2f\sqrt{i} + 2\sqrt{gh} + 2\sqrt{gi} + 2\sqrt{hi}$; & en remarquant avec attention les termes correspondans, je vois que la somme de tous les quarrés des termes $ff + g + h + i$, represente la somme des quarrés des termes qui doit être 11 ; que $2f\sqrt{g}$ represente $\sqrt{8}$; $2f\sqrt{h}$ represente $\sqrt{12}$; & ainsi de suite. Cela me fait voir qu'il faut ordonner les termes de la grandeur proposée de maniere qu'ils aillent de suite en augmentant, & elle sera $15 + \sqrt{8} + \sqrt{20} + \sqrt{28} + \sqrt{40} + \sqrt{56} + \sqrt{140}$; & alors les termes correspondans seront de suite, & j'aurai les équations suivantes $ff + g + h + i = 15$, $2f\sqrt{g} = \sqrt{8}$, $2f\sqrt{h} = \sqrt{20}$, $2f\sqrt{i} = \sqrt{28}$, $2\sqrt{gh} = \sqrt{40}$, $2\sqrt{gi} = \sqrt{56}$, $2\sqrt{hi} = \sqrt{140}$.

3°. Les termes correspondans étant ainsi distingués, il ne faut plus que dégager les indéterminées regardées comme inconnues, ce qui est facile en ôtant d'abord les incommensurables, & operant ensuite à l'ordinaire ; & l'on trouvera par l'équation $4ffg = 8$, que $ff = \frac{2}{g}$; par l'équation $4ffh = 20$, que $ff = \frac{5}{h}$; par consequent $\frac{2}{g} = \frac{5}{h}$, & $g = \frac{2}{5}h$; on trouvera par l'équation $4ffi = 28$, que $ff = \frac{7}{i}$, par consequent $\frac{2}{g} = \frac{7}{i}$, & $g = \frac{2}{7}i$; on trouvera par l'équation $4gh = 40$, que $g = \frac{10}{h}$; comparant cette valeur de g avec $g = \frac{2}{5}h$, on aura $\frac{10}{h} = \frac{2}{5}h$; d'où l'on déduira $hh = 25$, & $h = 5$; on substituera cette valeur de h dans $g = \frac{2}{5}h$, & l'on trouvera $g = 2$; on substituera cette valeur de g dans $ff = \frac{2}{g}$, & l'on aura $ff = 1$, & $f = 1$; enfin on substituera la valeur de g dans $g = \frac{2}{7}i$, & l'on trouvera $i = 7$. On substituera ces valeurs de f, g, h, i, dans $f + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i}$, & l'on aura $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ pour la racine de la proposée $15 + \sqrt{8} +$, &c. car en élevant $1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ au quarré, on trouve la proposée $15 + \sqrt{8} +$, &c.

EXEMPLE VII.

POUR trouver la racine cubique de la grandeur complexe incommensurable $10 + \sqrt[3]{324} + \sqrt[3]{486} + \sqrt[3]{540} + \sqrt[3]{6480} + \sqrt[3]{1215} + \sqrt[3]{1350} + \sqrt[3]{2025}$, qui a huit termes : 1° il me faut chercher une grandeur complexe incommensurable qui represente d'une maniere indéterminée la racine de la proposée; pour la trouver, j'éleve un trinome $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{h}$ à la troisiéme puissance; & voyant que sa troisiéme puissance $f + g + h + 3\sqrt[3]{ffg} + 3\sqrt[3]{fgg} + 3\sqrt[3]{ffh} + 6\sqrt[3]{fgh} + 3\sqrt[3]{ggh} + 3\sqrt[3]{fhh} + 3\sqrt[3]{ghh}$, contient huit termes, je suppose que $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{h}$ represente d'une maniere indéterminée la racine que je cherche, & que la troisiéme puissance $f + g + h + 3\sqrt[3]{ffg} +$, &c. represente la proposée.

2°. Pour découvrir quels sont les termes correspondans de la proposée & de la grandeur qui la represente, & que je lui suppose égale, j'éleve plusieurs trinomes numeriques, comme $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$, $1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$, &c. à la troisiéme puissance; & faisant mes remarques sur les troisiémes puissances de tous ces trinomes, que je regarde comme representées par $f + g + h + 3\sqrt[3]{ffg} +$, &c. je vois que leur plus grand terme est representé par $6\sqrt[3]{fgh}$, & que $3\sqrt[3]{ggh}$ represente dans quelques-unes le plus grand terme aprés le précedent, & que dans quelques autres il est representé par $3\sqrt[3]{ghh}$, & en d'autres par $3\sqrt[3]{fhh}$.

3°. Je compare $6\sqrt[3]{fgh}$ avec le plus grand terme de la proposée, & j'ai la premiere équation $6\sqrt[3]{fgh} = \sqrt[3]{6480}$; je compare $\sqrt[3]{2025}$ avec $3\sqrt[3]{ghh}$, & j'ai la seconde équation $3\sqrt[3]{ghh} = \sqrt[3]{2025}$; je compare $\sqrt[3]{1350}$ avec $3\sqrt[3]{fhh}$, & j'ai la troisiéme équation $3\sqrt[3]{fhh} = \sqrt[3]{1350}$; je dégage les inconnues à l'ordinaire, & je trouve $f = 2$, $g = 3$, $h = 5$.

4°. Je substitue ces valeurs de f, g, h, dans la racine que j'ai supposée, & je trouve $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} + \sqrt[3]{h} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$. J'éleve cette racine à la troisiéme puissance, & je trouve que sa troisiéme puissance est la proposée $10 + \sqrt[3]{324} +$, &c. d'où je conclus que $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ est la racine de la proposée.

AVERTISSEMENT.

Si la troisiéme puissance de la racine que j'ai trouvée n'avoit pas été la grandeur proposée, j'aurois changé la seconde & la troisiéme équation en comparant $3\sqrt[3]{ghh}$ & $3\sqrt[3]{fhh}$ successivement avec les plus grands termes, jusqu'à ce que j'eusse trouvé les valeurs des indéterminées de la racine supposée, dont la troisiéme puissance eût été la grandeur proposée; ce qu'il faut entendre dans l'exemple sixiéme, & dans tous les autres qui peuvent se presenter.

ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui se réduisent à des équations composées.

LIVRE VI.

De l'approximation des racines des équations numeriques.

AVERTISSEMENT.

On a expliqué dans le quatriéme Livre la maniere de trouver les racines des équations, lorsqu'elles sont commensurables; dans ce cas, il est inutile de les chercher par approximation: On a aussi donné au même endroit la methode de réduire une équation composée aux équations plus simples dont elle est composée, quand les produits des équations lineaires, qui contiennent les racines prises deux à deux, ou trois à trois, &c. sont des grandeurs commensurables: Enfin on a donné dans le cinquiéme Livre le moyen de trouver en plusieurs cas les expressions incommensurables, mais exactes, des racines incommensurables des équations du second degré, du troisiéme, du quatriéme, &c.

On va donner dans ce sixiéme Livre la methode de trouver les valeurs approchées des racines incommensurables de toutes les équations composées numeriques, & le moyen d'approcher ces valeurs aussi prés qu'on voudra des racines exactes, qu'on ne peut pas avoir dans la derniere justesse.

On expliquera dans le septiéme Livre les methodes d'approximation des racines des équations literales ou algebriques.

SECTION I.

Où l'on explique les principes d'où dépend la methode de trouver pour chaque racine d'une équation numerique composée, deux grandeurs, dont l'une soit moindre, & l'autre plus grande que cette racine.

DE'FINITION I.

LES grandeurs entre lesquelles se trouvent les racines d'une équation, seront nommées les *limites* de ces racines. Si l'on suppose, par exemple, toutes les racines d'une équation réelles & inégales, & que l'on nomme par ordre la premiere celle qui est la plus petite; la seconde, celle qui est immediatement plus grande que la premiere, & ainsi de suite; d'autres grandeurs dont la premiere est moindre que la plus petite racine, la seconde la surpasse, mais elle est moindre que la seconde racine; & ainsi de suite: ces autres grandeurs sont les *limites* des racines.

DE'FINITION II.

QUAND les racines d'une équation sont les limites des racines d'une équation proposée, on la nommera l'*équation des limites*.

COROLLAIRE.

LORSQUE les racines d'une équation sont les limites des racines d'une autre équation, il est évident que les racines de cette seconde sont aussi les limites des racines de la premiere équation.

THEORÊME I.

Premiere Partie.

118. *SI l'on substitue une grandeur connue quelconque positive, à la place de l'inconnue dans une équation composée, la somme connue de toutes les grandeurs de l'équation, après la substitution, est precisément le reste tout connu qu'on trouveroit en divisant l'équation par l'inconnue lineaire moins cette grandeur connue.*

PAR exemple, si on substitue la grandeur connue positive $+a$ dans $x^3 - nxx + px + q = 0$, la somme toute connue

$a^3 - naa + pa + q$ qui viene de la substitution, est precisément le reste qu'on trouve en divisant $x^3 - nxx + px + q = 0$, par $x - a = 0$; car en faisant la division, comme on le voit ici, on trouvera que le reste de la division est $a^3 - naa + pa + q$.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & - nxx & + px & + q & x - a \\ \hline & + axx & - nax & + pa & xx - nx + p \\ & & + aax & - naa & \quad + ax - na \\ & & & + a^3 & \quad\quad + aa \end{array}$$

Il n'y a qu'à faire plusieurs operations semblables, & se les rendre familieres, pour en voir la raison, qui paroît par l'operation même.

Seconde Partie du premier Theorême.

SI l'on substitue une grandeur négative $-a$ *à la place de l'inconnue dans une équation, la somme toute connue qui naîtra de la substitution, sera precisément le reste tout connu qu'on trouvera en divisant la même équation par* $x + a = 0$.

IL n'y a qu'à faire l'operation pour en découvrir la raison.

COROLLAIRE.

IL suit de ce Theorême que c'est la même chose de substituer une grandeur $+$ ou $-a$ au lieu de l'inconnue dans une équation, ou de diviser cette équation par l'inconnue moins ou plus la grandeur a, & que l'un revient à l'autre, puisqu'on trouve la même chose; ce qui se doit entendre dans la suite.

THEORÊME II.

Premiere Partie.

119. *LA somme toute connue qui vient de la substitution d'une grandeur connue positive quelconque* $+a$, *à la place de l'inconnue d'une équation, par exemple* $x^3 - nxx + px + q = 0$, *est precisément le dernier terme de la transformée qu'on trouveroit en supposant* $x = z + a$, *& mettant* $z + a$ *au lieu de* x *dans l'équation.*

CAR cette transformée seroit

$$\begin{array}{rcrrrr} x^3 & = & z^3 & + 3azz & + 3aaz & + a^3 \\ - nxx & = & 0 & - nzz & - 2naz & - naa \\ + px & = & & & + pz & + pa \\ + q & = & & & & + q, \end{array}$$

dans laquelle on voit que le dernier terme $a^3 - naa + pa + q$, est precisément la somme qui vient de la substitution de $+a$ au lieu de x, dans la proposée.

Il n'y a qu'à ſe rendre cette operation familiere par pluſieurs exemples, pour en voir la raiſon, qui paroît par l'operation même.

Seconde Partie du ſecond Theorême.

La ſomme toute connue qui viendroit de la ſubſtitution de la grandeur négative $-a$, *au lieu de* x *dans une équation, ſeroit preciſément le dernier terme de la transformée, qu'on trouveroit en ſuppoſant* $x = z - a$, *& en ſubſtituant dans la propoſée* $z - a$ *au lieu de* x.

Il n'y a qu'à faire l'operation pour en voir la raiſon.

THEORÊME III.

120. *Les racines de la transformée d'une équation quelconque, qui vient de la ſubſtitution de* $z + a = x$, *à la place de l'inconnue* x, *ſont les racines mêmes de la propoſée ; mais les racines poſitives*
*38. *de la propoſée ſont diminuées de la grandeur* a* *dans la transformée, & les racines négatives de la propoſée ſont augmentées de*
*38. *la même grandeur* a* *dans la transformée.*

Ainsi ſuppoſé que toutes les racines de la propoſée ſoient poſitives, les racines de la transformée ſont toutes les differences de la grandeur a d'avec chacune des racines de la propoſée.

38. Ce Theorême a été démontré dans le troiſiéme Livre.

COROLLAIRE I.

121. Le dernier terme de la transformée, dont on vient de parler, étant le produit de toutes les racines de la transformée ; & ces racines étant les differences de la grandeur a d'avec chacune des racines de la propoſée, qu'on ſuppoſe toutes poſitives, il eſt évident que le dernier terme de cette transformée eſt le produit de toutes les differences de la grandeur a d'avec les racines de la propoſée.

COROLLAIRE II.

122. Mais en ſubſtituant $+a$ dans la propoſée à la place de x, la ſomme toute connue qui en vient eſt le dernier terme de la transformée dont on vient de parler ; c'eſt pourquoi en ſubſtituant une grandeur quelconque $+a$ dans une équation propoſée, dont toutes les racines ſont poſitives, à la place de x, la ſomme toute connue qui vient de cette ſubſtitution, eſt le produit de toutes les differences qui ſont entre la grandeur ſubſtituée a & les racines de la propoſée.

Ce Corollaire, c'eſt à dire que la ſomme toute connue qui vient de la ſubſtitution d'une grandeur connue a, au lieu de l'inconnue de l'équation, eſt preciſément le produit de toutes les differences qui ſont entre a & les racines de la propoſée, qu'on ſuppoſe toutes poſitives, ſe peut démontrer de cette autre maniere.

Suppoſé que les racines d'une équation ſoient b, c, d, ainſi les équations lineaires dont elle eſt compoſée, ſont $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$. Si on met une grandeur connue a au lieu de x, elles ſeront changées en $a - b = 0$, $a - c = 0$, $a - d = 0$. Le produit de ces trois quantités $a - b$, $a - c$, $a - d$, eſt évidemment le même qu'on trouveroit ſi l'on ſubſtituoit $+a$ au lieu de x dans l'équation compoſée $x^3 \begin{array}{l} -bxx \\ -cxx \\ -dxx \end{array}$ &c. qui eſt le produit des trois équations ſimples $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$. Mais il eſt évident que le produit des trois quantités $a - b$, $a - c$, $a - d$, eſt le produit des trois differences qui ſont entre la grandeur a & les trois racines b, c, d de la propoſée : donc ſi l'on ſubſtitue une grandeur a au lieu de l'inconnue d'une équation dont toutes les racines ſont poſitives, la ſomme toute connue qui en vient, eſt le produit des differences qui ſont entre a & les racines de l'équation.

REMARQUES.

I.

Si la grandeur a qu'on ſubſtitue à la place de l'inconnue dans une équation dont toutes les racines ſont poſitives, eſt zero, ou une grandeur moindre que la plus petite des racines, il eſt évident que toutes les differences $0 - b$, $0 - c$, $0 - d$, ou $a - b$, $a - c$, $a - d$, ſont toutes négatives, & ont les mêmes ſignes $-$ qu'ont toutes les racines dans les équations lineaires $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$: par conſequent le produit de toutes les differences, c'eſt à dire la ſomme toute connue qui viendra de la ſubſtitution de a au lieu de x dans l'équation, aura le même ſigne que le dernier terme de l'équation qui est le produit des racines $-b$, $-c$, $-d$.

II.

Si la grandeur a surpasse la premiere racine qui est la plus petite, & qu'elle soit surpassée par la seconde racine, il est évident que la premiere difference $a-b$ est positive, & que toutes les autres $a-c$, $a-d$, sont négatives: par consequent le produit de toutes les differences $a-b$, $a-c$, $a-d$, qui est la somme qui vient de la substitution de a au lieu de x dans l'équation, aura un signe different de celui du dernier terme de l'équation.

III.

Si la grandeur a surpasse les deux premieres racines, & qu'elle soit moindre que la troisiéme, il est évident que les deux premieres differences $a-b$, $a-c$, seront positives, & que la troisiéme $a-d$ sera négative, & les autres suivantes, si l'équation est du quatriéme ou cinquiéme degré, &c. par consequent le produit de toutes les differences, qui est la somme qui vient de la substitution de a au lieu de x dans l'équation, aura un signe different du précedent; c'est à dire, le même signe que le dernier terme de l'équation.

COROLLAIRE III. FONDAMENTAL.

123. En continuant le même raisonnement, on verra qu'en prenant successivement a pour les grandeurs entre lesquelles les racines d'une équation quelconque, dont toutes les racines sont positives, sont des grandeurs moyennes; & substituant successivement ces grandeurs a au lieu de l'inconnue dans l'équation proposée, en commençant par celle qui est moindre que la plus petite racine, les sommes toutes connues qui viendront des substitutions successives, auront alternativement le signe du dernier terme de l'équation & son signe opposé, c'est à dire $+$ & $-$ dans les équations des degrés pairs, comme du second, du quatriéme, du sixiéme, &c. & $-$ & $+$ dans les équations des degrés impairs. Si l'on substitue à la place de l'inconnue d'une équation, dont toutes les racines sont positives, une grandeur positive $+a$, qui surpasse la plus grande des racines de l'équation, la somme toute connue qui viendra de la substitution, aura toujours le signe $+$; car cette somme est le produit de toutes les differences qui sont entre la grandeur substituée & toutes les racines de l'équation; & comme cette grandeur est supposée plus grande que toutes les racines, toutes ces differences auront chacune le signe $+$; leur produit aura donc le signe $+$.

COROLLAIRE IV.

124. Il suit de là & du second Theorême, que si l'on transforme une équation proposée, en supposant son inconnue $x = z + a$, & substituant $z + a$ au lieu de x dans la proposée, quand le signe du dernier terme de la transformée sera le même que celui du dernier terme de la proposée, la grandeur a, dont les racines positives sont diminuées, sera moindre que la plus petite racine de la proposée, ou qu'elle surpassera un nombre pair des racines positives de la proposée, comme deux ou quatre, &c. Mais si le dernier terme de la transformée a un signe different de celui du dernier terme de la proposée, la grandeur a surpasse necessairement la moindre racine positive de la proposée; mais elle en peut aussi surpasser un nombre impair, comme trois, cinq, &c.

COROLLAIRE V.

125. Si l'on substitue successivement une grandeur négative $-a$ dans une équation dont toutes les racines sont négatives & differentes, à la place de l'inconnue, & qu'on commence par substituer une grandeur $-a$ moindre que la plus petite des racines négatives, & ensuite une grandeur $-a$ plus grande que la premiere racine négative, mais moindre que la seconde, & ainsi de suite, les sommes toutes connues qui viendront des substitutions successives, auront alternativement les signes $+$ & $-$.

La démonstration est si facile aprés celle qu'on a donnée pour le cas où les racines sont toutes positives, qu'il est inutile de la mettre.

THEORÊME IV.

126. *QUAND toutes les racines d'une équation sont négatives & réelles, si l'on substitue une grandeur positive quelconque $+a$ au lieu de l'inconnue, la somme toute connue qui viendra de la substitution, aura toujours le signe $+$; Et quand les racines sont toutes positives, si l'on substitue une grandeur négative quelconque $-a$*

au lieu de l'inconnue, la ſomme toute connue qui en viendra, aura toujours le même ſigne qu'avoit le dernier terme de l'équation.

Ce Theorême eſt évident aprés tout ce qui précede.

THEORÊME V.

127. *QUAND toutes les racines d'une équation ſont égales, qu'elles ſont en nombre pair, & qu'elles ſont toutes poſitives ou toutes négatives, ou bien un nombre pair de poſitives, & un nombre pair de négatives, ſi l'on ſubſtitue une grandeur a ſoit poſitive, ſoit négative, moindre ou plus grande que chaque racine égale, la ſomme qui viendra de la ſubſtitution ſera toujours poſitive.*

DEMONSTRATION.

SOIENT les équations lineaires dont l'équation eſt compoſée $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x - b = 0$, ou bien $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x + b = 0$, $x + b = 0$, ſi l'on ſubſtitue dans chacune de ces équations lineaires une grandeur $+ a$ moindre ou plus grande que la racine b, l'on aura $a - b$, $a - b$, $a - b$, $a - b$; ou bien $a - b$, $a - b$, $a + b$, $a + b$.

1°. Il eſt évident que ſi a eſt moindre que b, les quatre grandeurs $a - b$, $a - b$, $a - b$, $a - b$, ſont négatives; ainſi leur produit tout connu ſera poſitif. Si a ſurpaſſe b, les quatre grandeurs $a - b$, $a - b$, $a - b$, $a - b$, ſont toutes poſitives, ainſi leur produit ſera poſitif.

2°. Si a eſt moindre que b, les deux grandeurs $a - b$, $a - b$, ſont négatives, ainſi leur produit qui eſt poſitif, étant multiplié par les deux autres qui ſont poſitives $a + b$, $a + b$, donnera un produit poſitif. Si a ſurpaſſe b, les quatre grandeurs $a - b$, $a - b$, $a + b$, $a + b$, ſont poſitives, ainſi leur produit eſt poſitif.

Mais il eſt évident que le produit des quatre grandeurs $a - b$, $a - b$, $a - b$, $a - b$, & celui des quatre $a - b$, $a - b$, $a + b$, $a + b$, ſont preciſément les ſommes toutes connues qui viendroient en ſubſtituant la grandeur a au lieu de x dans l'équation compoſée des équations lineaires $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x - b = 0$, ou des équations lineaires $x - b = 0$, $x - b = 0$, $x + b = 0$, $x + b = 0$; donc, &c.

La démonſtration ſe fera de la même maniere, ſi l'on ſubſtitue

ſubſtitue la grandeur négative $- a$ moindre ou plus grande que la racine égale b.

COROLLAIRE.

IL eſt évident que ce Theorême eſt également veritable par raport à une équation compoſée d'un nombre pair de racines égales qui ont un même ſigne $+$ ou $-$, & d'un autre nombre pair d'autres racines égales differentes des premieres, qui ont auſſi toutes le même ſigne $+$, ou le même ſigne $-$.

Remarques pour le Theorême ſuivant.

128. 1°. IL faut remarquer ſur les racines imaginaires, dont on parlera dans ce Theorême, qu'elles ſont toujours en nombre pair dans une équation compoſée.* *19. 14° Cor.

2°. Qu'elles peuvent être de deux ſortes, ou purement imaginaires comme dans ces équations lineaires $x + \sqrt{-ab} = 0$, $x - \sqrt{-ab} = 0$; ou contenir une partie réelle, & l'autre imaginaire, comme dans celles-ci $x - b + \sqrt{-bc} = 0$, $x - b - \sqrt{-bc} = 0$.

3°. Qu'étant toujours deux à deux dans une équation compoſée, ſi l'une eſt purement imaginaire, l'autre l'eſt auſſi: ſi l'une contient une partie réelle & l'autre imaginaire, il faut que l'autre contienne la même partie réelle ſous le même ſigne, & la partie imaginaire ſous un ſigne opposé; la raiſon en eſt qu'autrement la racine imaginaire paroîtroit avec ſon ſigne dans l'équation compoſée, où l'on ſuppoſe qu'il n'y en paroît aucune.

4°. Dans les équations où la racine eſt purement imaginaire, comme dans $x + \sqrt{-ab} = 0$, $x - \sqrt{-ab} = 0$, on pourra dire que la racine imaginaire de la premiere eſt négative, & celle de la ſeconde poſitive; mais dans les équations $x - b + \sqrt{-bc} = 0$, $x - b - \sqrt{-bc} = 0$, on dira que les deux racines ſont poſitives; & dans les deux équations $x + b + \sqrt{-bc} = 0$, $x + b - \sqrt{-bc} = 0$, qu'elles ſont négatives, ces dénominations étant arbitraires.

5°. Une équation dont les deux racines ſont imaginaires, & qui a tous ſes termes, comme $xx - 2bx + \begin{smallmatrix} bb \\ + bc \end{smallmatrix} = 0$, ou $xx + 2bx + \begin{smallmatrix} bb \\ + bc \end{smallmatrix} = 0$, contient une équation de deux racines égales, toutes deux positives, ou toutes deux négatives; & de plus, elle a dans son dernier terme tout connu une grandeur positive, outre le quarré de la racine égale; ainsi son dernier terme $+ bb + bc$, qui est toujours positif, surpasse le dernier terme de l'équation des deux racines égales $xx \pm 2bx + bb$ d'une grandeur positive $+ bc$.

THEORÊME VI.

129. *Si l'on substitue une grandeur* a *soit positive, soit négative, qui soit moindre que la partie réelle des racines imaginaires, quand elles en ont une, ou qui soit plus grande, ou qui lui soit égale, dans une équation qui a ses deux racines imaginaires, à la place de l'inconnue* x, *la somme toute connue qui en viendra, aura toujours le signe* $+$.

DEMONSTRATION.

1°. Le Theorême est évident par lui-même, quand les deux racines de l'équation sont purement imaginaires, comme dans $xx + bc = 0$; 2°. quand les deux racines imaginaires ont une partie réelle, qui est toujours la même, & avec le même signe, en ôtant du dernier terme la grandeur positive qui s'y trouve, & laissant le quarré positif de la partie réelle, l'équation aura deux racines égales & réelles, toutes deux avec le même signe: donc par ce qui a été démontré pour les équations des racines égales en nombre pair & avec le même signe, en substituant $+$ ou $-$ a dans cette équation, la somme toute connue qui en viendra aura le signe $+$; & si l'on substitue la partie réelle, qui est la racine de l'équation qui a ses deux racines égales, la somme toute connue qui en viendra sera zero: donc en y ajoutant la grandeur positive du dernier terme, qui est cause que l'équation a deux racines imaginaires, cette somme aura toujours le signe $+$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si une équation est composée de quatre, de six, de huit racines imaginaires, en y substituant à la place de l'inconnue une grandeur quelconque a positive ou négative, la somme qui en viendra aura toujours le signe $+$.

Ce Corollaire est une suite évidente du sixiéme Theorême.

COROLLAIRE II.

Il n'y a aucune grandeur réelle qui étant substituée à la place de l'inconnue d'une équation dont toutes les racines sont imaginaires, donne zero pour la somme toute connue.

THEORÊME VII.

O. *Si une équation composée a plusieurs racines positives & inégales, & qu'elle en ait encore de négatives, qu'elle en ait même encore d'égales en nombre pair, & qui soient toutes positives ou toutes négatives, ou qui soient positives en nombre pair, & négatives en nombre pair; qu'enfin elle en ait encore (si l'on veut) d'imaginaires, qui sont toujours en nombre pair; qu'on substitue successivement dans l'équation composée, à la place de l'inconnue, une grandeur positive* a, *1°. moindre que la plus petite des positives inégales; 2°. plus grande que cette premiere, & moindre que la seconde racine positive, & ainsi de suite, par raport aux seules positives inégales, les sommes toutes connues qui viendront des substitutions successives auront alternativement les signes* $+$ *&* $-$, *si les racines positives inégales sont en nombre pair; & alternativement* $-$ *&* $+$, *si les racines positives sont en nombre impair.*

DEMONSTRATION.

Qu'on conçoive separément l'équation composante des racines positives inégales, qu'on nommera A, pour rendre la démonstration plus claire; & separément l'équation composante des racines négatives, qu'on nommera B; & separément celle des racines égales, qu'on nommera C; & enfin celle des racines imaginaires, qu'on nommera D. Il est évident par le troisiéme Corollaire fondamental du 3[e] Theorême,* que les substitutions successives des grandeurs a, * 123.
telles qu'on les a supposées, dans l'équation A à la place de l'inconnue x, donneront successivement des sommes qui auront alternativement $+$ & $-$, ou $-$ & $+$: Il est aussi évident par les 4[e],* 5[e],* & 6[e]* Theorêmes, que les mêmes * 126.
grandeurs successives a étant substituées successivement dans * 127.
les équations B, C, D, les sommes qui en naîtront auront * 129.
toujours le signe $+$. Ainsi le produit qui naîtra de la multiplication d'une somme connue qui vient de la substitution de a dans l'équation A, par le produit des trois sommes

connues qui viendront de la substitution de la même grandeur a dans les trois équations B, C, D, aura toujours le même signe que celui de la somme connue qui vient de la substitution de a dans l'équation A; car les autres sommes de B, C, D, ayant toujours $+$, leur produit par la somme connue de A aura le signe de cette somme.

Mais il est évident que le produit qui vient de la multiplication des sommes connues que donnent les équations B, C, D, par la somme connue que donne l'équation A, est la somme toute connue qu'on trouve en substituant la même grandeur a au lieu de x dans l'équation composée des quatre équations A, B, C, D. Par consequent les sommes toutes connues qui naîtront des substitutions successives des grandeurs a, telles qu'on les a supposées, dans l'équation composée des quatre A, B, C, D, au lieu de l'inconnue x, auront alternativement $+$ & $-$, ou $-$ & $+$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si en substituant deux grandeurs positives connues $+a$ & $+b$, l'une aprés l'autre dans une équation quelconque, à la place de l'inconnue x, les deux sommes connues qui en naissent ont les signes opposés $+$ & $-$, ou $-$ & $+$, il est certain qu'il y a au moins une racine positive de cette équation entre les deux grandeurs a & b; c'est à dire, plus grande que la moindre des deux, & plus petite que la plus grande des deux grandeurs a & b.

Il faudroit conclure la même chose si on divisoit la même équation par $x-a=0$, & ensuite par $x-b=0$, & que les deux divisions donnassent deux restes qui eussent des
* 118. signes opposés.*

COROLLAIRE II.

Si l'on substituoit $-a$, $-b$, l'une aprés l'autre, à la place de x, ou si l'on divisoit l'équation par $x+a=0$, & par $x+b=0$, & si les deux sommes qui naîtroient des substitutions, ou les deux restes des divisions, avoient
* 115. des signes opposés, il est certain * qu'il y auroit au moins
& 116. une racine négative entre les deux grandeurs a & b, plus grande que la moindre des deux, & plus petite que la plus grande des deux grandeurs a & b.

COROLLAIRE III.

Si l'on transforme une équation en deux autres, 1°. en supposant l'inconnue de l'équation $x=z+a$, & substituant $z+a$ au lieu de x dans l'équation; 2°. en supposant l'inconnue $x=y+b$, & substituant $y+b$ au lieu de x dans l'équation, & que les deux derniers termes des transformées ayent deux signes opposés, il est certain qu'il y a au moins une des racines positives de l'équation proposée entre a & b, plus grande que la moindre des deux, & plus petite que la plus grande des deux grandeurs a & b.

Mais si l'on suppose, 1°, $x=z-a$, & ensuite $x=y-b$, & si aprés avoir fait les substitutions de $z-a$ au lieu de x, & de $y-b$ au lieu de x dans l'équation, il vient deux transformées dont les signes soient differens, il est certain qu'il y a au moins une racine négative de l'équation entre les grandeurs a & b.

Ces trois Corollaires sont des suites évidentes des Theo-
rêmes précedents.* * 118, 119, 125, 126, & 130.

COROLLAIRE IV.

Quand on peut trouver deux limites pour chacune des racines d'une équation, c'est à dire deux grandeurs pour chaque racine, dont l'une est moindre & l'autre plus grande que cette racine, il est certain que toutes les racines de l'équation sont réelles & inégales; car il n'y a pas de limi-
tes pour les imaginaires, puisqu'on a démontré * que quelque * 129.
grandeur qu'on substitue dans une équation dont les racines sont imaginaires, la somme toute connue qui en vient a toujours $+$; & il est évident qu'il n'y a pas d'autres limites entre les racines égales que zero.

COROLLAIRE V.

Si l'on peut trouver deux limites pour chaque racine d'une équation, ou si l'on trouve les limites des unes, & zero pour les limites des autres; ou si l'on trouve zero pour les limites de chacune, toutes les racines de l'équation sont réelles; car on ne sçauroit trouver pour les imaginaires des limites dont l'une soit moindre & l'autre plus grande que chaque racine imaginaire; on ne sçauroit aussi trouver zero pour les limites des racines imaginaires: Ainsi quand on trouve les limites de toutes les racines, ou du moins zero pour leurs limites, elles sont toutes réelles.

Premiere supposition.

Les équations lineaires de toute équation composée, dont toutes les racines sont réelles inégales & positives, soient representées par $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$, &c. que ces racines aillent en augmentant dans l'ordre qu'on les voit; c'est à dire, que a soit la plus petite, & b plus grande que a, c plus grande que b; & ainsi de suite: que la difference de a & de b soit f, celle de a & de c soit g, celle de a & de d soit h, & ainsi de suite; l'on a $a + f = b$, $a + g = c$, $a + h = d$. Que les differences de la seconde racine b d'avec les autres, soient exprimées par les mêmes lettres de suite f, g, h, &c. ainsi la difference de b & de a soit f, celle de b & de c soit g, celle de b & de d soit h, &c. (On se sert des mêmes lettres pour marquer les differences, quoiqu'inégales, afin de rendre la chose plus simple;) ainsi $a = b - f$, $c = b + g$, $d = b + h$. Que les differences de la troisiéme racine d'avec les autres soient aussi marquées par les mêmes lettres f, g, h, &c. ainsi $a = c - f$, $b = c - g$, $d = c + h$. Enfin que les differences de quelle racine on voudra de l'équation d'avec les autres, soient marquées de suite par les lettres f, g, h, &c.

1°. Il est évident que les équations lineaires dont l'équation est composée, peuvent être representées par des équations lineaires, qui auront toutes, celle des racines de la proposée qu'on voudra, jointe avec les differences qui sont entre cette racine & les autres.

Premieres.	Secondes.	Troisiémes.	Quatriémes.	Cinquiémes.
$x - a = 0$	$= x - a = 0$	$= x - b + f = 0$	$= x - c + f = 0$	$= x - d + f = 0$
$x - b = 0$	$= x - a - f = 0$	$= x - b = 0$	$= x - c + g = 0$	$= x - d + g = 0$
$x - c = 0$	$= x - a - g = 0$	$= x - b - g = 0$	$= x - c = 0$	$= x - d + h = 0$
$x - d = 0$	$= x - a - h = 0$	$= x - b - h = 0$	$= x - c - h = 0$	$= x - d = 0$

2°. Il est évident que le produit des premieres équations, celui des secondes, celui des troisiémes, celui des quatriémes, celui des cinquiémes, sont tous égaux, & que les équations composées qui viennent de ces produits, sont precisément la même équation sous differentes expressions, comme on le voit ici. Il faut les former soi-même pour se rendre cette formation familiere.

Premiere équation.

$$\begin{array}{lllll}
x^4 - ax^3 & + abxx & - abcx & + abcd & = 0 \\
 - bx^3 & + acxx & - abdx & & \\
 - cx^3 & + adxx & - acdx & & \\
 - dx^3 & + bcxx & - bcdx & & \\
 & + bdxx & & & \\
 & + cdxx & & &
\end{array}$$

Seconde équation.

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4a^3x + a^4 & = \overline{x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4a^3x + a^4} \times 1 \\
- fx^3 + 3faxx - 3faax + fa^3 & = \overline{+ x^3 - 3axx + 3aax - a^3} \times - f \\
- gx^3 + 3gaxx - 3gaax + ga^3 & = \overline{+ x^3 - 3axx + 3aax - a^3} \times - g \\
- hx^3 + 3haxx - 3haax + ha^3 & = \overline{+ x^3 - 3axx + 3aax - a^3} \times - h \\
+ fgxx - 2fgax + fgaa & = \overline{+ xx - 2ax + aa} \times + fg \\
+ fhxx - 2fhax + fhaa & = \overline{+ xx - 2ax + aa} \times + fh \\
+ ghxx - 2ghax + ghaa & = \overline{+ xx - 2ax + aa} \times + gh \\
- fghx + fgha & = \overline{+ x - a} \times - fgh
\end{array}$$

Troisiéme équation.

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 4bx^3 + 6bbxx - 4b^3x + b^4 & = \overline{x^4 - 4bx^3 + 6bbxx - 4b^3x + b^4} \times 1 \\
+ fx^3 - 3fbxx + 3fbbx - fb^3 & = \overline{+ x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3} \times + f \\
- gx^3 + 3gbxx - 3gbbx + gb^3 & = \overline{+ x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3} \times - g \\
- hx^3 + 3hbxx - 3hbbx + hb^3 & = \overline{+ x^3 - 3bxx + 3bbx - b^3} \times - h \\
- fgxx + 2fgbx - fgbb & = \overline{+ xx - 2bx + bb} \times - fg \\
- fhxx + 2fhbx - fhbb & = \overline{+ xx - 2bx + bb} \times - fh \\
+ ghxx - 2ghbx + ghbb & = \overline{+ xx - 2bx + bb} \times + gh \\
+ fghx - fghb & = \overline{+ x - b} \times + fgh
\end{array}$$

Quatriéme équation.

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 4cx^3 + 6ccxx - 4c^3x + c^4 & = \overline{x^4 - 4cx^3 + 6ccxx - 4c^3x + c^4} \times 1 \\
+ fx^3 - 3fcxx + 3fccx - fc^3 & = \overline{+ x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3} \times + f \\
+ gx^3 - 3gcxx + 3gccx - gc^3 & = \overline{+ x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3} \times + g \\
- hx^3 + 3hcxx - 3hccx + hc^3 & = \overline{+ x^3 - 3cxx + 3ccx - c^3} \times - h \\
+ fgxx - 2fgcx + fgcc & = \overline{+ xx - 2cx + cc} \times + fg \\
- fhxx + 2fhcx - fhcc & = \overline{+ xx - 2cx + cc} \times - fh \\
- ghxx + 2ghcx - ghcc & = \overline{+ xx - 2cx + cc} \times - gh \\
- fghx + fghc & = \overline{+ x - c} \times - fgh
\end{array}$$

Cinquiéme équation.

$$\begin{array}{rl}
x^4 - 4dx^3 + 6ddxx - 4d^3x + d^4 & = \overline{x^4 - 4dx^3 + 6ddxx - 4d^3x + d^4} \times 1 \\
+ fx^3 - 3fdxx + 3fddx - fd^3 & = \overline{+ x^3 - 3dxx + 3ddx - d^3} \times + f \\
+ gx^3 - 3gdxx + 3gddx - gd^3 & = \overline{+ x^3 - 3dxx + 3ddx - d^3} \times + g \\
+ hx^3 - 3hdxx + 3hddx - hd^3 & = \overline{+ x^3 - 3dxx + 3ddx - d^3} \times + h \\
+ fgxx - 2fgdx + fgdd & = \overline{+ xx - 2dx + dd} \times + fg \\
+ fhxx - 2fhdx + fhdd & = \overline{+ xx - 2dx + dd} \times + fh \\
+ ghxx - 2ghdx + ghdd & = \overline{+ xx - 2dx + dd} \times + gh \\
+ fghx - fghd & = \overline{+ x - d} \times + fgh
\end{array}$$

THEORÊME VIII.

131. *TOUTE équation composée, dont les racines sont réelles inégales & positives, peut être conçue comme contenant toutes les équations faites de seules racines égales à celle de ses racines qu'on voudra, qui suivent.*

1°. Une équation du degré de la proposée, par exemple du 4e degré, dont toutes les racines sont égales à celle qu'on voudra des racines de la proposée, laquelle équation de racines égales est multipliée par l'unité.

2°. Une équation des mêmes racines égales moindre d'un degré que la précedente, multipliée par chacune des differences qui est entre cette racine égale & les autres.

3°. Une équation des mêmes racines égales moindre d'un degré que la précedente, multipliée par chacun des produits des mêmes differences multipliées entr'elles deux à deux.

4°. Une équation des mêmes racines égales moindre d'un degré que la précedente, multipliée par chacun des produits des mêmes differences multipliées entr'elles trois à trois.

Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation lineaire qui a la même racine égale, & laquelle équation lineaire est multipliée par le produit des mêmes differences multipliées toutes les unes par les autres.

Ce Theorême est évident par la supposition précedente.

Remarque sur cette formation des équations.

SUPPOSANT que l'on marque chacune des racines a, b, c, d, de la proposée, par k, on aura l'équation suivante,

$$
\begin{array}{lr}
x^4 \overline{- 4kx^3 + 6kkxx - 4k^3x + k^4} & \times 1 \\
+ \overline{x^3 \quad - 3kxx + 3kkx - k^3} & \times \pm f \\
+ \overline{x^3 \quad - 3kxx + 3kkx - k^3} & \times \pm g \\
+ \overline{x^3 \quad - 3kxx + 3kkx - k^3} & \times \pm h \\
+ \overline{xx \quad - 2kx + kk} & \times \pm fg \\
+ \overline{xx \quad - 2kx + kk} & \times \pm fh \\
+ \overline{xx \quad - 2kx + kk} & \times \pm gh \\
+ \overline{x \quad - k} & \times \pm fgh \\
\hline
a + 4d, \; a + 3d, \; a + 2d, \; a + 1d, \; a + 0. &
\end{array}
$$

Le premier terme de l'équation lineaire $\pm fghx \mp fgh \times k$, qui

qui est la derniere, a le signe —, si les racines sont en nombre pair, & qu'on conçoive que k represente la plus petite racine a de la proposée ; & il a le signe +, si les racines sont en nombre impair.

Le même premier terme $fghx$ a un signe opposé au précedent, si l'on conçoit que k represente la seconde racine b. Il a un signe opposé au précedent, si k represente la troisiéme racine c. Il a un signe opposé au précedent, si k represente la quatriéme racine d ; & ainsi le terme $fghx$ a alternativement les signes + & —, ou — & +, selon qu'on conçoit l'équation proposée formée successivement par la premiere racine de la proposée, ensuite par la seconde, ensuite par la troisiéme, &c.

La raison en est évidente, si l'on fait attention qu'il est le produit de toutes les differences de la racine qu'on employe dans la formation, d'avec tous les autres, multiplié par x.

Seconde supposition.

SI on multiplie la 2e, la 3e, la 4e, la 5e équation qui précedent, representées par l'équation de la remarque précedente, si on multiplie, dis-je, separément chacune de ces équations par les termes d'une progression arithmetique quelconque, en multipliant le premier terme de l'équation par le premier terme de la progression, le second par le second, & ainsi de suite ; il est évident que les termes de chacune des équations composées de racines égales, qui sont contenues dans chacune de ces quatre équations, seront multipliés de suite par les termes d'une progression arithmetique.

THEORÊME IX.

132. *SI on multiplie separément de suite les termes de la 2e, de la 3e, de la 4e, de la 5e équation précedente par les termes d'une progression arithmetique, les équations particulieres composées de racines égales contenues dans chacune de ces équations, auront encore aprés la multiplication une de leurs racines égales, excepté la seule équation lineaire.*

C'EST à dire, aprés avoir multiplié, par exemple, la seconde equation par les termes de la progression arithmetique, le produit de l'équation de quatre racines égales, celui de l'équation de trois racines égales, celui de l'équation de deux racines égales, tous ces produits auront encore tous la racine égale commune; il n'y aura d'excepté que le seul produit de l'équation lineaire, qui n'aura plus une racine commune avec les autres.

Ce Theorême a été démontré dans la derniere Section
74. du quatriéme Livre.

COROLLAIRE I.

133. Si aprés avoir multiplié celle qu'on voudra de la 2^e, 3^e, 4^e, 5^e équation précedente, par une progression arithmetique, on substitue à la place de l'inconnue dans le produit, *la racine égale*, sçavoir *a* dans le produit de la 2^e, *b* dans celui de la 3^e, *c* dans celui de la 4^e, *d* dans celui de la 5^e, toutes les quantités du produit se détruiront par des signes opposés, excepté les seules quantités du produit de l'équation lineaire.

Car en substituant en des équations une racine de ces équations, à la place de l'inconnue, tous les produits se
31. détruisent par des signes opposés.

COROLLAIRE II.

134. Si on multiplie separément la 2^e, la 3^e, la 4^e, la 5^e équation précedente, par les termes d'une progression arithmetique qui va en diminuant, & qu'on substitue dans le produit la racine égale de cette équation, sçavoir *a* dans le premier produit, *b* dans le second, *c* dans le troisiéme, *d* dans le quatriéme, à la place de l'inconnue; il est évident que parmi les deux quantités du produit de l'équation lineaire, qui restent seules, la premiere est la plus grande.

Car elles sont toutes deux la même quantité sous differens signes, sçavoir *fgha* dans le produit de la seconde, *fgbb* dans le produit de la troisiéme, *fghc* dans celui de la quatriéme, *fghd* dans celui de la cinquiéme: mais la premiere de ces deux quantités égales est multipliée, par la supposition, par un plus grand terme de la progression arithmetique, & la seconde par un moindre; par consequent la premiere est la plus grande.

COROLLAIRE III.

135. D'où il suit que le signe de la premiere des deux quantités de l'équation lineaire est celui de la somme toute connue qui demeure aprés la substitution.

COROLLAIRE IV.

136. Si on multiplie separément la seconde équation précedente, la 3^e, la 4^e & la 5^e, par la progression arithmetique 4, 3, 2, 1, 0, de maniere que le dernier terme soit multiplié par zero; ou, ce qui est la même chose, si on multiplie separément chaque terme de ces équations par l'exposant de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero; & si aprés avoir divisé chaque produit par l'inconnue *x*, on substitue dans le produit de la seconde la premiere racine *a* au lieu de l'inconnue, la somme toute connue qui restera, sera $-fgh$; c'est à dire, le produit de toutes les differences qui sont entre la premiere racine *a* & toutes les autres racines. Si on substitue *b* dans le produit de la troisiéme, la somme toute connue sera $+fgh$; c'est à dire, le produit de toutes les differences qui sont entre la seconde racine *b* & toutes les autres racines. Si on substitue *c* dans le produit de la quatriéme, la somme sera $-fgh$; c'est à dire, le produit de toutes les differences qui sont entre la troisiéme racine *c* & toutes les autres racines. Enfin si on substitue *d* dans le produit de la cinquiéme, la somme sera $+fgh$; c'est à dire, le produit de toutes les differences qui sont entre la quatriéme racine *d* & toutes les autres racines.

Pour faire la démonstration de ce Corollaire, il n'y a qu'à en faire l'operation.

Seconde équation.

$$\begin{array}{lllllll}
x^4 - 4ax^3 & + 6aaxx & - 4a^3x & + a^4 & = & \overline{x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - 4a^3x + a^4} & \times 1 \\
\quad - fx^3 & + 3faxx & - 3faax & + fa^3 & = & + \overline{x^3 - 3axx + 3aax - a^3} & \times -f \\
\quad - gx^3 & + 3gaxx & - 3gaax & + ga^3 & = & + \overline{x^3 - 3axx + 3aax - a^3} & \times -g \\
\quad - hx^3 & + 3haxx & - 3haax & + ha^3 & = & + \overline{x^3 - 3axx + 3aax - a^3} & \times -h \\
 & + fgxx & - 2fgax & + fgaa & = & + \overline{xx - 2ax + aa} & \times +fg \\
 & + fhxx & - 2fhax & + fhaa & = & + \overline{xx - 2ax + aa} & \times +fh \\
 & + ghxx & - 2ghax & + ghaa & = & + \overline{xx - 2ax + aa} & \times +gh \\
 & & - fghx & + fgha & = & + \overline{x - a} & \times -fgh \\
\hline
4 \quad 3 & 2 & 1 & 0. & & 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0. &
\end{array}$$

Produit des termes de l'équation précedente par les termes de la progression arithmetique.

$$\begin{array}{llllll}
4x^4 - 12ax^3 & + 12aaxx & - 4a^3x & + 0 = & \overline{4x^4 - 12ax^3 + 12aaxx - 4a^3x + 0} & \times 1 \\
-3fx^3 & + 6faxx & - 3faax & + 0 = & \overline{+3x^3 - 6axx + 3aax - 0} & \times -f \\
-3gx^3 & + 6gaxx & - 3gaax & + 0 = & \overline{+3x^3 - 6axx + 3aax - 0} & \times -g \\
-3hx^3 & + 6haxx & - 3haax & + 0 = & \overline{+3x^3 - 6axx + 3aax - 0} & \times -h \\
 & + 2fgxx & - 2fgax & + 0 = & \overline{+2xx - 2ax + 0} & \times +fg \\
 & + 2fhxx & - 2fhax & + 0 = & \overline{+2xx - 2ax + 0} & \times +fh \\
 & + 2ghxx & - 2ghax & + 0 = & \overline{+2xx - 2ax + 0} & \times +gh \\
 & & - fghx & + 0 = & \overline{+x - 0} & \times -fgh
\end{array}$$

Divisant tous les termes par $+x$, & substituant $+a$ au lieu de x, l'on trouve

$$\begin{array}{llllll}
4a^3 - 12a^3 & + 12a^3 & - 4a^3 & = & \overline{4a^3 - 12a^3 + 12a^3 - 4a^3} & \times 1 \\
-3faa & + 6faa & - 3faa & = & \overline{+3aa - 6aa + 3aa} & \times -f \\
-3gaa & + 6gaa & - 3gaa & = & \overline{+3aa - 6aa + 3aa} & \times -g \\
-3haa & + 6haa & - 3haa & = & \overline{+3aa - 6aa + 3aa} & \times -h \\
 & + 2fga & - 2fga & = & \overline{+2a - 2a} & \times +fg \\
 & + 2fha & - 2fha & = & \overline{+2a - 2a} & \times +fh \\
 & + 2gha & - 2gha & = & \overline{+2a - 2a} & \times +gh \\
 & & - fgh & = & +1. & \times -fgh
\end{array}$$

Il est évident que tous les termes se détruisent par des signes opposés, & qu'il ne reste que le produit des trois differences $-fgh$.

Il est aussi évident qu'en faisant une operation semblable pour la troisiéme équation, on trouvera le seul reste $+fgh$.

Pour la quatriéme on trouvera $-fgh$.

Pour la cinquiéme on trouvera $+fgh$.

Enfin il est évident que ce Corollaire convient aux équations de tous les degrés, & l'on n'en a pris une du quatriéme que pour faire concevoir plus clairement ce Corollaire par un exemple.

Mais il est évident que s'il y a des racines égales dans la proposée, la difference qui est entre les racines égales étant zero, & le produit de zero par les autres differences étant aussi zero, il est, dis-je, évident qu'en substituant chacune des racines égales dans le produit, la somme toute connue sera zero; ainsi la racine égale étant substituée dans le produit, est elle-même une racine de l'équation que forme le produit; puisqu'étant substituée dans le produit à la place
* 31. de l'inconnue, elle le rend égal à zero.*

COROLLAIRE V. FONDAMENTAL.

137. Si on multiplie tous les termes d'une équation quelconque, de quelque degré qu'elle puisse être, dont toutes les racines sont réelles, positives & inégales, chacun par le nombre qui est l'exposant du degré qu'a l'inconnue dans ce terme, & le dernier terme par zero; & si aprés avoir divisé tous les termes par l'inconnue x, l'on substitue dans le produit à la place de l'inconnue, 1°. la premiere, c'est à dire, la plus petite racine de l'équation proposée, la somme toute connue qui en viendra étant precisément le produit de toutes les differences qui sont entre la plus petite racine & chacune des autres racines, il s'ensuit que si l'équation est d'un degré impair, par exemple du cinquiéme degré, il y aura un nombre pair de differences, par exemple quatre differences; & comme elles ont chacune le signe —, leur produit aura le signe +. Si l'équation est d'un degré pair, comme du quatriéme, il y aura un nombre impair de differences, ainsi leur produit aura —.

2°. Si on substitue la seconde racine, la somme toute connue étant le produit de toutes les differences qui sont entre la seconde racine & les autres, la difference qui est entre la seconde racine & la premiere ayant le signe +, & chacune des autres le signe —, leur produit aura le signe opposé à celui du produit précedent.

3°. Si on substitue la troisiéme racine dans le même produit, les differences de cette 3° racine d'avec la premiere & la seconde ayant chacune le signe +, & chacune des autres differences ayant le signe —, leur produit aura un signe opposé au précedent.

D'où l'on voit que la substitution des racines de l'équation successivement les unes aprés les autres dans le produit de l'équation multipliée par la progression arithmetique, donnera pour les sommes toutes connues qui en viendront, les signes alternatifs + & — dans les équations des degrés impairs, & — & + dans celles des degrés pairs.

Ce Corollaire est une suite évidente de celui qui précede.

COROLLAIRE VI.

138. Mais lorsque des grandeurs étant substituées separément de suite à la place de l'inconnue dans une équation, les som-

mes toutes connues qui viennent de ces substitutions, ont alternativement les signes + & —, ou — & +; ces grandeurs sont les limites des racines de cette équation par le troisiéme Corollaire du troisiéme Theorême : Donc les racines d'une équation, dont toutes les racines sont réelles, positives & inégales, sont les limites de l'équation nouvelle qui vient de la multiplication de chaque terme de la premiere par le nombre qui est l'exposant de l'inconnue de ce terme, & de son dernier terme par zero.

COROLLAIRE VII. QUI EST FONDAMENTAL.

139. MAIS les racines d'une premiere équation ne sçauroient être les limites des racines d'une seconde, que les racines de la seconde ne soient aussi les limites des racines de la premiere; par conséquent si on multiplie les termes d'une équation quelconque, dont toutes les racines sont réelles, positives & inégales, chacun par le nombre qui est l'exposant de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, les racines de l'équation qui vient de cette multiplication, sont les limites des racines de l'équation proposée; par exemple supposant que $x^4 - nx^3 + pxx - qx + r = 0$, represente une équation dont toutes les racines sont réelles, positives & inégales, si on multiplie chaque terme par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, l'on aura $4x^4 - 3nx^3 + 2pxx - qx = 0$; ou bien divisant par x, $4x^3 - 3nxx + 2px - q = 0$; les racines de cette derniere équation sont les limites des racines de la proposée.

$$\begin{array}{ccccccccc} x^4 & - nx^3 & + pxx & - qx & + r & = 0, \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0. & \\ \hline 4x^4 & - 3nx^3 & + 2pxx & - qx & + 0 & = 0, \\ \hline \text{ou } 4x^3 & - 3nxx & + 2px & - q & & = 0, \end{array}$$

Ce Corollaire est évident par ce qui précede.

COROLLAIRE VIII.

140. QUAND les racines de la proposée sont toutes réelles, positives & inégales, les racines de l'équation des limites qui vient de la multiplication de la proposée par les termes de la progression arithmetique, sont aussi toutes réelles, positives & inégales; puisque toutes les substitutions des racines de la proposée à la place de l'inconnue, donnent

des sommes successives qui ont alternativement les signes + & —, ou — & +.

COROLLAIRE IX.

141. PAR conséquent s'il y a des racines égales dans l'équation des limites, il y a necessairement des racines égales dans la proposée : Et comme l'on a démontré dans la derniere Section du 4[e] Livre,* que quand on multiplie les termes * 74.
d'une équation proposée qui a des racines égales, par les termes d'une progression arithmetique, l'équation qui en vient a autant de racines égales moins une que la proposée; il est certain que quand l'équation des limites a des racines égales, l'équation proposée a les mêmes racines égales, & une de plus.

COROLLAIRE X.

142. S'IL y a des racines imaginaires dans l'équation des limites, il est certain qu'il y a le même nombre de racines imaginaires (qui sont toujours deux à deux) dans la proposée.

Car si la proposée avoit toutes ses racines réelles, il est évident que l'équation des limites les auroit aussi toutes réelles, puisque si les racines de la proposée étoient toutes réelles, positives & inégales, les racines de l'équation des limites seroient aussi toutes réelles, positives & inégales par le huitiéme Corollaire; si la proposée avoit toutes ses racines égales, toutes les racines de l'équation des limites seroient aussi égales & réelles, par le neuviéme Corollaire; si les racines de la proposée étoient en partie égales, & en partie inégales, on prouveroit toujours par les Corollaires precedents, qu'étant substituées par ordre dans l'équation des limites, elles donneroient de suite des sommes toutes connues qui auroient + & —, ou — & +, ou zero, comme on le verra clairement dans les remarques suivantes; ce qui ne peut convenir qu'à une équation dont toutes les racines sont réelles; par conséquent s'il y a des racines imaginaires dans l'équation des limites, il faut qu'il y ait le même nombre de racines imaginaires dans la proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUES.

I.

143. QUAND on multiplie une équation quelconque

$$\begin{array}{llllllll} \text{comme} \ldots & x^5 & -nx^4 & +px^3 & -qxx & +rx & -s & =0, \\ \text{par} \ldots\ldots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0, & \\ \hline \text{l'on trouve} & 5x^5 & -4nx^4 & +3px^3 & -2qxx & +rx & -0 & =0, \end{array}$$

qui ſe réduit à $5x^4 - 4nx^3 + 3pxx - 2qx + r = 0$; l'on peut toujours ſuppoſer que le produit qui vient de la multiplication, eſt une équation.

Car l'inconnue x du produit pouvant être conſiderée comme une indéterminée differente de x, qui eſt l'inconnue de la propoſée, & étant poſſible que l'indéterminée x ait des valeurs propres à faire en ſorte que le produit ſoit égal à zero; en ſuppoſant que x repreſente dans le produit ces valeurs-là, il eſt évident que le produit peut être ſuppoſé égal à zero.

II.

D'où l'on voit que les valeurs de x dans le produit, c'eſt à dire, que les racines du produit ſuppoſé égal à zero, ne ſont pas les racines de l'équation propoſée, mais elles en ſont differentes, à moins qu'il n'y eût des racines égales dans la propoſée, qui demeureroient encore toutes dans le produit, excepté une ſeule.

III.

Il eſt évident que les termes de la propoſée ayant alternativement + & —, les termes du produit, qui eſt l'équation des limites, ont auſſi alternativement + & —; par conſequent toutes les racines de l'équation des limites ſont auſſi poſitives.

IV.

L'équation des limites ſe peut toujours diviſer par l'inconnue, parceque le dernier terme de la propoſée eſt multiplié par zero.

Ainſi l'équation des limites a zero pour une de ſes racines; mais elle a pour ſes racines réelles une racine de moins que la propoſée, étant moindre d'un degré, & ſon dernier terme tout connu a toujours un ſigne different de celui du dernier terme de la propoſée.

Quand

V.

Quand toutes les racines d'une équation, par exemple du cinquiéme degré, ſont réelles, poſitives & inégales, ſi l'on ſubſtitue ſa premiere racine, c'eſt à dire la plus petite, dans ſon équation des limites, à la place de l'inconnue, la ſomme toute connue qui en viendra étant le produit des differences qui ſont entre la premiere racine de la propoſée & les autres, chacune de ces differences ayant le ſigne —, & étant quatre dans notre exemple, leur produit aura le ſigne +, qui eſt celui du dernier terme de l'équation des limites.

Si on ſubſtitue la ſeconde racine de la propoſée dans l'équation des limites, comme il n'y aura plus que trois differences qui ayent chacune le ſigne —, le produit des differences qui ſont entre la ſeconde racine de la propoſée & les autres, aura le ſigne —, c'eſt à dire le ſigne oppoſé au précedent; ainſi la ſomme toute connue qui viendra de la ſubſtitution aura le ſigne —.

On verra par un ſemblable raiſonnement que la ſubſtitution de la troiſiéme racine de la propoſée dans l'équation des limites, donnera le ſigne +; la ſubſtitution de la quatriéme donnera le ſigne —.

Et enfin la ſubſtitution de la cinquiéme donnera le ſigne +.

Cela fait voir que la premiere racine de la propoſée eſt plus petite que la premiere racine de l'équation des limites.

Que la ſeconde racine de la propoſée ſurpaſſe la premiere racine de l'équation des limites, mais elle eſt moindre que la ſeconde.

Que la troiſiéme racine de la propoſée eſt entre la ſeconde & la troiſiéme racine de l'équation des limites.

Que la quatriéme racine de la propoſée eſt entre la troiſiéme & la quatriéme de l'équation des limites, qui eſt ſa plus grande & derniere racine.

Enfin que la cinquiéme racine de la propoſée ſurpaſſe la quatriéme de l'équation des limites.

VI.

D'où l'on voit que la premiere racine réelle de l'équation des limites, eſt plus grande que la premiere racine de la propoſée, & moindre que la ſeconde racine de la propoſée.

Que la seconde racine de l'équation des limites est entre la seconde & la troisiéme racine de la proposée.

Que la troisiéme racine de l'équation des limites est entre la troisiéme & la quatriéme racine de la proposée.

Enfin que la quatriéme & derniere racine de l'équation des limites, est entre la quatriéme & la cinquiéme ou derniere racine de la proposée.

VII.

Par consequent les racines de l'équation des limites étant prises de suite, sont des grandeurs moyennes entre les racines de la proposée, & sont par consequent les limites des racines de la proposée qui sont entre la premiere & la derniere.

VIII.

Mais zero étant toujours moindre que la plus petite des racines de la proposée, & le plus grand coëficient négatif de la proposée, rendu positif & augmenté d'une grandeur arbitraire comme de l'unité, étant toujours une quantité
* 47. plus grande que la plus grande des racines positives,* il est évident qu'en ajoutant zero, & ce plus grand coëficient ainsi augmenté, aux racines de l'équation des limites, l'on aura deux limites pour chacune des racines de la proposée.

IX.

Pour les racines égales.

Quand il y a des racines égales dans la proposée, il peut arriver trois cas; car ou bien, 1°, les racines égales peuvent être moindres que chacune des racines inégales; 2°, ou être plus grandes; 3°. ou bien elles peuvent être plus grandes que quelques racines inégales, & moindres que les autres; par exemple si l'on suppose deux racines égales dans une équation du sixiéme degré, elles peuvent être, 1°, moindres que les quatre inégales; 2°. ou plus grandes; 3°. ou bien il peut y avoir quelques racines inégales moindres que les égales, & les autres inégales seront plus grandes.

PREMIER CAS.

L'ÉQUATION des limites ayant une des deux racines égales de la proposée du sixiéme degré, la substitution de chacune des racines égales dans l'équation des limites à la place de l'inconnue, donnera zero.

La substitution de la premiere, c'est à dire de la plus petite des quatre racines inégales de la proposée dans l'équation des limites, donnera pour la somme toute connue le produit des differences qui sont entre cette premiere racine & toutes les autres; & comme il y a trois racines plus grandes, il y aura trois differences qui auront chacune le signe —; ainsi le produit aura le signe —.

La substitution de la seconde racine inégale de la proposée dans l'équation des limites, donnera pour la somme toute connue le produit des differences qui sont entre la seconde racine inégale de la proposée & toutes les autres; & comme il y en a deux plus grandes que la seconde, il n'y aura que deux differences qui ayent chacune le signe —, ainsi le produit aura le signe +.

Par un semblable raisonnement on verra que la substitution de la troisiéme racine inégale de la proposée dans l'équation des limites, donnera une somme qui aura le signe —, & que la substitution de la quatriéme ou derniere racine inégale de la proposée, donnera une somme qui aura le signe +.

D'où il suit, 1°, que la quatriéme racine inégale de la proposée surpasse la plus grande racine de l'équation des limites; que la troisiéme racine inégale de la proposée est moindre que la plus grande ou cinquiéme racine de l'équation des limites, mais elle en surpasse la quatriéme; que la seconde racine inégale de la proposée est moindre que la quatriéme racine de l'équation des limites, mais elle en surpasse la troisiéme; enfin que la premiere ou plus petite racine inégale de la proposée est moindre que la troisiéme racine de l'équation des limites, mais qu'elle surpasse la seconde, c'est à dire, celle qui est immédiatement plus grande que la racine égale commune aux deux équations.

2°. Par consequent la 3°, 4°, & 5° racine de l'équation des limites ont chacune deux limites, elles sont par consequent réelles; la premiere l'est aussi, étant la racine égale de la proposée: La seconde racine de l'équation des limites est donc aussi une grandeur réelle, puisque les racines imaginaires sont toujours deux à deux.

3°. Il est donc évident que la seconde racine de l'équation des limites est moindre que la premiere racine inégale de la proposée.

Que la troisiéme racine de l'équation des limites surpasse la premiere racine inégale de la proposée, & est moindre que la seconde.

Que la quatriéme racine de l'équation des limites surpasse la seconde racine inégale de la proposée, & est moindre que la troisiéme.

Enfin que la cinquiéme racine de l'équation des limites surpasse la troisiéme racine inégale, & est moindre que la quatriéme ou plus grande racine inégale de la proposée.

4°. Par consequent les racines de l'équation des limites étant substituées de suite dans la proposée, la premiere donnera zero, & les autres donneront des sommes qui auront alternativement les signes + & —, ou — & +, & l'on aura deux limites de chacune des racines inégales de la proposée, en prenant pour derniere limite le plus grand coëficient négatif de la proposée augmenté de l'unité.

SECOND CAS.

Si les deux racines égales sont les plus grandes, & qu'on substitue la premiere ou la plus petite racine de la proposée dans l'équation des limites, à la place de l'inconnue, on trouvera en raisonnant comme dans le premier cas, qu'elle donnera une somme toute connue qui aura le signe —, cette somme étant le produit des cinq differences qui sont entre la premiere racine de la proposée & les cinq autres, & qui ont chacune le signe —.

La substitution de la seconde racine inégale de la proposée dans l'équation des limites, donnera une somme qui aura le signe +.

La substitution de la troisiéme donnera une somme qui aura le signe —.

La substitution de la quatriéme, qui est la plus grande racine inégale, donnera une somme qui aura le signe +.

La substitution de la cinquiéme & sixiéme, qui sont les racines égales, donnera zero.

D'où il suit, 1°, que la premiere ou plus petite racine de la proposée est moindre que la plus petite racine de l'équation des limites.

La seconde racine de la proposée est moyenne entre la premiere & la seconde racine de l'équation des limites.

Et ainsi de suite jusqu'à la quatriéme & plus grande racine inégale de la proposée, qui est moyenne entre la troisiéme & la quatriéme racine de l'équation des limites; & les deux racines égales de la proposée, qui sont la cinquiéme & la sixiéme, sont chacune égale à la cinquiéme racine de l'équation des limites.

2°. Par consequent la premiere, la seconde & la troisiéme racine de l'équation des limites, ont chacune deux limites, ainsi elles sont réelles.

La cinquiéme est aussi une grandeur réelle, puisque c'est la racine égale de la proposée.

La quatriéme racine de l'équation des limites est donc aussi réelle; puisque les racines imaginaires ne peuvent être que deux à deux.

3°. La premiere racine de l'équation des limites est moyenne entre la premiere racine de la proposée & la seconde racine.

La seconde racine de l'équation des limites est moyenne entre la seconde & la troisiéme racine de la proposée.

La troisiéme racine de l'équation des limites est moyenne entre la troisiéme & la quatriéme racine de la proposée.

Enfin la quatriéme racine de l'équation des limites surpasse la quatriéme & plus grande racine inégale de la proposée.

Ainsi prenant zero pour la moindre des limites de la proposée, & substituant de suite dans la proposée à la place de l'inconnue, zero, la premiere, la seconde, la troisiéme, la quatriéme racine de l'équation des limites, les sommes toutes connues qui en viendront auront alternativement — & +, ou + & —; & l'on aura deux limites pour chacune des racines inégales de la proposée.

TROISIE'ME CAS.

Lorsqu'il y a des racines inégales dans la proposée, moindres que les racines égales, par exemple deux, & qu'il y a encore d'autres racines inégales plus grandes que les racines égales, par exemple deux, il est toujours évident qu'en substituant la premiere, c'est à dire la plus petite des racines inégales de la proposée, à la place de l'inconnue dans l'équation des limites, la somme toute connue qui en viendra, aura le signe —; puisqu'elle est le produit des cinq differences qui sont entre la premiere racine & les cinq autres de la proposée, lesquelles differences ont chacune le signe —.

Si on substitue la seconde racine inégale de la proposée, la somme qui en viendra aura le signe +, étant le produit des cinq differences qui sont entre la seconde racine & toutes les autres, desquelles differences la premiere a le signe +, & chaque autre le signe —.

Si on substitue la troisiéme & la quatriéme racine de la proposée, elles donneront zero; parceque ce sont les deux racines égales.

Si on substitue la cinquiéme racine de la proposée, qui est la troisiéme des inégales, la somme aura le signe —, parcequ'elle est le produit des cinq differences qui sont entre la cinquiéme racine de la proposée & toutes les autres, dont une seule a le signe —, & toutes les autres le signe +.

Enfin si on substitue la sixiéme racine de la proposée, qui est la quatriéme des inégales, la somme aura le signe +.

D'où il suit, 1°, que la premiere ou la plus petite des racines de la proposée est moindre que la premiere racine de l'équation des limites.

La seconde racine de la proposée surpasse la premiere racine de l'équation des limites, & elle est moindre que la seconde.

La troisiéme & la quatriéme racine de la proposée sont égales à la troisiéme de l'équation des limites; puisqu'elles donnent zero.

La cinquiéme racine de la proposée surpasse la quatriéme racine de l'équation des limites, mais elle est moindre que la cinquiéme.

Enfin la sixiéme racine de la proposée surpasse la cinquiéme & plus grande racine de l'équation des limites.

2°. Par consequent la premiere racine de l'équation des limites a deux limites; la troisiéme est la racine égale commune aux deux équations.

La cinquiéme racine de l'équation des limites a deux limites, qui sont la cinquiéme & sixiéme racine de la proposée.

Ces trois racines de l'équation des limites sont donc réelles.

La seconde & la quatriéme le sont aussi, car il est impossible qu'elles soient imaginaires, étant impossible qu'il y ait une grandeur réelle entre deux racines imaginaires, qui donne zero; & la troisiéme & quatriéme racine de la proposée donnent zero, & sont entre la seconde & la quatriéme racine de l'équation des limites.

Ainsi toutes les racines de l'équation des limites sont réelles.

3°. La premiere ou plus petite racine de l'équation des limites est donc moyenne entre la premiere & la seconde racine de la proposée.

La seconde racine de l'équation des limites surpasse la seconde racine de la proposée.

Ainsi en prenant zero pour la moindre limite de la premiere racine de la proposée, l'on a les limites de la premiere & de la seconde racine inégale de la proposée.

La troisiéme racine de l'équation des limites est la troisiéme & la quatriéme de la proposée.

La quatriéme racine de l'équation des limites est moindre que la cinquiéme racine de la proposée.

La cinquiéme racine de l'équation des limites est moyenne entre la cinquiéme & la sixiéme racine de la proposée.

Ainsi en prenant le plus grand coéficient négatif de la proposée augmenté de l'unité, l'on aura toutes les limites des racines de la proposée.

X.

Pour les racines imaginaires.

Il est donc évident que quand toutes les racines d'une équation proposée sont réelles & positives, toutes les racines de l'équation des limites le sont aussi: Par conséquent s'il y a des racines imaginaires dans l'équation des limites, qui ne peuvent être que deux à deux, il y a autant de racines imaginaires dans la proposée.

Mais il faut remarquer que quand toutes les racines de l'équation des limites sont réelles, ce n'est pas une marque assurée qu'il n'y ait point de racines imaginaires dans la proposée, comme on le voit dans cet exemple.

Soit l'équation du second degré $xx - 2ax + aa = 0$,
$+ ff$

dont deux racines sont imaginaires : qu'on la multiplie par l'équation lineaire $x - a - g = 0$; le produit est une équation du troisiéme degré

$$\begin{array}{llll} x^3 - 3axx & + 3aax & - a^3 & = 0, \\ \quad - gxx & + 2agx & - aag & \\ & + ffx & - aff & \\ & & - ffg & \\ 3 \quad\; 2 & \quad 1 & \quad 0 & \end{array}$$

dont deux racines sont imaginaires. Qu'on multiplie chaque terme du produit par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, on aura l'équation des limites,

$$\begin{array}{lll} 3x^3 - 6axx & + 3aax & = 0, \\ \quad - 2gxx & + 2agx & \\ & + ffx & \end{array}$$

qui étant divisée par $3x$, donne l'équation du 2^e degré,

$$\begin{array}{lll} xx - 2ax & + aa & = 0, \\ \quad - \frac{2}{3}gx & + \frac{2}{3}ag & \\ & + \frac{1}{3}ff & \end{array}$$

qui est l'équation des limites, dans laquelle, si l'on suppose que le dernier terme $+ aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{3}ff$ est moindre que le quarré de la moitié du coéficient $- 2a - \frac{2}{3}g$ du 2^e terme, qui est $+ aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{9}gg$, ou qu'il lui est égal ; il est certain que les deux racines de cette équation du second degré, qui est l'équation des limites, seront toutes deux réelles & positives : Mais il est évident que le dernier terme $+ aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{3}ff$, sera moindre que $aa + \frac{2}{3}ag + \frac{1}{9}gg$, si $\sqrt{\frac{1}{3}ff}$ est moindre que $\sqrt{\frac{1}{9}gg} = \frac{1}{3}g$.

Ainsi, dans ce cas, l'équation des limites aura toutes ses racines réelles, & cependant l'équation proposée aura deux de ses racines imaginaires.

En voici un exemple en nombres. Soit

$$\begin{array}{l} xx - 6x + 9 = 0, \\ \qquad\qquad\;\, + 1 \end{array}$$

dont les racines sont imaginaires. Qu'on la multiplie par l'équation lineaire . . . $x - 9 = 0$, on aura l'équation du 3^e degré

$$\begin{array}{l} x^3 - 15xx + 64x - 90 = 0, \\ 3 \qquad\; 2 \qquad\;\; 1 \qquad\;\; 0, \end{array}$$

dont deux racines sont imaginaires. Qu'on la multiplie par la progression arithmetique, on aura le produit . . . . . . $3x^3 - 30xx + 64x = 0$, qui étant divisé par $3x$, se réduit à . . . . $xx - 10x + 21\frac{1}{3} = 0$, dont les deux racines sont réelles, l'une étant $x = 5 + \sqrt{3\frac{2}{3}}$, & l'autre étant $x = 5 - \sqrt{3\frac{2}{3}}$.

COROLLAIRE

COROLLAIRE XI.

144. APRÉS les remarques précedentes, il est évident qu'en prenant zero pour la plus petite des limites des racines d'une équation quelconque, dont tous les termes ont alternativement + & —, & le plus grand coéficient négatif de cette équation, augmenté d'une unité ou d'un plus grand nombre, pour la plus grande des limites, & les racines de l'équation des limites pour les limites moyennes ; l'on aura toutes les limites des racines de la proposée, deux limites pour chacune.

Zero & la premiere racine de l'équation des limites, seront les limites de la premiere racine de la proposée.

La premiere & la seconde racine de l'équation de limites, seront les limites de la seconde racine de la proposée.

La seconde & la troisiéme racine de l'équation des limites, seront les limites de la troisiéme racine de la proposée.

Et ainsi de suite jusqu'à la derniere racine de l'équation des limites ; cette derniere racine & le plus grand coéficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre, seront les limites de la derniere racine de la proposée.

Ainsi zero étant substitué à la place de l'inconnue dans la proposée, la somme toute connue qui en viendra sera le dernier terme de la proposée, avec son signe qui est + dans les équations des degrés pairs, & — dans les équations des degrés impairs.

La premiere racine de l'équation des limites étant ensuite substituée dans la proposée à la place de l'inconnue, la somme aura un signe opposé au précedent.

La seconde racine de l'équation des limites étant ensuite substituée dans la proposée, la somme toute connue aura un signe opposé au précedent ; & ainsi de suite.

COROLLAIRE XII.

145. LORSQU'UNE des racines de l'équation des limites, étant substituée dans la proposée, donne zero, il y a deux racines égales dans la proposée.

Si plusieurs racines differentes de l'équation des limites, étant substituées, donnent zero, il y a deux fois autant de racines égales, deux à deux, dans la proposée.* *74

COROLLAIRE XIII.

146. LORSQU'UNE des racines de l'équation des limites étant substituée dans la proposée à la place de l'inconnue, la somme qui en vient n'a pas le signe qu'elle devroit avoir, & n'est pas zero, il y a deux racines imaginaires dans la proposée.

Si plusieurs racines de l'équation des limites étant substituées dans la proposée, les sommes qui en viennent n'ont pas le signe qu'elles devroient avoir, si les racines de la proposée étoient toutes réelles, ou ne sont pas zero, il y aura deux fois autant de racines imaginaires dans la proposée, que l'on trouvera de fois des signes contraires à ceux qu'on devroit trouver.

Ainsi si l'on trouve deux fois que les racines de l'équation des limites étant substituées dans la proposée, donnent des signes contraires à ceux qu'elles devroient donner, il y a quatre racines imaginaires dans la proposée.

COROLLAIRE XIV.

147. L'EQUATION des limites pouvant elle-même être considerée comme une équation principale, si on en multiplie chaque terme par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, le produit sera son équation des limites, à qui il faudra appliquer tout ce qu'on a dit de l'équation des limites: Et si on continue de multiplier chaque terme de cette nouvelle équation des limites par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero, on aura l'équation des limites de l'équation precedente; en continuant cette operation jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation lineaire, l'on aura toutes les limites des racines de toutes ces équations des limites.

Car la racine de l'équation lineaire avec zero & le plus grand coëficient négatif de l'équation des limites du second degré, augmenté de l'unité, seront les limites des racines de cette équation du second degré.

Les racines de celle-ci avec zero & le plus grand coëficient négatif de l'équation du troisiéme degré, augmenté de l'unité, seront les limites de l'équation des limites du troisiéme degré; & ainsi de suite jusqu'à l'équation proposée.

SECTION II.

Où l'on explique la methode de trouver les limites des racines d'une équation numerique quelconque.

PROBLÊME I.

148. *TROUVER les limites par ordre de toutes les racines d'une équation numerique quelconque.*

ON suppose que l'équation est sans fractions, que son premier terme n'a pas d'autre coëficient que l'unité, & que tous ses termes ont alternativement les signes + & —. On a vu dans le troisiéme Livre les moyens de lui donner ces préparations.

1°. Il faut multiplier chaque terme de l'équation proposée par le nombre qui est l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & multiplier le dernier terme par zero. Il faut diviser le produit par l'inconnue lineaire, & il sera l'équation des limites de la proposée, moindre d'un degré que la proposée, & dont toutes les racines prises de suite seront les limites des racines de la proposée. Il faut multiplier chaque terme de cette premiere équation des limites par l'exposant du degré de l'inconnue de ce terme, & le dernier terme par zero; & le produit étant divisé par deux fois l'inconnue (car on trouvera que tous les termes se peuvent diviser par $2x$) sera la seconde équation des limites, dont les racines seront les limites de la précedente. Il faut multiplier chaque terme de cette seconde équation des limites par l'exposant du degré de l'inconnue, & le dernier terme par zero; & parcequ'on trouvera que chaque terme se peut diviser par $3x$, il faut diviser le produit par $3x$; & l'on aura la troisiéme équation des limites, dont les racines seront les limites de la précedente. On continuera d'operer de cette maniere jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une équation lineaire; ce sera la derniere équation des limites.

2°. Il faudra prendre zero pour la moindre limite de l'équation du second degré, la racine de l'équation lineaire pour la seconde limite; & le plus grand coëficient négatif augmenté de l'unité ou d'un nombre arbitraire, pour la troissième & plus grande limite de la même équation du second degré ; & l'on aura ainsi toutes les limites des racines de l'équation du second degré.

Il faudra prendre pour les limites des racines de l'équation du troisiéme degré, zero, les deux racines de l'équation du second degré, & le plus grand coeficient négatif de l'équation du troisiéme degré, augmenté de l'unité ; & l'on aura ainsi toutes les limites des racines de l'équation du troisiéme degré, deux limites pour chacune.

Il faudra prendre de même zero, les racines de l'équation du troisiéme degré, & le plus grand coeficient négatif de l'équation du quatriéme degré, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre, pour les limites de l'équation des limites du quatriéme degré ; & l'on aura ainsi deux limites pour chaque racine de cette équation.

Il faudra faire la même chose pour les équations suivantes jusqu'à la proposée, dont zero, les racines de la premiere équation des limites, & le plus grand coeficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre, seront les limites, & il y en aura deux pour chacune des racines de la proposée.

On enseignera dans la Section suivante la maniere de trouver chaque racine d'une équation, lorsqu'on en a les deux limites.

Pour les racines égales.

QUAND une des racines d'une des équations des limites étant substituée dans l'équation qui la précede donne zero au lieu de donner une somme qui ait le + ou le —, qu'elle doit avoir, il y a dans ce cas des racines égales dans la proposée. Voici la maniere d'en déterminer le nombre.

— toutes les

Si une seule des racines de la premiere équation des limites étant substituée dans la proposée, donne zero, il y a deux racines égales dans la proposée.

Si deux racines étoient égales dans la premiere équation des limites, il y auroit trois racines égales dans la proposée ; & ainsi de suite.

donnoient zero et substituées dans la proposée

Si deux racines de l'équation des limites, quoiqu'inégales entr'elles, étoient aussi les racines de la proposée, elle auroit quatre racines égales, deux à deux.

Si une des racines de la seconde équation des limites étant substituée dans la premiere équation des limites, donne zero, il y a trois racines égales dans la proposée.

et dans la propos.

S'il y avoit deux racines égales dans la seconde équation des limites, il y auroit quatre racines égales dans la proposée ; & ainsi de suite.

et qu'elles donnent zero étant subst. dans les precede et dans les precedentes.

Si une des racines de la troisiéme équation des limites étant substituée dans la seconde, donne zero, il y a quatre racines égales dans la proposée ; & ainsi des autres qui suivent la troisieme équation des limites, jusqu'à l'équation lineaire, dont la racine étant substituée dans l'équation des limites du second degré ~~qui la précede~~, si elle donne zero, toutes les racines de la proposée seront égales.

et dans les suite qui la precedent

Tout ce qu'on vient de dire des racines égales est une suite évidente de ce qu'on en a démontré dans la derniere Section du quatriéme Livre.

Quand on trouve par la methode de ce Probléme, que la proposée contient des racines égales, le plus court est de diviser la proposée par l'équation composée de toutes les racines égales, & l'on aura un quotient qui contiendra les seules racines inégales de la proposée, dont on trouvera les limites par le premier article.

Pour les racines imaginaires.

QUAND une racine d'une des équations des limites étant substituée à la place de l'inconnue dans l'équation qui la précede immédiatement, & dont ses racines sont les limites, la somme qui en vient n'a pas le signe + ou —, qu'elle devroit avoir si les racines étoient toutes réelles & inégales, & que cette somme n'est pas zero ; dans ce cas il y a deux racines imaginaires dans l'équation qui la précede, & dans toutes les autres équations des limites qui la précedent, jusqu'à la proposée, qui a aussi deux racines imaginaires.

Si deux racines d'une des équations des limites ne donnoient dans celle qui la précede immédiatement, ni le signe qu'elles doivent donner, ni zero, il y auroit quatre racines imaginaires dans la proposée ; & ainsi de suite.

Les autres racines réelles de l'équation qui précede n'auroient pas moins leurs limites, il y en auroit deux pour chacune, en prenant zero pour la moindre, le plus grand coéficient négatif augmenté de l'unité, pour la plus grande, & les autres racines de l'équation des limites, dont on parle, pour les limites moyennes.

Toute cette methode est une suite évidente de tout ce qui précede.

Application du Problême à des exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver les limites des racines de l'équation du troisiéme degré . . $x^3 - 114xx + 3744x - 30140 = 0$,

1°. On multipliera ses termes par . . . $3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$;

on divisera le produit $3x^3 - 228xx + 3744x = 0$, par x, & l'on aura l'équation des limites $3xx - 228x + 3744 = 0$.

On multipliera ses termes par . . . $2 \quad 1 \quad 0$,

& l'on aura le produit . . . . . $6xx - 228x = 0$,

qui étant divisé par $6x$, donnera . . $x - 38 = 0$,

qui est la derniere équation des limites, ou l'équation linéaire des limites.

2°. Pour avoir à present les limites, l'on ôtera le coéficient du premier terme de l'équation des limites du second degré $3xx - 228x + 3744 = 0$, ce qui se fera ici en divisant chaque terme par 3, & l'on aura $xx - 76x + 1148 = 0$, pour l'équation des limites du second degré.

Zero & la racine $+38$ de l'équation linéaire, seront les limites de la 1re racine de l'équation $xx - 76x + 1148 = 0$. $+38$ & $+77$, qui est le plus grand coéficient négatif de cette équation, augmenté de l'unité, seront les limites de sa seconde racine.

Ainsi en substituant zero au lieu de x dans l'équation $xx - 76x + 1148 = 0$, l'on aura $+1148$.

En substituant la seconde limite 38, on aura -196.

En substituant la troisiéme limite $+77$, on aura $+1325$.

Et l'on trouvera par les methodes de la Section suivante, que les deux racines de $xx - 76x + 1148 = 0$, sont 24 & 52.

Ainsi zero & 24 sont les limites de la premiere racine de la proposée $x^3 - 114xx + 3744x - 30140 = 0$, c'est à dire, la premiere racine de la proposée est entre zero & 24; & en substituant zero au lieu de l'inconnue x dans la proposée, la somme toute connue qui en viendra, aura le signe $-$; en substituant 24, la somme aura $+$.

24 & 52 sont les limites de la seconde racine de la proposée, & en substituant 52, la somme aura $-$.

Enfin 52 & le plus grand coéficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité, qui est 30241, sont les limites de la troisiéme racine de la proposée; & en substituant 30241, la somme qui en viendra aura $+$.

L'on a donc les limites de toutes les racines de la proposée, deux limites pour chacune; *ce qu'il falloit trouver.*

Second exemple où il y a des racines égales.

POUR trouver les limites des racines de cette équation du troisiéme degré . . $x^3 - 30xx + 288x - 864 = 0$,

1°, on multipliera ses termes par . . . . . $3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$,

& l'on aura la premiere équation des limites . . $3x^3 - 60xx + 288x = 0$,

qui étant divisée par x, donnera . . . . . $3xx - 60x + 288 = 0$;

multipliant cette équation par . . . . . $2 \quad 1 \quad 0$,

l'on aura la derniere équation des limites. . $6xx - 60x = 0$,

qui étant divisée par $6x$, se réduit à l'équation linéaire . . . . . $x - 10 = 0$.

2°. Pour avoir les limites de l'équation du second degré $3xx - 60x + 288 = 0$, on divisera ses termes par 3, & l'on aura $xx - 20x + 96 = 0$ pour la premiere équation des limites. Les limites de la premiere racine de $xx - 20x + 96 = 0$, sont zero & la racine 10 de la derniere équation des limites. Les limites de la seconde racine de $xx - 20x + 96 = 0$, sont 10 & son plus grand coéficient négatif augmenté de l'unité, qui est 21. On trouvera par les methodes de la Section suivante, que les racines de la premiere équation des limites $xx - 20x + 96 = 0$, sont 8 & 12.

Ainsi 0, 8, 12, 865, sont les limites des racines de la proposée : mais parcequ'on trouve que 12 étant substitué dans la proposée à la place de x, la somme qui en vient est zero, & qu'ainsi 12 en est une racine ; la proposée a deux racines égales 12, 12, & il ne lui reste plus qu'une racine inégale, dont les limites sont 0 & 8.

Mais le plus court est de diviser la proposée par l'équation composée des deux racines égales 12 & 12, qui est $xx - 24x + 144 = 0$, & le quotient $x - 6 = 0$, contiendra la racine inégale.

Troisiéme exemple où il y a des racines imaginaires.

POUR trouver les limites des racines de cette équation du quatriéme degré $x^4 - 76x^3 + 1872xx - 15120x + 35136 = 0$,

1°, on multipliera ses termes par . . . 4 3 2 1 0,

& l'on aura la 1re équation des limites $4x^4 - 228x^3 + 3744xx - 15120x = 0$,

qui se réduit en divisant par $4x$ à . . . $x^3 - 57xx + 936x - 3780 = 0$.

On multipliera cette équation par . . . 3 2 1 0,

& on aura la seconde équation des limites $3x^3 - 114xx + 936x = 0$,

qui étant divisée par $3x$, se réduit à . . . $xx - 38x + 312 = 0$;

on multipliera cette équation par . . . 2 1 0,

& on aura la derniere équation des limites $2xx - 38x = 0$,

qui étant divisée par $2x$, se réduit à l'équation lineaire . . . $x - 19 = 0$.

2°. Pour avoir les limites des deux racines de l'équation des limites du 2e degré $xx - 38x + 312 = 0$, on prendra zero pour premiere limite ; la racine 19 de l'équation lineaire des limites $x - 19 = 0$, pour seconde limite ; & le plus grand coéficient négatif de l'équation $xx - 38x + 312 = 0$, augmenté

augmenté de l'unité, qui est 39, pour la troisiéme limite. Ainsi les trois limites seront 0, 19, 39.

On trouvera par les methodes de la Section suivante, en se servant de ces limites, que les deux racines de la seconde équation des limites $xx - 38x + 312 = 0$, sont 12 & 26.

Ainsi les limites de la premiere équation des limites $x^3 - 57xx + 936x - 3780 = 0$, seront 0, 12, 26, 3781, par le moyen desquelles on trouvera que les racines de la premiere équation des limites $x^3 - 57xx + 936x - 3780 = 0$, sont 6, 21, 30.

Par consequent les limites des racines de la proposée $x^4 - 76x^3 + 1872xx - 15120x + 35136 = 0$, sont 0, 6, 21, 30, 15121. *Ce qu'il falloit trouver.*

En substituant zero dans la proposée au lieu de x, la somme toute connue qui en vient est le dernier terme, & elle a le signe +.

En substituant la seconde limite 6, la somme a le signe —.

En substituant la troisiéme limite 21, la somme a le signe +.

En substituant la quatriéme limite 30, la somme qui devroit avoir le signe —, a encore le signe +. C'est une marque certaine qu'il y a deux racines imaginaires dans la proposée, & deux racines réelles, dont on trouvera par les methodes de la Section suivante, que la premiere est 4, & que la seconde est incommensurable, plus grande que 8, & moindre que 9.

REMARQUE.

POUR faire concevoir clairement la methode du Problême, on a choisi des exemples dont les équations des limites eussent ces deux conditions : 1°. qu'elles se trouvassent sans fractions, le coéficient de leur premier terme étant un diviseur exact de tous les autres termes : 2°. que toutes les racines des équations des limites fussent commensurables. Quand ces deux conditions ne se trouvent pas, qui est le cas le plus ordinaire, on verra à la fin de la Section suivante le moyen de trouver, nonobstant cela, les limites qu'on cherche.

PROBLÊME II.

149. *QUAND on a les limites des racines d'une équation, trouver les limites des racines de toute équation en laquelle on transformera la premiere.*

PAR exemple on a l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$, dont on connoît les limites 0, 24, 52, 24141; on veut la transformer en une autre, soit en supposant par exemple $x - 10 = y$, qui se réduit à $x = y + 10$,

ou $x + 10 = y$ $\qquad x = y - 10$,
ou $10 - x = y$ $\qquad x = 10 - y$,
ou $10x = y$ $\qquad x = \frac{y}{10}$,
ou $\frac{x}{10} = y$ $\qquad x = 10y$,

ou enfin de quelqu'autre maniere qu'on voudra. Substituant ensuite la valeur de x prise dans quelqu'une de ces équations où x est lineaire, au lieu de x dans la proposée, l'équation qui en naîtra sera la transformée.

Pour avoir les limites des racines de la transformée, il faut substituer les limites successivement à la place de x dans l'équation où x est lineaire, & qui a servi à faire la transformation; & les valeurs de y toutes connues qui viendront de ces substitutions, seront les limites des racines de la transformée; par exemple en substituant 0 à la place de x dans l'équation $x - 10 = y$, on aura $0 - 10 = y$, ainsi la premiere limite de la transformée sera -10.

En substituant 24, on aura la seconde limite $24 - 10 = 14 = y$.

En substituant 52, on aura $52 - 10 = 42 = y$, ainsi la troisiéme limite de la transformée sera 42.

Il en est de même des autres transformations.

DEMONSTRATION.

* 56. IL est évident par la transformation,* que les racines de la transformée sont les racines mêmes de la proposée, diminuées ou augmentées de la grandeur connue 10, ou de telle autre qu'on voudra, ou multipliées ou divisées par cette même grandeur, &c. Par conséquent si l'on diminue, ou si l'on augmente, ou si l'on multiplie, ou si l'on divise, &c. chaque limite de la proposée de la même maniere, il est

visible que les grandeurs qui en viendront, seront les limites des racines de la transformée, c'est à dire, ces racines seront des grandeurs moyennes entre ces limites.

Mais en substituant chaque limite des racines de la proposée à la place de x, dans l'équation qui a servi à la tranformation, dans laquelle équation x est lineaire, il est évident que les limites de la proposée sont diminuées ou augmentées de la grandeur, par exemple 10, dont les racines de la proposée sont diminuées ou augmentées dans la transformée; ou bien qu'elles sont multipliées ou divisées, &c. par la même grandeur 10, par laquelle les racines de la proposée sont multipliées ou divisées, &c. dans la transformée. Les grandeurs qu'on trouve par ce Problême sont donc les limites de la transformée.

COROLLAIRE.

SI l'on transforme une équation proposée $x^3 - 114xx$, &c. en une autre dont les racines soient celles de la proposée, diminuées chacune d'une des limites des racines de la proposée, par exemple de 24, qui est la plus petite des deux limites de la seconde racine de la proposée, en supposant $x - 24 = y$; il est évident que la plus petite des deux limites de la seconde racine de la transformée sera zero; la seconde limite sera la difference qui est entre la limite 24 & la limite suivante 52, c'est à dire sa seconde limite sera 28; & les limites des racines suivantes de la tranformée, si elle en a plusieurs, seront les differences qui se trouvent entre la limite 24 & chacune des limites suivantes de la proposée.

REMARQUES.

I.

QUAND on trouve par le Problême précedent une grandeur négative pour la premiere limite de la premiere racine d'une transformée, comme on a trouvé la grandeur négative -10, il faut prendre zero pour premiere limite de la premiere racine de la transformée, & non pas la grandeur négative -10: Cela est plus commode dans la pratique.

II.

Quand toutes les racines d'une équation sont positives, ou toutes négatives & réelles, comme le coéficient du second terme en est la somme, si l'on prend le tiers de ce coéficient, si elle est du troisiéme degré, le quart si elle est du quatriéme degré, & ainsi de suite; cette grandeur sera une limite moyenne, au moins entre la plus petite & la plus grande des racines.

Ainsi la plus petite des racines est entre zero & cette limite moyenne, & la plus grande des racines est entre cette limite moyenne & le plus grand coéficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité ou d'un autre nombre.

On pourra trouver la plus petite & la plus grande racine de la proposée en se servant de ces limites par les methodes de la Section suivante.

AVERTISSEMENT.

CEUX qui commencent & ceux qui ne sçavent pas le calcul des differences, doivent passer à la Section suivante.

THEORÉME X.

150. *LES racines de l'équation des limites formée par la methode du premier Problême, sont les veritables limites des racines de la proposée dont elle est l'équation des limites, c'est à dire, elles sont les veritables limites moyennes entre la plus petite & la plus grande racine de la proposée.*

POUR bien entendre ce Theorême, il faut remarquer, 1°, que dans une équation proposée comme $xx - 76x + 1248 = 0$, dont les racines sont 24 & 52, toutes les grandeurs qui sont entre 24 & 52, comme 25, 26, 27, 28, &c. sont des grandeurs moyennes, ou des limites entre la premiere racine 24 & la seconde racine 52; & que la substitution de chacune de ces grandeurs à la place de x dans la proposée, donnera differentes sommes toutes connues, dont chacune aura toujours le même signe —.

2°. Que les sommes toutes connues qui naissent de la substitution de + 25, 26, 27, &c. vont toujours en augmentant, c'est à dire, celle qui vient de la substitution de 25 est moindre que celle qui vient de la substitution de 26, & celle-ci moindre que celle qui vient de la substitution de 27, & elles vont ainsi en augmentant jusqu'à la substitution de la limite 38 trouvée par le premier Problême, qui donne une somme qui est la plus grande de toutes.

Et substituant ensuite 39, 40, 41, 42 & les autres nombres suivans, les sommes toutes connues qui naissent des substitutions vont en diminuant, celle qui vient de la substitution de 39 étant plus grande que celle qui vient de la substitution de 40, & celle-ci plus grande que celle qui vient de la substitution de 41, & ainsi de suite jusqu'à la substitution de la racine 52 qui donne zero.

Or j'appelle *la veritable limite* la grandeur 38, qui est celle de toutes les limites qui sont entre la racine 24 & la racine 52, qui étant substituée dans la proposée, donne la plus grande somme toute connue, les autres limites donnant chacune de moindres sommes toutes connues: Et je dis que les limites qu'on trouve par le Problême, c'est à dire les racines de l'équation des limites, sont les veritables limites moyennes des racines de la proposée entre la premiere & la derniere racine de la proposée; c'est à dire, qu'étant substituées dans la proposée, les sommes toutes connues qui en viennent, sont plus grandes que celles qui viennent de la substitution des autres limites, qui ne sont pas celles que j'appelle les veritables, & lesquelles veritables limites se trouvent par le premier Problême.

Pour le démontrer, 1°, il faut supposer dans le second membre d'une équation proposée, comme $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = 0$, dont les racines sont 12, 42, 60, au lieu de zero, une grandeur indéterminée y, & l'on aura $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$.

2°. Il faut concevoir distinctement que x representant tous les nombres imaginables qu'on peut substituer à sa place dans le premier membre, y represente toutes les sommes connues qui naîtront de la substitution de chacune de ces grandeurs à la place de x.

Et pour concevoir distinctement toutes ces grandeurs que represente y, il faut commencer par la substitution de zero à la place de x; & allant successivement par ordre, il faut concevoir qu'on substitue à la place de x, aprés la substitution de zero, un nombre si petit qu'il differe de zero moins qu'aucune grandeur donnée, quelque petite qu'elle puisse être, & cette grandeur moindre qu'aucune grandeur donnée, est ce qu'on appelle une *grandeur infiniment petite*, ou une *difference*.

Il faut ensuite concevoir qu'on substitue aprés la grandeur précedente une autre grandeur plus grande, mais qui ne surpasse la précedente que d'une grandeur infiniment petite, ou d'une difference.

Concevant ainsi de suite qu'on substitue des grandeurs par ordre qui ne se surpassent que d'une grandeur infiniment petite, on concevra en même temps que les sommes toutes connuës qui naissent par ordre de ces substitutions, vont toujours en diminuant, & sont representées par y, & que le premier y surpasse le second d'une grandeur infiniment petite, le second surpasse le troisiéme d'une grandeur infiniment petite, & ainsi de suite jusqu'à ce que concevant que la premiere racine de la proposée $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$, qui est 12, étant substituée à la place de x, la somme toute connue qui en vient est zero; ainsi y represente alors zero, & n'est aucune grandeur réelle, ~~& n'a point par consequent alors de difference.~~

Continuant de concevoir qu'on substitue à la place de x un nombre qui surpasse la premiere racine 12 d'une grandeur infiniment petite, & ensuite une autre qui surpasse le précedent d'une difference, & ainsi de suite, on concevra en même temps que y, qui est toujours égale à chaque somme toute connue qui vient de chacune de ces substitutions, devient encore une grandeur réelle qui va en augmentant d'une grandeur infiniment petite, jusqu'à ce que concevant qu'on substitue la premiere limite qui est 24, y devient la plus grande somme toute connue que puissent donner les substitutions successives de chacun de tous les membres qui sont entre la premiere racine 12 & la seconde racine 42.

Et concevant qu'on substitue ensuite une grandeur qui surpasse la veritable limite 24 d'une difference, & ensuite une autre qui surpasse la précedente d'une difference, & ainsi de suite, y representera les sommes toutes connues qui naissent de ces substitutions, qui vont en diminuant, & dont chacune surpasse celle qui la suit d'une difference, jusqu'à ce que concevant que l'on substitue à la place de x la seconde racine 42, l'on conçoive en même temps que la somme toute connue qui naît de cette substitution est zero, & qu'ainsi y represente alors zero, & n'est aucune quantité réelle.

On continuera le même raisonnement sur les substitutions des grandeurs qui sont entre la seconde racine 42 & la troisiéme racine 60, & sur les sommes representées par y qui en naîtront; & ainsi de suite dans les équations des degrés plus élevés; & ensuite

3°. On remarquera que dans les substitutions des grandeurs qui sont entre deux racines de la proposée, par exemple des grandeurs qui sont entre la premiere racine 12 & la seconde 42, à la place de x, les y, c'est à dire les grandeurs que represente y, vont toujours en augmentant d'une difference jusqu'à la substitution de la veritable limite 24.

Que dans la substitution de 24, l'augmentation cesse, c'est à dire qu'elle est nulle ou égale à zero, & qu'ainsi la difference de y est nulle dans cette substitution.

Et qu'enfin dans la substitution des grandeurs suivantes, jusqu'à celle de la racine 42, au lieu d'augmentation, c'est une diminution, & les y vont en diminuant jusqu'à ce qu'ils deviennent zero dans la substitution de la seconde racine 42.

D'où il suit, pour la démonstration du 10e Theorême, que lorsque l'augmentation ou la difference de y est égale à zero, alors la valeur de x est celle qui étant substituée à sa place dans la proposée, donne une somme qui est la plus grande de toutes celles que donne la substitution des autres grandeurs moyennes entre deux racines, & que cette valeur de x est la veritable limite entre ces deux racines.

Pour trouver donc les veritables limites des racines, il ne faut que prendre la grandeur qui exprime la difference de y, la supposer égale à zero, & les racines de l'équation qui naîtra de cette substitution, c'est à dire les valeurs de x dans cette équation, seront les veritables limites des racines de la proposée.

Or le calcul des differences apprend que pour prendre la difference de $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$,
il faut multiplier $\quad 3 \qquad 2 \qquad 1 \qquad 0,$
chaque terme
par l'exposant $3xxdx - 228xdx + 3744dx = dy$
de son inconnue, & par la differencielle dx; qu'il faut multiplier le dernier terme par zero, & écrire au second membre dy au lieu de y, & diviser chaque terme par x, & l'on aura la difference $3xxdx - 228xdx + 3744dx = dy$.

Il faut ensuite supposer $dy = 0$, & l'on aura $3xxdx - 228xdx + 3744dx = 0$.

Il faut diviser chaque terme par dx, & l'on aura l'équation $3xx - 228x + 3744 = 0$; ou divisant par 3, $xx - 76x + 1248 = 0$, dont les racines étant substituées dans la proposée à la place de x, les sommes toutes connues qui en naîtront, seront plus grandes que toutes celles que pourront donner les substitutions des autres grandeurs moyennes entre les racines de la proposée.

Par consequent les racines de l'équation des limites, qui est la même que celle qu'on vient de trouver, sont les veritables limites des racines de la proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

151. Si l'on conçoit dans $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 = y$, que y represente les plus grandes sommes toutes connues que donnent les substitutions successives des veritables limites des racines de la proposée, c'est à dire, par ce dixiéme Theorême, les sommes que donnent les substitutions successives des racines de l'équation des limites $xx - 76x + 1248 = 0$; & qu'on transpose y dans le premier membre; les racines de l'équation des limites $xx - 76x + 1248 = 0$, seront des racines exactes de l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$; car les racines 24 & 52 de l'équation des limites étant substituées l'une aprés l'autre dans l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, la somme qui viendra de la 1re substitution sera $+ 7776$; & y representant cette même somme là, l'on aura $+ 7776 - 7776 = 0$, ainsi la premiere racine 24 de l'équation des limites étant substituée à la place de x dans l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, donne zero; 24 est donc une racine de cette équation. La somme qui viendra de la substitution de 52 sera $- 3200$; & y representant cette même somme, $- y$ sera égal à $+ 3200$; ainsi l'on aura $- 3200 + 3200 = 0$. La seconde racine 52 de l'équation des limites étant substituée à la place de x dans $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, donnant zero, est donc une racine de cette équation.

COROL.

COROLLAIRE II.

152. D'où il suit que chaque équation lineaire comme $x - 24 = 0$, $x - 52 = 0$, dont le premier terme est x, & le second l'une des racines de l'équation des limites, est un diviseur exact de l'équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, & de l'équation des limites $xx - 76x + 1248 = 0$, en supposant que y represente par raport à $x - 24 = 0$, la somme toute connue $+ 7776$, que donne la substitution de 24 à la place de x dans la proposée, & que y represente par raport à $x - 52 = 0$, la somme toute connue $- 3200$ que donne la substitution de 52 à la place de x dans la proposée.

COROLLAIRE III.

153. Aprés avoir transposé y du second membre dans le premier membre d'une équation $x^3 - 114xx + 3744x - 30240 - y = 0$, si on la divise par son équation des limites $xx - 76x + 1248 = 0$, & aprés être arrivé à un reste où x ait un degré de moins que dans le diviseur $xx - 76x + 1248 = 0$, on divise ce diviseur par ce premier reste; & qu'on continue la methode de chercher le plus grand diviseur commun, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste $yy - 4576y + 24883200 = 0$, dans lequel x ne se trouve plus, & qui n'a d'inconnue que y, & qu'on suppose ce reste $yy - 4576y + 24883200$ égal à zero, & le dernier diviseur où x est lineaire aussi égal à zero, qui est $- 392x + 17184 - y = 0$, ou $+ 392x - 17184 + y = 0$. Il suit du Corollaire précedent que le reste, ou l'équation $yy - 4576y + 24883200 = 0$, (qui sera toujours du même degré que l'équation des limites, comme l'operation le demontre;) aura pour ses racines, ou pour les valeurs de y, les sommes toutes connues que donnent les substitutions successives des racines de l'équation des limites à la place de x dans la proposée, qui sont ici $+ 7776$ & $- 3200$; & en mettant successivement ces valeurs de y dans le dernier diviseur où x est lineaire, c'est à dire dans $392x - 17184 = 0$, l'on aura les deux équations lineaires $x - 24 + y = 0$, $x - 52 = 0$, qui sont les diviseurs communs aux

SS

équations $x^3 - 114xx + 3744x \genfrac{}{}{0pt}{}{-30240}{-y} = 0$, où y represente successivement $+ 7776$ & $- 3200$, & $xx - 76x + 1148 = 0$, & qui contiennent les racines de l'équation des limites $xx - 76x + 1148 = 0$.

Ce Corollaire est une suite évidente du précedent & de la methode de trouver le plus grand diviseur commun de deux équations: car les racines de $yy - 4576y + 24883200 = 0$, sont telles, qu'étant substituées à la place de y dans le dernier diviseur où x est lineaire, qui est $392x \genfrac{}{}{0pt}{}{-17184}{+y} = 0$, & dans $x^3 - 114xx + 3744x \genfrac{}{}{0pt}{}{-30240}{-y} = 0$, l'équation lineaire est changée en deux autres, qui divisent exactement l'équation des limites, & qui par consequent en contiennent les racines; & ces mêmes équations lineaires divisent aussi exactement $x^3 - 114xx + 3744x \genfrac{}{}{0pt}{}{-30240}{-y} = 0$, où l'on suppose à la place de y, ses deux valeurs $+ 7776$, $- 3200$.

COROLLAIRE IV.

Pour les racines égales.

154. Soit une équation qui a des racines égales $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$, dont l'équation des limites est $x^3 - 12xx + 36x - 16 = 0$; qu'on mette y à la place de zero, (conformement à la supposition du 2e Corollaire qui précede,) l'on aura $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = y$. Les racines de l'équation des limites étant substituées successivement à la place de x dans cette équation, les sommes toutes connues qui en viendront seront les valeurs de y*;
* 152. par consequent les racines égales étant communes à la proposée & à l'équation des limites, il y aura tout autant de valeurs de y égales à zero, qu'il y aura de ces racines communes.

COROLLAIRE V.

Qui contient une methode pour connoître quand une équation proposée a des racines égales.

155. D'où il suit & du troisiéme Corollaire, que si l'on transpose y dans le premier membre; qu'on cherche ensuite le

plus grand diviseur commun de $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x \genfrac{}{}{0pt}{}{+16}{-y} = 0$, & de l'équation des limites $x^3 - 12xx + 36x - 16 = 0$, & qu'on continue l'operation jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste où x ne se trouve plus, & qui n'ait pour inconnue que y, en supposant ce reste égal à zero; il y aura autant de y égaux à zero dans l'équation de ce reste, qu'il y a de racines communes à la proposée $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$, & à l'équation des limites $x^3 - 12xx + 36x - 16 = 0$, ce qui marquera qu'il y a des racines égales dans la proposée; c'est à dire, y auroit trois dimensions dans l'équation faite du reste, si les quatre racines de la proposée etoient inégales, mais au lieu de cela, y n'aura que deux dimensions, s'il y a une racine commune à la proposée & à l'équation des limites; y n'aura qu'une dimension dans l'équation du reste, s'il y a deux racines communes, & y se trouvera entierement égale à zero dans l'équation faite du reste, si toutes les racines de l'équation des limites sont aussi les racines de la proposée, & que les quatre racines de la proposée soient égales.

Dans cet exemple on trouve pour reste $y - 144 = 0$, ce qui fait connoître qu'il y a deux racines communes à la proposée & à son équation des limites, & que la proposée contient par consequent des racines égales.

D'où l'on voit que pour connoître si une équation proposée contient des racines égales, il n'y a qu'à ajouter $-y$ à son dernier terme, & ensuite chercher le plus grand diviseur commun de cette équation & de son équation des limites; & continuer l'operation jusqu'à ce qu'on ait un reste qui n'ait que y pour inconnue, & supposer ce reste égal à zero. Si l'inconnue y est au même degré dans cette équation, qu'est x dans l'équation des limites, c'est une marque qu'il n'y a pas de racines égales dans la proposée: Si l'inconnue y est à un degré moindre dans cette équation du reste que celui de x dans l'équation des limites, c'est une marque qu'il y a des racines égales dans la proposée.

SECTION III.

Où l'on explique differentes methodes pour trouver les racines d'une équation lorsqu'on a deux limites pour chacune.

PROBLÊME III.

156. *QUAND on a deux limites d'une racine d'une équation numerique, l'une moindre & l'autre plus grande que cette racine; ou, ce qui revient au même, lorsque la substitution de l'une & ensuite de l'autre à la place de l'inconnue, donne des sommes toutes connues dont les signes sont differens: trouver cette racine quand elle est commensurable; en trouver une valeur approchée quand elle est incommensurable; & continuer l'approximation tant qu'on voudra.*

PREMIERE METHODE PAR SUBSTITUTION OU PAR DIVISION.

ON appliquera la methode à un exemple en l'énonçant pour la rendre plus claire.

Il faut trouver les racines de $xx - 76x + 1248 = 0$; les limites de la plus petite sont zero & 38; la premiere étant substituée donne $+$, & la seconde donne $-$; les limites de la plus grande sont 38 & 77; la premiere étant substituée donne $-$, & la seconde donne $+$.

1°. On prendra la difference des deux limites, & l'on ajoutera la moitié de cette difference, prise en nombres entiers, à la moindre limite, ce qui donnera une somme; ainsi la difference des deux limites zero & 38 de la premiere racine, est 38, dont la moitié est 19, & la somme de la moindre limite zero & de cette moitié, est 19. La difference des deux limites 38 & 77 est 39, dont la moitié est 19 ou 20; on prendra laquelle on voudra, quand la difference est un nombre impair: on ajoutera cette moitié à la moindre limite 38, & la somme sera 57 ou 58, il n'importe pas laquelle on prenne.

2°. On substituera la somme qu'on vient de trouver à la place de l'inconnue x dans la proposée; ainsi on substituera $+19$ pour la premiere racine, & $+57$ pour la seconde; ou, ce qui revient au même, on divisera l'équation proposée par l'équation lineaire x moins cette somme, c'est à dire par $x - 19 = 0$, pour trouver la premiere racine, & par $x - 57 = 0$, pour trouver la seconde. On remarquera le signe de la somme toute connue qui viendra de la substitution, ou du reste qui viendra de la division, & s'il est conforme au signe que doit donner la premiere limite, ou à celui que doit donner la seconde limite; par exemple en substituant 19, on trouve le signe $+$ conforme au signe que donne la moindre limite zero des deux limites 0 & 38 de la premiere racine; en substituant 57, on trouve le signe $+$ conforme au signe que donne la plus grande limite 77 des deux limites 38 & 77 de la seconde racine.

3°. On laissera à present comme inutile celle des deux limites d'une racine dont la grandeur, substituée à la place de x, a donné le signe, & on prendra cette grandeur à sa place pour être une des limites de la racine qu'on cherche, avec l'autre limite dont la grandeur substituée n'a pas donné le signe.

Dans notre exemple en cherchant la premiere racine de la proposée dont zero & 38 sont les limites, la grandeur 19 ayant donné le signe de la moindre limite zero, c'est à dire $+$, la limite zero sera desormais inutile pour trouver la premiere racine; on prendra à sa place la grandeur 19 qui a donné le même signe $+$ de la premiere limite zero, & la seconde limite sera 38.

On trouve de même en cherchant la seconde racine, que la grandeur 57 étant substituée à la place de x, donne le signe $+$ de la plus grande des deux limites 38 & 77 de la seconde racine; ainsi il faut laisser la plus grande limite 77 comme inutile, & prendre à sa place la grandeur 57 pour la plus grande limite, & la plus petite 38 demeure la même.

Il faut à present chercher la premiere racine de la proposée entre les nouvelles limites 19 & 38, & la seconde entre les limites 38 & 57, en faisant une operation semblable à celle du premier & du second article, c'est à dire en prenant, pour trouver la valeur de la 1^re^ racine, la moitié de la difference de ses deux limites 19 & 38, laquelle moitié est 9, l'ajoutant à la moindre limite 19, ce qui donnera la somme 28, & substituant cette grandeur 28 à la place de x dans la proposée : & comme la somme qui en vient a le signe —, qui est celui que donne la substitution de la plus grande limite, il faut laisser la limite 38 comme inutile, & mettre à sa place 28 pour la plus grande limite de la premiere racine, dont la plus petite limite sera 19; & continuer l'operation en ajoutant la moitié en nombres entiers de la difference 9 des deux dernieres limites 19 & 28, laquelle moitié est 5 ou 4, à la plus petite limite 19, ce qui donnera la somme 24, & substituant cette grandeur 24 à la place de x dans la proposée : Et comme on trouve que la somme qui en vient est zero, la grandeur 24 est la plus petite racine de la proposée.

On cherchera la seconde racine comme on a fait la premiere, en prenant 9 qui est la moitié de la difference 19 qui se trouve entre les deux dernieres limites 38 & 57 de la seconde racine de la proposée, & ajoutant cette moitié 9 à la moindre limite, la somme sera 47, qui étant substituée à la place de x dans la proposée, donne le signe — conforme à celui qui vient de la substitution de la moindre limite 38. On laissera la limite 38 comme inutile, & on prendra à sa place 47, & la plus grande limite sera encore 57; ainsi les deux limites de la seconde racine seront 47 & 57. On prendra 5, qui est la moitié exacte de leur difference, qui est 10, on l'ajoutera à la moindre limite 47, & la somme sera 52; on substituera 52 à la place de x dans la proposée, & l'on trouvera que la somme qui en vient est zero; ce qui fera voir que la grandeur 52 est la seconde racine de la proposée.

REMARQUE.

Il est visible qu'en cherchant une racine, par cette methode, entre deux limites, entre lesquelles cette racine est une grandeur moyenne, on augmente à chaque operation la plus petite limite, ou l'on diminue la plus grande; c'est pourquoi on arrive enfin à trouver la racine même, quand elle est commensurable. Mais quand en suivant la methode, on arrive à deux limites, l'une moindre, & l'autre plus grande que la racine, ou qui donnent par leur substitution des signes differens, qui ne different entr'elles que de l'unité, il est certain que la racine est incommensurable; car on suppose

l'équation sans fractions, & que son premier terme n'a pas d'autre coéficient que l'unité; ainsi sa racine étant entre deux nombres qui ne different que de l'unité, elle ne peut pas être un nombre entier; & on a démontré * qu'une fraction ne peut pas être la racine d'une telle équation. * 34.

Continuation de la premiere methode.

4°. On continuera d'augmenter par la methode la moindre limite, & de diminuer la plus grande limite de la racine qu'on cherche, jusqu'à ce qu'on trouve une grandeur qui étant substituée à la place de l'inconnue, donne zero; ou, quand la racine est incommensurable, jusqu'à ce qu'on ait trouvé deux limites, l'une moindre que la racine, & l'autre plus grande, qui ne different entr'elles que de l'unité; & alors la moindre limite sera la valeur approchée de la racine, plus petite que la racine, & la plus grande limite sera la valeur approchée plus grande que la racine; & l'une & l'autre valeur approchée ne different pas de la racine exacte de l'unité entiere.

Pour continuer l'approximation, on se servira ordinairement de la troisiéme methode qui suit, comme étant la plus courte, mais on le pourra faire aussi par cette premiere, le calcul en sera un peu plus long; on prendra $\frac{1}{2}$, qui est la moitié de la difference des deux dernieres limites, qui ne different entr'elles que de l'unité, & on l'ajoutera à la moindre des deux dernieres limites; on substituera cette grandeur à la place de l'inconnue, & on la prendra au lieu de la limite dont elle donnera le signe. Ensuite on prendra la moitié de la difference qui est entre cette nouvelle limite & l'autre limite qui est demeurée, on ajoutera cette moitié à la moindre de ces deux limites, & la somme sera la grandeur qu'il faut substituer à la place de l'inconnue dans la proposée, & on prendra cette grandeur au lieu de la limite dont elle donnera le signe.

On continuera ainsi de trouver des valeurs qui approchent de plus en plus à l'infini de la racine exacte, qu'on ne peut pas trouver autrement, puisqu'elle est incommensurable.

Exemple où les racines sont incommensurables.

Pour trouver les racines de l'équation $xx - 20x + 65 = 0$, dont la premiere a pour limites zero & 10, la seconde 10 & 21 : 1°. on prendra la moitié de la difference des limites zero & 10, laquelle moitié est 5, on l'ajoutera à zero, & la somme sera 5 ; on substituera 5 à la place de x dans la proposée, & l'on trouvera la somme toute connue -10 ; ainsi 5 donnant le signe $-$ de la plus grande des deux limites 0 & 10, on prendra 5 pour la plus grande limite au lieu de 10, & zero demeurera pour la moindre limite.

On prendra la plus grande moitié en nombres entiers de la difference des limites 0 & 5, cette moitié est 3, on la substituera à la place de x, & elle donnera $+14$; ainsi 3 donnant le signe de la moindre des deux limites zero & 5, on prendra 3 pour la moindre limite au lieu de zero, & la plus grande sera 5 ; on ajoutera 1, qui est la moitié de la difference de ces deux limites 3 & 5, à la plus petite 3, & on substituera la somme 4 au lieu de x, & l'on trouvera qu'elle donne la somme $+1$, qui a le même signe $+$ que donne la moindre limite.

L'on a donc les deux limites 4 & 5, qui ne different que de l'unité, dont l'une donne $+$ & l'autre $-$; ainsi la premiere racine de la proposée est plus grande que 4, & moindre que 5, & elle est incommensurable.

Pour en trouver la valeur en fractions qui en approche tant qu'on voudra, on prendra $\frac{1}{2}$ qui est la moitié de la difference 1 des deux limites 4 & 5, on l'ajoutera à la moindre limite 4, & la somme sera $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$; on substituera $\frac{9}{2}$ à la place de x dans la proposée, & on trouvera la somme toute connue $-4\frac{3}{4}$, qui a le signe $-$ que donne la plus grande des deux limites 4 & 5 ; ainsi on prendra $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ au lieu de 5, & les deux limites ou valeurs approchées de la premiere racine seront 4 & $4\frac{1}{2}$. On prendra $\frac{1}{4}$ qui est la moitié de la difference $\frac{1}{2}$ de ces deux limites 4, $4\frac{1}{2}$; on ajoutera cette moitié $\frac{1}{4}$ à la plus petite 4, & la somme $4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ sera la grandeur qu'on substituera à la place de x dans la proposée, & on trouvera la somme $-1\frac{15}{16}$, qui a le signe que donne la plus grande des deux limites 4, $4\frac{1}{2}$, ainsi on prendra $4\frac{1}{4}$ au lieu de la plus grande limite, & 4 demeurera pour la plus petite.

On continuera l'approximation en ajoutant $\frac{1}{8}$, qui est la moitié de la difference des deux dernieres limites 4, $4\frac{1}{4}$, à la moindre 4 ; & l'on substituera la somme $4\frac{1}{8} = \frac{33}{8}$ à la place de x dans la proposée ; & l'on trouvera la somme $-\frac{31}{64}$, qui a encore le signe que donne la plus grande limite $4\frac{1}{4}$; ainsi on prendra $4\frac{1}{8}$ pour la plus grande limite, au lieu de $4\frac{1}{4}$, & 4 demeurera la moindre limite.

Pour continuer l'approximation, on ajoutera $\frac{1}{16}$, qui est la moitié de la difference des deux limites 4, $4\frac{1}{8}$, à la moindre limite 4 ; & on substituera la somme $4\frac{1}{16} = \frac{65}{16}$, à la place de x dans la proposée, & on trouvera la somme toute connue $+\frac{65}{256}$, qui a le même signe que donne la substitution de la moindre limite 4 ; ainsi $4\frac{1}{16}$ sera une valeur approchée de la premiere racine moindre que la premiere racine, & $4\frac{1}{8}$ sera une valeur approchée de la même racine plus grande que cette racine, qui est entre $4\frac{1}{16}$ & $4\frac{1}{8}$.

On peut continuer l'approximation à l'infini : mais l'approximation qu'on vient de faire suffit pour faire concevoir la methode.

2°. On appliquera la même methode à la recherche de la seconde racine de la proposée, dont les limites sont 10 & 21 ; & aprés avoir trouvé qu'elle est entre 15 & 16, on continuera l'approximation en fractions, en ajoutant à la moindre limite 15, la moitié de la difference qui est entre 15 & 16, c'est à dire $\frac{1}{2}$, & on substituera la somme $15\frac{1}{2}$ à la place de x dans la proposée, & le reste comme dans l'approximation de la premiere racine.

Cette premiere methode est évidente aprés tout ce qui précede, puisqu'elle en est une suite necessaire, & elle n'a pas besoin de démonstration.

Seconde methode par le moyen de la transformation, qui sert à diminuer & à augmenter les racines.

157. Pour rendre la methode plus facile à entendre, on l'appliquera à un exemple en l'énonçant, & l'on fera en même temps les raisonnemens qui la démontrent.

Soit l'équation $xx - 76x + 1248 = 0$, dont il faut trouver la plus petite racine par cette methode ; les limites de la premiere racine sont la plus petite 19, qui étant substituée à la place de x, donne une somme toute connue qui a le signe $+$; la plus grande 38, qui étant substituée à la place de x, donne une somme qui a le signe $-$.

Il faut commencer par la moindre limite 19, & supposer $+19 +$ une indéterminée $f = x$, & substituer $+19 + f = x$ à la place de x dans la proposée, comme on le voit dans l'exemple figuré ; le dernier terme de la transformée qui en viendra, aura toujours le même signe que donne la moindre limite ; dans notre exemple il a le signe $+$.

* 38. Il est évident * que par cette premiere transformation, l'on diminue la premiere & plus petite racine dont on fait la recherche, de la grandeur 19 ; ainsi on la peut déja concevoir comme partagée en deux parties, dont l'une est la moindre limite 19, & l'autre est la plus petite racine de la transformée, dont il faut continuer la recherche. Il est de même évident qu'ôtant la moindre limite 19 de la plus grande 38, la difference 19 surpasse la premiere racine de la transformée, puisque 38 surpasse la premiere racine de la proposée ; ainsi il faut prendre la moitié en entiers 9 ou 10, il n'importe pas laquelle, de la difference 19, & supposer cette moitié $9 +$ une nouvelle indéterminée g, égale à la premiere indéterminée f, & substituer $+9 + g = f$ à la place de f dans la premiere transformée.

La seconde transformée qui vient de cette substitution,
* 50. ayant le signe $-$ au dernier terme, on est assuré * que la premiere racine de la premiere transformée est devenue négative dans la seconde, & qu'ainsi on l'a trop diminuée en la diminuant de 9.

On sçait donc déja que la premiere racine de la proposée est plus petite que $19 + 9 = 28$, & que la grandeur dont elle est plus petite que 28, est moindre que 9. C'est pourquoi il faut diminuer la premiere racine de la seconde transformée qui est négative, d'une grandeur moindre que 9 ; c'est à dire, il faut prendre la moitié de 9 en entiers qui est 4, la rendre négative, supposer $-4 +$ une nouvelle indéterminée h, égale à l'indéterminée g, & substituer -4

$+ h = g$ à la place de g dans la seconde transformée ; Et comme l'on trouve que le dernier terme de la troisiéme transformée qui vient de cette substitution, est zero ; il est évident * que la grandeur 4 est justement celle dont la pre- * 37.
miere racine de la seconde transformée avoit été trop diminuée, & qui étoit devenue négative par cette diminution ; & qu'ainsi 4 est la grandeur qu'il faut ôter de $+28$, pour avoir la racine qu'on cherche, qui est par consequent $19 + 9 - 4 = 24$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Exemple figuré pour trouver la plus petite racine de l'équation $xx - 76x + 1248 = 0$, *dont la moindre limite est 19, qui étant substituée à la place de* x, *donne une somme qui a le signe* $+$, *& dont la plus grande limite est 38, qui donne le signe* $-$.

EQUATION PROPOSÉE,

$$xx - 76x + 1248 = 0.$$

Il faut commencer par la moindre limite 19, & supposer

$+19 + f = x$	xx $-76x$ $+1248$	$= +361 + 38f + ff$ $= -1444 - 76f$ $= +1248$
Il faut ôter la moindre limite 19 de la plus grande 38, & prendre la moitié en entiers, qui est 9, de la difference qui est 19, & supposer	*Premiere transformée.*	$+165 - 38f + ff$
$+9 + g = f$	ff $-38f$ $+165$	$= +81 + 18g + gg$ $= -342 - 38g$ $= +165$
9 ayant donné au dernier terme de la transformée le signe $-$ de la plus grande limite 38, il faut prendre la moitié de 9 en entiers, qui est 4, & lui donner le signe $-$, & supposer	*Seconde transformée.*	$-96 - 20g + gg$
$-4 + h = g$	gg $-20g$ -96	$= +16 - 8h + hh$ $= +80 - 20h$ $= -96$

Etant arrivé à une transformée dont le dernier terme est zero, la racine est com-	*Troisiéme transformée.*	$0 - 28h + hh$

mensurable, & elle est égale à la somme des grandeurs connues des équations lineaires qui ont servi aux transformations; ainsi $x = +19 + 9 - 4 = 24$. *Ce qu'il falloit trouver.*

En diminuant la premiere racine de la proposée par les transformations, on diminue aussi la seconde; ainsi en ajoutant la premiere racine 24 à la racine 28 de la derniere transformée qui est lineaire, la somme 52 est la seconde racine de la proposée, dont cependant on va faire la recherche par la methode, pour la faire mieux concevoir.

On trouvera donc de même que la seconde racine est 52, on en voit les operations dans l'exemple figuré.

Pour trouver la plus grande racine de $xx - 76x + 1148 = 0$, *dont la plus petite limite est* 38, *qui étant substitué, donne le signe* —, *& la plus grande est* 77, *qui étant substitué, donne le signe* +.

On supposera $+38 + f = x$	xx $-76x$ $+1148$	$= +1444 + 76f + ff$ $= -2888 - 76f$ $= +1148$
On ôtera la moindre limite 38 de la plus grande 77, & on prendra la moitié en entiers 19 de la difference 39, & on supposera	*Premiere transformée.*	$-196 * + ff$
$+19 + g = f$	ff -196	$= +361 + 38g + gg$ $= -196$
+19 donnant au dernier terme de la transformée le signe + de la plus grande limite 77, on prendra en entiers la moitié 9 de 19, & on supposera.	*Seconde transformée.*	$+165 + 38g + gg$
$-9 + h = g$	gg $+38g$ $+165$	$= +81 - 18h + hh$ $= -342 + 38h$ $= +165$

— 9 donnant au dernier terme de la transformée le signe — de la moindre limite, on prendra en entiers la moitié 4 de 9, & on supposera	*Troisiéme transformée.*	$-96 + 20h + hh$
$+4 + i = h$	hh $+20h$ -96	$= +16 + 8i + ii$ $= +80 + 20i$ $= -96$
Etant arrivé à une transformée dont le dernier terme	*4^e transformée.*	$0 + 28i + ii$

est zero, la racine qu'on cherche est commensurable, & elle est égale à la somme des grandeurs connues des équations lineaires qui ont servi aux transformations; ainsi la plus grande racine de la proposée est $x = +38 + 19 - 9 + 4 = 52$. *Ce qu'il falloit trouver.*

continuation de la methode quand la racine qu'on cherche est incommensurable.

LORSQU'EN cherchant une racine par cette methode, on arrive à une transformation où l'on est obligé pour continuer, de prendre la moitié de l'unité, la racine qu'on cherche est incommensurable, n'étant pas un nombre entier, puisqu'on trouveroit une transformée dont le dernier terme seroit zero; c'est à dire, on trouveroit la racine exactement, si elle étoit un nombre entier; elle ne peut pas être aussi une fraction,* car on suppose la proposée sans fractions, * 34.
& que son premier terme n'a pas d'autre coéficient que l'unité. Dans ce cas la somme de toutes les quantités connues des équations lineaires qui ont servi aux transformations, est la valeur approchée en nombres entiers de la racine qu'on cherche.

On continuera tant qu'on voudra l'approximation en prenant $\frac{1}{2}$, c'est à dire la moitié de l'unité précedée du signe + ou —, selon que le dernier terme de la derniere transformée aura le signe de la moindre ou de la plus grande limite, c'est à dire + dans le premier cas, & — dans le second; & on supposera + ou $-\frac{1}{2}+$ une nouvelle indéterminée, égale à l'indéterminée de la derniere transformée, & le reste comme dans l'exemple figuré qui suit.

EXEMPLE FIGURÉ.

Pour trouver la plus grande racine de $xx - 20x + 65 = 0$, dont la moindre limite est 10, qui étant substituée à la place de x, donne le signe -5 & la plus grande est 21, qui donne le signe $+$.

On supposera $+10+f=x$	xx $-20x$ $+65$	$= +100 + 10f + ff$ $= -100 - 10f$ $= +65$
On ôtera la moindre limite 10 de la plus grande 21, on prendra la moitié en entiers 6 du reste 11, & on supposera	*Premiere transformée.*	$-35 * + ff$
$+6+g=f$	ff -35	$= +36 + 12g + gg$ $= -35$
Le dernier terme de cette transformée ayant le signe $+$ de la plus grande limite, le nombre 6 est trop grand, il faut en prendre la moitié 3, & supposer	*Seconde transformée.*	$+1 + 12g + gg$
$-3+h=g$	gg $+12g$ $+1$	$= +9 - 6h + hh$ $= -36 + 12h$ $= +1$
Le dernier terme de cette transformée ayant le signe $-$ de la moindre limite, on ôtera 3 de 6, & on prendra la moitié du reste 3 en entiers, qui est 2, & on supposera	*Troisiéme transformée.*	$-26 + 6h + hh$
$+2+i=h$	hh $+6h$ -26	$= +4 + 4i + ii$ $= +12 + 6i$ $= -26$

Le dernier terme ayant le signe $-$ de la moindre limite, on ôtera 2 du reste précedent 3, il restera 1, dont il faut prendre la moitié $\frac{1}{2}$, & supposer	*Quatriéme transformée*	$-10 + 10i + ii$
$+\frac{1}{2}+k=i$	ii $+10i$ -10	$= +\frac{1}{4} + 1k + kk$ $= +5 + 10k$ $= -10$
Le dernier terme ayant encore le signe $-$, il faut ôter $\frac{1}{2}$ du dernier reste 1, & prendre la moitié du reste $\frac{1}{2}$, laquelle est $\frac{1}{4}$, & supposer	*Cinquiéme transformée.*	$-4\frac{1}{4} + 11k + kk$
$+\frac{1}{4}+l=k$	kk $+11k$ $-4\frac{1}{4}$	$= +\frac{1}{16} + \frac{1}{2}l + ll$ $= +\frac{11}{4} + 11l$ $= -4\frac{1}{4}$
Le dernier terme ayant encore le signe $-$, il faut ôter $\frac{1}{4}$ du dernier reste $\frac{1}{2}$, il restera $\frac{1}{4}$, dont il faut prendre la moitié $\frac{1}{8}$, & supposer	*Sixiéme transformée.*	$-1\frac{11}{16} + 11\frac{1}{2}l + ll$
$+\frac{1}{8}+m=l$	ll $+11\frac{1}{2}l$ $-1\frac{11}{16}$	$= +\frac{1}{64} + \frac{1}{4}m + mm$ $= +\frac{23}{16} + \frac{23}{2}m$ $= -1\frac{11}{16}$
Le dernier terme ayant encore le signe $-$ de la moindre limite, la somme de tou-	*Septiéme transformée.*	$-\frac{11}{64} + \frac{47}{4}m + mm$

tes les grandeurs connues des équations lineaires qui ont servi aux transformations, est une valeur approchée moindre que la racine qu'on cherche, ainsi $+10+6-3+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=15+\frac{7}{8}$, est une valeur approchée moindre que la racine qu'on cherche, qui est moyenne entre $15\frac{7}{8}$ & 16. On peut continuer l'approximation tant qu'on voudra, en ôtant $\frac{1}{8}$ du dernier reste $\frac{1}{4}$, & prenant la moitié du reste $\frac{1}{8}$, laquelle moitié est $\frac{1}{16}$, & supposant $+\frac{1}{16}+n=m$, &c. Quand zero est une des limites de la racine qu'on cherche, il faut prendre la moitié de la plus grande limite, & supposer cette moitié positive plus une indéterminée, égale à l'inconnue de la proposée, & continuer l'operation comme dans les exemples précedents.

Par exemple si l'on cherche la premiere racine de $xx - 20x + 65 = 0$, dont la moindre limite est zero, qui étant substituée à la place de l'inconnue, donne $+$, & la plus grande limite est 10, qui étant substituée donne $-$, il faut prendre la moitié de 10 qui est 5, & supposer $+5+f=x$, & faire l'operation comme dans les exemples précedens.

Cette seconde methode est démontrée par les raisonnemens qu'on a faits en l'énonçant.

Troisiéme methode par le moyen de la transformation, qui sert à multiplier les racines d'une équation.

AVERTISSEMENT.

158. CETTE methode sert à trouver une valeur approchée d'une racine d'une équation qui en differe moins que de $\frac{1}{10}$, ou $\frac{1}{100}$, ou $\frac{1}{1000}$, ou $\frac{1}{10000}$, & ainsi à l'infini.

On peut l'appliquer immédiatement à la recherche d'une racine dont on a deux limites, l'une moindre & l'autre plus grande que cette racine : mais pour éviter la longueur du calcul, il est mieux de trouver par la premiere methode, avant de se servir de cette troisiéme, deux valeurs en entiers approchées de la racine, qui ne different entr'elles que de l'unité, & il faut ensuite se servir de cette troisiéme methode pour trouver des valeurs en fractions decimales qui approchent tant qu'on voudra de la racine.

1°. Il faut mettre un zero devant le coéficient du second terme, c'est à dire, multiplier ce coéficient par 10, si l'on veut une valeur approchée qui ne differe de la racine que de $\frac{1}{10}$; il faut mettre deux zeros, si l'on veut une valeur qui ne differe que de $\frac{1}{100}$; il faut mettre trois zeros, si l'on veut une valeur qui ne differe que de $\frac{1}{1000}$, & ainsi de suite.

Il faut mettre devant le coéficient du troisiéme terme deux fois autant de zeros qu'on en a mis au second terme; devant celui du quatriéme terme, trois fois autant de zeros; devant

le coéficient du cinquiéme terme, quatre fois autant de zeros qu'on en a mis au second terme, & ainsi de suite.

Par exemple si l'on a mis deux zeros au second terme, il en faut mettre deux fois deux, c'est à dire quatre zeros au troisiéme; trois fois deux, c'est à dire six zeros au quatriéme terme, & ainsi de suite.

2°. Il faut mettre devant chacune des deux limites autant de zeros qu'on en a mis au second terme.

3°. Il faut ensuite par la premiere methode, trouver deux valeurs approchées de la racine qu'on cherche, qui ne different entr'elles que de l'unité.

4°. Enfin il faut écrire chaque valeur sur une ligne pour les numerateurs, & écrire au dessous de chacune pour dénominateur, l'unité avec autant de zeros qu'on en a mis au second terme. Ces deux fractions sont les valeurs approchées qu'on cherchoit.

EXEMPLE.

POUR trouver une valeur approchée de la plus petite racine de $xx - 20x + 65 = 0$, qui n'en differe pas de $\frac{1}{1000}$, dont on a par la premiere methode les deux limites approchées en entiers 4 & 5, qui ne different entr'elles que de l'unité; 1°. on mettra trois zeros au second terme, & six au troisiéme, & l'on aura la transformée $xx - 20000x + 65000000 = 0$, dont les racines sont celles de la proposée, multipliées chacune par 1000. 2°. On mettra autant de zeros devant chacune des limites 4 & 5, qu'on en a mis au second terme, & l'on aura 4000, & 5000 pour les limites de la transformée. 3°. On cherchera par la premiere methode deux valeurs approchées en entiers, qui ne different entr'elles que de l'unité, de la premiere racine de la transformée, dont la moindre limite est 4000, qui donne $+$, & la plus grande 5000, qui donne $-$, & l'on trouvera que ces valeurs sont 4094 & 4095. 4°. Il faut écrire ces valeurs en fraction, & leur donner 1000 pour dénominateur, & l'on aura $\frac{4094}{1000}$ & $\frac{4095}{1000}$ pour les valeurs approchées de la premiere racine de la proposée $xx - 20x + 65 = 0$, dont la premiere $\frac{4094}{1000}$ est moindre que cette racine, & la seconde $\frac{4095}{1000}$ est plus grande, & l'une & l'autre n'en different pas de $\frac{1}{1000}$.

Il est si facile d'appliquer cette methode à tous les exemples qu'on voudra, qu'il est inutile d'en grossir ce traité.

Démonstration de cette methode.

LES racines de la transformée sont les racines de la proposée, multipliées chacune par 1000*, les limites de la première racine de la proposée, qui sont 4 & 5, étant multipliées par 1000, sont les limites de la premiere racine de la transformée*; par consequent les valeurs 4094 & 4095 qu'on trouve en employant la premiere methode, sont les valeurs approchées de la premiere racine de la transformée; il est donc évident qu'en divisant ces valeurs par 1000, les fractions qui en naîtront seront les valeurs approchées de la premiere racine de la proposée.

* 56. 4^e transformée.

* 149.

Il est clair que cette démonstration est generale, & qu'on ne l'a appliquée à un exemple que pour la rendre plus facile & plus courte.

Quatriéme methode par le moyen de la transformation, qui sert à diminuer & à augmenter les racines des équations, mais d'une maniere un peu differente de la seconde methode.

AVERTISSEMENT.

159. QUOIQU'ON puisse se servir de cette methode pour approcher à l'infini d'une racine d'une équation, lorsqu'on en connoît deux limites quelconques, l'une moindre & l'autre plus grande que la racine, avec le signe que donne chacune de ces limites, étant substituées dans l'équation à la place de l'inconnue, & même lorsqu'on ne connoît qu'une des deux limites de la racine qu'on cherche, pourvu qu'on sçache si elle est moindre ou plus grande que cette racine, & le signe qu'elle donne, étant substituée dans l'équation à la place de l'inconnue; cependant on abregera de beaucoup le calcul, si l'on trouve par la premiere methode les limites qui ne different pas de la racine qu'on cherche de l'unité entiere; c'est à dire, qui ne different entr'elles que de l'unité.

On appliquera cette methode à un exemple en l'énonçant, pour la faire mieux concevoir, & l'on fera dans les operations qu'elle prescrit, les raisonnemens qui en font la démonstration, qu'on mettra dans la derniere évidence dans les remarques.

Soit proposé de trouver par cette methode les racines de l'équation $x^4 - 80x^3 + 1998xx - 14937x + 5000 = 0$, qui sont toutes incommensurables; la premiere & plus petite racine est moindre que l'unité, & elle est plus grande que $\frac{2}{10}$, qui étant substituée à la place de x, donne une somme toute connue qui a $+$, & elle est moindre que $\frac{4}{10}$ qui donne $-$; la seconde est entre 12 qui donne $-$, & 13 qui donne $+$; la 3^e racine est entre 32 qui donne $+$, & 33 qui donne $-$; la 4^e est entre 34 qui donne $-$, & 35 qui donne $+$.

Pour trouver celle de ces racines qu'on voudra, par exemple la seconde qui est entre 12 qui donne $-$, & 13 qui donne $+$, 1°, on supposera la moindre limite 12 plus une indéterminée f, égale à x, & l'on aura $+12 + f = x$; si on vouloit se servir de la plus grande limite 13, on supposeroit $13 - f = x$. On substituera dans la proposée $12 + f = x$, à la place de x: (En voici l'operation.)

$$\begin{array}{lllllll}
x^4 & = +20736 & +6912f & +864ff & +48f^3 & +f^4 \\
-80x^3 & = -138240 & -34560f & -2880ff & -80f^3 & \\
+1998xx & = +287712 & +47952f & +1998ff & & \\
-14937x & = -179244 & -14937f & & & \\
+5000 & = +5000 & & & & \\
\hline
\end{array}$$

& l'on aura la transformée $\quad 0 = -4036 + 5367f - 18ff - 32f^3 + f^4$,

on la supposera representée par $\quad 0 = -r + qf - pff - nf^3 + f^4$

Il est évident* que les racines de la transformée sont celles de la proposée, diminuées chacune de la quantité 12, parcequ'elles sont toutes positives. Ainsi la premiere ou plus petite racine de la proposée étant moindre que 12, elle est trop diminuée pour demeurer positive, & elle est devenue négative; & la seconde racine qu'on cherche étant diminuée de 12 dans la transformée, elle est encore positive, & sa grandeur dans la transformée est exactement le reste de la seconde racine de la proposée, dont on a ôté la grandeur 12; c'est à dire, le reste de la seconde racine de la proposée, aprés en avoir ôté 12, est la plus petite des racines qui restent positives dans la transformée; d'où l'on voit que pour avoir la valeur approchée de la seconde racine de la proposée, il faut trouver la valeur approchée de la plus * 58.

petite des racines positives de la transformée, ajouter cette valeur approchée à la quantité 12, & la somme sera la valeur approchée de la seconde racine de la proposée.

Pour trouver cette valeur approchée de la plus petite racine de la transformée, c'est à dire la plus petite valeur de f dans la transformée, il y a deux manieres: Et pour faire des formules pour l'une & pour l'autre de ces manieres, il faut se servir de l'équation litterale $0 = -r + qf - pff - nf^3 + f^4$.

Premiere maniere de trouver la valeur approchée de f.

La premiere maniere est de se servir d'abord des deux derniers termes seuls $+qf - r = 0$ de la transformée, en négligeant tous les autres dans lesquels les puissances de f vont en diminuant, puisque f est moindre que l'unité, & de supposer ces deux derniers termes égaux à zero; & l'on aura $f = \frac{r}{q}$.

Cette valeur de f est un peu trop petite; car puisque $r = qf - pff - nf^3 + f^4$, il est visible que $f = \frac{r}{q - pf - nff + f^3}$ & que $\frac{r}{q - pf - nff + f^3}$ est plus grande que $\frac{r}{q}$, puisque le dénominateur de la premiere est plus petit que le dénominateur de la seconde; ainsi on corrigera la premiere valeur de $f = \frac{r}{q}$, en mettant cette valeur de f, au lieu de f, dans $f = \frac{r}{q - pf - nff + f^3}$, & l'on aura $f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$; c'est la formule dont il faut se servir pour trouver la valeur de f par cette premiere maniere.

Cette formule de la valeur de $f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, qu'on peut aussi exprimer par $f = \frac{q^3 r}{q^4 - pqqr - nqrr + r^3}$, donne une valeur un peu trop petite; car le consequent de la fraction $\frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, est plus grand qu'il ne devroit être, puisque si l'on conçoit la veritable valeur de f, qui surpasse $\frac{r}{q}$, à la place de $\frac{r}{q}$ dans le consequent de la fraction $\frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, il est visible que les grandeurs

négatives $-\frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq}$ du consequent, seroient plus grandes qu'elles ne sont; ainsi elles ôteroient une plus grande quantité de la grandeur q, que n'en ôtent les grandeurs négatives $-\frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq}$. La valeur de $f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, est donc plus petite qu'elle ne devroit être, puisque le dénominateur en est plus grand qu'il ne devroit être.

Pour avoir la valeur approchée de f par cette formule, qui est ce qu'on cherche, on mettra dans cette formule $f = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, ou plutôt dans celle-ci, qui est toute préparée $f = \frac{q^3 r}{q^4 - pqqr - nqrr + r^3}$, les grandeurs numeriques de la transformée, à la place des lettres qui les representent, & l'on aura $f = \frac{613944475013068}{824885660086681}$; ou bien en réduisant cette fraction en fraction decimale, ce qui est plus commode pour le calcul, on aura $f = \frac{q^3 r}{q^4 - pqqr - nqrr + r^3} = 0,75640^{v}$. La valeur approchée par cette premiere maniere de la seconde racine de la proposée, est donc $12,75640^{v}$.

Seconde maniere de trouver la valeur approchée de f.

La seconde maniere de trouver la valeur approchée de la plus petite des racines positives, representée par f, de la transformée, qui est representée par $0 = -r + qf - pff - nf^3 + f^4$, est de se servir des trois derniers termes seuls $0 = -r + qf - pff$ de cette transformée, en négligeant d'abord les autres $-nf^3 + f^4$, comme tres petits par raport aux trois derniers, & de supposer que ces trois termes font une équation du second degré $0 = -r + qf - pff$; ou bien en transposant, pour rendre le terme $-pff$ positif, l'on aura $pff - qf + r = 0$, qui se réduit à $ff - \frac{q}{p}f + \frac{r}{p} = 0$; on prendra ensuite par la methode qui sert à resoudre les équations du second degré, la plus petite des deux racines de cette équation, qui est $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, qu'on peut aussi exprimer ainsi $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$; c'est la formule dont il faut se servir d'abord pour trouver par cette seconde maniere la valeur approchée de f qu'on cherche, en substituant les grandeurs numeriques de la transformée à la place des lettres qui les representent ; & l'on trouvera en faisant le calcul, & se servant des fractions decimales,

$$f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p} = \frac{2683,5^{\prime} - \sqrt{\frac{\text{[illegible]}}{4} - 72648}}{18} =$$

$0,7539^{iv}$; ainsi on a déja $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p} = 0,7539^{iv}$.

Il faut corriger cette valeur qui est trop petite ; car disposant ainsi la transformée $pff - qf + r + nf^3 - f^4 = 0$, ou bien $ff - \frac{q}{p}f + \frac{r}{p} + \frac{nf^3}{p} - \frac{f^4}{p} = 0$, & regardant cette équation comme du second degré, dont le premier terme est ff, le second $-\frac{q}{p}f$, & le troisiéme $+\frac{r}{p} + \frac{nf^3}{p} - \frac{f^4}{p}$, on trouve en la resolvant, que la plus petite de ses deux racines est $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{nf^3}{p} + \frac{f^4}{p}}$, qui peut aussi s'exprimer ainsi $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npf^3 + pf^4}}{p}$:

Or il est évident que $\sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, est plus grande que $\sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{nf^3}{p} + \frac{f^4}{p}}$; la premiere étant ôtée de $\frac{q}{2p}$, laisse donc un reste $\frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, qui est moindre que le reste $\frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{nf^3}{p} + \frac{f^4}{p}}$, qui est celui que laisse la seconde, étant ôtée de $\frac{q}{2p}$; ainsi la premiere valeur $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}}$, est plus petite qu'il ne faut.

Pour la corriger on supposera $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p}} = m$, & on substituera m à la place de f dans le second membre de $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{nf^3}{p} + \frac{f^4}{p}}$, & l'on aura la formule corrigée $f = \frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}m^3 + \frac{m^4}{p}}$, qui se peut aussi exprimer de cette maniere pour la commodité du calcul, $f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npm^3 + pm^4}}{p}$.

Pour trouver par cette formule la valeur approchée de f, qui est ce qu'on cherche, on substituera dans cette formule à la place des lettres, les grandeurs numeriques de la transformée que representent ces lettres ; & à la place de m, la grandeur $\frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$, qui est égale dans notre

exemple à $0, 7539^{iv}$, & l'on trouvera en employant les fractions decimales, la valeur approchée qu'on cherche,

$$f = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npm^3 + pm^4}}{p} = 0, 75641609^{viii}.$$

Cette valeur de f, ou de la plus petite des racines positives de la transformée précedente, est encore un peu plus petite que cette racine ; car il est évident que m étant moindre que la valeur exacte de f dans la transformée, la grandeur négative $-\frac{nm^3}{p}$ est moindre que la grandeur $\frac{nf^3}{p}$, en supposant que f represente sa valeur exacte ; par consequent la grandeur négative $-\frac{nm^3}{p}$, étant moindre qu'il ne faut dans $\sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}m^3 + \frac{m^4}{p}}$, cette grandeur entiere a, pour ainsi parler, une plus grande grandeur positive qu'elle ne devroit avoir ; elle ôte donc plus qu'elle ne devroit ôter de la grandeur $\frac{q}{2p}$, d'où il suit que la quantité totale $\frac{q}{2p} - \sqrt{\frac{qq}{4pp} - \frac{r}{p} - \frac{n}{p}m^3 + \frac{m^4}{p}}$, qu'on suppose égale à f, est cependant un peu plus petite que la valeur exacte de f : ainsi la valeur approchée de f, qu'on trouve par cette seconde maniere, qui est $f = 0, 75641609^{viii}$, est un peu plus petite que la valeur exacte de f.

Joignant cette valeur de f à la moindre limite 11, l'on a $11, 75641609^{viii}$ pour la valeur approchée de la seconde racine de la proposée.

On peut continuer l'approximation de cette seconde racine à l'infini par cette quatriéme methode, comme on le va voir. Mais il est bon de remarquer auparavant que si l'on ne pouvoit pas s'assurer, comme on l'a fait, que la valeur approchée de f qu'on a trouvée par ces deux manieres, fût moindre ou plus grande que sa valeur exacte, on le pourroit toujours en substituant cette valeur approchée de f à la place de f dans la transformée ; car si la somme toute connue qui en viendroit, avoit le signe de la moindre limite, ou, ce qui est la même chose, celui du dernier terme de la transformée, il est évident que la valeur approchée seroit moindre que la valeur exacte de f. Si cette somme avoit le signe de la plus grande limite de la racine dont on fait la recherche, ou, ce qui est la même chose, le signe opposé à celui du dernier terme de la transformée, il est évident que la valeur approchée ſeroit plus grande que la valeur exacte de f.

Il faut auſſi remarquer que ſi l'on s'étoit ſervi de la plus grande limite 13, au lieu de la moindre limite 12, pour trouver la ſeconde racine de la propoſée, & que l'on eût ſuppoſé $13 - f = x$ pour la premiere transformée, il faudroit ôter de 13 la valeur approchée de f, au lieu de l'ajouter à 12, comme on l'a fait en ſe ſervant de la moindre limite 12.

Continuation de l'approximation de la ſeconde racine de la propoſée, ou continuation de la quatriéme methode.

2°. POUR continuer l'approximation de la ſeconde racine, on ſuppoſera la valeur approchée de f qu'on vient de trouver par l'une ou l'autre des deux manieres précedentes plus une indéterminée g, égale à f; ce qui donnera $0,75640^{v} + g = f$, ou $0,75641609^{viii} + g = f$; on ſubſtituera cette valeur de f à ſa place dans la transformée précedente, & l'on trouvera une ſeconde transformée.

Si la valeur approchée de f étoit plus grande que f, on ſuppoſeroit pour trouver la ſeconde transformée, cette valeur de f moins g, égale à f.

Comme il ne s'agit ici que de faire concevoir clairement la methode, pour rendre le calcul un peu moins long, on ne prendra que le dernier chifre 7^{i} ou $\frac{7}{10}$ de la valeur de f qu'on a trouvée, pour la valeur approchée de f, & l'on ſuppoſera $7^{i} + g = f$; on ſubſtituera cette valeur de f à ſa place dans la transformée précedente, comme on le voit ici :

$$\begin{array}{rcllll}
f^4 & = & +0,2401^{iv} & +1,372^{iii}g & +2,94^{ii}gg & +2,8^{i}g^3 \; +g^4 \\
-32f^3 & = & -10,976^{iii} & -47,04^{ii}g & -67,2^{i}gg & -32g^3 \\
-18ff & = & -8,82^{ii} & -25,2^{i}g & -18gg & \\
+5367f & = & +3756,9^{i} & +5367g & & \\
-4036 & = & -4036 & & & \\
\hline
\text{on trouvera la transformée} \quad 0 & = & -298,6559^{iv} & +5296,132^{iii}g & -82,26^{ii}gg & -29,2^{i}g^3 \; +g^4 \\
\text{on la ſuppoſera repreſentée par} \quad 0 & = & -r & +qg & -pgg & -ng^3 \; +g^4
\end{array}$$

Il eſt évident par les raiſonnemens qu'on a faits ſur la premiere transformée, que la plus petite valeur poſitive de g, c'eſt à dire la plus petite des racines poſitives de cette ſeconde

ſeconde transformée, eſt exactement ce qui reſte de la valeur de la ſeconde racine de la propoſée, aprés en avoir ôté 12, & encore la valeur approchée de f dans la premiere transformée; ainſi il faut pour continuer l'approximation de la ſeconde racine de la propoſée, trouver la valeur approchée de la plus petite racine g de cette ſeconde transformée.

Pour la trouver par la premiere maniere, on ſe ſervira de la formule $g = \frac{r}{q - \frac{pr}{q} - \frac{nrr}{qq} + \frac{r^3}{q^3}}$, ou plutôt de la formule $g = \frac{q^3r}{q^4 - pqqr - nqrr + r^3}$, qui eſt plus propre pour le calcul; & on trouvera en ſubſtituant dans cette formule, au lieu des lettres, les grandeurs numeriques de la ſeconde transformée, qui ſont repreſentées par ces lettres, $g = 0,056441^{vi}$; ainſi en ajoutant cette valeur approchée de g à $12, 7^{i}$ qu'on a déja, la valeur approchée de la ſeconde racine de la propoſée ſera $12,756441^{vi}$, qui eſt un peu plus petite que la veritable ſeconde racine de la propoſée.

Pour trouver la valeur de g par la ſeconde maniere, on ſe ſervira d'abord de la formule $g = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$; on ſubſtituera dans cette formule à la place des lettres, les grandeurs numeriques de la ſeconde transformée, repreſentées par ces lettres, & on trouvera $g = 0,0564408033l^{xi}$; & ſuppoſant enſuite la lettre $m = g = 0,0564408033l^{xi}$ $= \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$, on prendra la formule corrigée $g = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - npm^3 + pm^4}}{p}$; on ſubſtituera dans cette formule les grandeurs numeriques de la transformée, à la place des lettres qui les repreſentent; on y ſubſtituera auſſi la valeur de $m = 0,056440$ &c. à la place de m, & on trouvera $g = 0,056441794480744o2^{xviii}$; on ajoutera cette valeur approchée de g aux parties $12, 7^{i}$ de la ſeconde racine de la propoſée, qu'on a déja trouvées, & l'on aura pour la valeur approchée de cette ſeconde racine $x = 12,7564417944807440 2^{xvii}$. Cette valeur approchée eſt de tres peu plus petite que la veritable.

3°. On peut continuer l'approximation de la seconde racine de la proposée, en supposant la valeur approchée de g qu'on vient de trouver, plus une nouvelle indéterminée h, égale à g; & substituant cette valeur de g à sa place dans la seconde transformée, il en viendra une troisiéme transformée; on trouvera la valeur approchée de la plus petite racine positive h de cette troisiéme transformée, par laquelle on voudra des deux formules précedentes, & ainsi à l'infini.

REMARQUE.

CETTE quatriéme methode convient avec la seconde dans la premiere operation, par laquelle on trouve la premiere transformée, mais elle en est differente dans la maniere de trouver les valeurs approchées de la plus petite racine positive de chacune des transformées, par le moyen des formules qu'on a expliquées. Le calcul de cette quatriéme methode est long, mais en récompense on approche à chaque operation extrêmement de la racine qu'on cherche.

Ceux qui veulent se la rendre familiere, peuvent l'appliquer à la recherche de la premiere, de la troisiéme & de la quatriéme racine de la proposée.

Corollaire de la quatriéme methode.

160. POUR avoir les formules des équations de chaque degré, qui servent à trouver la valeur approchée de la moindre racine positive de chacune des transformées, on supposera que k represente l'indéterminée ou l'inconnue de chacune des transformées, & que ces transformées sont representées par les équations litterales qui suivent :

$$0 = \ldots q \ldots pk \ldots nkk \ldots k^3$$
$$0 = \ldots r \ldots qk \ldots pkk \ldots nk^3 \ldots k^4$$
$$0 = \ldots s \ldots rk \ldots qkk \ldots pk^3 \ldots nk^4 \ldots k^5$$
$$0 = \ldots t \ldots sk \ldots rkk \ldots qk^3 \ldots pk^4 \ldots nk^5 \ldots k^6.$$

On ne met pas la formule du second degré, dont on trouve facilement les racines approchées, par la methode qui est particuliere aux équations du second degré : On ne met pas les signes, mais seulement des points entre les termes, pour marquer que les signes de ces équations generales pour chaque degré, doivent être déterminés par les signes des

transformées qu'on trouve, c'est à dire leur être semblables : On ne mettra pas les signes devant les grandeurs des formules suivantes pour la même raison. Enfin on ne met pas les équations qui passent le sixiéme degré, dont on a rarement besoin, chacun peut les ajouter, & leurs formules, ce qui est facile.

Formules de la premiere maniere.

POUR le troisiéme degré $k = \frac{pq}{p^3 \ldots npq \ldots qq}$.

Pour le quatriéme degré $k = \frac{qr}{q^3 \ldots pqr \ldots nqrr \ldots rr}$.

Pour le cinquiéme degré $k = \frac{rs}{r^3 \ldots qrs \ldots prss \ldots nss \ldots ss}$.

Pour le sixiéme degré $k = \frac{st}{s^3 \ldots rst \ldots qstt \ldots ptt \ldots ntt \ldots tt}$.

Formules de la seconde maniere.

Pour le troisiéme degré.

Formules par où il faut commencer.	*Formules corrigées.*
$k = \frac{\ldots \frac{1}{2}p \ldots \sqrt{\frac{1}{4}pp \ldots nq}}{n} = m.$	$k = \frac{\ldots \frac{1}{2}p \ldots \sqrt{\frac{1}{4}pp \ldots nq \ldots nm^3}}{n}.$

Pour le quatriéme degré.

$$k = \frac{\ldots \frac{1}{2}q \ldots \sqrt{\frac{1}{4}qq \ldots pr}}{p} = m. \quad \Big| \quad k = \frac{\ldots \frac{1}{2}q \ldots \sqrt{\frac{1}{4}qq \ldots pr \ldots npm^3 \ldots pm^4}}{p}.$$

Pour le cinquiéme degré.

$$k = \frac{\ldots \frac{1}{2}r \ldots \sqrt{\frac{1}{4}rr \ldots qs}}{q} = m. \quad \Big| \quad k = \frac{\ldots \frac{1}{2}r \ldots \sqrt{\frac{1}{4}rr \ldots qs \ldots pqm^3 \ldots nqm^4 \ldots qm^5}}{q}.$$

Pour le sixiéme degré.

$$k = \frac{\ldots \frac{1}{2}s \ldots \sqrt{\frac{1}{4}ss \ldots rt}}{r} = m. \quad \Big| \quad k = \frac{\ldots \frac{1}{2}s \ldots \sqrt{\frac{1}{4}ss \ldots rt \ldots qrm^3 \ldots prm^4 \ldots nrm^5 \ldots rm^6}}{r}.$$

Pour se servir de ces formules, il faut d'abord supposer la plus petite limite de la racine dont on veut trouver la valeur approchée, plus une nouvelle indéterminée f, égale à l'inconnue x de l'équation proposée. (On suppose que la limite ne differe pas de la racine qu'on cherche d'une unité entiere.) Il faut substituer la valeur de x à sa place dans la proposée, & l'on aura la premiere transformée.

Pour trouver la valeur approchée de la moindre des racines positives de cette transformée, on supposera que cette transformée est representée par l'équation generale qui lui convient; dans le troisiéme degré, par $k^3 \ldots nkk$, &c. & ainsi des autres. On supposera que l'inconnue f de cette transformée est representée par la lettre k des formules.

Si l'on veut se servir des formules de la premiere maniere, on substituera dans la formule du degré de la proposée, les grandeurs numeriques de la transformée, à la place des lettres qui les représentent; & aprés la substitution, on aura la valeur approchée qu'on cherche.

Si l'on veut se servir des formules de la seconde maniere, il faut faire deux operations: 1°. Il faut substituer dans la formule du degré qui convient à la transformée, par laquelle on a marqué qu'il falloit commencer, les grandeurs numeriques de la transformée, à la place des lettres qui les representent; & aprés la substitution, on aura la valeur qu'on cherche; mais il la faut corriger. On nommera cette valeur non corrigée m; 2°. & on substituera dans la formule corrigée la valeur de m, & les valeurs des autres lettres de la formule, à la place de ces lettres; & ce qui viendra de la substitution sera la valeur approchée qu'on cherche.

Pour continuer l'approximation, on supposera la valeur approchée qu'on vient de trouver plus une nouvelle indéterminée g, égale à l'indéterminée f de la premiere transformée. Si la valeur approchée surpassoit la veritable valeur de f, on supposeroit cette valeur moins g, égale à f. On substituera cette valeur de f à sa place dans la premiere transformée, & il en viendra une seconde transformée: on trouvera la valeur approchée de la plus petite racine positive g de cette transformée par les formules, comme on a trouvé la valeur approchée de f, & on continuera l'approximation tant qu'on voudra.

La somme de la limite de la racine qu'on cherche, qui a servi à la premiere operation, & de toutes les valeurs approchées des inconnues des transformées, prises de suite, sera la valeur approchée de la racine qu'on cherche.

L'exemple qu'on en a donné suffit pour faire concevoir l'application des formules.

AVERTISSEMENT.

On pourroit chercher une racine négative d'une équation proposée par les methodes précedentes, en employant des limites negatives; mais comme il est facile* de faire en sorte * 48.
que les racines négatives d'une équation proposée deviennent positives, en changeant les signes des termes pairs, il vaut mieux chercher les racines par les limites positives, cela accoutume à une même methode, & la rend plus facile.

Remarques sur cette quatriéme methode d'approximation, qu'il faut se rendre familieres.

I.

161. Cette methode fait trouver une racine d'une équation proposée par parties, que l'on découvre les unes aprés les autres; elle suppose qu'on sçait par une autre voye la premiere partie de la racine, qui en differe tres peu: mais elle fait trouver les autres parties par des transformées, dont les racines positives sont les racines positives de la proposée, diminuées chacune de la somme déja trouvée des parties de la racine dont on fait la recherche, & dont les racines négatives sont les négatives de la proposée augmentées chacune de la même somme; & quand la somme déja trouvée des parties de la racine dont on fait la recherche, surpasse cette racine, ou surpasse aussi d'autres racines positives de la proposée, la racine de la proposée dont on fait la recherche, & toutes ces autres racines positives, sont devenues négatives dans la transformée où cela se rencontre, puisqu'elles ont été trop diminuées; & il ne leur reste à chacune dans cette transformée, que l'excés dont la somme déja trouvée des parties de la racine qu'on poursuit, surpasse chacune de ces racines positives de la proposée; & cet excés est négatif.

Ainsi si l'on appelle a la premiere partie de la racine dont on fait la recherche; b, la seconde partie; c, la troisiéme, & ainsi de suite; la premiere partie a est supposée connue d'ailleurs, & elle sert à trouver la seconde partie b, en transformant l'équation proposée, par exemple $x^3 - nxx + px - q = 0$, par la supposition de $a + f = x$, & par la substitution de cette valeur de x à sa place dans la proposée.

On remarquera ſur cette premiere transformée, 1°, que les racines poſitives de la propoſée, & par conſequent celle que l'on cherche, ſont diminuées chacune de la grandeur a; ainſi chacune des racines poſitives de la premiere transformée, eſt preciſément l'excés des racines poſitives de la propoſée plus grandes que a ſur cette grandeur a; & ſi a ſurpaſſe quelques racines poſitives de la propoſée, elles deviennent négatives dans la transformée, & l'excés de a ſur ces racines poſitives de la propoſée, eſt preciſément leur valeur négative, pour ainſi parler, dans la transformée; & les autres racines négatives de la transformée étant augmentées chacune de a, leur valeur dans la transformée eſt la ſomme de chacune des racines négatives de la propoſée & de la grandeur a.

2°. Par conſequent le terme tout connu, (qu'on nommera ici le premier,) de la transformée, étant * la ſomme toute connue qui vient de la grandeur a, ſubſtituée à la place de x dans la propoſée; cette ſomme ou ce premier terme eſt le produit des differences qui ſont entre chacune des racines poſitives de la propoſée & la grandeur a, par les racines négatives de la propoſée augmentées chacune de la grandeur a.

*119.

II.

162. La premiere transformée fait découvrir la ſeconde partie b de la racine de la propoſée, dont on fait la recherche, par la premiere maniere de la quatriéme methode; c'eſt le quotient qu'on trouve en diviſant le premier terme tout connu de la premiere transformée par le coéficient du terme ſuivant, c'eſt à dire du terme où f eſt lineaire, (qu'on nommera ici le ſecond terme,) ou, ce qui revient au même, cette ſeconde partie b eſt une fraction dont le numerateur eſt le premier terme tout connu de la transformée dont on a changé le ſigne, (car pour trouver cette fraction, on a ſuppoſé le premier terme égal au ſecond, ce qui change le ſigne du premier terme; & dégageant f dans cette équation, on trouve la fraction dont on vient de parler,) & le dénominateur eſt le coéficient du ſecond terme de la transformée: Mais comme le premier terme n'eſt pas égal au ſeul ſecond terme, mais à tous les autres termes, quand on veut avoir la ſeconde partie b de la racine plus approchante de la veritable, il faut ajouter au dénominateur de cette fraction le produit du coéficient du troiſiéme terme par cette fraction, le produit du coéficient du quatriéme terme par le quarré de cette fraction, & ainſi de ſuite, en obſervant d'ajouter ces produits au dénominateur avec les ſignes qu'ont les coéficients dans la transformée; & la fraction qui naît de cette operation, eſt la ſeconde partie b de la racine qu'on cherche plus approchante qu'elle n'auroit été.

Pour trouver la troiſiéme partie c, il faut faire une ſeconde transformée en ſuppoſant $b + g = f$, & ſubſtituer cette valeur de f à ſa place dans la transformée précedente; & l'on aura la ſeconde transformée, qui ſervira à faire découvrir la troiſiéme partie c de la racine qu'on cherche, de la même maniere que la premiere transformée a ſervi à faire trouver la ſeconde partie b.

Cette troiſiéme partie de la racine qu'on cherche, ſervira de même à former une troiſiéme transformée, en ſuppoſant $c + h = g$, & ſubſtituant cette valeur de g à ſa place dans la ſeconde transformée; & cette troiſiéme transformée fera trouver la quatriéme partie d de la racine qu'on cherche, & ainſi de ſuite à l'infini.

III.

163. On fera ſur chacune de ces transformées, par raport à la transformée qui la precede immediatement, les mêmes remarques qu'on a faites ſur la premiere transformée par raport à l'équation propoſée dont elle eſt la transformée immediate; & on remarquera de plus, 1°, que ſi le premier terme d'une transformée ſe trouvoit égal à zero, l'on auroit la racine exacte de l'équation propoſée qu'on cherche, qui ſeroit égale à la ſomme de toutes les parties de cette racine qui ont été découvertes, juſqu'à la transformée où cela arrive. Car la derniere partie découverte étant ſubſtituée à la place de l'inconnue dans la transformée qui précede celle dont le premier terme eſt égal à zero, donneroit une ſomme toute connue égale à zero, puiſque cette ſomme eſt égale à ce premier terme; ainſi elle ſeroit la racine exacte de cette transformée qui précede celle dont le premier terme eſt égal à zero; l'on auroit donc preciſément ce qui manquoit aux parties déja découvertes de la racine qu'on cherchoit; par conſequent on l'auroit entiere.

2°. Quand le premier terme d'une transformée a un ſigne different de celui du premier terme de la transformée qui la precede immediatement, dans ce cas la partie qui a ſervi à faire la transformée où cela ſe rencontre, eſt plus grande que la partie de la racine que l'on cherche; car ſi cette partie étoit plus petite que la partie que l'on cherche, elle donneroit au premier terme de la transformée le ſigne du premier terme de la transformée précedente *; ſi elle étoit égale, elle donneroit zero; & donnant un ſigne different, elle eſt plus grande.

* 124. Remarque.

D'où l'on voit que ſi c'eſt par exemple la troiſiéme partie c, qui change le ſigne de la troiſiéme transformée, ſuppoſé que c fut poſitive, l'on trouvera par la methode même la quatriéme partie d négative; & dans ce cas il faudra ſuppoſer $-d+i=h$, pour faire la quatriéme transformée; parceque la racine poſitive dont on faiſoit la recherche, étant devenue négative dans la troiſiéme transformée, la troiſiéme partie c ſe trouve plus grande qu'il ne faut; ainſi il faut la diminuer dans la transformée ſuivante.

IV.

164. On peut raporter immediatement chaque transformée à l'équation propoſée; on raportera ici à l'équation propoſée, la troiſiéme transformée qui eſt faite par la ſuppoſition de $c+h=g$, & par la ſubſtitution de cette valeur de g à ſa place dans la ſeconde transformée; & ce que l'on en dira, pourra facilement s'appliquer aux transformées les plus reculées de l'équation propoſée.

Si l'on ſuppoſoit la ſomme de toutes les parties déja découvertes de la racine qu'on cherche, plus une nouvelle inconnue h, égale à l'inconnue de l'équation propoſée, par exemple ſi l'on ſuppoſoit $\overline{a+b+c}+h=x$, (on a mis une ligne ſur $a+b+c$ pour marquer qu'on regarde cette ſomme comme une ſeule grandeur,) & qu'on ſubſtituât cette valeur de x à ſa place dans l'équation propoſée, la transformée qui en viendroit, ſeroit preciſément la troiſiéme transformée; c'eſt à dire la transformée que l'on a trouvée en ſubſtituant $c+h=g$, à place de g dans la ſeconde transformée.

Car les racines poſitives de la transformée qui viendroit de la ſubſtitution de $\overline{a+b+c}+h=x$, à la place de x dans la propoſée, ſeroient les racines poſitives de la propoſée diminuées chacune de la grandeur $a+b+c$; les négatives de la transformée ſeroient les négatives de la propoſée augmentées chacune de la grandeur $a+b+c$; & s'il ſe trouvoit que la grandeur $a+b+c$ ſurpaſsât quelques racines poſitives de la propoſée, ces racines ſeroient devenues négatives dans la transformée, & chacune de ces racines négatives ſeroit l'excés de $a+b+c$ ſur chacune des racines poſitives de la propoſée, qui ſeroient moindres que $a+b+c$. Or en conſiderant avec attention la ſuite des transformations, depuis la propoſée juſqu'à la troiſiéme dont h eſt l'inconnue, on verra clairement que les racines poſitives & négatives de la troiſiéme transformée, ſont preciſément les mêmes racines dont on vient de parler. Par conſequent la troiſiéme transformée eſt preciſément la même transformée qu'on trouveroit en ſubſtituant immediatement dans l'équation propoſée $\overline{a+b+c}+h$, à la place de x.

D'où il ſuit auſſi que ſi l'on ſubſtituoit avec des ſignes contraires la ſomme de toutes les parties qu'on a déja découvertes de la racine qu'on cherche plus l'inconnue x, à la place de l'inconnue h, dans la troiſiéme transformée, l'équation qui en viendroit, ſeroit exactement l'équation propoſée; par exemple ſi l'on ſuppoſe $-\overline{a-b-c}+x=h$, & qu'on ſubſtitue cette valeur de h à ſa place dans la troiſiéme transformée, l'équation qui en naîtra, ſera l'équation propoſée.

V.

165. Si la grandeur a qu'on prend pour la premiere partie de la racine qu'on cherche, étoit la limite en deſſus, c'eſt à dire, ſi a ſurpaſſoit la racine qu'on cherche, il faudroit ſuppoſer, pour faire la premiere transformée, $a-f=x$, & ſubſtituer cette valeur de x à ſa place dans la propoſée: Et l'on feroit ſur cette transformée & ſur les ſuivantes, des remarques ſemblables à celles qu'on a faites en ſuppoſant que la premiere partie a de la racine qu'on cherche, eſt moindre que cette racine. Mais il eſt mieux de prendre la premiere partie a plus petite que ſa racine, pour s'accoutumer à une même methode.

Ou bien, pour ſuivre la même methode, on ſuppoſera $a+f=x$, quoique a ſurpaſſe la racine qu'on cherche;

on substituera $a + f$ dans la proposée à la place de x, & le premier terme tout connu de la transformée qui en viendra, aura un signe opposé à celui du premier terme tout connu de la proposée; ce qui fera trouver la seconde partie b négative; & pour faire la seconde transformée, on supposera $-b + g = f$.

AVERTISSEMENT.

On n'a fait ces remarques que sur la premiere maniere qu'on a donnée dans la quatriéme methode de trouver par le moyen de chaque transformée, la partie de la racine qu'elle doit faire découvrir, quoiqu'elles puissent aussi convenir à la seconde maniere; parceque cette seconde maniere renfermant le signe radical $\sqrt{}$, & obligeant à l'extraction des racines, le calcul en est plus embarassant, & on peut moins facilement s'en servir dans l'approximation des racines des équations litterales.

Il faut se rendre ces remarques & la quatriéme methode bien familieres, & la premiere maniere qu'on a donnée dans la quatriéme methode, de trouver par chaque transformée la partie de la racine qu'elle doit faire découvrir, afin de concevoir clairement la methode d'approximation des racines des équations litterales qu'on doit donner dans le 7^e^ Livre, qui n'aura pas besoin de démonstration, n'étant qu'une application de cette quatriéme methode.

La quatriéme remarque donne lieu à une autre pratique de la quatriéme methode, qu'on appellera une cinquiéme methode d'approximation, pour faire mieux distinguer ces deux manieres de pratiquer la quatriéme methode.

Cinquiéme methode pour trouver les valeurs approchées tant prés qu'on voudra des racines des équations; ou autre pratique de la quatriéme methode.

166. 1°. On partagera en deux parties l'inconnue de l'équation proposée dont on veut trouver les racines; par exemple si on veut chercher la premiere racine de l'équation $xx - 20x + 65 = 0$, qui est entre 4 & 5, on supposera $E + y = x$, E representera la partie de la racine que l'on connoît déja; & à mesure qu'on découvrira les parties de la racine qu'on cherche, on supposera que E represente toutes ces parties

déja découvertes, y representera ce qui reste à découvrir de la racine qu'on cherche.

On substituera $E + y$ à la place de x dans la proposée, & l'on aura l'équation

$$\begin{array}{l} EE + 2Ey + yy = 0, \\ -20E - 20y \\ +65 \end{array}$$

qui representera toutes les transformées qui doivent servir à découvrir les parties de la racine qu'on cherche, les unes aprés les autres à l'infini: on l'appellera la transformée indéterminée. On suppose la premiere partie 4 de la racine, connue d'ailleurs. Pour trouver la seconde partie:

2°. On supposera que E represente 4, & on substituera 4 à la place de E dans la transformée indéterminée, & l'on aura $+1 - 12y + yy = 0$; pour trouver la valeur de y, on fera une équation du premier & du second terme, qui donnera $y = \frac{1}{12}$. C'est la seconde partie de la racine que l'on cherche; ou, ce qui est la même chose, on divisera le premier terme par le coéficient du second; & changeant le signe du quotient, l'on aura la seconde partie de la racine.

Si on vouloit une seconde partie plus approchée, on feroit ce raisonnement, comme dans la quatriéme methode. Le premier terme 1 n'est pas seulement égal au second $12y$, mais $-1 = -12y + yy$, ainsi $y = \frac{1}{12 - y}$; & mettant la valeur de $y = \frac{1}{12}$ déja découverte, à la place de y dans le second membre, on auroit $y = \frac{12}{143}$, qui est une valeur un peu plus approchée. Mais pour éviter la longueur du calcul, on prendra ici $y = \frac{1}{12}$, pour la seconde partie de la racine.

3°. Pour avoir la troisiéme partie de la racine, on supposera que E dans la transformée indéterminée, represente la somme $4\frac{1}{12}$ des parties de la racine déja découvertes, & que y represente ce qui en reste à découvrir: On substituera dans cette transformée $4\frac{1}{12} = \frac{49}{12}$ à la place de E, & l'on aura $+\frac{1}{144} - \frac{142}{12}y + yy = 0$. On divisera le premier terme $+\frac{1}{144}$ par le coéficient $-\frac{142}{12}$ du second terme, & changeant le signe du quotient, on aura $+\frac{1}{1704}$ pour la troisiéme partie de la racine qu'on cherche.

4°. Pour trouver la quatriéme partie de la racine, on supposera dans la transformée indéterminée, que E represente la somme des parties de la racine déja découvertes, $4 + \frac{1}{12} + \frac{1}{1704} = +\frac{6959}{1704}$; on substituera cette valeur de E à sa place dans la transformée indéterminée ; & prenant enſuite le quotient du premier terme de l'équation qui en viendra, diviſé par le coéficient du ſecond terme, & changeant le ſigne de ce quotient, ce ſera la quatriéme partie qu'on cherche.

On peut continuer cette approximation à l'infini. Cet exemple, qui n'eſt pas composé, ſuffit pour faire concevoir clairement cette methode, qui eſt démontrée par la quatriéme methode, & par les remarques, & ſurtout la 4^e. Il eſt évident que la partie de la racine repreſentée par E, ne fait qu'augmenter, pendant que celle qui eſt repreſentée par y, ne fait que diminuer.

Pour ſe rendre cette methode familiere, on peut continuer l'approximation précedente, & chercher la ſeconde racine de la propoſée, qui ſurpaſſe 15, & qui eſt moindre que 16. On peut auſſi chercher, par la même methode, les racines de l'équation $x^3 - 2700x + 31400 = 0$, dont la plus petite eſt entre 12 & 13 ; la 2^e, entre 44 & 45 ; & la 3^e, entre 57 & 58.

On va faire ici l'application de cette cinquiéme methode à l'approximation des racines des puiſſances numeriques imparfaites.

Uſage de la cinquiéme methode d'approximation des racines des équations, pour trouver les valeurs approchées tant prés qu'on voudra des racines des puiſſances numeriques imparfaites.

167. On ſuppoſe qu'on a trouvé par la methode de l'extraction des racines de l'arithmetique, la racine de la plus grande puiſſance parfaite contenue dans la puiſſance numerique imparfaite ; ce ſera la premiere partie de la racine qu'on cherche, qui ne differe pas de la racine veritable, qui eſt incommenſurable, d'une unité entiere ; il faut trouver les autres parties de cette racine ; & en continuer l'approximation à l'infini, ou autant prés qu'on voudra de la veritable racine, qu'on ne peut pas exprimer par nombres.

1°. On ſuppoſera que la racine de la plus grande puiſſance parfaite contenue dans la puiſſance numerique imparfaite dont on cherche la racine, eſt repreſentée par E, & l'excés de la puiſſance numerique imparfaite ſur la plus grande puiſſance parfaite qui y eſt contenue, eſt repreſenté par D : ces deux nombres ſont ſuppoſés connus. Ainſi $EE + D$ ſera l'expreſſion de toutes les ſecondes puiſſances numeriques imparfaites ; $E^3 + D$, celle de toutes les troiſiémes puiſſances ; $E^4 + D$, de toutes les quatriémes ; $E^5 + D$, de toutes les cinquiémes ; & ainſi de ſuite.

2°. On ſuppoſera que $E + x$ repreſentent les deux parties de la racine qu'on cherche ; ſçavoir E, celle qui eſt connue ; & x, celle qui eſt inconnue & que l'on cherche ; ce qui donnera les équations ſuivantes : $E + x = \sqrt{EE + D}$, pour les ſecondes puiſſances : $E + x = \sqrt[3]{E^3 + D}$, pour les troiſiémes : $E + x = \sqrt[4]{E^4 + D}$, pour les quatriémes ; & ainſi de ſuite.

3°. On ôtera les incommenſurables de ces équations, & l'on aura $-D + 2Ex + xx = 0$, pour les ſecondes puiſſances ; $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$, pour les troiſiémes ; $-D + 4E^3x + 6EExx + 4Ex^3 + x^4 = 0$, pour les quatriémes ; $-D + 5E^4x + 10E^3xx + 10EEx^3 + 5Ex^4 + x^5 = 0$, pour les cinquiémes ; $-D + 6E^5x + 15E^4xx + 20E^3x^3 + 15EEx^4 + 6Ex^5 + x^6 = 0$, pour les ſixiémes ; & ainſi des autres ſuivantes.

Ces équations ſeront les transformées indéterminées, comme dans la cinquiéme methode, chacune pour ſon degré. E repreſentera d'abord la premiere partie de la racine qu'on cherche ; & ſubſtituant cette premiere partie à la place de E, on trouvera la ſeconde partie comme dans la 5^e methode ; puis ſubſtituant la ſomme des deux premieres parties à la place de E, on trouvera la troiſiéme ; aprés ſubſtituant la ſomme des trois premieres parties à la place de E, on trouvera la quatriéme partie ; & ainſi à l'infini.

168. Le premier terme D eſt toujours entierement connu quand on commence l'operation, puiſque c'eſt le reſte connu de la puiſſance numerique imparfaite, qui demeure aprés avoir ôté de cette puiſſance imparfaite la plus grande puiſſance parfaite qui y eſt contenue.

Quand on a trouvé la ſeconde partie de la racine par la ſubſtitution de la premiere partie, qu'on ſuppoſe connue, à la place de E, pour avoir la ſeconde valeur de D, il faut ſubſtituer cette ſeconde partie de la racine qu'on vient de trouver, à la place de x, & laiſſer la premiere partie ſubſtituée à la place de E ; & la ſomme toute connue qui vient

* 113. de cette substitution, est le second D*, qui doit servir pour trouver la troisiéme partie.

Quand on aura trouvé cette troisiéme partie par la substitution de la somme des deux parties déja découvertes, à la place de E dans l'équation transformée indéterminée, où l'on a laissé la valeur du D précedent, il faudra substituer cette troisiéme partie à la place de x, & la somme toute connue qui viendra de cette substitution, sera le troisiéme D, ou la troisiéme valeur de D, qui doit servir pour trouver la quatriéme partie.

Quand on aura découvert cette quatriéme partie par la substitution de la somme des trois premieres parties déja connues à la place de E, il faudra substituer cette quatriéme partie qu'on vient de découvrir à la place de x, & la somme toute connue qui naîtra de cette substitution, sera le 4^e D, ou la 4^e valeur de D, qui doit servir à faire découvrir la 5^e partie; & ainsi à l'infini.

169. Ou bien pour avoir la valeur de D, qui sert à trouver chaque partie, par exemple la quatriéme, il n'y a qu'à élever à la même puissance dont on cherche la racine, la somme de toutes les parties déja trouvées, par exemple des trois premieres, & ôter la puissance de cette somme de la puissance numerique imparfaite proposée; le reste sera la valeur de D qu'on cherche.

On peut faire comme dans la quatriéme methode, des formules generales dans chaque degré, pour trouver les parties de la racine qu'on cherche, les unes aprés les autres, la premiere partie étant supposée connue.

Formules generales pour l'approximation des racines des puissances numeriques imparfaites.

170. POUR les racines des secondes puissances . . $x = \frac{D}{2E + \frac{D}{2E}}$.

Pour les racines des troisiémes puissances . . . $x = \frac{D}{3EE + \frac{D}{E} + \frac{DD}{9E^4}}$.

Pour les racines des quatriémes puissances . . . $x = \frac{D}{4E^3 + \frac{3D}{2E} + \frac{DD}{4E^5} + \frac{D^3}{64E^9}}$.

Pour les racines des cinquiémes puissances . . . $x = \frac{D}{5E^4 + \frac{10D}{E} + \frac{10DD}{5E^6} + \frac{D^3}{25E^{11}} + \frac{D^4}{725E^{16}}}$.

On peut facilement trouver, comme dans la 4^e methode, les formules pour les puissances suivantes à l'infini, si l'on en a besoin.

Pour trouver par le moyen de ces formules la racine cubique, par exemple de 12: 1°. le plus grand cube contenu dans 12, est 8, dont la racine cubique est 2; ainsi $2 = E$; $12 = 8 + 4 = E^3 + D$, & le premier $D = 4$. L'équation indéterminée du troisiéme degré, qui represente toutes les transformées qui feront trouver les parties de la racine qui suivent la premiere qui est 2, est $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$: La formule qui sert à trouver ces parties representées par x, déduite de cette équation, est $x = \frac{D}{3EE + \frac{D}{E} + \frac{DD}{9E^4}}$.

Ces choses supposées:

2°. Pour trouver la seconde partie de la racine, on substituera dans cette formule 4 à la place de D, & 2 à la place de E; & l'on aura la seconde partie $= \frac{4}{12 + 2 + \frac{1}{9}} = \frac{36}{127}$.

Pour avoir la seconde valeur de D, qui servira à trouver la troisiéme partie de la racine, on substituera dans l'équation $-D + 3EEx + 3Exx + x^3 = 0$, 4 à la place de D; 2 à la place de E; & $\frac{36}{127}$ à la place de x; & l'on aura $-4 + 12 \times \frac{36}{127} + 6 \times \overline{\frac{36}{127}}|^2 + \overline{\frac{36}{127}}|^3 = -\frac{1117716}{2048383}$, pour la seconde valeur de D, qu'on trouveroit aussi en élevant la somme des deux parties déja trouvées $2 + \frac{36}{127}$ à la 3^e puissance, & retranchant cette 3^e puissance de la proposée 12, le reste seroit la seconde valeur de D.

3°. Pour trouver la troisiéme partie de la racine qu'on cherche, il faut substituer dans la formule $x = \frac{D}{3EE + \frac{D}{E} + \frac{DD}{9E^4}}$, à la place de D, sa valeur qu'on vient de trouver, & à la place de E, la somme $2 + \frac{36}{127}$ des parties de la racine déja découvertes, &c.

On peut continuer l'approximation à l'infini: ces operations suffisent pour faire clairement concevoir la methode.

ſurables, & en continuer l'approximation à l'infini; déterminer ſi elle a des racines imaginaires; & ſi la propoſée a de ces racines, en déterminer le nombre.

On ſuppoſe que l'équation propoſée n'a point de fractions ni d'incommenſurables; que ſon premier terme n'a pas d'autre coéficient que l'unité; qu'elle a tous ſes termes, & qu'ils ont alternativement les ſignes + & —.

METHODE.

148. 1°. Il faut trouver par le premier Problême toutes les équations des limites de l'équation propoſée.

2°. La racine de l'équation lineaire des limites ſera la limite moyenne des deux racines de l'équation des limites du ſecond degré; zero & ſon plus grand coéficient négatif rendu poſitif & augmenté de l'unité, en ſeront les limites extrêmes. Par le moyen de la limite zero & de la limite moyenne, on trouvera la premiere & plus petite racine de l'équation des limites du ſecond degré, par les methodes du troiſiéme Problême ſi elle eſt commenſurable, ou ſa valeur approchée ſi elle eſt incommenſurable. On trouvera de même en ſe ſervant de la limite moyenne & de la plus grande limite extrême, la ſeconde racine de la même équation, ou ſa valeur approchée.

Les racines de l'équation des limites du ſecond degré, ou leurs valeurs approchées, ſeront priſes pour les limites moyennes des racines de l'équation des limites du 3ᵉ degré; zero & ſon plus grand coéficient négatif augmenté de l'unité, en ſeront les limites extrêmes. On trouvera par le moyen de ces limites les racines de cette équation ou leurs valeurs approchées, qu'on prendra pour les limites moyennes des racines de l'équation des limites du quatriéme degré, dont zero & le plus grand coéficient négatif augmenté de l'unité ſeront les limites extrêmes. On trouvera par le moyen de ces limites les racines de cette équation du quatriéme degré, ou leurs valeurs approchées, qui ſeront les limites moyennes des racines de l'équation des limites du cinquiéme degré; zero & le plus grand coéficient négatif de cette équation du cinquiéme degré augmenté de l'unité, ſeront les limites extrêmes, & par le moyen de ces limites on trouvera les racines de cette équation ou leurs valeurs approchées.

Continuant ces operations juſqu'à l'équation propoſée, de quelque degré qu'elle ſoit, on en trouvera toutes les racines lorſqu'elles ſont commenſurables, ou leurs valeurs approchées.

3°. Si l'on trouve qu'une des limites, c'eſt à dire une des racines d'une équation des limites, étant ſubſtituée dans l'équation du degré immediatement plus élevée à la place de l'inconnue, donne zero; c'eſt à dire, ſi ~~ces deux~~ équations ont une racine commune, il y a des racines égales dans la propoſée : on a marqué dans le premier Problême la maniere d'en déterminer le nombre.

4°. Lorſque la racine d'une équation des limites étant ſubſtituée à la place de x dans l'équation immediatement plus élevée d'un degré, ne donne ni zero, ni une ſomme toute connue qui ait le ſigne + ou — que doit donner cette racine priſe pour limite moyenne, il y a des racines imaginaires dans la propoſée; & comme les racines imaginaires ſont toujours deux à deux, il y en a deux fois autant que cela arrive de fois.

Application de la methode aux exemples.

EXEMPLE I.

POUR trouver les racines de

$$\overset{4}{x^4} - \overset{3}{80x^3} + \overset{2}{1998xx} - \overset{1}{14937x} + \overset{0}{5000} = 0:$$

1°. on en trouvera par le premier Problême les équations des limites, comme on les voit ici :

1ʳᵉ équation des limites.

$$4x^4 - 240x^3 + 3996xx - 14937x = 0$$
$$\text{ou } \overset{3}{4x^3} - \overset{2}{240xx} + \overset{1}{3996x} - \overset{0}{14937} = 0$$

2ᵉ équation des limites.

$$12x^3 - 480xx + 3996x = 0$$
$$\text{ou } 12xx - 480x + 3996 = 0,$$

ou bien encore en diviſant chaque terme par 12, qui s'en trouve un diviſeur exact :

$$\overset{2}{xx} - \overset{1}{40x} + \overset{0}{333} = 0$$

3ᵉ équation des limites.

$$2xx - 40x = 0$$
$$\text{ou } x - 20 = 0.$$

2°. On prendra la racine 20 de l'equation lineaire $x - 20 = 0$, pour la limite moyenne des deux racines de la seconde équation des limites $xx - 40x + 333 = 0$; & l'on prendra zero & le plus grand coéficient négatif augmenté de l'unité pour les limites extrêmes; & les limites des racines seront 0, 20, 41.

156. On cherchera par la premiere methode du 3^e Problême, la premiere & plus petite racine de $xx - 40x + 333 = 0$, en se servant des limites 0 & 20; & l'on trouvera que cette racine est incommensurable, & qu'elle est entre 11 qui donne + 14, & 12 qui donne − 3. On prendra pour la valeur approchée de cette premiere racine 11 ou 12.

On trouvera de même en se servant des limites 20 & 41, que la seconde racine est incommensurable, & qu'elle est entre 28 qui donne, étant substituée à la place de x, la somme toute connue − 3, & 29 qui donne + 14. On prendra pour la valeur approchée de cette seconde racine 28 ou 29.

Ainsi 0, 12, 28, & le plus grand coéficient négatif de la premiere équation des limites $4x^3 - 240xx + 3996x - 14937 = 0$, seront les limites de cette equation. Pour avoir ce plus grand coéficient négatif, il faut diviser tous les termes par le coéficient 4 du premier terme, afin d'avoir l'equation $x^3 - 60xx + 999x - 3734\frac{1}{4} = 0$, dont le premier terme n'a pas d'autre coéficient que l'unité, & ses limites seront 0, 12, 28, 3736.

On trouvera par la premiere methode du troisiéme Problême, en se servant des limites 0 & 12, que la premiere & plus petite racine est entre 5 qui donne le signe −, & 6 qui donne le signe +. On prendra pour la valeur approchée de cette racine 5 ou 6.

On trouvera de même en se servant des limites 12 & 28, que la seconde racine est entre 21 qui donne +, & 22 qui donne −. On prendra pour la valeur appochée de cette seconde racine 21 ou 22.

On trouvera en se servant des limites 28 & 3736, que la troisiéme racine est entre 34 qui donne $- 24\frac{1}{4}$, & 35 qui donne $+ 605\frac{3}{4}$. On prendra pour la valeur approchée de cette racine 34 ou 35.

Ainsi les limites des racines de la proposée sont 0, 6, 21, 34, 14938.

On trouvera par la premiere methode du troisiéme Problême, en se servant des deux limites 0 & 6, que la premiere & plus petite racine de la proposée, est entre zero & l'unité; & si on se sert ensuite de la troisiéme methode, on trouvera qu'elle est entre $\frac{2}{10}$ & $\frac{3}{10}$; car $\frac{2}{10}$ donne +, & $\frac{3}{10}$ donne −.

On trouvera de même, en se servant des deux limites 6 & 21, que la seconde racine de la proposée est entre 12 qui donne −, & 13 qui donne +.

On trouvera, en se servant des deux limites 21 & 34, que la troisiéme racine de la proposée est entre 32 qui donne +, & 33 qui donne −.

Enfin on trouvera en se servant des deux limites 34 & 14938, que la quatriéme & plus grande racine de la proposée est entre 34 qui donne −, & 35 qui donne +.

Ainsi les quatre racines de la proposée sont incommensurables; la premiere ou plus petite surpasse $\frac{2}{10}$, & est moindre que $\frac{3}{10}$ qui sont ses valeurs approchées.

Les valeurs approchées en entiers de la seconde, sont la moindre 12 & la plus grande 13.

Les valeurs approchées en entiers de la troisiéme, sont la moindre 32 & la plus grande 33.

Les valeurs approchées en entiers de la quatriéme, sont la moindre 34 & la plus grande 35.

Si l'on veut aprés cela approcher à l'infini de chacune de ces racines, il faut se servir de la troisiéme methode du troisiéme Problême; * & si l'on ne craint pas la longueur du *158.
calcul, il faut se servir de la quatriéme methode,* par le *159.
moyen de laquelle on trouve à chaque operation des valeurs extrêmement approchées des racines qu'on cherche, & qu'on ne sçauroit trouver exactement par les nombres; puisqu'elles sont incommensurables.

Remarques pour la pratique de ce Problême.

I.

Il faut toujours avoir en vûe le signe que doit donner chaque limite: Que la moindre limite & toutes les grandeurs moindres que la plus petite racine d'une équation, doivent donner le signe du dernier terme de cette équation.

Que la seconde limite & toutes les grandeurs moindres que la seconde racine, mais plus grandes que la premiere, doivent donner le signe contraire à celui du dernier terme.

Que la troisiéme limite & toutes les grandeurs moindres que la troisiéme racine, mais plus grandes que la seconde, doivent donner le signe du dernier terme.

Que la quatriéme limite & toutes les grandeurs moindres que la quatriéme racine, mais plus grandes que la troisiéme, doivent donner le signe contraire à celui du dernier terme.

Et ainsi de suite jusqu'à la derniere & plus grande limite, qui doit toujours donner le signe +; & toutes les grandeurs qui surpassent la plus grande & derniere racine, doivent donner le même signe +.

Qu'entre les grandeurs qui sont moyennes entre les deux mêmes racines, & qui donnent le même signe, celles qui donnent de moindres restes que les autres, approchent plus de la racine qu'on cherche.

II.

Quand on cherche les racines d'une équation des limites, ou de la proposée, dont on a les limites; il faut toujours commencer par la premiere methode du troisiéme Problê-
* 156. me,* & la continuer jusqu'à ce qu'on ait trouvé les racines exactes, lorsqu'elles sont commensurables; ou, quand elles sont incommensurables, jusqu'à ce qu'on ait trouvé leurs valeurs approchées en entiers, qui ne different entr'elles que de l'unité, dont l'une soit moindre & l'autre plus grande que la racine qu'on cherche.

S'il faut ensuite trouver des valeurs en fractions qui approchent de plus en plus à l'infini, on se servira de la troi-
* 158. siéme methode du troisiéme Problême;* & si l'on veut bien prendre la peine du calcul, on se servira de la quatriéme
* 159. methode,* par laquelle on trouve à chaque operation des valeurs qui approchent bien de plus prés de la racine qu'on cherche.

III.

Lorsque les racines d'une équation des limites sont commensurables, on les appellera les limites exactes, & l'on est assûré qu'étant substituées à la place de l'inconnue dans l'équation dont elles sont les limites, elles donneront les signes qu'elles doivent donner, sans même en faire la substitution, si les racines de cette équation sont inégales; & que celles des limites qui sont égales à quelques-unes des racines, donneront zero, quand il y a des racines égales; & qu'enfin

celles de ces limites exactes qui ne donneront ni zero, ni le signe qu'elles doivent donner, feront connoître qu'il y a des racines imaginaires dans l'équation dont elles sont les limites, & dans la proposée.

Mais quand les racines d'une équation des limites ne sont pas commensurables, l'on n'est pas assûré que leurs valeurs approchées en nombres entiers, qu'on appellera ici les limites approchées en entiers, donnent toujours les signes qu'elles doivent donner. Comme cependant il arrive ordinairement que les limites approchées en nombres entiers, donnent les signes que doivent donner les limites exactes, parcequ'ordinairement les racines des équations dont elles sont les limites, different entr'elles de plusieurs unités; quand on a trouvé ces limites approchées par la premiere methode, il faut les substituer à la place de l'inconnue dans l'équation dont elles sont les limites, pour voir si elles donnent les signes qu'elles doivent donner; & si l'on trouve qu'elles les donnent, il faut s'en servir pour trouver les racines, comme l'on a fait dans l'exemple précedent.

Si les limites approchées en nombres entiers, ne donnent pas les signes des limites exactes, ce qui arrive lorsque les racines de l'équation dont elles sont les limites, sont incommensurables, & ne different entr'elles que par des grandeurs moindres que l'unité, il faut alors continuer l'approximation des limites par la 3^e ou 4^e methode.

Ou bien il faut d'abord multiplier les racines de la proposée par 10, ou par 100, ou 1000, &c. en mettant un ou plusieurs zeros au second terme, deux fois autant au troisiéme terme, trois fois autant au quatriéme terme, & ainsi de suite; & aprés cela les racines differeront entr'elles de plusieurs unités, & les limites approchées en nombres entiers qu'on trouvera, donneront les signes que doivent donner les limites exactes, lorsque les racines de la proposée seront réelles & differentes entr'elles: & si elles ne les donnoient pas, ce seroit une marque qu'il y auroit dans la proposée des racines égales incommensurables, ou des racines imaginaires. On en fera une remarque à la fin des exemples.

Mais quand on a ajouté des zeros au second terme de la proposée & aux autres termes, il faut diviser les valeurs approchées des racines de la proposée, quand on les aura trouvées, par l'unité précedée d'autant de zeros qu'on en a mis au second terme de la proposée, & ces fractions seront les valeurs approchées des racines de la proposée.

Il faut donc remarquer qu'on trouvera toujours les limites approchées en nombres entiers, du moins en ajoutant des zeros au second terme & aux autres termes de la proposée, lorsque sans cela on ne peut pas les trouver en entiers; ou des limites approchées en fractions, en continuant l'approximation par la troisiéme ou quatriéme methode, lesquelles limites donneront les signes que doivent donner les limites exactes, lorsque les racines de l'équation sont toutes réelles & inégales.

Ainsi si l'on ne pouvoit pas trouver ces limites, ce seroit une marque assurée que les racines de la proposée ne seroient pas toutes inégales, & qu'il y en auroit d'égales, mais incommensurables, ou bien qu'il y auroit des racines imaginaires.

IV.

On peut souvent diminuer le calcul de la methode de ce quatriéme Problême, en faisant quelques tentatives, surtout en deux choses.

La premiere est, quand la plus grande limite, qui est le plus grand coëficient négatif rendu positif & augmenté de l'unité, surpasse considerablement la limite penultiéme, comme dans le premier exemple, où la plus grande limite 14938, surpasse considerablement la penultiéme limite 34; au lieu de se servir de la plus grande limite, on peut faire quelques tentatives sur des grandeurs plus approchantes de la limite penultiéme, comme dans le premier exemple on peut essayer si la substitution de 40 à la place de l'inconnue, ne donnera point le signe + de la plus grande limite; & comme l'on trouve que 40 donne le signe +, on est assuré que 40 surpasse la plus grande racine de la proposée; & on se servira des limites 34 & 40, pour la trouver par la premiere methode, au lieu des limites 34 & 14938.

La seconde est, qu'avant de resoudre les premieres & les plus composées équations des limites, c'est à dire avant d'en chercher toutes les racines, on peut faire des tentatives, pour voir si les racines exactes ou approchées des dernieres & plus simples équations des limites, ne peuvent point servir immediatement de limites aux racines de la proposée, en substituant

substituant ces racines des dernieres équations des limites, à la place de l'inconnue, immediatement dans l'équation proposée; on trouvera le plus souvent qu'elles donnent les signes que doivent donner les limites des racines de la proposée, & on les prendra dans ce cas pour ces limites des racines de la proposée.

Par exemple, lorsqu'on a trouvé que les racines approchées de l'équation des limites du second degré dans le premier exemple, sont la plus petite 11 ou 12, la plus grande 28 ou 29, on substituera la premiere de ces racines 11 ou 12, à la place de l'inconnue dans la proposée; & trouvant une somme toute connue qui a le signe —, qui est celui que doit donner la seconde limite des racines de la proposée, on prendra 11 ou 12 pour la seconde limite, & l'on aura pour les deux limites de la premiere & plus petite racine de la proposée, 0 & 12.

On substituera de même 28 ou 29, & trouvant que 28 ou 29 donne le signe +, qui est celui que doit donner la troisiéme limite, on prendra 12 & 28 pour les deux limites dont il faut se servir pour chercher la seconde racine de la proposée.

D'où l'on voit que pour avoir toutes les limites de la proposée, il ne faudra plus chercher que la grandeur qui surpasse 28, & qui donne le signe —, c'est à dire la limite qui surpasse la troisieme racine de la proposée, & qui est moindre que la quatriéme; ainsi il ne faudra chercher dans l'équation des limites du troisiéme degré, que la plus grande racine seule, dont les limites sont 28 & 3736, & le calcul se trouve bien abregé par ces tentatives.

Un peu de pratique fera trouver beaucoup d'autres abregés.

EXEMPLE II.

Pour trouver les racines de l'équation $x^6 - 7xx + 6 = 0$, qui n'est que du troisiéme degré, par lesquelles on aura les valeurs de x linéaire dans cette équation; 1°. il faut la transformer en une autre équation qui ait tous ses termes avec les signes alternatifs + & —; ce qui se fera en supposant $8 - xx = z$; d'où l'on aura $xx = 8 - z$; & substituant

$8 - z$ à la place de x, on aura la transformée que voici, qu'on regardera comme la proposée.

2°. Il faut en trouver les équations des limites, comme on les voit ici :

$$z^3 - 24zz + 185z - 462 = 0.$$
$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0.$$

$$3z^3 - 48zz + 185z = 0 ;$$

divisant par $3z$, on aura la premiere équation des limites,

$$zz - 16z + 61\tfrac{2}{3} = 0.$$
$$2 \quad 1 \quad 0.$$

$$2zz - 16z = 0 ;$$

divisant par $2z$, on aura la derniere équation des limites,

$$z - 8 = 0.$$

3°. Il faut prendre la racine 8 de l'équation lineaire des limites $z - 8 = 0$, pour la limite moyenne entre les deux racines de la premiere équation des limites, & les trois limites des deux racines de cette premiere équation des limites seront 0, 8, 17.

En cherchant la premiere, c'est à dire la plus petite racine de l'équation $zz - 16z + 61\tfrac{2}{3} = 0$, par le moyen de ses deux limites 0 & 8, on trouve qu'elle surpasse 6, & qu'elle est moindre que 7.

Pour abreger, on pourra, avant de chercher la seconde racine de la premiere équation des limites, tenter si la substitution de l'une ou l'autre des limites 6 ou 7, à la place de z dans la proposée, ne donneroit point le signe + que doit donner la seconde limite des racines de la proposée, & en servir elle-même, en cas qu'elle le donne. Mais trouvant que la substitution de 6 au lieu de z dans la proposée donne zero, on a par cette simple operation 6 pour la premiere racine de la proposée $z^3 - 24zz +$ &c.

Pour abreger encore le calcul, on divisera la proposée $z^3 - 24zz +$ &c. par l'équation lineaire $z - 6 = 0$, qui contient la premiere racine ; & l'on aura le quotient $zz - 18z + 77 = 0$, qui contient les deux autres racines de la proposée.

On pourra enfin, pour abreger, resoudre cette équation qui contient les deux autres racines de la proposée, par la

methode qui convient au second degré, & l'on trouvera que ses racines sont 7 & 11.

Pour achever la resolution, on substituera successivement les trois racines 6, 7 & 11 de la transformée $z^3 - 24zz +$ &c. dans l'équation $8 - xx = z$, ou $xx = 8 - z$, qui a servi à la transformation ; & l'on trouvera les trois valeurs de xx dans $x^6 - 7xx + 6 = 0$, qui sont $xx = 1$, $xx = 2$, $xx = -3$.

D'où l'on tirera les six valeurs de x lineaire, dans la proposée $x^6 - 7xx + 6 = 0$, qui sont $x = +\sqrt{1}$, $x = -\sqrt{1}$; $x = +\sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$; $x = +\sqrt{-3}$, $x = -\sqrt{-3}$. D'où l'on voit que x a quatre valeurs réelles, & deux valeurs imaginaires dans la proposée $x^6 - 7xx + 6 = 0$; & la proposée est entierement resolue.

EXEMPLE III.

POUR trouver les valeurs approchées des trois racines de l'équation irréductible du 3e degré $x^3 - 2700x + 32400 = 0$, dont les deux plus petites racines sont positives, & dont la plus grande est négative & égale à la somme des deux autres, puisque le second terme est évanoui ; 1°. il faut la transformer en une autre qui ait tous ses termes, & dont toutes les racines soient positives ; ce qu'on fera en supposant le plus grand coéficient négatif rendu positif & augmenté de l'unité moins une nouvelle inconnue z, égal à l'inconnue x ; ce qui donnera $2701 - z = x$; & en substituant cette valeur de x à sa place dans la proposée, on aura la transformée suivante, qui a les conditions propres à y appliquer la methode du quatriéme Problême.

$$z^3 - 8103zz + 21883503z - 19697617801 = 0.$$
$$3 \quad 2 \quad 1 \quad 0.$$

$$3z^3 - 16206zz + 21883503z = 0.$$

divisant par $3z$, l'on a la premiere équation des limites,

2°. Il faut trouver les équations des limites des racines de la transformée, comme on le voit ici :

$$zz - 5402z + 7294501 = 0.$$
$$2 \quad 1 \quad 0.$$

$$2zz - 5402z = 0.$$

divisant par $2z$, l'on a la seconde équation des limites,

$$z - 2701 = 0.$$

La racine de la 2e équation des limites étant $z = 2701$, les limites des racines de la premiere équation des limites seront 0, 2701, 5403. On trouvera par le moyen de ces limites, ou si l'on veut par la methode des équations du second degré, que les racines de la premiere équation des limites sont exactement 2671 & 2731.

Ainsi les limites des racines de la transformée seront 0, 2671, 2731, 19697617801.

On trouvera par le moyen des deux premieres limites 0, 2671, que la premiere & plus petite racine de la transformée est entre 2656, qui étant substituée à la place de z, donne le signe —, & 2657 qui donne +.

On trouvera par le moyen de la seconde & troisiéme limite 2671, 2731, que la seconde racine de la transformée est entre 2688 qui donne +, & 2689 qui donne —.

Il est inutile, comme on le va voir, de se donner la peine de chercher la valeur approchée entre deux limites qui ne different que de l'unité, de la troisiéme racine de la transmée; comme aussi de trouver des valeurs plus approchées de la premiere & de la seconde racine de la transformée.

3°. Il faut substituer dans l'équation simple $2701 - z = x$, qui a servi à trouver la transformée, à la place de z, les valeurs approchées en entiers de la premiere & seconde racines de la transformée; & l'on trouvera la premiere & plus petite valeur de x dans la proposée entre 12, qui y étant substituée à la place de x, donne +, & 13 qui donne —.

On trouvera de même la seconde valeur de x dans la proposée entre 44 qui donne —, & 45 qui donne +.

On trouvera ensuite des valeurs approchées en fractions de la premiere & seconde racines de la proposée tant près qu'on voudra, en employant la troisiéme ou la quatriéme methode du troisiéme Problême.

Et comme l'on sçait que la troisiéme & plus grande racine de la proposée est égale à la somme des deux autres, il n'y aura qu'à prendre la somme des valeurs approchées de la premiere & seconde racines, & la rendre négative, & ce sera la valeur approchée de la 3^e racine de la proposée.

Ou bien si l'on veut chercher la troisiéme racine de la proposée en particulier, on la rendra positive en changeant le signe du quatriéme terme de la proposée, & l'on aura $x^3 - 1700x - 31400 = 0$.

On prendra la somme des deux moindres limites en nombres entiers des deux plus petites racines, lesquelles limites sont 12 & 44, & cette somme 56 sera la moindre limite de la troisiéme racine de la proposée, qui étant substituée à la place de x, donnera le signe —.

On prendra de même la somme des deux plus grandes limites 13 & 45 des deux premieres racines de la proposée, & cette somme 58 sera la plus grande limite de la troisiéme racine de la proposée, qui étant substituée donnera +.

On trouvera en employant la premiere methode du troisiéme Problême avec ces deux limites 56 & 58, que la troisiéme racine de la proposée est entre 57 qui donne —, & 58 qui donne +; & en employant la 3^e ou la 4^e methode du troisiéme Problême, on trouvera la valeur approchée en fractions tant près qu'on voudra de la troisiéme racine de la proposée.

EXEMPLE IV, OÙ IL Y A DES RACINES EGALES.

POUR trouver les racines de l'équation suivante du 4^e degré; 1°. on en trouvera les équations des limites comme on les voit ici . . .

$$x^4 - 24x^3 + 192xx - 640x + 768 = 0.$$
$$\begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0. \end{array}$$

$$4x^4 - 72x^3 + 384xx - 640x = 0;$$

divisant par $4x$, on aura la premiere équation des limites,

$$x^3 - 18xx + 96x - 160 = 0.$$
$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0. \end{array}$$

$$3x^3 - 36xx + 96x = 0;$$

divisant par $3x$, on aura la seconde équation des limites,

$$xx - 12x + 32 = 0.$$
$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0. \end{array}$$

$$2xx - 12x = 0;$$

divisant par $2x$, on aura la troisiéme équation des limites.

$$x - 6 = 0.$$

2°. La racine de la derniere équation des limites étant 6, les limites des racines de la seconde seront 0, 6, 13.

On trouvera par le moyen des limites 0, 6, que la premiere racine de la seconde équation des limites est 4; & par le moyen des limites 6 & 13, que la seconde est 8; ainsi les limites des racines de la premiere équation des limites seront 0, 4, 8, 161.

Mais on trouvera en cherchant la premiere racine de la premiere équation des limites entre o & 4, que 4 est une racine exacte.

Ainsi il y a dans la premiere équation des limites deux racines égales à 4, & il y a dans la proposée trois racines égales à 4. car on trouve zero en y substituant 4.

Le plus court est quand on trouve ainsi des racines égales exactes, de diviser la proposée par l'équation qui est le produit des trois équations lineaires des trois racines égales à 4, lequel produit est $x^3 - 12xx + 48x - 64 = 0$, & le quotient $x - 12 = 0$, contiendra les racines inégales, qui sont ici la seule $x = 12$.

Si l'on vouloit employer la methode de ce 4^e Problême à trouver la racine inégale de la proposée, il faudroit trouver la troisiéme racine de la premiere équation des limites, en se servant de la limite 8 & du plus grand coéficient negatif augmenté de l'unité, qui est 161 pour la seconde limite, & on trouveroit que cette racine est 10. On se serviroit ensuite de cette racine 10 pour premiere limite, & du plus grand coéficient negatif de la proposée augmenté de l'unité, qui est 641, pour seconde limite; & l'on trouveroit par le moyen de ces deux limites, que la quatriéme racine de la proposée est 12.

On peut remarquer qu'on a dit qu'il falloit chercher la racine inégale de la premiere équation des limites, entre les limites 8 & 161, parceque 8 surpasse la racine égale 4; mais si la racine égale avoit surpassé 8, il auroit fallu chercher la racine inégale entre o & 8. De même si la racine égale eût surpassé la limite 10, que la premiere équation des limites donne pour limite de la racine inégale de la proposée, il auroit fallu chercher la racine inégale de la proposée entre zero & la limite 10.

EXEMPLE V, OÙ LES RACINES SONT IMAGINAIRES.

POUR resoudre l'équation $x^4 - 12x^3 + 68xx - 192x + 288 = 0$.

1°. on trouvera toutes les équations des limites, comme on les voit ici:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0. \end{array}$$
$$\overline{4x^4 - 36x^3 + 136x - 192x = 0;}$$

divisant par $4x$, on aura la premiere équation des limites,

$$x^3 - 9xx + 34x - 48 = 0.$$
$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0. \end{array}$$
$$\overline{3x^3 - 18xx + 34x = 0;}$$

2°. La racine de la derniere équation des limites étant 3, les limites des racines de la seconde équation des limites seront o, 3, 7.

divisant par $3x$, on aura la seconde équation des limites,

$$xx - 6x + 11\tfrac{1}{3} = 0.$$
$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0. \end{array}$$
$$\overline{2xx - 6x = 0;}$$

divisant par $2x$, on aura la derniere équation des limites,

$$x - 3 = 0.$$

Mais on trouve que la limite 3 étant substituée dans la seconde équation des limites, à la place de x, donne le signe + au lieu du signe — qu'elle devroit donner; ainsi l'on est assuré que les deux racines de la seconde équation des limites sont imaginaires, & que par consequent il y a deux racines imaginaires dans la premiere équation des limites, & dans la proposée.

La seconde équation des limites ne donnant aucunes limites pour les racines de la premiere équation des limites, on n'aura pour les limites de la racine réelle de la premiere équation des limites, que o & 49.

On trouvera par le moyen de ces deux limites, que 3 est la racine réelle de la premiere équation des limites.

Ainsi on aura pour les limites des deux racines de la proposée qui restent à trouver, o, 3, 193.

Mais l'on trouve que la limite 3, qui est une limite exacte, donne le signe + au lieu du signe — qu'elle devroit donner; (car la limite o & la limite 193 donnent chacune le signe +) cela fait voir qu'il y a encore deux racines imaginaires dans la proposée.

La proposée est resolue, car sçachant que ses quatre racines sont imaginaires, on est assuré que le Problême exprimé par cette équation, est impossible, ou renferme contradiction.

EXEMPLE VI, QUI APPARTIENT A UN CAS QU'IL FAUT REMARQUER PAR RAPORT A CETTE METHODE.

POUR resoudre l'équation $x^4 - 16x^3 + 72xx - 64x + 16 = 0$.

1°. il faut trouver les équations des limites, comme on les voit ici:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0. \end{array}$$
$$\overline{4x^4 - 48x^3 + 144xx - 64x = 0;}$$

divisant par $4x$, on aura la premiere équation des limites,

$$x^3 - 12xx + 36x - 16 = 0.$$
$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0. \end{array}$$
$$\overline{3x^3 - 24xx + 36x = 0;}$$

2°. La racine de la derniere équation des limites étant 4, on aura pour les limites des racines de la seconde équation des limites, o, 4, 9.

On trouvera par le moyen des limites o & 4, que la premiere & plus petite racine de la ſeconde équation des limites eſt 2.

diviſant par $3x$, on aura la ſeconde équation des limites,

$$xx - 8x + 12 = 0.$$
$$2 \quad 1 \quad 0.$$

$$2xx - 8x = 0;$$

diviſant par $2x$, on aura la troiſiéme ou derniere équation des limites,

$$x - 4 = 0.$$

On trouvera de même par le moyen des limites 4 & 9, que la ſeconde racine eſt 6.

Ainſi les limites des racines de la premiere équation des limites ſont o, 2, 6, 17.

On trouvera par le moyen des limites o, 2, que la premiere & plus petite racine de la premiere équation des limites eſt incommenſurable, & qu'elle eſt entre zero & l'unité; & par l'approximation de la troiſiéme methode du troiſiéme Problême, qu'elle eſt entre $\frac{5}{10}$, qui étant ſubſtituée à la place de x donne —, & $\frac{6}{10}$ qui donne +.

On trouvera par le moyen des limites 2 & 6, que la ſeconde racine de la premiere équation des limites eſt exactement 4.

On trouvera enfin par le moyen des limites 6 & 17, que la troiſiéme & plus grande racine de la premiere équation des limites eſt incommenſurable, & qu'elle eſt entre 7 qui donne —, & 8 qui donne +.

Ainſi les limites des racines de la propoſée ſont o, $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$, 4, 7 ou 8, & 65.

On cherchera donc la premiere & plus petite racine de la propoſée entre les limites o & $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$.

La ſeconde entre les limites $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$ & 4.

La troiſiéme entre les limites 4 & 7 ou 8.

La quatriéme entre les limites 7 ou 8 & 65.

Mais en cherchant la premiere racine de la propoſée par le moyen des limites o & $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$, on ne trouve point que la ſeconde limite $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$, donne le ſigne — qu'elle doit donner.

De même en cherchant la ſeconde racine entre les limites $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$ & 4, on ne trouve point que la premiere limite, ni aucune grandeur entre la premiere limite & la ſeconde 4, donne le ſigne — qu'elle doit donner.

On trouvera le même inconvenient en cherchant la troiſiéme & la quatriéme racine de la propoſée.

3°. Dans

3°. Dans ce cas il faut approcher les limites en fractions, & ſe ſervant de la troiſiéme methode du troiſiéme Problême, mettre pluſieurs zeros au ſecond terme de la premiere équation des limites, en mettre deux fois autant au troiſiéme terme qu'on en a mis au ſecond terme, en mettre trois fois autant au quatriéme terme, & quatre fois autant au cinquiéme, &c. trouver enſuite les limites approchées de la premiere & troiſiéme racines de la premiere équation des limites, de maniere que les deux limites pour la premiere racine, ne different que d'une unité, & de même les deux limites pour la troiſiéme racine, &c.

Il faut mettre ces limites pour numerateurs, & l'unité précedée d'autant de zeros qu'on en a mis au ſecond terme, pour chaque dénominateur; & enſuite chercher avec ces limites approchées les racines de la propoſée.

Mais comme en cherchant la premiere racine entre les deux nouvelles limites, qui ſont des fractions dont les dénominateurs ſont fort grands, on trouve toujours que la ſeconde limite approchée ne donne point le ſigne — qu'elle doit donner, cela porte à conclure que l'on ne ſçauroit trouver de ſeconde limite qui donne le ſigne — qu'elle doit donner, & qu'ainſi il faut ou que la premiere racine de la premiere équation des limites, qui eſt incommenſurable, ſoit égale à la premiere racine de la propoſée; & que ſi on la pouvoit trouver exactement, elle donneroit zero, étant ſubſtituée à la place de x dans la propoſée; que ce n'eſt que parcequ'elle eſt incommenſurable qu'on ne peut pas trouver ſa valeur exacte, qui étant ſubſtituée dans la propoſée donne zero; & que dans ce cas les deux premieres racines de la propoſée ſont égales: Ou bien il faut que les deux premieres racines de la propoſée ſoient imaginaires, parceque dans ce cas la ſeconde limite de la premiere racine de la propoſée, quoiqu'approchée à l'infini, ne donnera jamais le ſigne qu'elle devroit donner, ſi les deux premieres racines de la propoſée étoient réelles & inégales.

Et comme en cherchant la troiſiéme & quatriéme racines de la propoſée, la limite 4[e] qui devroit donner le ſigne —, donne auſſi le ſigne +, quoiqu'on l'approche tant qu'on voudra, cela portera de même à conclure que la troiſiéme & la quatriéme racines de la propoſée ſont égales ou imaginaires.

4°. Au lieu de la methode de l'article troisiéme, on peut se servir de celle-ci, qui revient à la même chose.

On mettra plusieurs zeros au second terme de la proposée, plus on en mettra, & plus on sera assuré que la proposée appartient au cas pour lequel est ce sixiéme exemple. On mettra le même nombre de zeros au second terme de la premiere équation des limites. On mettra deux fois autant de zeros au troisiéme terme de la proposée, & de la premiere équation des limites, qu'on en a mis au second terme. On en mettra trois fois autant au quatriéme, &c. On en met dans notre exemple seulement deux pour abreger le calcul, & l'on aura les transformées,

$$x^4 - 1600x^3 + 720000xx - 64000000x + 1600000000 = 0.$$
$$x^3 - 1100xx + 360000x - 16000000 = 0.$$

Comme l'on a déja, par le premier & le second article de ce sixiéme exemple, les racines approchées de la premiere équation des limites, qui sont $\frac{5}{10}$ ou $\frac{6}{10}$, la seconde exactement 4, la troisiéme 7 ou 8; on mettra devant chacune deux zeros, & elles seront les racines approchées de la premiere équation des limites de la transformée. Ces racines approchées sont la premiere 50 ou 60, la seconde exactement 400, la troisiéme 700 ou 800.

On cherchera, par la premiere methode du 3e Problême, deux valeurs approchées de la premiere racine de la transformée de l'équation des limites, qui ne different que de l'unité, & l'on trouvera 53 qui donne —, & 54 qui donne +.

On cherchera de même deux valeurs approchées de la troisiéme racine, & l'on trouvera 744 qui donne —, & 745 qui donne +.

Ainsi les limites des racines de la transformée de l'équation proposée, seront 0, 53 ou 54, 400, 744 ou 745, & 64000001.

Mais en cherchant la premiere racine de la transformée de la proposée, avec les limites zero & 53 ou 54, on ne trouve pas que la seconde limite 53 ou 54 donne le signe — qu'elle devroit donner: Comme l'on suppose qu'on a mis beaucoup de zeros au second terme des transformées, cela porte à conclure que les deux premieres racines de la transformée de la proposée, & par consequent les deux premieres racines de la proposée, sont égales ou imaginaires.

La même chose arrivant en cherchant la troisiéme racine, on en conclut de même que les deux dernieres racines de la proposée sont égales ou imaginaires.

5°. On pourroit, au lieu de se servir de la methode du 3e article de cet exemple, c'est à dire, au lieu de se servir de la troisiéme methode du troisiéme Problême, employer la quatriéme methode du troisiéme Problême, pour trouver les valeurs extrêmement approchées des racines de la premiere équation des limites.

Remarque sur le cas de ce sixiéme exemple.

On ne peut pas, dans le cas de ce sixiéme exemple, s'assurer par cette methode d'approximation du quatriéme Problême, si les racines de la proposée, pour lesquelles on ne trouve pas des limites approchées qui donnent les signes qu'elles doivent donner, sont des racines égales & incommensurables, ou si elles sont imaginaires. Il faut avoir recours, quand la proposée ne surpasse pas le quatriéme degré, aux marques certaines qu'on a données dans le cinquiéme Livre, pour distinguer les racines qui sont imaginaires, de celles qui sont égales, dans le quatriéme, troisiéme & second degré.

On peut encore se servir de la methode generale des équations qui ont des racines égales, qu'on a donnée à la fin du quatriéme Livre, c'est à dire, chercher le plus grand diviseur commun de la proposée & de la premiere équation des limites; & trouvant que $xx - 8x + 4 = 0$, est un diviseur qui leur est commun, on est assuré que les deux racines de ce diviseur commun, qui sont $x = 4 + 2\sqrt{3}$, $x = 4 - 2\sqrt{3}$, sont communes à la premiere équation des limites & à la proposée; & par consequent que les deux premieres racines de la proposée sont $x = 4 - 2\sqrt{3}$, $x = 4 - 2\sqrt{3}$, & les deux dernieres sont $x = 4 + 2\sqrt{3}$, $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

On peut aussi se servir de la methode du 5e Corollaire du dixiéme Theorême, pour distinguer dans le cas de ce sixiéme exemple, s'il y a des racines égales.

ANALYSE COMPOSÉE,

OU

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui se réduisent à des équations composées.

LIVRE VII.

De l'approximation des racines des équations litterales.

SECTION I.

De l'approximation des racines des équations litterales déterminées.

PROBLÊME I.

173. *TROUVER les racines d'une équation litterale qui n'a qu'une inconnue, ou bien les valeurs approchées des racines, & en continuer l'approximation à l'infini.*

METHODE GENERALE POUR LES ÉQUATIONS DE TOUS LES DEGRÉS.

LES lettres connues des coëficients des termes de l'équation, & celles du dernier terme, marquant des grandeurs connues, il faut supposer que l'une de ces lettres est l'unité, ou un nombre pris à discretion, comme 10, 20, 30, 100, 1000, &c.

Le raport de chaque autre lettre connue à celle qu'on vient de supposer égale à un nombre, étant connu, il faut trouver la valeur en nombres de toutes les autres lettres

connues par raport à la lettre qu'on a supposée égale à un nombre. Il faut substituer tous ces nombres égaux aux lettres connues, à la place de ces lettres connues, dans l'équation proposée, & elle sera changée en une équation numerique. Il faut trouver par le quatriéme Problême du sixiéme Livre, les racines de cette équation numerique, ou leurs valeurs approchées tant près qu'on voudra. Ces racines ou leurs valeurs approchées, seront les racines ou les valeurs approchées des racines de la proposée; ainsi elle sera resolue.

EXEMPLE.

POUR trouver les racines ou les valeurs approchées tant près qu'on voudra de l'équation $x^3 - 3aax + aab = 0$, il faut supposer la grandeur marquée par la lettre connue a, égale à un nombre pris à discretion, par exemple à 30, & l'on aura $a = 30$.

Le raport des grandeurs marquées par a & par b, étant connu, par exemple supposant que $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$, la grandeur marquée par b sera égale à 36, ainsi $b = 36$. Il faut substituer ces nombres à la place des lettres ausquelles on les a supposé égaux, dans la proposée, & la proposée $x^3 - 3aax + aab = 0$, sera changée en l'équation numerique $x^3 - 2700x + 32400 = 0$.

Il faut chercher par le quatriéme Problême du sixiéme Livre, les racines de cette équation numerique, ou leurs valeurs approchées, comme on le voit dans le troisiéme exemple du quatriéme Problême, où l'on resout cette même équation; & l'on trouvera que les valeurs approchées en entiers des trois racines de cette équation, sont 12 ou 13, 44 ou 45, 57 ou 58.

On peut continuer l'approximation à l'infini de ces valeurs approchées en nombres entiers des racines de la proposée, par la troisiéme ou par la quatriéme methode du troisiéme Problême du sixiéme Livre.

Si on veut changer les valeurs approchées numeriques qu'on a découvertes, en litterales, on trouvera que $12 = \frac{2}{5}a$, & encore $12 = \frac{1}{3}b$; ainsi $\frac{2}{5}a$ ou $\frac{1}{3}b$, sont des valeurs approchées un peu moindres que la premiere racine.

On trouvera de même que $45 = \frac{3}{2}a$, & encore $45 = \frac{1}{24}ab$;

ainsi $\frac{3}{7}a$ ou $\frac{3}{14}ab$, sont des valeurs approchées un peu plus grandes que la seconde racine.

Enfin on trouvera que $57 = \frac{19}{10}a$, & encore $57 = \frac{19}{12}b$; ainsi $\frac{19}{10}a$ ou $\frac{19}{12}b$, sont des valeurs approchées un peu moindres que la troisiéme racine.

Cet exemple suffit pour faire concevoir cette premiere methode.

REMARQUE.

CETTE methode peut servir à resoudre par le seul calcul de l'Arithmetique, tous les Problêmes déterminés de la Geometrie, qui peuvent être exprimés par des équations où il n'y a qu'une inconnue, quelques composées qu'elles puissent être, c'est à dire de quelque degré que puissent être ces équations; & cela avec autant d'exactitude qu'on resout les Problêmes de la Geometrie pratique, de l'Astronomie, & des autres parties des Mathematiques, en se servant des tables des Sinus, Tangentes & Secantes, ou de leurs Logarithmes.

Par ce moyen on éviteroit la difficulté, qui est souvent tres grande, de décrire les lignes courbes tres composées qui servent à la construction de ces Problêmes, & à déterminer les racines des équations qui les expriment. Car il est évident qu'il n'y a qu'à prendre à discretion une des lignes données du Problême, par exemple celle qui est representée dans l'équation du Problême par la lettre connue qui s'y trouve le plus de fois, ou par celle qui a le plus de dimensions; la diviser par le moyen de l'échelle ou du compas de proportion, en tant de parties égales qu'on voudra, par exemple en 100, 1000, 10000, &c. plus le nombre en sera grand, & plus il y aura d'exactitude dans la resolution; & supposer cette lettre connue égale au nombre qui exprime ses parties égales; déterminer ensuite par le moyen de l'échelle ou du compas de proportion, combien chacune des autres lignes données du Problême, contient de ces mêmes parties égales de la premiere; & supposant les nombres de ces parties de chaque ligne donnée, égaux aux lettres qui representent ces lignes dans l'équation, substituer tous ces nombres à la place de ces lettres connues dans l'équation du Problême. Elle sera changée par ces substitutions en une équation numerique qui exprime le Problême.

On en trouvera toutes les racines ou leurs valeurs approchées tant près qu'on voudra, par le quatriéme Problême du sixiéme Livre, & ces racines ou leurs valeurs extrêmement approchées, contiendront le nombre des parties des lignes qu'on cherche, & le Problême sera resolu; car il n'y aura qu'à se servir de la même échelle qui a servi à diviser les lignes données du Problême en parties égales, pour déterminer les longueurs des lignes dont les racines ou leurs valeurs approchées marquent le nombre des parties.

On pourroit, si l'on vouloit, se servir dans la resolution de tous les Problêmes d'une même échelle, c'est à dire, d'une même ligne divisée en parties égales, comme en 100, ou en 1000, &c. car nommant cette ligne e, on pourroit par le moyen des proportions, l'introduire dans tous les coéficients & dans le dernier terme, sans changer leur valeur, par exemple, en faisant cette proportion pour notre exemple, $e . a :: a . d$, l'on auroit $aa = de$; & mettant de à la place de aa dans $x^3 - 3aax + aab = 0$, l'on auroit $x^3 - 3dex + bde = 0$, qui n'en est differente que par l'expression.

On donnera une autre methode generale pour resoudre ce Problême dans la sixiéme Section, où il ne faudra point changer l'équation litterale en une équation numerique.

SECTION II.

De la résolution des équations litterales qui ont deux ou plusieurs inconnues; & de la maniere de trouver la valeur approchée à l'infini, ou tant près qu'on voudra, de l'une des inconnues de ces équations.

AVERTISSEMENT.

174. LES Problêmes qui sont exprimés par des équations qui n'ont qu'une inconnue, s'appellent Problêmes déterminés, parcequ'ils n'ont qu'un nombre déterminé de resolutions; sçavoir, autant que l'exposant de la plus haute puissance de l'inconnue de l'équation qui exprime le Problême, contient d'unités. Ainsi les Problêmes déterminés, dont les équations sont du second degré, ont deux resolutions, ceux

dont les équations sont du troisiéme degré, ont trois resolutions; & ainsi des autres: car ils ont autant de resolutions que l'inconnue a de valeurs dans les équations qui les expriment.

Les Problêmes qui sont exprimés par des équations qui ont deux ou plusieurs inconnues, s'appellent indéterminés, parcequ'ils ont un nombre indéterminé de resolutions, chacune des inconnues pouvant avoir autant de valeurs que l'autre inconnue peut representer de differentes grandeurs.

Ces Problêmes indéterminés sont tres ordinaires dans la Geometrie composée, & il est necessaire de sçavoir resoudre les équations qui les expriment, c'est à dire, de pouvoir trouver la valeur de chacune des inconnues, laquelle valeur ne contienne que l'autre inconnue avec les grandeurs connues de l'équation: & comme cette valeur est d'ordinaire incommensurable, il est necessaire de pouvoir trouver cette valeur par approximation.

Ces équations qui ont deux ou plusieurs inconnues, peuvent quelquefois se resoudre à la maniere des équations qui n'ont qu'une inconnue; & il faut toujours tenter de les resoudre de cette maniere, avant de les resoudre par approximation, c'est à dire, supposant que ces équations ont les deux inconnues x & y avec les grandeurs connues, qui sont les coëficients des termes, & qu'on vueille trouver la valeur de x, il faut ordonner l'équation par raport à x, comme si x étoit la seule inconnue, & que y fût connue; & voir si l'équation lineaire de x plus ou moins un des diviseurs exacts du dernier terme, n'est point un diviseur exact de l'équation: si cela se trouvoit, l'on auroit une valeur exacte de x: si cela ne se trouve pas, il faut voir par les Problêmes du quatriéme Livre, si l'équation proposée ne peut point se réduire en d'autres équations commensurables plus simples irréductibles, & trouver les valeurs approchées de x par la methode qu'on va expliquer dans cette Section, ou celle de la cinquiéme Section suivante, dans ces équations plus simples. Mais si l'équation proposée est irréductible, il faut y appliquer immediatement la methode qu'on va expliquer, ou celle de la cinquiéme Section suivante.

PROBLÊME.

PROBLÊME II.

175. *TROUVER la valeur approchée de la racine x d'une équation litterale, qui a deux inconnues x & y, avec des grandeurs connues; & en continuer l'approximation à l'infini, en tant qu'on voudra.*

PREMIERE METHODE.

1°. IL faut supposer la valeur de x que l'on cherche, representée par une suite infinie de grandeurs, précedées chacune du signe $+$: Toutes ces grandeurs, qu'on appellera les termes de la suite, doivent contenir chacune deux choses; premierement, les puissances de la seconde inconnue y ou de quelqu'une des grandeurs connues de l'équation proposée, de maniere que les exposans de ces puissances soient en progression arithmetique, & aillent en augmentant; (cette grandeur sera celle qui distingue les termes de la suite, chaque terme étant la quantité où cette grandeur, qui distingue les termes, est élevée à une puissance dont l'exposant est different de celui des autres termes.) Secondement, chaque terme de la suite doit contenir une lettre indéterminée pour coëficient, outre la grandeur qui distingue les termes: Et comme l'on a besoin de beaucoup d'indéterminées, on se servira indifferemment des lettres de l'alphabet qui ne sont pas employées dans l'équation proposée.

On supposera donc, par exemple, $x = ay^0 + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 +$ &c. Les lettres $a, b, c, d,$ &c. sont des grandeurs indéterminées; il faut remarquer que ay^0 n'est que a sans y: de même a^0bb n'est que bb seule; car y^0, ou a^0 est l'unité dans la progression y^0, y^1, y^2, &c. ou a^0, a^1, a^2, &c.

Il y a des rencontres où il faudra supposer $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ &c. D'autres où il faudra supposer $x = ay + by^3 + cy^5 +$ &c. En d'autres on supposera $x = ay^2 + by^4 + cy^6 +$ &c. En d'autres, $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{\frac{2}{2}} + cy^{\frac{3}{2}} +$ &c. Les équations particulieres qu'on aura à resoudre, serviront à déterminer les exposans de la grandeur qui distingue les termes, comme on l'enseignera dans la suite.

2°. Il faut élever cette valeur indéterminée de x à toutes les puissances ausquelles x est élevée dans l'équation proposée; & substituer cette valeur de x & ses puissances à la place de x & des puissances de x dans la proposée, comme l'on a fait dans les transformations, observant de bien distinguer les termes dans ces substitutions. Aprés ces substitutions, l'équation proposée sera changée en une équation infinie, qui aura dans chacun de ses termes une des indéterminées particulieres de la valeur indéterminée de x qu'on a supposée; on appellera cette nouvelle équation, l'équation changée.

3°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée, égal à zero, & l'on aura par cette supposition autant d'équations particulieres, qu'on a supposé d'indéterminées dans la valeur de x. On déterminera de suite à l'ordinaire, par le moyen de ces équations particulieres, les valeurs de toutes les indéterminées qu'on a supposées.

4°. Enfin on substituera ces valeurs des indéterminées à la place de ces indéterminées, dans la valeur indéterminée de x qu'on a supposée, & elle sera changée par ces substitutions en une suite qui est la veritable valeur approchée de x que l'on cherchoit. Plus on déterminera de termes de la suite supposée, & plus on approchera de la veritable valeur de x.

Application de la methode aux exemples.

EXEMPLE I.

176. POUR trouver la valeur approchée de x dans l'équation $\begin{matrix} x^3 + nyx - y^3 = 0; \\ + nnx - 2n^3 \end{matrix}$ ou bien $\begin{matrix} -2n^3 + nnx + x^3 = 0; \\ -y^3 \quad + nyx \end{matrix}$

1°. Il faut supposer $x = a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. où a, b, c, d, &c. sont des grandeurs indéterminées; l'on suppose la premiere grandeur indéterminée a sans y, à cause de $-2n^3$ qui est dans l'équation proposée sans l'inconnue y, & qu'on ne pourroit pas employer dans la resolution sans cette supposition.

2°. Il faut élever cette valeur indéterminée de x à la troisiéme puissance, & l'on aura

$$\begin{array}{llllll} x^3 = + a^3 + 3aaby & + 3abbyy & + b^3y^3 & + 3bbcy^4 & \\ & + 3aacyy & + 6abcy^3 & + 3accy^4 & \&c. \\ & & + 3aady^3 & + 6abdy^4 & \\ & & & + 3aaey^4 & \end{array}$$

Il faut substituer ensuite les valeurs de x & de x^3 dans la proposée, à la place de x, x^3, comme on le voit ici:

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllllll} -2n^3 & = -2n^3 & & & & & \\ -y^3 & = & & & -y^3 & & \\ + nnx & = + nna & + nnby & + nncyy & + nndy^3 & + nney^4, & \&c. \\ + nyx & = & + nay & + nbyy & + ncy^3 & + ndy^4, & \&c. \\ + x^3 & = + a^3 & + 3aaby & + 3abbyy & + b^3y^3 & + 3bbcy^4, & \&c. \\ & & & + 3aacyy & + 6abcy^3 & + 3accy^4 & \\ & & & & + 3aady^3 & + 6abdy^4 & \\ & & & & & + 3aaey^4 & \end{array} \right.$$

& l'équation proposée sera changée en l'équation infinie qu'on voit ici, dans laquelle il n'y a d'inconnue que y. On a mis les seuls cinq premiers termes, cela suffisant pour faire concevoir la methode; on nommera ici & dans toute la suite de ce Livre, le premier terme celui où la grandeur qui distingue les termes, ne se trouve point; ou bien, si elle se trouve dans tous les termes, celui où elle est au moindre degré; le second terme, celui où elle est au degré immediatement plus élevé qu'au premier terme; & ainsi de suite.

3°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée, égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'on a supposé d'indéterminées.

La 1^re^, $a^3 + nna - 2n^3 = 0$; La 2^e^, $3aab + nnb = -na$; La 3^e^, $3aac + nnc = -3abb - nb$; La 4^e^, $+ 3aad + nnd = -6abc - b^3 - nc + 1$; La 5^e^, $nne + 3aae = -3bbc - 3acc - nd - 6abd$.

La 1^re^ a pour diviseur exact $a - n = 0$; & la divisant par $a - n = 0$, on trouve le quotient $aa + na + 2nn = 0$, dont les deux racines sont imaginaires; ainsi a n'a qu'une valeur réelle qui est $+ n$; on a donc $a = + n$. Par la 2^e^ on trouve $b = -\frac{1}{4}$; par la 3^e^ on trouve $c = + \frac{1}{64n}$; par la 4^e^ on trouve $d = + \frac{131}{512nn}$; par la 5^e^ on trouve $e = + \frac{509}{16384n^3}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, &c. à leur place dans $x = a + by + cyy + dy^3 + ey^4 +$ &c. & l'on aura $x = + n - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64n}yy + \frac{131}{512nn}y^3 + \frac{509}{16384n^3}y^4$, &c. C'est la valeur de x que l'on cherchoit, qu'on peut augmenter à l'infini.

Le même premier exemple d'une autre maniere.

177. Si dans la proposée $\left.\begin{matrix} -2n^3 + nnx + x^3 \\ -y^3 + nyx \end{matrix}\right\} = 0$, la grandeur y surpassoit la grandeur n, par la nature du Problême exprimé par cette équation, il faudroit prendre la grandeur n qu'on suppose à present moindre que y, pour distinguer les termes, afin que dans les termes de la suite, les puissances de n se trouvassent dans le numerateur, & les puissances de y dans le dénominateur, & que la suite allât en diminuant pour approcher de plus en plus de la racine qu'on cherche. Pour appliquer la methode à ce cas, il faut regarder n comme l'on faisoit dans le premier cas y, & regarder y comme si c'étoit une grandeur connue; & supposer,

1°. $x = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4 +$ &c. $a, b, c, d,$ &c. sont des grandeurs indéterminées, & l'on ne met point n dans le premier terme a de la suite, parcequ'autrement il n'y auroit que la seule grandeur y^3, qui ne contient point la grandeur n, dans le premier terme de l'équation changée; & l'on ne pourroit pas faire une équation particuliere de ce premier terme de l'équation changée, par laquelle on pût déterminer une des grandeurs indéterminées qu'on a supposées.

2°. Il faut élever cette valeur indéterminée x à la troisiéme puissance, & l'on trouvera

$$\begin{array}{llllll} x^3 = a^3 + 3aabn & + 3abbn^2 & + b^3n^3 & + 3bbcn^4 & + \&c. \\ & + 3aacn^2 & + 6abcn^3 & + 6abdn^4 & \\ & & + 3aadn^3 & + 3accn^4 & \\ & & & + 3aaen^4 & \end{array}$$

Il faut substituer les valeurs de x & de x^3 à leur place dans la proposée, comme on le voit ici, & l'on aura l'équation changée qui suit,

$$0 = \left\{\begin{array}{llllllll} -y^3 & = -y^3 & & & & & & \\ -2n^3 & = & & & & -2n^3 & & \\ +nyx & = & & +ayn & +byn^2 & +cyn^3 & +dyn^4 & +\&c. \\ +nnx & = & & & +an^2 & +bn^3 & +cn^4 & +\&c. \\ +x^3 & = & +a^3 & +3aabn & +3abbn^2 & +b^3n^3 & +3bbcn^4 & +\&c. \\ & & & & +3aacn^2 & +6abcn^3 & +6abdn^4 & \\ & & & & & +3aadn^3 & +3accn^4 & \\ & & & & & & +3aaen^4 & \end{array}\right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, & l'on aura par cette supposition toutes les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les valeurs des indéterminées.

Par la 1re $a^3 - y^3 = 0$, on trouvera $a = y$; par la 2^e $3aabn + ayn = 0$, on aura, en substituant la valeur de $a = y$ à la place de a, $b = -\frac{1}{3}$; par la 3^e $3aac + 3abb + a + by$ $= 0$
on trouvera, en substituant les valeurs de a & de b, deja découvertes, à leur place, $c = -\frac{1}{3y}$; en substituant dans la 4^e $3aad + 6abc + b^3 + b + cy - 2 = 0$, les valeurs de a, b, c, on aura $d = +\frac{55}{81yy}$; on trouvera de même, en substituant les valeurs de a, b, c, d, dans la 5^e $3aae + 3acc + 6abd + 3bbc + c + dy = 0$, $e = +\frac{64}{243y^3}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, d, e, dans $x = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4 +$ &c. & l'on aura $x = y - \frac{1}{3}n - \frac{nn}{3y} + \frac{55n^3}{81yy} + \frac{64n^4}{243y^3} +$ &c. C'est la valeur approchée de x dans la proposée, quand n est moindre que y.

Il est évident qu'on peut trouver tant de termes qu'on voudra de cette valeur, & l'augmenter à l'infini.

Démonstration de la methode.

178. La grandeur qui étant substituée dans une équation à la place de l'inconnue x, rend tous les termes de l'équation égaux à zero; ou, ce qui revient au même, qui fait que tous les termes se détruisent, est une racine de l'équation; c'est à dire, cette grandeur est la valeur de l'inconnue x.* *33.
Or il est évident que la suite que l'on trouve par la methode pour la valeur de l'inconnue x, étant conçue infinie, c'est à dire, contenant tous ses termes à l'infini, il est, dis-je, évident que cette suite infinie étant conçue substituée à la place de x dans l'équation, tous les termes de l'équation seront égaux à zero; puisque ce n'est que par cette supposition qu'on trouve la valeur déterminée de chaque terme de cette suite. Par consequent la suite infinie qu'on trouve par cette methode, est la valeur de l'inconnue x de l'équation. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUES.

I.

179. Il est évident par cette démonstration, que plus on prendra de termes dans la suite que fait trouver la methode

pour la valeur de x, & plus cette valeur sera approchée, c'est à dire, moins elle differera de la veritable valeur de x, que l'on ne peut pas découvrir entiere, étant infinie. D'où l'on voit que les termes de cette suite doivent aller en diminuant, & que plus ils iront en diminuant, & moins il faudra de termes pour la valeur approchée qu'on cherche, tous ceux qu'on neglige ne faisant pas une grandeur sensible.

Or plus la grandeur qui distingue les termes de la suite sera petite, & plus les termes iront en diminuant; car cette grandeur se trouvant dans le numerateur de chaque terme, & les autres quantités plus grandes qu'elles, dans le dénominateur, tous les termes, excepté les premiers, seront des fractions qui iront en diminuant, parceque les puissances de ces grandeurs qui vont en augmentant, font que ces grandeurs deviennent plus petites, étant des fractions.

C'est pour cela qu'on a marqué qu'il falloit prendre pour la grandeur qui distingue les termes la seconde inconnue y de l'equation proposée, quand elle est plus petite que les grandeurs connues de cette équation; & que quand elle est plus grande, il falloit prendre parmi les grandeurs connues de la proposée celle qui est la plus petite, pour la grandeur qui doit distinguer les termes de la suite qu'on cherche.

II.

180. On peut même préparer l'équation proposée de façon qu'on y puisse prendre une grandeur tres petite par raport aux autres, pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche. Cette préparation peut se faire de deux manieres: 1°. sur les grandeurs connues de la proposée; 2°. sur la seconde inconnue.

La préparation se fait sur les grandeurs connues par le moyen des proportions, observant de faire en sorte que la valeur des coéficients connus demeure toujours la même dans ces changemens, & qu'il n'y ait que changement d'expression, & non pas changement de valeur. Par exemple on pourra supposer $pq = nn$, en prenant la grandeur p tant petite qu'on voudra, & faisant $p . n :: n . q$, ce qui donnera $pq = nn$; & mettant cette valeur de nn dans la proposée, elle sera changée en $\begin{matrix} -2npq + pyx + x^3 = 0, \\ -y^3 \quad + nyx \qquad\qquad \end{matrix}$ qui ne differe de la proposée que par l'expression; & l'on pourra prendre

la grandeur p pour distinguer les termes de la suite qui sera la valeur de x. Ceci suffit pour indiquer les moyens de faire ces sortes de préparations sur les grandeurs connues de la proposée, qui peuvent se faire de plusieurs façons differentes; parmi lesquelles on choisira les plus commodes pour le calcul, & pour faire en sorte que les termes de la suite qui est la valeur de x, aillent en diminuant le plus qu'il sera possible.

La préparation sur la seconde inconnue y, se fait par le moyen des transformations; par exemple, on peut supposer dans la proposée du premier exemple $\frac{n}{y} = z$, ou telle autre transformation de y qu'on jugera la plus propre pour rendre y moindre que les grandeurs connues; & substituer la valeur de y prise dans l'équation $\frac{n}{y} = z$, ou telle autre qu'on jugera plus propre, dans la proposée à la place de y; ensuite on prendra l'inconnue nouvelle z pour distinguer les termes de la suite qui est la valeur de x; & quand on aura trouvé cette suite, on substituera dans tous les termes à la place de l'inconnue z, la valeur de z prise dans l'équation qui a servi à faire la transformation. On peut aussi diminuer les dimensions de y, par exemple s'il y avoit $\frac{y^3 x}{n}$ au lieu de nyx, on pourroit supposer $y^3 = nnz$, &c. Par le moyen de ces préparations, on peut trouver plusieurs differentes suites pour la valeur de x, & choisir celle qui est la plus commode pour la résolution du Problême; comme aussi celle dont les termes vont le plus en diminuant, & dont par consequent il faut moins de termes pour avoir une valeur tres approchante de la veritable.

III.

181. Quand l'équation qui fait trouver le premier terme de la suite est composée, & contient plusieurs racines positives & réelles, on peut trouver autant de valeurs de x, que cette équation contient de racines positives; & l'on peut chercher celle de ces valeurs de x qu'on voudra, ou qu'on jugera la plus propre à resoudre le Problême; ou bien on pourra les chercher toutes, & l'on aura le même nombre de résolutions du Problême. Si cette équation composée qui n'a qu'une inconnue, n'avoit aucune racine commensurable, on trouveroit les valeurs approchées de ses racines incommensurables par le premier Problême,* ou par le Problême * 173.

de la derniere Section de ce Livre, & ces valeurs approchées seroient prises pour les premiers termes des suites qu'on cherche.

Comme cette methode est de grand usage dans la Geometrie composée, on va l'appliquer à beaucoup d'exemples, & quand on l'aura ainsi rendue familiere, on donnera la methode de distinguer les exposans des puissances de la grandeur qui doit distinguer les termes de la suite, dans le premier & le second terme, les autres en étant une suite, puisqu'ils doivent être en progression arithmetique.

IV.

182. Quoiqu'on ait dit que quand la seconde inconnue y pouvoit être plus grande qu'une des grandeurs connues de l'équation proposée, il falloit prendre la grandeur connue la plus petite pour distinguer les termes de la suite qui doit être la valeur approchée de x, cela n'empêche pas qu'on ne puisse dire que dans ce cas là même on peut prendre la seconde inconnue y pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche: mais comme dans ce cas la seconde inconnue y doit être au dénominateur, ou, ce qui est la même chose, les exposans des puissances de y dans les termes de la suite, doivent être négatifs, & que d'ordinaire on est moins accoutumé au calcul de ces puissances dont l'exposant est négatif, on a cru qu'il seroit plus commode de ne faire faire attention au Lecteur qu'à la grandeur qui distingue les termes dont les puissances ont des exposans positifs. Cependant pour faire voir que l'un revient à l'autre, on va resoudre le même exemple en prenant la seconde inconnue y pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche, qui doit être la valeur de x.

Troisiéme maniere de resoudre le premier Exemple.

183. Pour trouver la valeur approchée de x dans l'équation $\begin{matrix} x^3 + nyx - y^3 = 0 \\ + nnx - n^3 \end{matrix}$, lorsque y peut être plus grande que n, en se servant pourtant de y & des puissances de y pour distinguer les termes de la suite qu'on cherche;

1°. Il faut supposer $x = ay + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2} + ey^{-3}$ + &c. les grandeurs a, b, c, &c. sont indéterminées.

2°. Il

2°. Il faut élever cette valeur de x à la troisiéme puissance, & substituer les valeurs de x & de x^3, dans la proposée, à la place de x & de x^3, & l'on aura l'équation changée qui suit:

$$\begin{array}{lllllll}
x^3 = & a^3y^3 & + 3a^2byy & + 3ab^2y & + b^3y^0 & + 3b^2cy^{-1} & + \&c. \\
 & & & + 3a^2cy & + 6abcy^0 & + 6abdy^{-1} & \\
 & & & & + 3a^2dy^0 & + 3ac^2y^{-1} & \\
 & & & & & + 3a^2ey^{-1} & \\
+ nyx = & & + nayy & + nby & + ncy^0 & + ndy^{-1} & + \&c. \\
+ nnx = & & & + nnay & + nnby^0 & + nncy^{-1} & + \&c. \\
- y^3 = - y^3 & & & & & & \\
- 2n^3 = & & & & - 2n^3y^0 & &
\end{array}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, & l'on trouvera par les équations particulieres que donne cette supposition, $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}n$, $c = -\frac{1}{9}nn$, $d = +\frac{11}{81}n^3$, $e = +\frac{64}{243}n^4$. On peut dégager autant d'autres termes qu'on voudra, & continuer l'approximation à l'infini.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, d, e, dans $x = ay + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2} + ey^{-3}$ + &c. & l'on aura $x = y - \frac{1}{3}ny^0 - \frac{1}{9}nny^{-1} + \frac{11}{81}n^3y^{-2} + \frac{64}{243}n^4y^{-3}$ &c. c'est la valeur de x que l'on cherchoit.

Il faut entendre la même chose dans les cas semblables, où l'on se servira dans la suite de cette troisiéme maniere.

EXEMPLE II.

184. Trouver par cette methode la suite infinie qui exprime la racine quarrée de la grandeur $rr - xx$, c'est à dire, trouver la suite égale à $\sqrt{rr - xx} = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$.

Il faut supposer $z = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$, par consequent $zz = rr - xx$, & $zz + xx - rr = 0$.

La question se réduit à trouver la suite infinie qui exprime la valeur de l'inconnue z dans cette équation, par les puissances de x. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $z = a + bxx + cx^4 + dx^6 + ex^8 + fx^{10}$ &c. a, b, c, d, &c. sont des grandeurs indéterminées.

2°. Quarrant chaque membre on aura

$$\begin{array}{llll}
zz = aa + 2abxx & + bbx^4 & + 2adx^6 & \\
 & + 2acx^4 & + 2bcx^6 & \&c.
\end{array}$$

Substituant cette valeur de zz dans l'équation $zz + xx - rr = 0$, on aura l'équation changée suivante,

$$0 = \begin{cases} zz = aa + 2abxx + bbx^4 + 2adx^6 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 2acx^4 + 2bcx^6 \quad \&c. \\ + xx = \quad + xx \\ - rr = - rr \end{cases}$$

Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'on en a besoin pour déterminer les coéficients indéterminés a, b, c, &c.

3°. Par la premiere $aa = rr$, on aura $a = r$; par la seconde $2ab = -1$, en substituant la valeur de a à sa place dans $2ab$, on trouvera $b = \frac{-1}{2r}$. En substituant les valeurs de a & de b dans la troisiéme $2ac = -bb$, on trouvera $c = \frac{-1}{2 \times 4r^3}$. En substituant les valeurs de a, b, c, dans la quatriéme $2ad = -2bc$, on trouvera $d = \frac{-1}{16r^5}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, d, à la place de a, b, c, d, dans $z = a + bxx + cx^4 + dx^6$ &c. & l'on aura $z = \sqrt{rr - xx} = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}} = r - \frac{1}{2r}xx - \frac{1}{8r^3}x^4 - \frac{1}{16r^5}x^6$ &c. C'est la suite que l'on cherchoit qui exprime la racine quarrée de $rr - xx$; on peut en trouver autant de termes qu'on voudra.

On trouvera de la même maniere la racine 3°, 4°, &c. de la somme ou de la difference de deux grandeurs.

Mais il faut remarquer que si l'on cherche la racine quarrée, ou 3°, ou 4°, &c. de $rr + xx$, il faut prendre celle des deux grandeurs r ou x qui est la plus petite, pour en faire la grandeur qui doit distinguer les termes de la suite qu'on cherche, qui est la valeur de z, c'est à dire, la racine de la grandeur complexe proposée.

EXEMPLE III.

185. TROUVER la racine quarrée d'une suite infinie $a + by + cyy + dy^3 + ey^4 + fy^5$ &c. c'est à dire, trouver une suite infinie qui soit la valeur de $\sqrt{a + by + cyy + dy^3 + ey^4}$ &c. $= \overline{a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{2}}$

Il faut supposer $x = \overline{a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{2}}$ Par consequent $xx = a + by + cyy + dy^3 + ey^4$ &c. & $0 = - xx + a + by + cyy + dy^3 + ey^4$ &c.

La question se réduit à trouver la suite infinie qui exprime la valeur de x dans cette équation, dont les termes soient distingués par les puissances de y. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $x = g + hy + iyy + ky^3 + ly^4 + my^5$ &c. les grandeurs g, h, i, &c. sont indéterminées.

2°. En quarrant chaque membre, on aura

$$xx = gg + 2ghy + hhyy + 2gky^3 + 2gly^4 + 2giyy + 2hiy^3 + 2hky^4 + iiy^4 \quad \&c.$$

Substituant cette valeur de xx à la place de xx dans l'équation proposée $0 = - xx + a + by + cyy$ &c. on aura l'équation changée qui suit.

$$0 = \begin{cases} - xx = - gg - 2ghy - 2giyy - 2gky^3 - 2gly^4 \\ \qquad\qquad\qquad - hhyy - 2hiy^3 - 2hky^4 \quad \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - iiy^4 \\ a + by + cyy \text{ \&c.} = + a + by + cyy + dy^3 + ey^4 \quad \&c. \end{cases}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les coéficients indéterminés g, h, i, &c.

Par la premiere $gg = a$, on aura $g = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. En substituant dans la seconde $2gh = b$, la valeur de g, on aura $h = \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$. En substituant dans la troisiéme $2gi = c - hh$, les valeurs de g & de h, on aura $i = - \frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}$. En substituant dans la quatriéme $2gk = - 2hi + d$, les valeurs de g, h, i, on aura $k = \frac{b^3}{16a^{\frac{5}{2}}} - \frac{bc}{4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{d}{2a^{\frac{1}{2}}}$.

On trouvera de même les valeurs des autres coéficients; ceci suffit pour faire concevoir la methode.

4°. Il faut substituer ces valeurs de g, h, i, k, à leur place dans l'équation $x = g + hy + iyy + ky^3$ &c. & l'on aura

$$x = a^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y - \frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{b^3}{16a^{\frac{5}{2}}}y^3$$
$$+ \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy - \frac{bc}{4a^{\frac{3}{2}}}y^3 \quad \&c.$$
$$+ \frac{d}{2a^{\frac{1}{2}}}y^3$$

C'est la valeur de x que l'on cherchoit, c'est à dire, cette suite est égale à $\sqrt{a+by+cyy+dy^3}$ &c.

On trouvera de la même maniere la racine 3^e, 4^e, 5^e, &c. de la même suite.

EXEMPLE IV.

186. TROUVER la racine quarrée de la suite infinie $ay+byy+cy^3+dy^4+ey^5$ &c. c'est à dire, trouver la suite infinie qui est la valeur de $\sqrt{ay+byy+cy^3+dy^4+ey^5\ \&c.}$ $=\overline{ay+byy+cy^3+dy^4+ey^5\ \&c.}^{\frac{1}{2}}$

Il faut supposer $x=\overline{ay+byy+cy^3+dy^4\ \&c.}^{\frac{1}{2}}$ Ainsi quarrant chaque membre, on aura l'équation $xx=ay+byy+cy^3+dy^4+ey^5$ &c. & $0=-xx+ay+byy+cy^3+dy^4$ &c.

La question se réduit à trouver la valeur de x dans cette équation, qui soit exprimée par une suite infinie dont les termes n'ayent que les puissances de y. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $x=gy+hyy+iy^3+ly^4+py^5$ &c. les coéficients g, h, i, &c. sont indéterminés.

2°. En quarrant chaque membre, on aura

$$\begin{array}{rllllll} xx = gygy & +2ghy^3 & +2giy^4 & +2gly^5 & +2gpy^6 & \\ & & +hhy^4 & +2hiy^5 & +2hly^6 & \&c. \\ & & & & +iiy^6 & \end{array}$$

On peut mettre un des y de chaque terme parmi les coéficients, afin que les puissances y, yy, y^3, y^4, &c. servent à distinguer les termes; & l'on aura

$$\begin{array}{rllllll} xx = gygy & +2gyhyy & +2gyiy^3 & +2gyly^4 & +2gypy^5 & \\ & & +yhhy^3 & +2yhiy^4 & +2yhly^5 & \&c \\ & & & & +yiiy^5 & \end{array}$$

Il faut substituer cette valeur de xx à la place de xx dans l'équation proposée $0=-xx+ay+byy+cy^3$ &c. & l'on aura l'équation qui suit,

$$0=\left\{\begin{array}{rllllll} -xx = & -gygy & -2gyhyy & -2gyiy^3 & -2gyly^4 & -2gypy^5 & \\ & & & -yhhy^3 & -2yhiy^4 & -2yhly^5 & \&c. \\ & & & & & -yiiy^5 & \\ +ay+byy+cy^3\ \&c. = & +ay & +byy & +cy^3 & +dy^4 & +ey^5 & \&c. \end{array}\right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les coéficients indéterminés g, h, i, &c.

Par la premiere $gyg=a$, on aura $g\times y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, & $g=a^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$; Et $gy=a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. En substituant cette valeur de gy dans la 2^e $2gyh=b$, on trouvera $h=+\frac{1b}{2a^{\frac{1}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}$.

En substituant les valeurs de gy & de h dans la 3^e $2gyi=c-ybb$, on trouvera $i=-\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}+\frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}$.

Substituant les valeurs de gy, de h & de i dans la 4^e $2gyl=-2yhi+d$, on trouvera $l=+\frac{b^3}{16a^{\frac{5}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}-\frac{bc}{4a^{\frac{3}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}+\frac{d}{2a^{\frac{1}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}$. Substituant les valeurs de gy, h, i, l, dans la cinquiéme $2gyp=-2yhl-yii+e$, on trouvera $p=-\frac{5b^4}{128a^{\frac{7}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}+\frac{3bbc}{16a^{\frac{5}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}-\frac{bd}{4a^{\frac{3}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}-\frac{cc}{8a^{\frac{3}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}+\frac{e}{2a^{\frac{1}{2}}}y^{-\frac{1}{2}}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de gy, h, i, l, p, dans l'équation $x=gy+hyy+iy^3$ &c. & l'on aura $x=\sqrt{ay+byy+cy^3+dy^4+ey^5}$ &c. $=$

$$\begin{array}{llllll} a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} & +\frac{b}{2\times a^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{3}{2}} & -\frac{bb}{8\times a^{\frac{3}{2}}}y^{\frac{5}{2}} & +\frac{b^3}{16\times a^{\frac{5}{2}}}y^{\frac{7}{2}} & -\frac{5b^4}{128\times a^{\frac{7}{2}}}y^{\frac{9}{2}} & \&c. \\ & & +\frac{c}{2\times a^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{5}{2}} & -\frac{bc}{4\times a^{\frac{3}{2}}}y^{\frac{7}{2}} & +\frac{3bbc}{16\times a^{\frac{5}{2}}}y^{\frac{9}{2}} & \\ & & & +\frac{d}{2\times a^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{7}{2}} & -\frac{bd}{4\times a^{\frac{3}{2}}}y^{\frac{9}{2}} & \\ & & & & -\frac{cc}{8\times a^{\frac{3}{2}}}y^{\frac{9}{2}} & \\ & & & & +\frac{e}{2\times a^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{9}{2}} & \end{array}$$

C'est la racine quarrée de la suite $ay+byy+cy^3$ &c. que l'on cherchoit.

On trouvera de la même maniere les racines 3^e, 4^e, 5^e, 6^e, &c. de la même suite.

AVERTISSEMENT.

On peut trouver une formule generale, par le moyen de laquelle on aura tout d'un coup, par la simple substitution, les racines qu'on voudra de la somme ou de la difference de deux grandeurs ; les racines qu'on voudra de la somme de trois, de quatre, de cinq, de six grandeurs, &c. & enfin les racines qu'on voudra d'une suite infinie de grandeurs. On pourra aussi par le moyen de la même formule, élever la somme de deux, trois, quatre grandeurs, &c. & une suite infinie de grandeurs à une puissance quelconque ; ce qui abregera de beaucoup le calcul de cette methode, dans la résolution des équations ausquelles on pourra l'appliquer.

On fera ici une digression, où l'on mettra tous les principes qui servent à trouver & à démontrer cette formule generale, à cause de sa grande utilité, sans rien supposer que le seul calcul de l'Algebre.

SECTION III.

Qui contient les principes qui servent à démontrer les suites des differens ordres, & les usages de ces suites pour trouver une formule generale pour la formation des puissances, & pour l'extraction des racines quelconques.

DEFINITION I.

187. L'on a nommé dans la Section précedente *une suite*, la somme de tous les termes qui vont à l'infini, qui est la valeur approchée de la racine d'une équation ; & une suite en general est la somme d'un nombre de grandeurs jointes ensemble par les signes + ou —, ou par tous les deux, lequel nombre de grandeurs va à l'infini. Il y a de ces suites dont tous les termes ont quelque raport les uns aux autres : il y en a d'autres où cela ne se rencontre pas.

Les suites que l'on va expliquer ici, sont plusieurs suites de la premiere sorte, & qui de plus sont dépendantes les

unes des autres : la premiere est supposée avoir une certaine proprieté qu'on expliquera ; la seconde est formée par l'addition faite par ordre des termes de la premiere ; la troisiéme, par l'addition faite par ordre des termes de la seconde ; la quatriéme, par l'addition faite par ordre des termes de la troisiéme ; & ainsi de suite à l'infini.

Comme ces suites contiennent les proprietés generales des suites des nombres, qu'on appelle de *differens ordres*, sçavoir du premier ordre, du second ordre, du troisiéme ordre, &c. & qu'on fera l'application des proprietés de ces suites generales aux suites des nombres de differens ordres ; on peut aussi les nommer *les suites des differens ordres.*

Les suites generales des differens ordres.

1^{re}.	2^e.	3^e.	4^e.	5^e.	6^e.	7^e.
a	g	m	v	&c.		
b	h	p	x			
c	i	q	y			
d	k	r	z			
f	l	t	$\&$			

Demandes ou suppositions sur ces suites.

I.

188. Les grandeurs representées en general par les lettres de chaque colonne, font ce qu'on appelle une suite, par exemple a, b, c, d, f, sont les grandeurs de la premiere suite ; g, h, i, k, l, sont les grandeurs de la seconde suite ; & ainsi des autres : on peut concevoir que chaque colonne va à l'infini.

La proprieté de la premiere suite est que la somme d'autant de termes qu'on voudra prendre dans cette suite depuis le premier a compris, est au produit du nombre des termes de cette somme, par le terme qui suit immédiatement le dernier terme de cette même somme, comme l'unité est à une grandeur donnée e, qu'on appellera l'exposant de cette suite, par exemple $a+b+c+d$. $4f :: 1 . e$; d'où il suit que $a+b+c+d=\frac{4f}{e}$.

Ainsi la proprieté de cette premiere suite peut aussi s'exprimer de cette maniere : La somme d'autant de termes qu'on voudra depuis le premier a compris, est égale au produit du terme f qui suit immédiatement le dernier terme de cette somme, par le nombre des termes 4 de la même somme, divisé par la grandeur déterminée e, qui est l'exposant de la premiere suite. $a+b+c+d=\frac{4f}{e}$, de même $a+b+c=\frac{3d}{e}$, $a+b=\frac{2c}{e}$, $a=\frac{1b}{e}$.

II.

159. Dans chaque autre suite, c'est à dire dans la 2^e, la 3^e, la 4^e, &c. le premier terme est toujours égal au premier terme de la suite qui la précede immédiatement; le second terme est égal à la somme des deux premiers termes de la suite qui la précede immédiatement; le troisiéme terme est égal à la somme des trois premiers termes de la suite qui la précede, & ainsi de suite.

Dans la seconde suite $g=a$, $h=a+b$, $i=a+b+c$, $k=a+b+c+d$ &c.

Dans la troisiéme $m=g$, $p=g+h$, $q=g+h+i$ &c. il en est de même des autres suites suivantes, dont il faut concevoir que le nombre en va à l'infini.

Premiere proposition sur les suites, qui en contient la proprieté.

160. Dans chaque suite la somme d'autant de termes qu'on voudra, depuis le premier compris, est égale au produit du nombre des termes de cette somme, par le terme qui suit le dernier terme de la même somme, divisé par une grandeur donnée qu'on appellera *l'exposant de cette suite*, lequel exposant est toujours l'exposant e de la premiere suite, augmenté de l'unité dans la seconde suite, augmenté de deux unités dans la troisiéme, de trois unités dans la quatriéme, & ainsi de suite.

Soit la somme de tant de termes qu'on voudra de chaque suite $=s$.

Le

Le nombre des termes de la somme soit $=n$; & comme on n'en prend que quatre pour servir d'exemple, $4=n$.

Le terme qui suit le dernier de la seconde suite est l, celui de la troisiéme est t, de la quatriéme ζ, &c.

Ainsi la proprieté de la seconde suite est $s=l\times\frac{n}{e+1}$.

La proprieté de la troisiéme suite est $s=t\times\frac{n}{e+2}$.

La proprieté de la quatriéme suite est $s=\zeta\times\frac{n}{e+3}$.

Et ainsi des autres suivantes à l'infini.

Démonstration de la seconde suite.

Il faut démontrer que $g+h+i+k=s=l\times\frac{n}{e+1}$:

Par la 1^re suppos. $d+c+b+a=f\times\frac{n}{e}=k$ par la 2^e sup.
Par la 1^re suppos. $c+b+a=d\times\frac{n-1}{e}=i$ par la 2^e sup.
Par la 1^re suppos. $b+a=c\times\frac{n-2}{e}=h$ par la 2^e sup.
Par la 1^re suppos. $+a=b\times\frac{n-3}{e}=g$ par la 2^e sup.
il est évident que $0=a\times\frac{n-4}{e}=0$.

Donc $\frac{nf}{e}+\frac{nd}{e}-\frac{1d}{e}+\frac{nc}{e}-\frac{2c}{e}+\frac{nb}{e}-\frac{3b}{e}+\frac{na}{e}-\frac{4a}{e}=k+i+h+g+0$; ou, ce qui est la même chose, $\frac{n}{e}\times\overline{f+d+c+b+a}-\frac{1d}{e}-\frac{2c}{e}-\frac{3b}{e}-\frac{4a}{e}=k+i+h+g+0$.

Mais, 1°, puisque par la seconde supposition $f+d+c+b+a=l$, l'on aura $\frac{n}{e}\times\overline{f+d+c+b+a}=\frac{n}{e}\times l$.

2°. n étant égale à 4 dans nôtre exemple, on peut disposer les produits negatifs $-\frac{1d}{e}-\frac{2c}{e}-\frac{3b}{e}-\frac{na}{e}$ de la maniere suivante,

$$
\begin{array}{rl}
-\frac{1d}{e}-\frac{2c}{e}-\frac{3b}{e}-\frac{na}{e}= & -d-c-b-a \\
 & -c-b-a \\
 & -b-a \\
 & -a \\
\hline
 & e
\end{array}
$$

Ainsi l'on aura par la seconde supposition

$$
\begin{array}{rl}
-\frac{1d}{e}-\frac{2c}{e}-\frac{3b}{e}-\frac{na}{e}= & -d-c-b-a=-k \\
 & -c-b-a=-i \\
 & -b-a=-h \\
 & -a=-g \\
\hline
 & e \qquad\quad e
\end{array}
$$

Donc $-\frac{1d}{e}-\frac{2c}{e}-\frac{3b}{e}-\frac{na}{e}=\frac{-k-i-h-g}{e}$.

Mettant à present dans l'égalité $\frac{n}{e}\times\overline{f+d+c+b+a} - \frac{5d}{e} - \frac{4c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e} = k+i+h+g+o$, $\frac{n}{e}\times l$ à la place de $\frac{n}{e}\times\overline{f+d+c+b+a}$, & $\frac{-k-i-h-g}{e}$ à la place de $-\frac{5d}{e} - \frac{4c}{e} - \frac{3b}{e} - \frac{na}{e}$, on aura $\frac{n}{e}\times l \frac{-k-i-h-g}{e} = k+i+h+g+o$; multipliant le tout par e, & transposant, on aura $nl = e\times\overline{k+i+h+g} + 1\times\overline{k+i+h+g}$; divisant chaque membre par $e+1$, on aura $\frac{n}{e+1}\times l = k+i+h+g$. Ce qu'il falloit démontrer.

Démonstration pour la troisième suite.

Il faut démontrer que $s = m+p+q+r = t\times\frac{n}{e+2}$.

Par la démonstr. préced. $k+i+h+g = \frac{n}{e+1}\times l = r$ par la 2e sup.

$$\begin{aligned} i+h+g &= \tfrac{n-1}{e+1}\times k = q \\ h+g &= \tfrac{n-2}{e+1}\times i = p \\ +g &= \tfrac{n-3}{e+1}\times h = m \end{aligned}$$

il est évident que $o = \frac{n-n}{e+1}\times g = o$.

Donc $\frac{n}{e+1}\times\overline{l+k+i+h+g} - \frac{5k}{e+1} - \frac{4i}{e+1} - \frac{3h}{e+1} - \frac{ng}{e+1} = r+q+p+m$.

Mais, 1°, $\frac{n}{e+1}\times\overline{l+k+i+h+g} = \frac{nt}{e+1}$, puisque $t = l+k+i+h+g$ par la seconde supposition.

2°. $\frac{-5k-4i-3h-ng}{e+1} = -k-i-h-g = -r$ par la 2e sup.

$$\begin{aligned} -i-h-g &= -q \\ -h-g &= -p \\ -g &= -m \\ \hline e+1 \quad & \quad e+1 \end{aligned}$$

Donc en mettant $\frac{nt}{e+1}$ à la place de $\frac{n}{e+1}\times\overline{l+k+i+h+g}$, & $-\frac{r-q-p-m}{e+1}$ à la place de $-\frac{5k-4i-3h-ng}{e+1}$ dans l'égalité $\frac{n}{e+1}\times\overline{l+k+i+h+g} - \frac{5k-4i-3h-ng}{e+1} = r+q+p+m$, l'on aura $\frac{nt}{e+1} - \frac{r-q-p-m}{e+1} = r+q+p+m$; multipliant le tout par $e+1$, & transposant, on aura $nt = e+1\times\overline{r+q+p+m} + 1\times\overline{r+q+p+m}$; divisant chaque membre par $e+1+1 = e+2$, on trouvera $t\times\frac{n}{e+2} = r+q+p+m$. Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que la même démonstration peut s'appliquer par ordre à la suite 4e, à la 5e, 6e, &c.

COROLLAIRE I.

191. On nommera E l'exposant de chaque suite, c'est à dire, on supposera que E represente e pour la premiere suite, $e+1$ pour la seconde, $e+2$ pour la troisiéme, &c. on appellera n le nombre des termes; D le dernier terme; Δ le terme qui suit le dernier terme; s la somme des termes.

$s = \Delta\times\frac{n}{E}$ sera la formule qui servira à trouver la somme des termes de chaque suite. Il n'y aura qu'à substituer à la place de Δ, le terme qui suit le dernier terme; à la place de n, le nombre des termes; & à la place de E, l'exposant de la suite, & l'on aura la somme des termes de la suite.

Pour avoir une seconde formule par le moyen du dernier terme D de chaque suite, on remarquera que le nombre des termes qui précedent le dernier est $n-1$, par consequent la somme des termes moins le dernier, sera $s - D = D\times\frac{n-1}{E}$. Ajoutant $+D$ à chaque membre, on aura $s = D\times\frac{n-1+E}{E}$. Ainsi $s = D\times\frac{n-1+E}{E}$ sera la formule qui servira à trouver la somme des termes de chaque suite, lorsqu'on connoîtra le nombre des termes, le dernier terme, & l'exposant de la suite. Il n'y aura qu'à les substituer à la place des lettres qui les representent dans cette formule.

COROLLAIRE II.

192. En supposant que le dernier terme f de la premiere suite est donné, que le nombre des termes de chacune des suites est le même qui est aussi donné, & representé par n, & que l'exposant de la premiere suite est e, qui est aussi donné; on peut trouver par le moyen de la formule $s = D\times\frac{n-1+E}{E}$, les sommes de chaque suite les unes aprés les autres, c'est à dire la valeur de chaque rang perpendiculaire, & en même temps la valeur du dernier rang parallele, ou la somme égale à $f+l+t+\zeta$, &c. La même methode servira à trouver tel autre rang parallele que l'on voudra.

1°. Pour avoir la somme des termes de la premiere suite, il faut substituer dans la formule $s = D\times\frac{n-1+E}{E}$, f à la place de D; l'exposant de la premiere suite e, à la place de E; & l'on aura pour la somme de la premiere suite $s = f\times\frac{n-1+e}{e} = l$ par la seconde supposition.

2°. Pour la seconde suite, il faut substituer la somme de la premiere suite $f \times \frac{n-1+e}{e}$, qui est égale au dernier terme l de la seconde suite par la seconde supposition, à la place de D dans la formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, & l'exposant $e+1$ de la seconde suite, à la place de E; & l'on aura pour la somme de la seconde suite $s = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n+e}{e+1} = t$ par la seconde supposition.

3°. Pour la troisiéme suite, il faut substituer dans la formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, le dernier terme de la troisiéme suite, $r = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n+e}{e+1}$, à la place de D; & l'exposant $e+2$ de la troisiéme suite, à la place de E; & l'on aura pour la somme de la 3e suite $s = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n+e}{e+1} \times \frac{n+1+e}{e+2} = \zeta$.

D'où il est évident qu'en continuant à l'infini la suite $f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n+e}{e+1} \times \frac{n+1+e}{e+2} \times \frac{n+2+e}{e+3} \times \frac{n+3+e}{e+4}$ &c. les produits de ses termes pris de suite, donneront tout à la fois & les sommes de chaque suite, & les valeurs des termes du dernier rang parallele f, l, t, ζ, &c.

Comme le nombre des termes est representé en general par n, en substituant au lieu de n tel nombre de termes qu'on voudra, & à la place de f le dernier terme de la premiere suite qui répond à ce nombre, l'on aura par le moyen de cette suite les sommes de tant de termes qu'on voudra de chaque suite, & les valeurs des termes de tel rang parallele qu'on voudra.

Seconde disposition des suites.

SUITES.

1re.	2e.	3e.	4e.	5e.	6e.
a	g	o	o	o	o
b	h	m	o	o	o
c	i	p	s	o	o
d	k	q	t	x	o
f	l	r	v	y	z

Troisiéme supposition.

193. Les mêmes suites peuvent être disposées comme on les voit ici. Le premier terme de la troisiéme suite est à côté du second terme de la seconde; le second terme de la troisiéme suite est à côté du troisiéme terme de la seconde, &c. le premier terme de la quatriéme suite est à côté du second terme de la troisiéme; le second terme de la quatriéme suite est à côté du troisiéme terme de la troisiéme suite, &c. & ainsi des suites 5e, 6e, &c.

Le nombre des termes de la premiere & de la seconde suite est égal; dans la troisiéme il est moindre d'une unité; dans la quatriéme, il est moindre de deux unités; dans la cinquiéme, de trois unités; & ainsi de suite.

Nommant n le nombre des termes de la premiere & de la seconde suite, $n-1$ est le nombre des termes de la troisiéme; $n-2$ est le nombre des termes de la quatriéme; $n-3$ de la cinquiéme, &c.

On nommera, comme ci-dessus, le dernier terme de chaque suite D; le terme qui suit le dernier Δ; l'exposant de chaque suite E; & le dernier terme de la premiere suite f, qu'on suppose donné, avec son exposant e.

Seconde proposition sur les suites, qui enseigne à trouver les valeurs des termes f, l, r, v, y, z, &c. du dernier rang parallele, ou de tel autre rang parallele qu'on voudra.

194. On se servira de la formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$ pour trouver la valeur du dernier terme de la seconde suite, & de la formule $s = \Delta \times \frac{n}{E}$ pour trouver les derniers termes de la 3e, 4e, 5e suites, &c.

1°. Pour la seconde suite, le nombre des termes est n; le dernier terme l qu'on cherche, est égal à la somme des termes de la premiere suite. On aura la somme des termes de la premiere suite, en substituant dans $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, f à la place de D, & e à la place de E; ainsi $l = f \times \frac{n-1+e}{e}$.

2°. Pour la troisiéme suite, le nombre des termes est $n-1$; le dernier terme r est égal à la somme des termes de la seconde suite, moins le dernier terme qui en est exclu. Ainsi il faut trouver la somme des termes de la 2e suite, le nombre des termes étant $n-1$, le terme qui suit le dernier étant $l = f \times \frac{n-1+e}{e}$, & l'exposant de la 2e suite étant $e+1$.

Il est évident qu'il ne faut pour cela que substituer dans la formule $s = \delta \times \frac{n}{E}$, $f \times \frac{n-1+e}{e}$ à la place de δ; $n-1$ à la place de n, & $e+1$ à la place de E; & l'on aura $r = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1}$.

3°. Dans la quatriéme suite, le nombre des termes est $n-2$; le dernier terme est égal à la somme des termes de la troisiéme suite, moins le dernier terme r qui en est exclu, & qui est égal à $f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1}$.

Pour trouver le dernier terme v égal à la somme $m+p+q$, il est évident qu'il ne faut que substituer dans $s = \delta \times \frac{n}{E}$, $f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1}$ à la place de δ; $n-2$ à la place de n; & l'exposant $e+2$ de la troisiéme suite, à la place de E; & l'on aura $v = f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1} \times \frac{n-2}{e+2}$.

D'où il est évident qu'en continuant à l'infini la suite $f \times \frac{n-1+e}{e} \times \frac{n-1}{e+1} \times \frac{n-2}{e+2} \times \frac{n-3}{e+3} \times \frac{n-4}{e+4}$, &c. les produits de ses termes pris de suite, donneront par ordre les uns aprés les autres, les valeurs des termes du dernier rang parallele de la seconde disposition des suites f, l, r, v, y, z, &c.

Mais n representant en general tel nombre de termes qu'on voudra, en substituant dans cette suite le nombre qu'on voudra à la place de n, & le dernier terme de la premiere suite qui répond à ce nombre de termes, à la place de f, l'on aura par cette suite les valeurs des termes de tel rang parallele qu'on voudra.

Application de ce qu'on vient de démontrer des suites en general, aux suites des nombres des differens ordres.

NOMBRES DES DIFFERENS ORDRES.

Unités ou 1re suite.	1. ordre, 2e suite.	2e ordre, 3e suite.	3e ordre, 4e suite.	4e ordre, 5e suite.	5e ordre, 6e suite.	6e ordre, 7e suite.
1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210

Quatriéme supposition.

195. LA premiere colonne contient les unités, ainsi chaque terme n'est que l'unité, & la somme des termes est égale au nombre des termes; par exemple, la somme de cinq unités est égale au nombre des termes 5. Et de plus, la somme d'autant de termes, c'est à dire, d'autant d'unités qu'on voudra, par exemple 4, qui est la somme de quatre termes, est au produit du nombre des termes de cette somme par le terme qui suit le dernier qui est 1, lequel produit est 4, comme l'unité est à l'unité, c'est à dire, à une grandeur donnée; ainsi 1 est l'exposant de la suite des unités. Ou bien, ce qui est la même chose, la somme d'autant de termes qu'on voudra; par exemple, la somme 4 de quatre termes est égale au produit du nombre des termes de cette somme, lequel nombre est 4, par le terme 1 qui suit le dernier, divisé par l'exposant 1 de la suite des unités, car $4 = \frac{4 \times 1}{1}$.

Ainsi nommant n le nombre des termes, s leur somme, l'on aura $s . n \times 1 :: 1 . 1$; ou bien $s = \frac{n}{1}$.

Les nombres du premier ordre sont formés par l'addition faite de suite des unités, & ce sont les nombres naturels; le premier 1 est égal au premier 1 de la suite des unités; le second 2 est égal à la somme des deux premiers termes de la suite des unités $2 = 1 + 1$; le troisiéme 3 est égal à la suite des trois premiers termes de la suite des unités $3 = 1 + 1 + 1$, & ainsi de suite.

Les nombres du second ordre sont formés de la même maniere par l'addition faite de suite des nombres du premier ordre.

Les nombres du troisiéme ordre sont formés par l'addition faite de suite des nombres du second ordre; & ainsi des autres ordres.

COROLLAIRE I.

196. IL est évident que les proprietés qu'on a démontrées des suites en general, conviennent à ces suites des nombres des differens ordres. Ainsi, 1°, l'exposant des unités étant 1, l'exposant du premier ordre est $1 + 1 = 2$; celui du second est $2 + 1 = 3$; celui du troisiéme est $3 + 1 = 4$; & ainsi des autres.

2°. En nommant le nombre des termes de chaque suite n, leur somme s, le dernier terme D, celui qui suit le dernier terme δ, l'exposant de chaque suite E, l'on aura ces deux formules pour trouver la somme des termes dans chaque suite, $s = \delta \times \frac{n}{E}$, $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$.

En substituant dans laquelle on voudra de ces deux formules le dernier terme 1 de la premiere suite, ou le terme 1 qui suit le dernier, à la place de δ ou de D, & l'exposant 1 à la place de E, l'on aura pour la somme de la suite des unités, $s = 1 \times \frac{n}{1} = 5$, qui est le dernier terme de la seconde par la quatriéme supposition.

En substituant dans la seconde formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, le dernier terme du premier ordre, marqué en general par $1 \times \frac{n}{1}$, à la place de D, & l'exposant 2 du premier ordre à la place de E, on aura pour la somme des termes du premier ordre $s = 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ égale, par la quatriéme supposition, au dernier terme 15 du second ordre.

En substituant dans la même formule $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, le dernier terme $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ du second ordre qu'on vient de trouver, à la place de D, & l'exposant 3 du second ordre à la place de E, on aura pour la somme des termes du second ordre $s = 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ égale au dernier terme 35 du troisiéme ordre par la quatriéme supposition.

En substituant de même dans $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, le dernier terme $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ du troisiéme ordre qu'on vient de trouver, à la place de D, & l'exposant 4 du troisiéme ordre à la place de E, on aura pour la somme du troisiéme ordre $s = 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ égale, par la quatriéme supposition, au dernier terme 70 du quatriéme ordre.

D'où il est évident qu'en continuant à l'infini la suite $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6}$, &c. les produits des grandeurs qui la composent, pris de suite depuis la premiere 1, donneront en même temps par ordre les sommes des suites, & les termes du dernier rang parallele.

Et comme n represente en general le nombre de termes qu'on voudra, en substituant dans cette suite le nombre de termes qu'on voudra à la place de n, l'on aura les valeurs des sommes de tant de termes qu'on voudra de chaque suite, & les valeurs des termes de quel rang parallele on voudra.

Seconde

Seconde disposition des nombres des differens ordres.

Unités ou 1^{re} suite.	1. ordre, 2^e suite.	2^e ordre, 3^e suite.	3^e ordre, 4^e suite.	4^e ordre, 5^e suite.	5^e ordre, 6^e suite.
1	1	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0
1	3	3	1	0	0
1	4	6	4	1	0
1	5	10	10	5	1

197. Cette disposition est la même que la seconde disposition des suites generales; ainsi la troisiéme supposition & la seconde proposition, doivent être appliquées à cette seconde disposition.

COROLLAIRE II.

198. PAR consequent on peut trouver par le moyen des formules $s = \delta \times \frac{n}{E}$, & $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, les valeurs des termes du dernier rang parallele, ou de tel autre rang parallele qu'on voudra.

1°. Le terme de chaque rang de la suite des unités étant toujours 1, pour avoir le dernier terme de la seconde suite ou du premier ordre, qui est toujours égal à la somme des termes de la premiere suite ou des unités, il faut substituer dans $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$, 1 à la place de D, l'exposant de la premiere suite 1 à la place de E; & l'on aura pour la somme des unités, ou, ce qui est la même chose, pour la valeur du dernier terme du premier ordre, $s = 1 \times \frac{n}{1}$.

2°. Dans le second ordre ou dans la troisiéme suite, le nombre des termes est moindre d'une unité que celui de la suite précedente, ainsi c'est $n - 1$. Le dernier terme de la troisiéme suite est égal à la somme des termes de la seconde moins le dernier terme de la seconde qui est exclu de cette somme: on vient de trouver que le dernier terme de la seconde est $1 \times \frac{n}{1}$. Ainsi pour avoir le dernier terme de la troisiéme suite, il faut trouver la somme de la seconde suite dont on connoît le nombre des termes $n-1$, le terme $1\times\frac{n}{1}$ qui suit le dernier terme, & l'exposant qui est 2. Il n'y a qu'à substituer dans la formule $s = A \times \frac{n}{E}$, $1\times\frac{n}{1}$ à la place de A, $n-1$ à la place de n, & 2 à la place de E; & l'on aura pour la valeur du dernier terme de la troisiéme suite $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$.

3°. Dans le troisiéme ordre on trouvera, par un semblable raisonnement, que le dernier terme du troisiéme ordre est égal à la somme du second ordre moins son dernier terme qui est $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$; que le nombre des termes est $n-2$; & que l'exposant du troisiéme ordre est 3. Ainsi en substituant dans $s = A \times \frac{n}{E}$, $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$ à la place de A, $n-2$ à la place de n, & 3 à la place de E, on trouvera que le dernier terme de la quatriéme suite ou du troisiéme ordre est $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$.

Formule generale, qu'il faut bien remarquer pour la suite.

199. D'où il est évident qu'en continuant à l'infini la suite $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}\times\frac{n-5}{6}\times\frac{n-6}{7}$, &c. les produits de toutes les grandeurs qui la composent pris de suite depuis la premiere 1, donneront par ordre tous les termes du rang parallele, par exemple du dernier 1, 5, 10, 10, 5, 1, en substituant le nombre des termes 5 à la place de n.

Et comme le nombre des termes marqué en general par n, represente tel nombre des termes qu'on voudra, il est évident qu'en mettant à la place de n tel nombre qu'on voudra, on aura de suite les valeurs des termes de tel rang parallele des suites qu'on voudra; & que cette suite est une formule generale pour les trouver tous.

AVERTISSEMENT.

On peut concevoir d'autres dispositions des suites generales des differens ordres, & des suites des nombres de differens ordres, que celle qu'on a mise la seconde; & même on peut concevoir d'autres suites qui naîtroient de ces suites par la multiplication faite par ordre de chaque terme d'une suite par lui-même, ou par le terme qui le precede ou qui le suit immediatement dans la même suite, ou

qui s'en pourroient former de beaucoup d'autres manieres, qui peuvent avoir plusieurs usages : mais comme l'on n'a besoin ici que de ce qu'on a démontré de ces suites dans leur premiere & dans leur seconde disposition, il est inutile de prolonger cette digression de ces autres suites.

200. *Application de la formule generale* $1\times\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}\times\frac{n-5}{6}$ &c. *à la formation des puissances de la somme ou de la difference de deux grandeurs representées par* $a+b$, *ou* $a-b$.

Table de la formation ordinaire des puissances de la somme ou de la difference de deux grandeurs representées par $a+b$, ou $a-b$.

$1a$	$+1b$					
$1aa$	$+2ab$	$+1bb$	2ᵉ puissance.			
$1a^3$	$+3aab$	$+3abb$	$+1b^3$	3ᵉ puissance.		
$1a^4$	$+4a^3b$	$+6aabb$	$+4ab^3$	$+1b^4$	4ᵉ puissance.	
$1a^5$	$+5a^4b$	$+10a^3bb$	$+10aab^3$	$+5ab^4$	$+1b^5$	5ᵉ puissance.

Il n'y a qu'à mettre pour les puissances de $a-b$, le signe $-$ devant tous les termes pairs dans lesquels les dimensions de b sont en nombre impair, c'est à dire devant les seconds, les quatriémes, les sixiémes termes, &c.

REMARQUE.

201. Si l'on se rend familiere la formation ordinaire des puissances de deux grandeurs $a+b$, ou $a-b$, on verra clairement, 1° que les puissances de a sont seules sans b dans le premier terme; que la puissance de a diminue par ordre dans chaque terme qui suit le premier, d'un degré; & que b est toujours lineaire dans le second terme, & augmente par ordre dans chaque terme suivant, d'un degré.

Ainsi supposant que l'exposant de chaque puissance à laquelle on peut élever $a+b$ ou $a-b$, est representé en general par n, les produits des lettres a & b dans chaque terme seront par ordre a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}bb$, $a^{n-3}b^3$, $a^{n-4}b^4$, &c.

2°. On verra clairement que les nombres qui sont les coéficients des termes de chaque puissance, par exemple 1, 2, 1, de la seconde; 1, 3, 3, 1, de la troisiéme; 1, 4, 6, 4, 1, de la quatriéme; 1, 5, 10, 10, 5, 1, de la cinquiéme, &c. sont exactement les termes de chaque rang parallele de la seconde disposition des suites des nombres des differens ordres, & que l'exposant du degré de chaque puissance, par exemple, l'exposant 2 de la seconde, l'exposant 3 de la troisiéme, &c. est exactement le nombre des termes qui designe le rang parallele qu'il faut prendre pour avoir les coéficients de la seconde puissance, de la troisiéme, de la quatriéme, &c.

COROLLAIRE.

202. PAR consequent n representant ce nombre des termes dans la formule $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ &c. qui sert à trouver les termes de chaque rang parallele, n represente aussi le degré de la puissance, puisque le degré de la puissance est égal au nombre des termes.

Ainsi pour élever $a+b$ à quelque puissance que ce puisse être, representée en general par n, le coéficient du premier terme de la puissance $\overline{a+b}^n$ sera égal à 1, le second à $1 \times \frac{n}{1}$, le troisiéme à $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$; le quatriéme, $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$; le cinquiéme, $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$; & ainsi de suite: ce qui donne la formule generale suivante.

Formule generale pour élever la somme ou la difference de deux grandeurs a + b *ou* a — b *à une puissance quelconque.*

203. $\overline{a+b}^n = 1a^n + 1 \times \frac{n}{1} a^{n-1}b + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}bb + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4 + 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} a^{n-5}b^5$; & ainsi à l'infini. Il n'y a qu'à mettre le signe — devant tous les termes pairs, le second, le quatriéme, le sixiéme, &c. & l'on aura la formule de $\overline{a-b}^n$.

On peut negliger l'unité par où commence chaque coéficient, l'unité n'apportant aucun changement dans les produits.

On élevera par le moyen de cette formule generale, la somme ou la difference de deux grandeurs à telle puissance qu'on voudra, par exemple, à la seconde puissance dont

l'exposant est 2, à la troisiéme dont l'exposant est 3, &c. en substituant dans la formule l'exposant de cette puissance à la place de n, & la premiere grandeur à la place de a, & la seconde à la place de b; & l'on aura la puissance que l'on cherche.

204. Quoique la formule soit infinie, elle donne pourtant la puissance finie de la somme ou de la difference de deux grandeurs; parceque tous les termes infinis de la formule qui suivent ceux qui ont servi à trouver la puissance que l'on cherchoit, deviennent égaux à zero, chacun contenant parmi ses coéficients une grandeur égale à zero. Par exemple, quand on éleve par la formule, $a+b$ à la troisiéme puissance, aprés avoir trouvé par les quatre premiers termes de la formule, la puissance $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, le cinquiéme terme & les autres suivans, contiennent tous parmi leurs coéficients la grandeur $n - 3 = 0$, qui rend tous ces termes égaux à zero; puisqu'une grandeur étant multipliée par zero, le produit est zero.

COROLLAIRE.

205. SI l'on se rend familiere la formation des puissances de trois grandeurs $a+b+c$; de quatre grandeurs $a+b+c+d$; de cinq grandeurs, $a+b+c+d+e$, & ainsi à l'infini, on verra clairement que dans chaque puissance, par exemple dans la quatriéme, la quatriéme puissance des deux premiers termes, qui est $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$, peut servir de formule particuliere pour trouver tous les termes de la quatriéme puissance de $a+b+c$, de $a+b+c+d$, de $a+b+c+d+e$, &c.

Car aprés avoir trouvé la quatriéme puissance des deux premiers termes $a+b$, il n'y a qu'à supposer que les deux premiers termes $a+b$ sont representés par a, & le troisiéme c par b; & supposant que a^4 dans la formule particuliere $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$, represente la quatriéme puissance de $a+b$ déja trouvée, le second terme $4a^3b$ marquera qu'il faut prendre quatre fois la troisiéme puissance de $a+b$ representée par a^3, & la multiplier par c representé par b; le troisiéme $6aabb$ marquera qu'il faut prendre six fois la seconde puissance de $a+b$ representée par aa, & la multiplier par la seconde puissance de c representée par bb; & ainsi de suite.

Aprés avoir ainsi trouvé la quatriéme puissance de $a + b + c$, il faut supposer $a + b + c$ representée par a, & la 4^e grandeur d representée par b; & que la quatriéme puissance de $a + b + c$ est representée dans la formule particuliere par a^4, le second terme $4a^3b$ marquera qu'il faut prendre quatre fois la troisiéme puissance de $a + b + c$ representée par a^3, & la multiplier par d representée par b. Le troisiéme terme $6aabb$ marquera qu'il faut prendre six fois la seconde puissance de $a + b + c$ representée par aa, & la multiplier par la seconde puissance de d representée par bb; & ainsi à l'infini.

Il en est de même de toutes les autres puissances.

Or comme chaque puissance particuliere de deux grandeurs $a + b$ sert de formule particuliere pour trouver la même puissance de trois grandeurs, de quatre, de cinq, de six, & ainsi à l'infini, de même la formule generale $a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2$, &c. de toutes les puissances de deux grandeurs $a + b$, sert à trouver la formule generale de toutes les puissances de tant de grandeurs qu'on voudra, & d'une suite infinie de grandeurs. Et comme il suffit de se rendre bien familieres les formations particulieres des puissances de deux grandeurs, pour trouver par ces puissances de deux grandeurs les mêmes puissances de trois, de quatre, & d'une suite infinie de grandeurs, il suffit de même de se rendre bien familiere la formation generale de toutes les puissances de deux grandeurs, pour trouver soi-même la formule generale des puissances de trois, de quatre, de cinq grandeurs, & d'une suite infinie de grandeurs. Ainsi il suffit de mettre ici cette formule generale comme un Corollaire de la formule generale des puissances de deux grandeurs, & il est inutile d'ajouter un long discours pour faire concevoir la formation de cette formule generale.

(Voyés la Table, dont voici le lieu. Art. 206.)

Les formules generales de la Table servent à élever une suite donnée de grandeurs à telle puissance que l'on voudra, en substituant dans les formules l'exposant de cette puissance à la place de n; la premiere grandeur de la suite donnée à

Table pour la page 410, Article 106 de l'Analyse démontrée,

Qui contient les Formules generales pour élever une suite de grandeurs à une puissance quelconque dont l'exposant est representé par la lettre n, & pour extraire la racine quelconque de la même suite de grandeurs.

Premiere Formule pour élever la somme de deux grandeurs à une puissance quelconque, & pour en extraire la racine quelconque.

$$\overline{a+b}^{\,n} = a^n + \tfrac{n}{1}a^{n-1}b + \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}bb + \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}\times\tfrac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 + \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}\times\tfrac{n-3}{4}\times\tfrac{n-4}{5}a^{n-5}b^5 + \&c.$$

Seconde Formule pour élever une suite de grandeurs $a + by + cyy + dy^3 + \&c.$ à une puissance quelconque, & pour en extraire la racine quelconque.

$$\overline{a+by+cyy+dy^3+ey^4+fy^5\ \&c.}^{\,n} = a^n + \tfrac{n}{1}a^{n-1}by + \left.\begin{array}{r} \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}bb \\ +\tfrac{n}{1}a^{n-1}c \end{array}\right\}\times yy + \left.\begin{array}{r} \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}bc \\ +\tfrac{n}{1}a^{n-1}d \end{array}\right\}\times y^3 + \left.\begin{array}{r} \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}\times\tfrac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}a^{n-3}bbc \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}cc \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}bd \\ +\tfrac{n}{1}a^{n-1}e \end{array}\right\}\times y^4 + \&c.$$

Troisiéme Formule pour élever une suite de grandeurs $ay + byy + cy^3 + dy^4 + \&c.$ à une puissance quelconque, & pour en extraire la racine quelconque.

$$\overline{ay+byy+cy^3+dy^4+ey^5+fy^6+gy^7+hy^8+\&c.}^{\,n} = a^n y^n + \tfrac{n}{1}a^{n-1}by^{n+1} + \left.\begin{array}{r} \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}bb \\ +\tfrac{n}{1}a^{n-1}c \end{array}\right\}\times y^{n+2} + \left.\begin{array}{r} \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}bc \\ +\tfrac{n}{1}a^{n-1}d \end{array}\right\}\times y^{n+3} + \left.\begin{array}{r} \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}\times\tfrac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}a^{n-3}bbc \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}cc \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}bd \\ +\tfrac{n}{1}a^{n-1}e \end{array}\right\}\times y^{n+4}$$

$$+\left.\begin{array}{r} \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}\times\tfrac{n-3}{4}\times\tfrac{n-4}{5}a^{n-5}b^5 \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}\times\tfrac{n-3}{3}a^{n-4}b^3c \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{1}a^{n-3}bcc \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}a^{n-3}bbd \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}cd \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}be \\ +\tfrac{n}{1}a^{n-1}f \end{array}\right\}\times y^{n+5} + \left.\begin{array}{r} \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}\times\tfrac{n-3}{4}\times\tfrac{n-4}{5}\times\tfrac{n-5}{6}a^{n-6}b^6 \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}\times\tfrac{n-3}{3}\times\tfrac{n-4}{4}a^{n-5}b^4c \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{1}\times\tfrac{n-3}{2}a^{n-4}bbcc \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}a^{n-3}c^3 \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}\times\tfrac{n-3}{3}a^{n-4}b^3d \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}a^{n-2}dd \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{1}a^{n-3}bcd \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}a^{n-3}bbe \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}ce \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}bf \\ +\tfrac{n}{1}a^{n-1}g \end{array}\right\}\times y^{n+6}$$

$$+\left.\begin{array}{r} \tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{3}\times\tfrac{n-3}{4}\times\tfrac{n-4}{5}\times\tfrac{n-5}{6}\times\tfrac{n-6}{7}a^{n-7}b^7 \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}\times\tfrac{n-3}{3}\times\tfrac{n-4}{4}\times\tfrac{n-5}{5}a^{n-6}b^5c \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{1}\times\tfrac{n-3}{2}\times\tfrac{n-4}{3}a^{n-5}b^3cc \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{1}\times\tfrac{n-3}{3}a^{n-4}bc^3 \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}\times\tfrac{n-3}{3}\times\tfrac{n-4}{4}a^{n-5}b^4d \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{2}\times\tfrac{n-2}{1}a^{n-3}bdd \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{1}\times\tfrac{n-3}{2}a^{n-4}bbcd \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}a^{n-3}ccd \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}\times\tfrac{n-3}{3}a^{n-4}b^3e \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{1}a^{n-3}bce \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}de \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}\times\tfrac{n-2}{2}a^{n-3}bbf \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}cf \\ +\tfrac{n}{1}\times\tfrac{n-1}{1}a^{n-2}bg \\ +\tfrac{n}{1}a^{n-1}h \end{array}\right\}\times y^{n+7} + \&c.$$

la place de a; la seconde à la place de b, &c. l'inconnue donnée à la place de l'inconnue y, &c.

AVERTISSEMENT.

CES formules generales peuvent servir à élever deux grandeurs, ou une suite infinie de grandeurs, non seulement à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier positif, comme on l'a démontré jusqu'ici, mais encore à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier négatif, & à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre rompu, soit positif, soit négatif. On va donner une démonstration particuliere pour le cas où l'exposant est un nombre entier négatif, & ensuite on le démontrera par la premiere methode du second Problême, pour les cas où l'exposant de la puissance est un nombre rompu, positif ou négatif; & on mettra ces derniers cas pour servir de 5^e, 6^e & de 7^e exemples du Problême.

207. Il faut remarquer, comme on l'enseigne dans l'Algebre, que $\frac{1}{a^1}$ se marque ainsi a^{-1}; $\frac{1}{\overline{a+b}^1}$ se marque ainsi $\overline{a+b}^{-1}$; $\frac{\overline{a+b}^1}{\overline{a+c}^4}$ se marque ainsi $\overline{a+b}^1 \times \overline{a+c}^{-4}$; & en general $\frac{1}{\overline{a+b}^n}$ se marque ainsi $\overline{a+b}^{-n}$.

D'où l'on voit qu'un exposant négatif marque que la puissance de la grandeur dont il est l'exposant, est dans le dénominateur d'une fraction.

Il faut aussi remarquer que les incommensurables se marquent comme les puissances, & leurs exposans sont des nombres rompus. Par exemple $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{aa} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[n]{ay} = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$; $a\sqrt[n]{ay} = a^{\frac{1}{n}+1} y^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$; $\frac{a^m}{\sqrt[n]{a}} = a^{m-\frac{1}{n}}$; $a^m\sqrt[n]{a} = a^{m+\frac{1}{n}}$; & ainsi des autres.

Troisiéme proposition, qui contient les principes ou Problêmes qui servent à démontrer que les formules generales qui précedent, s'étendent aux puissances de deux grandeurs, ou d'une suite infinie de grandeurs, dont l'exposant est un nombre entier négatif.

208. POUR trouver la suite infinie, qui est la valeur de $\frac{1}{\overline{a+b}^1}$

$= \overline{a+b}^{-2}$, de $\frac{1}{\overline{a+b}^{3}} = \overline{a+b}^{-3}$, de $\frac{1}{\overline{a+b}^{4}} = \overline{a+b}^{-4}$, &c. il faut faire les operations suivantes.

1°. Il faut partager $\overline{a+b}^{2} = aa + 2ab + bb$ en deux grandeurs, dont la premiere est $aa + ab$, la seconde $ab + bb$.

Il faut de même partager $\overline{a+b}^{3} = a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ en $a^3 + 2aab + abb$, & $+ aab + 2abb + b^3$.

Et de même $\overline{a+b}^{4} = a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$ en $a^4 + 3a^3b + 3aabb + ab^3$, & $+ a^3b + 3aabb + 3ab^3 + b^4$; & ainsi des autres puissances suivantes.

Pour faire ce partage, il faut que la seconde partie ou grandeur étant le numerateur d'une fraction, & la premiere le dénominateur, cette fraction soit égale à $\frac{b}{a}$; ce qui est possible dans toutes les puissances de $a + b$ ou de $a - b$.

Il faut ensuite diviser l'unité par $aa + 2ab + bb$ dans la seconde puissance, par $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ dans la troisiéme, & ainsi des autres, en prenant pour premiere partie du diviseur la premiere grandeur, & pour la seconde partie du diviseur la seconde grandeur, qu'on a déterminées ci-dessus.

Cette division donnera des quotiens qui auront des termes à l'infini, & tous ces termes seront des fractions.

2°. Il faut faire sur chacune de ces fractions ce qu'on a fait dans la premiere operation, c'est à dire, diviser le numerateur par le dénominateur, prenant le seul premier terme du dénominateur pour premiere partie du diviseur, & tous les autres termes du dénominateur pour la seconde partie du diviseur.

Tous les quotiens qu'on trouvera à l'infini de ces secondes divisions, contiendront des termes qui étant ordonnés de suite les uns sous les autres, donneront des suites dont on trouvera les sommes par le moyen des suites qu'on a démontrées ci-dessus.

3°. En trouvant les sommes de chaque colonne de ces suites par les methodes des suites précedentes, on aura la suite infinie qui exprime la puissance que l'on cherche.

Ceci s'éclaircira par les operations suivantes.

Pour

Pour la seconde puissance.

POUR trouver la suite égale à $\frac{1}{\overline{a+b}^{2}} = \overline{a+b}^{-2} = \frac{1}{aa+2ab+bb}$, 1°, il faut partager le dénominateur ou diviseur $aa + 2ab + bb$ en deux parties, dont la premiere est $aa + ab$, la seconde $ab + bb$, de maniere que $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$. Il faut diviser 1 par $aa + ab, + ab + bb$, en prenant $aa + ab$ pour la premiere partie du diviseur, & $ab + bb$ pour la seconde.

$$\begin{array}{ll}
\textit{Grandeur à diviser.} & 1 \left\{ \begin{array}{l} aa + ab,\ + ab + bb,\ \text{diviseur.} \\ \hline \text{quotient.} \\ \frac{1}{aa+ab} - \frac{b}{a^3+aab} + \frac{bb}{a^4+a^3b} - \frac{b^3}{a^5+a^4b} + \frac{b^4}{a^6+a^5b}\ \&c. \end{array} \right. \\
1^{re}\ \text{reste}, - 1\frac{b}{a} & \\
2^{e}\ \text{reste}, + 1\frac{bb}{aa} & \\
3^{e}\ \text{reste}, - 1\frac{b^3}{a^3} & \\
4^{e}\ \text{reste}, + 1\frac{b^4}{a^4} &
\end{array}$$

1 signifie que la grandeur que cette marque précede, est effacée.

En divisant 1 par $aa + ab$, on trouvera le quotient $\frac{1}{aa+ab}$, ensuite il faut multiplier ce quotient par la seconde partie du diviseur, & l'on aura $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$; & comme il faut soustraire ce produit de la grandeur à diviser, il faut écrire le premier reste $\frac{b}{a}$ au nombre à diviser avec le signe —.

Il faut ensuite diviser ce reste $-\frac{b}{a}$ par la premiere partie du diviseur $aa + ab$, & l'on aura le quotient $-\frac{b}{a^3+aab}$, c'est le second terme du quotient.

Il faut multiplier par ce quotient la seconde partie du diviseur $ab + bb$, & l'on aura $-\frac{abb+b^3}{a^3+aab} = -\frac{bb}{aa}$, qu'il faut ôter de la grandeur à diviser, & l'on aura le 2e reste $+\frac{bb}{aa}$.

En continuant la division, on trouvera un quotient qui aura une infinité de termes, qui sont ceux que l'on voit ici marqués au quotient.

2°. Il faut prendre par ordre chaque terme du quotient, & trouver par la division du numerateur par le dénominateur, la suite infinie qui en est le quotient, c'est à dire, qui est la valeur de la fraction qui forme ce terme. On appellera cela réduire chaque terme en la suite infinie qui en est la valeur. On trouvera, en faisant ces divisions, que le 1.er terme $\frac{1}{aa+ab}$ se réduit en $\frac{1}{aa}-\frac{b}{a^3}+\frac{bb}{a^4}-\frac{b^3}{a^5}+\frac{b^4}{a^6}-\frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 2.e $-\frac{b}{a^3+aab}$ en $-\frac{b}{a^3}+\frac{bb}{a^4}-\frac{b^3}{a^5}+\frac{b^4}{a^6}-\frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 3.e $+\frac{bb}{a^4+a^3b}$ en $+\frac{bb}{a^4}-\frac{b^3}{a^5}+\frac{b^4}{a^6}-\frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 4.e $-\frac{b^3}{a^5+a^4b}$ en $-\frac{b^3}{a^5}+\frac{b^4}{a^6}-\frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 5.e $+\frac{b^4}{a^6+a^5b}$ en $+\frac{b^4}{a^6}-\frac{b^5}{a^7}$ &c.

le 6.e $-\frac{b^5}{a^7+a^6b}$ en $-\frac{b^5}{a^7}$ &c.

Ce qu'on peut continuer à l'infini.

En prenant la somme de chaque rang perpendiculaire, on aura $\frac{1}{\overline{a+b}^2}=\overline{a+b}^{-2}=\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}$ &c. ou, ce qui est la même chose, $1a^{-2}-2a^{-3}b+3a^{-4}bb-4a^{-5}b^3+5a^{-6}b^4-6a^{-7}b^5$ &c.

Pour la troisième puissance.

POUR trouver la suite qui est égale à $\frac{1}{\overline{a+b}^3}=\overline{a+b}^{-3}=\frac{1}{a^3+3aab+3abb+b^3}$: 1.°, aprés avoir partagé $a^3+3aab+3abb+b^3$ en deux parties $a^3+2aab+abb$, $+aab+2abb+b^3$, qui sont telles que $\frac{aab+2abb+b^3}{a^3+2aab+abb}=\frac{b}{a}$, il faut diviser l'unité par le diviseur $a^3+2aab+abb$, $+aab+2abb+b^3$, en prenant la premiere de ces deux parties pour la premiere partie du diviseur, & la seconde partie pour la seconde partie du diviseur, & l'on trouvera que le quotient est la suite $\frac{1}{a^3+2aab+abb}-\frac{b}{a^4+2a^3b+aabb}+\frac{bb}{a^5+2a^4b+a^3bb}-\frac{b^3}{a^6+2a^5b+a^4bb}+\frac{b^4}{a^7+2a^6b+a^5bb}-\frac{b^5}{a^8+2a^7b+a^6bb}-\frac{b^6}{a^9+2a^8b+a^7bb}$ &c.

2.°. On réduira par ordre chacun des termes de cette suite, en la suite infinie qui lui est égale, ce qui se fait en divisant le numerateur de chacun par son dénominateur, en prenant la puissance de a seule, comme a^3 dans le premier terme, a^4 dans le second, &c. pour la premiere partie du diviseur,

& le reste du dénominateur pour la seconde partie du diviseur; & l'on trouvera que

$\frac{1}{a^3+2aab+abb}$ se réduit en $\frac{1}{a^3}-\frac{2b}{a^4}+\frac{3bb}{a^5}-\frac{4b^3}{a^6}+\frac{5b^4}{a^7}-\frac{6b^5}{a^8}+\frac{7b^6}{a^9}$ &c.

$-\frac{b}{a^4+2a^3b+aabb}$ en $-\frac{b}{a^4}+\frac{2bb}{a^5}-\frac{3b^3}{a^6}+\frac{4b^4}{a^7}-\frac{5b^5}{a^8}+\frac{6b^6}{a^9}$ &c.

$+\frac{bb}{a^5+2a^4b+a^3bb}$ en $+\frac{bb}{a^5}-\frac{2b^3}{a^6}+\frac{3b^4}{a^7}-\frac{4b^5}{a^8}+\frac{5b^6}{a^9}$ &c.

$-\frac{b^3}{a^6+2a^5b+a^4bb}$ en $-\frac{b^3}{a^6}+\frac{2b^4}{a^7}-\frac{3b^5}{a^8}+\frac{4b^6}{a^9}$ &c.

$+\frac{b^4}{a^7+2a^6b+a^5bb}$ en $+\frac{b^4}{a^7}-\frac{2b^5}{a^8}+\frac{3b^6}{a^9}$ &c.

$-\frac{b^5}{a^8+2a^7b+a^6bb}$ en $-\frac{b^5}{a^8}+\frac{2b^6}{a^9}$ &c.

$+\frac{b^6}{a^9+2a^8b+a^7bb}$ en $+\frac{b^6}{a^9}$ &c.

On peut continuer cette suite à l'infini.

En prenant les sommes de chaque rang perpendiculaire, on aura $\frac{1}{\overline{a+b}^3}=\overline{a+b}^{-3}=\frac{1}{a^3}-\frac{3b}{a^4}+\frac{6bb}{a^5}-\frac{10b^3}{a^6}+\frac{15b^4}{a^7}-\frac{21b^5}{a^8}+\frac{28b^6}{a^9}$ &c. ou, ce qui est la même chose, $1a^{-3}-3a^{-4}b+6a^{-5}bb-10a^{-6}b^3+15a^{-7}b^4-21a^{-8}b^5+28a^{-9}b^6$ &c.

Pour la quatrième puissance.

ON réduira de même $\frac{1}{\overline{a+b}^4}=\overline{a+b}^{-4}=\frac{1}{a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4}$

1.°, en la suite $\frac{1}{a^4+3a^3b+3aabb+ab^3}-\frac{b}{a^5+3a^4b+3a^3bb+aab^3}+\frac{bb}{a^6+3a^5b+3a^4bb+a^3b^3}-\frac{b^3}{a^7+3a^6b+3a^5bb+a^4b^3}+\frac{b^4}{a^8+3a^7b+3a^6bb+a^5b^3}-\frac{b^5}{a^9+3a^8b+3a^7bb+a^6b^3}$ &c.

2.°. On réduira ensuite

$\frac{1}{a^4+3a^3b+3aabb+ab^3}$ en $\frac{1}{a^4}-\frac{3b}{a^5}+\frac{6bb}{a^6}-\frac{10b^3}{a^7}+\frac{15b^4}{a^8}-\frac{21b^5}{a^9}$ &c.

$-\frac{b}{a^5+3a^4b+3a^3bb+aab^3}$ en $-\frac{b}{a^5}+\frac{3bb}{a^6}-\frac{6b^3}{a^7}+\frac{10b^4}{a^8}-\frac{15b^5}{a^9}$ &c.

$+\frac{bb}{a^6+3a^5b+3a^4bb+a^3b^3}$ en $+\frac{bb}{a^6}-\frac{3b^3}{a^7}+\frac{6b^4}{a^8}-\frac{10b^5}{a^9}$ &c.

$-\frac{b^3}{a^7+3a^6b+3a^5bb+a^4b^3}$ en $-\frac{b^3}{a^7}+\frac{3b^4}{a^8}-\frac{6b^5}{a^9}$ &c.

$+\frac{b^4}{a^8+3a^7b+3a^6bb+a^5b^3}$ en $+\frac{b^4}{a^8}-\frac{3b^5}{a^9}$ &c.

$-\frac{b^5}{a^9+3a^8b+3a^7bb+a^6b^3}$ en $-\frac{b^5}{a^9}$ &c.

On peut continuer cette suite à l'infini.

En prenant les sommes de chaque rang perpendiculaire, on aura $\frac{1}{\overline{a+b}^4} = \overline{a+b}^{-4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4b}{a^5} + \frac{10bb}{a^6} - \frac{20b^3}{a^7} + \frac{35b^4}{a^8} - \frac{56b^5}{a^9}$ &c. $= 1a^{-4} - 4a^{-5}b + 10a^{-6}bb - 20a^{-7}b^3 + 35a^{-8}b^4 - 56a^{-9}b^5$ &c.

On trouvera de même que $\frac{1}{\overline{a+b}^5} = \overline{a+b}^{-5} = \frac{1}{a^5} - \frac{5b}{a^6} + \frac{15bb}{a^7} - \frac{35b^3}{a^8} + \frac{70b^4}{a^9} - \frac{126b^5}{a^{10}}$ &c. ou, ce qui est la même chose, $1a^{-5} - 5a^{-6}b + 15a^{-7}bb - 35a^{-8}b^3 + 70a^{-9}b^4 - 126a^{-10}b^5$ &c.

$\frac{1}{\overline{a+b}^6} = \overline{a+b}^{-6} = \frac{1}{a^6} - \frac{6b}{a^7} + \frac{21bb}{a^8} - \frac{56b^3}{a^9} + \frac{126b^4}{a^{10}} - \frac{252b^5}{a^{11}}$ &c. ou, ce qui est la même chose, $1a^{-6} - 6a^{-7}b + 21a^{-8}bb - 56a^{-9}b^3 + 126a^{-10}b^4 - 252a^{-11}b^5$ &c.

On peut continuer ces operations sur la septiéme puissance, la huitiéme, &c.

REMARQUES.

I.

209. APRÉS s'être rendu ces operations tres familieres, on verra clairement que le premier terme de la suite contient dans la seconde puissance, seulement a^{-2}; dans la troisiéme, a^{-3}; dans la quatriéme, a^{-4}, &c. & que dans les termes suivans la puissance de a, dont l'exposant est toujours négatif, augmente par ordre d'un degré dans chaque terme suivant; que b est lineaire dans le second terme de la suite, & que les puissances de b, dont l'exposant est toujours positif, augmentent par ordre d'un degré dans chaque terme suivant.

Ainsi les puissances de $\overline{a+b}^{-n}$ peuvent être marquées en general par a^{-n}, $a^{-n-1}b$, $a^{-n-2}b^2$, &c.

II.

210. Que les coéficients de chaque terme sont par ordre les termes du second rang parallele* de la premiere disposition
* 195. des suites 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. dans la seconde puissance; ceux du troisiéme rang parallele, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, dans la troisiéme; ceux du quatriéme rang parallele, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c. dans la quatriéme; ceux du cinquiéme

rang parallele, 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c. dans la cinquiéme; & ainsi de suite: de maniere que l'exposant 2 de la seconde puissance, marque qu'il faut prendre pour les coéficients de la seconde puissance, les termes du second rang parallele; l'exposant 3 de la troisiéme, marque qu'il faut prendre de suite pour les coéficients de la troisiéme puissance, les termes du troisiéme rang parallele; & ainsi de suite.

Ainsi supposant que n represente en general le degré de chaque puissance, l'on a démontré dans la premiere disposition des suites,* que $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c. est une * 195.
formule qui fait trouver par ordre les termes de chaque rang parallele; sçavoir, 1 est le premier terme de chaque rang parallele, $1 \times \frac{n}{1}$ est le second terme, $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ est le troisiéme terme, & ainsi de suite; l'on peut négliger dans chaque terme l'unité, qui n'apporte aucun changement dans les produits.

Par consequent la suite $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c. fera trouver les coéficients des termes des suites égales à $\overline{a+b}^{-2}$, $\overline{a+b}^{-3}$, $\overline{a+b}^{-4}$, &c. 1 est le coéficient du premier terme; $\frac{n}{1}$ represente le coéficient du second terme; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ represente le coéficient du 3^e terme; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ represente le coéficient du 4^e terme; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ represente celui du 5^e terme; & ainsi de suite. Il n'y aura, pour trouver ces coéficients, qu'à mettre 2 à la place de n pour la seconde puissance, 3 à la place de n pour la troisiéme, & ainsi de suite, & rendre négatifs les coéficients des termes pairs, c'est à dire du second, du quatriéme, du sixiéme, &c. suivant ce qui est démontré dans les operations precedentes.* * 208.

III.

211. Quand il y a $\overline{a+b}^{-2}$, $\overline{a+b}^{-3}$, &c. les coéficients des termes pairs, c'est à dire du second, du quatriéme, du sixiéme, &c. sont négatifs, & ils seroient positifs s'il y avoit $\overline{a-b}^{-2}$, $\overline{a-b}^{-3}$, $\overline{a-b}^{-4}$, &c.

IV.

212. La suite de chaque puissance est toujours infinie, quand l'exposant est négatif.

COROLLAIRE,

Où l'on démontre qu'en mettant — n au lieu de + n dans la formule generale des puissances de $\overline{a+b}^{n} = 1a^{n} + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}bb + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^{3}$ &c. *la même formule devient la formule generale des puissances de* $\overline{a+b}^{-n}$, *dont l'exposant est négatif*

213. EN mettant dans la formule generale $1a^{n} + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}bb$ &c. $-n$ à la place de $+n$, il est évident, 1°, qu'on trouvera les mêmes puissances de a & de b, qui
* 209. conviennent à $\overline{a+b}^{-n}$ par la premiere remarque.*

2°. Que les coéficients seront les mêmes que ceux de
* 210. $\overline{a+b}^{-n}$ de la seconde & troisiéme remarques,* car l'unité
211. sera le coéficient du premier terme, $-\frac{n}{1}$ le coéficient du second terme, qui doit être négatif par la troisiéme remar-
* 211. que;* $-\frac{n}{1}\times-\frac{n+1}{2}$, est le même que le troisiéme coéficient $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, puisque les deux grandeurs négatives $-\frac{n}{1}\times-\frac{n+1}{2}$, donnent le même produit positif que les deux positives $\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$. Il est évident que l'on trouvera de même que les coéficients de la formule generale seront, aprés avoir mis $-n$ à la place de $+n$, les coéficients marqués dans la seconde & la troisiéme remarque.

Par consequent l'on a démontré qu'en mettant dans la formule generale $\overline{a+b}^{n} = a^{n} + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}bb$ &c. $-n$ à la place de $+n$, elle sera la formule generale pour trouver toutes les puissances de $\overline{a+b}^{-n}$, lorsque leur exposant est négatif.

214. Et comme la formule generale pour élever une suite de grandeurs à une puissance quelconque, est une suite necessaire de la formule generale pour élever deux grandeurs à
* 205. une puissance quelconque;* il est évident qu'en mettant aussi $-n$ à la place de $+n$ dans la formule generale des puissances d'une suite, l'on aura la formule generale des puissances de la même suite, lorsque les exposans de ces puissances sont des nombres entiers négatifs.

Si l'on veut démontrer ce second cas par les operations
* 208. de la proposition * qui précede ce Corollaire, il n'y a qu'à continuer les divisions dans la seconde puissance par le diviseur entier $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc + 2ad + 2bd + 2cd + dd$, &c, aprés avoir déja trouvé les quotients qui conviennent à la premiere partie du diviseur $aa + 2ab + bb$, & continuer de semblables divisions dans la troisiéme puissance, la quatriéme, &c.

AVERTISSEMENT.

AFIN que les formules pour élever deux grandeurs ou une suite de grandeurs à une puissance quelconque, soient generales en toutes manieres, il reste à démontrer qu'elles conviennent aussi à toutes les puissances de deux grandeurs ou d'une suite de grandeurs, dont les exposans sont des fractions ou des nombres rompus positifs ou négatifs; ou, ce qui est la même chose, qu'elles servent aussi à trouver les racines quelconques de deux grandeurs, & d'une suite infinie de grandeurs. On démontrera ces derniers cas par la premiere methode du second problême, & on les prendra pour des exemples de ce Problême.

SECTION IV.

Où l'on continue les exemples de la premiere methode du second Problême: On enseigne à appliquer la même methode aux équations qui contiennent des differences; & l'on explique le retour des suites.

EXEMPLE V DU SECOND PROBLÊME.

215. *TROUVER la suite infinie qui exprime la racine* n *de* a + b, *c'est à dire, trouver la suite infinie qui est égale à* $\sqrt[n]{a+b} = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$.

IL faut supposer $x = \sqrt[n]{a+b} = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$.

En élevant chaque membre de cette équation à la puissance n, on aura $x^{n} = a + b$; & transposant, $x^{n} - a - b = 0$.

La question se réduit à trouver la suite infinie qui est la valeur de x dans cette équation $x^{n} - a - b = 0$. Pour la trouver, 1°. Il faut ſuppoſer $x = c + db + ebb + fb^3 + gb^4$ &c. les grandeurs c, d, e, f, g, &c. ſont indéterminées.

2°. Il faut élever chaque membre à la puiſſance n par la
* 106. formule generale, * & ſubſtituer la valeur de x^n à la place de x^n dans l'équation $x^n - a - b = 0$, & l'on aura l'équation changée ſuivante.

$$
0 = \left\{
\begin{array}{l}
x^n = c^n + \frac{n}{1} c^{n-1} db + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} ddbb + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} c^{n-3} d^3 b^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} c^{n-4} d^4 b^4 \\
\qquad + \frac{n}{1} c^{n-1} ebb + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} c^{n-2} deb^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} c^{n-3} ddeb^4 \\
\qquad + \frac{n}{1} c^{n-1} fb^3 \qquad + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} eeb^4 \\
\qquad + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} c^{n-2} dfb^4 \\
\qquad + \frac{n}{1} c^{n-1} gb^4 \\
-a = -a \\
-1b = \qquad -1b
\end{array}
\right.
$$

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de cette équation changée égale à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a beſoin pour déterminer les grandeurs indéterminées c, d, e, f, g, &c.

Par la premiere $c^n - a = 0$, on trouvera $c = a^{\frac{1}{n}}$.

En ſubſtituant la valeur de c dans la ſeconde $\frac{n}{1} c^{n-1} d - 1 = 0$, on trouvera $d = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}}$.

Subſtituant les valeurs de c & de d dans la 3^e^ $+ \frac{n}{1} c^{n-1} e + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} dd = 0$, on trouvera $e = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}}$.

Subſtituant les valeurs de c, d, e, dans la 4^e^ $\frac{n}{1} c^{n-1} f + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} c^{n-2} de + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} c^{n-3} d^3$, on trouvera $f = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}}$.

Subſtituant les valeurs de c, d, e, f, dans la 5^e^ $\frac{n}{1} c^{n-1} g + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} c^{n-2} df + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} c^{n-2} ee + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} c^{n-3} dde + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} c^{n-4} d^4 = 0$, on trouvera $g = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} \times \frac{1-3n}{4n} a^{\frac{1-4n}{n}}$.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs de c, d, e, f, g, dans $x = c + db + ebb + fb^3 + gb^4$ &c. & l'on aura $x = \overline{a+b}^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bb + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3 + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} \times \frac{1-3n}{4n} a^{\frac{1-4n}{n}} b^4$ &c.

C'eſt

C'eſt la valeur de x que l'on cherchoit, c'eſt à dire, c'eſt la ſuite infinie égale à $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$. *Ce qui étoit propoſé.*

REMARQUES.

I.

216. SI l'on ſubſtitue $\frac{1}{n}$ à la place de n dans la formule generale $\overline{a+b}^{n} = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} bb + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3$ &c. on trouvera exactement la ſuite qu'on a trouvée dans le cinquiéme exemple; par conſequent la formule generale convient à toutes puiſſances de deux grandeurs, qui ont pour expoſant une fraction dont le numerateur eſt l'unité, & le dénominateur tel nombre qu'on voudra.

II.

217. On trouvera de la même maniere la ſuite infinie qui eſt la valeur de $\sqrt[n]{\overline{a+b}^{m}} = \overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$, en ſuppoſant $x = \overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$, ce qui donnera $x^n = \overline{a+b}^{m}$.

On ſuppoſera $x = c + db + ebb + fb^3$ &c. les grandeurs c, d, e, f, ſont indéterminées, & on prendra la valeur de x^n par cette équation.

On réduira auſſi $\overline{a+b}^{m}$ en la ſuite infinie qui lui eſt égale.

On ſubſtituera les valeurs de x^n, $\overline{a+b}^{m}$ dans l'équation $x^n = \overline{a+b}^{m}$, ce qui donnera l'équation changée.

On en ſuppoſera chaque terme égal à zero; & par les équations particulieres que donnera cette ſuppoſition, on déterminera c, d, e, f, &c.

On ſubſtituera les valeurs déterminées de c, d, e, f, &c. dans l'équation $x = \overline{a+b}^{\frac{m}{n}} = c + db + ebb + fb^3$ &c. & l'on aura la ſuite infinie égale à $\overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$, qu'on trouvera être exactement la formule generale $\overline{a+b}^{n} = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b$ &c. aprés avoir ſubſtitué dans la formule generale $\frac{m}{n}$ à la place de n.

III.

218. On trouvera de la même maniere, en cherchant les ſui-

tes qui sont les valeurs de $\frac{1}{\sqrt[n]{a+b}} = \overline{a+b}^{-\frac{1}{n}}$, & de $\frac{1}{\sqrt[n]{\overline{a+b}^m}} = \overline{a+b}^{-\frac{m}{n}}$, que ces suites sont exactement la formule generale de $\overline{a+b}^n$, en substituant dans cette formule $-\frac{1}{n}$ à la place de n dans le premier cas, & $-\frac{m}{n}$ à la place de n dans le second cas.

IV.

219. Il faut aussi remarquer qu'en élevant par le moyen de la formule generale, deux grandeurs representées en general par $a+b$, à une puissance quelconque, dont l'exposant est marqué en general par n, on peut commencer par la seconde b, comme s'il y avoit $\overline{b+a}^n$, de maniere que b fût la premiere, & a la seconde; & il faut choisir celle des deux manieres qui donnera la suite dont les termes seront les plus commodes pour la résolution que l'on cherche.

V.

220. La même formule generale peut servir à trouver les racines quelconques approchées à l'infini, ou autant prés qu'on voudra, des puissances numeriques imparfaites; il n'y aura qu'à partager la puissance numerique imparfaite en deux parties, dont la premiere soit la plus grande puissance numerique parfaite contenue dans la puissance numerique imparfaite proposée, & la seconde partie soit le nombre qui restera, aprés avoir ôté de la puissance imparfaite proposée la plus grande puissance parfaite qui y est contenue. Il faut ensuite supposer que $\sqrt[n]{a+b}$, ou $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$ represente la puissance numerique imparfaite proposée, que a represente sa premiere partie, & b la seconde partie; & que $\frac{1}{n}$ represente l'exposant de la racine qu'on veut extraire. Il faudra enfin substituer dans la formule generale à la place de a, b, n, les grandeurs numeriques qu'elles representent; & aprés les substitutions, l'on aura la racine approchée que l'on cherchoit. Ainsi pour trouver la racine troisiéme de 12, on supposera $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}} = \overline{8+4}^{\frac{1}{3}}$, & on substituera les grandeurs numeriques à la place des litterales dans la formule generale.

EXEMPLE VI.

221. *TROUVER la suite infinie qui est la valeur de* $\overline{a+by+cyy+dy^3+ey^4+fy^5 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{n}}$

Il faut supposer $x = \overline{a+by+cyy+dy^3+ey^4+fy^5 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{n}}$
Par consequent $x^n = a+by+cyy+dy^3+ey^4+fy^5$ &c.
En transposant $0 = -x^n+a+by+cyy+dy^3$ &c.

La question se réduit à trouver la valeur de x dans cette équation. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $x = g+hy+iyy+ky^3+ly^4+py^5$ &c. les grandeurs g, h, i, k, &c. sont indéterminées.

2°. Il faut prendre la valeur de x^n par cette équation en se servant de la formule generale,* & substituer cette valeur de x^n à la place de $-x^n$ dans l'équation $0 = -x^n+a+by+cyy$ &c. & l'on aura l'équation changée suivante. * 206.

$$0=\left\{\begin{array}{l}
-x^n = -g^n - \frac{n}{1}g^{n-1}hy - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}g^{n-2}hhyy - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}g^{n-3}h^3y^3 - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}g^{n-4}h \ldots \\
\qquad - \frac{n}{1}g^{n-1}iyy - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}g^{n-2}hiy^3 - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}g^{n-3}hh \ldots \\
\qquad\qquad - \frac{n}{1}g^{n-1}ky^3 \quad - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}g^{n-2}ii \ldots \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}g^{n-2}hk \ldots \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{n}{1}g^{n-1}l \ldots \\
+a+by+cyy \text{ \&c.} = +a \quad +by \quad +cyy \quad +dy^3 \quad +e \ldots
\end{array}\right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les grandeurs g, h, i, k, &c.

Par la premiere $g^n = a$, on trouvera $g = a^{\frac{1}{n}}$.

En substituant cette valeur de a dans la seconde $\frac{n}{1}g^{n-1}h = b$, on trouvera $h = \frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}b$.

En substituant les valeurs de g, h, dans la 3e $\frac{n}{1}g^{n-1}i = -\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}g^{n-2}hh + c$, on trouvera $i = +\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}a^{\frac{1-2n}{n}}bb + \frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}c$.

En substituant les valeurs de g, h, i, dans la 4e $\frac{n}{1}g^{n-1}k = -\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}g^{n-3}h^3 - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}g^{n-2}hi + d$, on trouvera $k = +\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}a^{\frac{1-3n}{n}}b^3 + \frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n}a^{\frac{1-2n}{n}}bc + \frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}d$.

On trouvera de la même maniere les valeurs de l, de p, &c.

4°. Il faut substituer les valeurs de g, h, i, k, &c. dans $x = g + hy + iyy + ky^3$ &c. & l'on aura $x = \overline{a + by + cyy + dy^3 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{n}}$

$$= a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bbyy + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3y^3$$
$$+ \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} cyy \qquad + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} bcy^3$$
$$+ \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} dy^3$$

Ce qui étoit proposé.

EXEMPLE VII.

222. *TROUVER la suite infinie qui est la valeur de* $\overline{ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{n}}$

Il faut supposer $x = \overline{ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{n}}$
Par consequent $x^n = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c.
Et transposant $o = -x^n + ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c.

La question se réduit à trouver la valeur de x dans cette équation. Pour la trouver,

1°. Il faut supposer $x = gy + hyy + iy^3 + ky^4 + ly^5$ &c. les grandeurs g, h, i, &c. sont indéterminées.

2°. Il faut prendre la valeur de x^n par cette équation en
* 206. se servant de la formule generale,* & la substituer à la place de $-x^n$ dans l'équation $o = -x^n + ay + byy$ &c. & l'on aura l'équation changée qui suit.

$$o = \begin{cases} -x^n = -g^ny^n - \frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}hyy - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}g^{n-2}y^{n-2}hhy^4 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}g^{n-3}y^{n-3}h^3y^6 \\ \qquad - \frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}iy^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}g^{n-2}y^{n-2}hiy^5 \text{ \&c.} \\ \qquad - \frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}ky^4 \\ +ay + byy + cy^3 \text{ \&c.} = +ay \quad + byy \quad + cy^3 \quad + dy^4 \text{ \&c.} \end{cases}$$

Pour donner à cette équation changée la forme qui lui convient, afin que les puissances de y, prises de suite y, yy, y^3, y^4, &c. en distinguent les termes, il faut faire en sorte que y^{n-1} se trouve dans chaque coéficient, en considerant qu'on prend pour coéficients toutes les grandeurs qui précedent dans chacun de ces produits les puissances y, yy, y^3, y^4, y^5, &c. de l'inconnue y, qui doivent distinguer les termes

de l'équation; & il faut qu'en faisant ce changement, chaque produit ait toujours sa même valeur, & que cela ne la change point.

En faisant ce changement, comme on le voit dans l'équation suivante, on aura exactement la même équation changée, qui ne differe de la précedente que dans la seule expression, & les termes de l'équation seront distingués par les puissances y, yy, y^3, y^4, y^5, &c.

$$o = \begin{cases} -x^n = -y^{n-1}g^ny - \frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}hyy - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}g^{n-2}y^{n-1}hhy^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}g^{n-3}y^{n-1}h^3y^4 \\ \qquad - \frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}iy^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}g^{n-2}y^{n-1}hiy^4 \text{ \&c.} \\ \qquad - \frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}ky^4 \\ +ay + byy + cy^3 \text{ \&c.} = +ay \quad + byy \quad + cy^3 \quad + dy^4 \text{ \&c.} \end{cases}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour déterminer les grandeurs indéterminées g, h, i, k, &c.

Par la premiere de ces équations $y^{n-1}g^n = a$, on trouvera $g = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1-n}{n}}$, & $gy = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$.

En substituant la valeur de g ou de gy dans la seconde $\frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}h = b$, on trouvera $h = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by^{\frac{1-n}{n}}$.

En substituant les valeurs de g, h, dans la 3e $\frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}i = -\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} g^{n-2}y^{n-1}hh + c$, on trouvera $i = +\frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bby^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} cy^{\frac{1-n}{n}}$.

En substituant les valeurs de g, h, i, dans la 4e $\frac{n}{1}g^{n-1}y^{n-1}k = -\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} g^{n-3}y^{n-1}h^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2}y^{n-1}hi + d$, on trouvera $k = +\frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} bcy^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} dy^{\frac{1-n}{n}}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de g, h, i, k, dans $x = gy + hyy + iy^3 + ky^4 + ly^5$ &c. & l'on aura $x = \overline{ay + byy + cy^3 + dy^4 \text{ \&c.}}^{\frac{1}{n}}$

$$= a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by^{\frac{1+n}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bby^{\frac{1+2n}{n}} +$$
$$+ \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} cy^{\frac{1+2n}{n}}$$

$$\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}a^{\frac{1-3n}{n}}b^3y^{\frac{1+3n}{n}}+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}\times\frac{1-2n}{3n}\times\frac{1-3n}{4n}a^{\frac{1-4n}{n}}b^4y^{\frac{1+4n}{n}}$$

$$+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{n}a^{\frac{1-2n}{n}}bcy^{\frac{1+3n}{n}}\qquad+\frac{3}{n}\times\frac{1-n}{n}\times\frac{1-2n}{2n}a^{\frac{1-3n}{n}}bbcy^{\frac{1+4n}{n}}$$

$$+\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}dy^{\frac{1+3n}{n}}\qquad+\frac{1}{n}\times\frac{1-n}{2n}a^{\frac{1-2n}{n}}ccy^{\frac{1+4n}{n}}$$

$$+\frac{2}{n}\times\frac{1-n}{n}a^{\frac{1-2n}{n}}bdy^{\frac{1+4n}{n}}$$

$$+\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}ey^{\frac{1+4n}{n}}$$

C'est la suite qui est la valeur de $\overline{ay+byy+cy^3+dy^4\ \&c.}^{\frac{1}{n}}$
Ce qui étoit proposé.

REMARQUES.

I.

223. Il faut faire sur le sixiéme & le septiéme exemple les mêmes remarques que l'on a faites sur le cinquiéme exemple, & l'on verra clairement que la premiere methode du second Problême étant démontrée, les formules generales pour élever deux grandeurs & une suite infinie de grandeurs à une puissance quelconque, sont aussi démontrées pour tous les cas; c'est à dire, on verra clairement qu'on a démontré qu'elles servent à élever deux grandeurs & une suite infinie de grandeurs à une puissance quelconque, quelque nombre qu'en puisse être l'exposant, soit entier, soit rompu, soit positif, soit négatif; & qu'il est aussi facile d'élever par cette formule deux grandeurs ou une suite infinie de grandeurs à une puissance fort élevée, qu'il est aisé par la methode ordinaire de les élever au quarré ou à la troisiéme puissance; & qu'il est aussi facile d'en extraire la racine quelconque, que d'en extraire la racine quarrée; puisqu'il n'y a qu'à substituer dans ces formules generales le nombre entier ou rompu, positif ou négatif, qui est l'exposant de la puissance qu'on veut trouver, à la place de n qui le represente, & les grandeurs dont on cherche la puissance ou la racine, à la place des grandeurs a, b, c, &c. des formules generales.

On verra aussi que quand l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever plusieurs grandeurs, est un nombre entier positif, l'on trouve une suite finie; mais qu'elle est infinie dans les trois autres cas, c'est à dire, quand l'exposant de

la puissance est un nombre entier négatif, & quand il est un nombre rompu positif ou négatif.

II.

On verra l'usage de ces formules generales qui servent à élever deux ou plusieurs grandeurs, ou une suite de grandeurs à une puissance quelconque, dans les exemples suivans, & l'on doit avertir ici qu'elles sont d'une extrême utilité pour trouver des formules generales qui servent à découvrir la résolution des Problêmes les plus composés.

EXEMPLE VIII.

224. Pour trouver la valeur de x dans l'équation $x^6-\frac{5y^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}x^5+\frac{y^3}{n}x^4-7nnyyxx+ppy^4+6n^3y^3=0$,

1°. Il faut supposer $x=ay^{\frac{1}{2}}+by^{1+\frac{1}{2}}+cy^{2+\frac{1}{2}}+dy^{3+\frac{1}{2}}$ &c. a, b, c, &c. sont des grandeurs indéterminées.

2°. Il faut substituer dans la proposée les valeurs de x, prises de cette équation indéterminée, & l'on aura l'équation changée qui suit.

$$0=\left\{\begin{array}{lllll} x^6= & +a^6y^3 & +6a^5by^4 & +15a^4bby^5 & \&c. \\ & & & +6a^5cy^5 & \\ -\frac{5y^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}x^5= & & -\frac{5a^5}{n^{\frac{1}{2}}}y^3 & -\frac{25a^4}{n^{\frac{1}{2}}}by^4 & \&c. \\ +\frac{y^3}{n}x^4= & & & +\frac{a^4}{n}y^5 & \&c. \\ -7nnyyxx= & -7nnaay^3 & -14nnaby^4 & -7nnbby^5 & \&c. \\ & & & -14nnacy^5 & \\ +ppy^4= & & +ppy^4 & & \\ +6n^3y^3= & +6n^3y^3 & & & \end{array}\right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations dont on a besoin pour trouver les valeurs des indéterminées a, b, c, &c.

Par la premiere $a^6-7nnaa+6n^3=0$, on trouvera que la plus petite valeur positive de a est $n^{\frac{1}{2}}$, car $aa-n=0$, est un diviseur exact de $a^6-7nnaa+6n^3=0$.

En substituant la valeur de a dans la 2° $14nnab-6a^5b=-\frac{5a^5}{n^{\frac{1}{2}}}+pp$, on trouvera $b=-\frac{5}{8n^{\frac{1}{2}}}+\frac{pp}{8n^{2+\frac{1}{2}}}$.

En substituant les valeurs de a, b, dans la 3^e $14nnac - 6a^5c = +\frac{a^4}{n} - \frac{25a^6}{n^{\frac{1}{2}}}b + 15a^4bb - 7nnbb$, on trouvera $c = \frac{158}{64n^{\frac{3}{2}}} - \frac{35}{64n^{\frac{7}{2}}}pp + \frac{p^4}{64n^{\frac{11}{2}}}$.

4°. On substituera ces valeurs de a, b, c, dans $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} + cy^{2+\frac{1}{2}}$ &c. & l'on aura $x = n^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8n^{\frac{1}{2}}}y^{\frac{3}{2}} + \frac{pp}{8n^{\frac{3}{2}}}y^{\frac{3}{2}} + \frac{158}{64n^{\frac{3}{2}}}y^{\frac{5}{2}} - \frac{35pp}{64n^{\frac{7}{2}}}y^{\frac{5}{2}} + \frac{p^4}{64n^{\frac{11}{2}}}y^{\frac{5}{2}}$ &c.

On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

Application de la premiere methode du second Problême à la résolution des équations qui contiennent des differences.

AVERTISSEMENT.

225. LE second Problême sert aussi à la résolution des équations qui contiennent des differences, & l'on peut, par la premiere methode de ce Problême qu'on a expliquée, & par la seconde qu'on expliquera dans la suite, trouver la valeur approchée à l'infini de laquelle on voudra des inconnues de l'équation, exprimée par une suite qui n'aura que les puissances de l'autre inconnue, ou des autres inconnues, s'il y en a plusieurs, avec des grandeurs toutes connues. Et comme cela donne la résolution de plusieurs beaux Problêmes de Geometrie, on va faire l'application de la premiere methode à plusieurs équations qui contiennent des differences. On suppose seulement qu'on sçait le calcul des grandeurs differentielles, qui est expliqué *dans la premiere Section de l'Analyse des Infiniment Petits*; & si on veut l'appliquer aux équations qui contiennent des secondes differences ou des troisiémes differences, &c. il faut sçavoir le calcul de ces differences secondes, troisiémes, &c. qui est expliqué *dans l'Article 65 du même ouvrage*.

Préparation des équations qui ont des differences, afin d'y appliquer la methode du second Problême.

226. SUPPOSANT que les équations differentielles ausquelles on veut appliquer la methode du second Problême, ont les deux inconnues x & y, avec leurs differences, & qu'on cherche la valeur de x par une suite dont les termes n'ayent que les puissances de y avec les grandeurs connues des équations; il faut toujours, avant d'appliquer la methode, faire en sorte par la multiplication, la division, &c. que la difference dy de la seconde inconnue, soit dans le dénominateur, & ne soit point dans le numerateur. Par exemple, si l'on propose de trouver la valeur de x dans l'équation $dx + ydx - 1dy = 0$, il faut diviser tous les termes par dy, & l'on aura l'équation préparée $\frac{dx}{dy} + \frac{ydx}{dy} - 1 = 0$. De même si l'on propose de resoudre l'équation $dx^2 = \frac{yydx^2}{1-yy} + dy^2$, il faut multiplier tous les termes par $1 - yy$, & ensuite les diviser par dy, & l'on aura l'équation préparée $1 - \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{yydx^2}{dy^2} = 0$. Si l'on propose l'équation $dx \times \frac{\overline{qr + r - q} \times \sqrt{rr - xx}}{2\sqrt{rr-xx}} = \frac{1}{2}dy$, il faut multiplier chaque membre par $2\sqrt{rr - xx}$, & ensuite les diviser par dy, & l'on aura l'équation préparée $\frac{dx}{dy} \times \overline{qr + r - q} \times \sqrt{rr - xx} - \sqrt{rr - xx} = 0$.

Il en est de même des autres équations differentielles.

EXEMPLE IX.

227. POUR trouver la valeur de x dans l'équation differentielle $\frac{dx}{dy} + \frac{ydx}{dy} - 1 = 0$,

1°. Il faut supposer $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5$ &c. d'où l'on déduira en prenant les differences de chaque membre, $\frac{dx}{dy} = +a + 2by + 3cyy + 4ey^3 + 5fy^4$ &c.

2°. Il faut substituer la valeur de $\frac{dx}{dy}$ dans la proposée, & elle sera changée en l'équation qu'on voit ici.

$$0 = \begin{cases} +\frac{dx}{dy} = +a + 2by + 3cyy + 4ey^3 + 5fy^4 \text{ \&c.} \\ +\frac{ydx}{dy} = \quad +ay + 2byy + 3cy^3 + 4ey^4 \text{ \&c.} \\ -1 = -1 \end{cases}$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulieres qu'on a supposé de coéficients indéterminés, lesquelles serviront à en trouver les valeurs.

Par la premiere $+a - 1 = 0$, on trouvera $a = 1$.

Par la seconde $+2by + ay = 0$, on trouvera $b = -\frac{1}{2}$.

Par la troisième $+3cyy+2byy=0$, on trouvera $c=+\frac{1}{3}$.
Par la quatrième $+4ey^3+3cy^3=0$, on trouvera $e=-\frac{1}{4}$.
Par la cinquiéme $+5fy^4+4ey^4=0$, on trouvera $f=+\frac{1}{5}$.

4°. En substituant ces valeurs de a, b, c, e, f, à leur place dans $x=ay+byy+cy^3+ey^4+fy^5$, on aura $x=1y-\frac{1}{2}yy+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c.

C'est la valeur approchée de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE X.

228. POUR trouver la valeur de x dans l'équation $xx-rr+\frac{rrdx^2}{dy^2}=0$.

1°. Il faut supposer $x=ay+by^3+cy^5+ey^7+fy^9$ &c. les coéficients a, b, c, &c. sont indéterminés. On ne peut pas supposer $x=ay+byy+cy^3+ey^4$ &c. parceque dans cette supposition, on ne pourroit pas trouver toutes les équations particulieres, propres à déterminer les valeurs de tous les coéficients indéterminés.

En prenant la difference de chaque terme de $x=ay+by^3+cy^5$ &c. on aura $\frac{dx}{dy}=a+3byy+5cy^4+7ey^6+9fy^8$ &c. quarrant chaque membre de cette équation, on aura

$$\begin{array}{rlllll} \frac{dx^2}{dy^2}= & aa+6abyy & +9bby^4 & +14aey^6 & +25ccy^8 & \text{\&c.} \\ & & +10acy^4 & +30bcy^6 & +18afy^8 & \\ & & & & +42bey^8 & \end{array}$$

quarrant aussi chaque terme de l'équation supposée $x=ay+by^3+cy^5$ &c. on aura

$$\begin{array}{rllll} xx= & +aayy+2aby^4 & +bby^6 & +2aey^8 & \text{\&c.} \\ & & +2acy^6 & +2bcy^8 & \end{array}$$

2°. Il faut substituer ces valeurs de $\frac{dx^2}{dy^2}$, & de xx à leur place dans la proposée, & elle sera changée par cette substitution en l'équation infinie qu'on voit ici.

$$0=\left\{\begin{array}{llllll} +xx= & +aayy & +2aby^4 & +bby^6 & +2aey^8 & \text{\&c.} \\ & & & +2acy^6 & +2bcy^8 & \\ -rr=-rr & & & & & \\ +\frac{rrdx^2}{dy^2}=+aarr & +6abrryy & +9bbrry^4 & +14aerry^6 & +25ccrry^8 & \text{\&c.} \\ & & +10acrry^4 & +30bcrry^6 & +18afrry^8 & \\ & & & & +42berry^8 & \end{array}\right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera autant d'équations particulieres pour déterminer les coéficients indéterminés, qu'on a supposé de ces coéficients indéterminés.

Par la premiere on trouvera $aa=1$, d'où l'on déduira $a=+1$. Par la seconde on trouvera $b=-\frac{1}{6rr}$: par la troisiéme, $c=+\frac{1}{120r^4}$: par la quatriéme, $e=-\frac{1}{5040r^6}$: par la cinquiéme, $f=\frac{1}{362880r^8}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, &c. dans l'équation supposée $x=ay+by^3+cy^5$ &c. & l'on aura $x=y-\frac{y^3}{6rr}+\frac{y^5}{120r^4}-\frac{y^7}{5040r^6}+\frac{y^9}{362880r^8}$. C'est la valeur approchée de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE XI.

229. POUR trouver la valeur approchée de x dans l'équation $1-\frac{dx^2}{dy^2}+\frac{yydx^2}{dy^2}=0$.

1°. On supposera $x=ay+by^3+cy^5+ey^7+fy^9$ &c. d'où l'on déduira $\frac{dx}{dy}=+a+3byy+5cy^4+7ey^6+9fy^8$ &c. en quarrant chaque membre, on aura

$$\begin{array}{rlllll} \frac{dx^2}{dy^2}= & +aa+6abyy & +9bby^4 & +14aey^6 & +25ccy^8 & \text{\&c.} \\ & & +10acy^4 & +30bcy^6 & +18afy^8 & \\ & & & & +42bey^8 & \end{array}$$

2°. On substituera cette valeur de $\frac{dx^2}{dy^2}$ dans la proposée, & l'on aura

$$0=\left\{\begin{array}{llllll} +1=+1 & & & & & \\ -\frac{dx^2}{dy^2}=-aa & -6abyy & -9bby^4 & -14aey^6 & -25ccy^8 & \text{\&c.} \\ & & -10acy^4 & -30bcy^6 & -18afy^8 & \\ & & & & -42bey^8 & \\ +\frac{yydx^2}{dy^2}= & +aayy & +6aby^4 & +9bby^6 & +14aey^8 & \text{\&c.} \\ & & & +10acy^6 & +30bcy^8 & \end{array}\right.$$

3°. On supposera chaque terme de cette équation changée égal à zero.

Par ces équations particulieres on trouvera $a=+1$, $b=+\frac{1}{6}$, $c=+\frac{3}{40}$, $e=+\frac{5}{112}$, $f=+\frac{35}{1152}$.

4°. On substituera ces valeurs de a, b, c, &c. à leur place dans $x=ay+by^3$ &c. & l'on trouvera $x=y+\frac{1}{6}y^3+\frac{3}{40}y^5+\frac{5}{112}y^7+\frac{35}{1152}y^9$ &c. C'est la valeur approchée de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE XII.

230. SOIT proposé de trouver la valeur de $\frac{xy}{r}-x$ par le moyen de l'équation $+pyy-rrx-\frac{rrydx}{dy}+pxx=0$.

1°. Il faut supposer $x = ayy + by^4 + cy^6$ &c. d'où l'on déduira $\frac{dx}{dy} = +2ay + 4by^3 + 6cy^5$ &c. & $xx = +aay^4 + 2aby^6 + bby^8$ &c.
$+2acy^8$

2°. On substituera ces valeurs de x, $\frac{dx}{dy}$, xx à leur place dans la proposée, & l'on aura

$$0=\left\{\begin{array}{llll} +pyy & = +pyy & & \\ -rrx & = -arryy & -brry^4 & -crry^6 \quad \&c. \\ -\frac{rrdx}{dy} & = -2arryy & -4brry^4 & -6crry^6 \quad \&c. \\ +pxx & = & +aapy^4 & +2abpy^6 \quad \&c. \end{array}\right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée égal à zero.

On trouvera par ces équations particulieres $a = +\frac{p}{3rr}$, $b = +\frac{p^3}{5\times 9r^6}$, $c = +\frac{2p^5}{3\times 5\times 7\times 9r^{10}}$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, &c. dans l'équation supposée $x = ayy + by^4 + cy^6$ &c. & l'on trouvera $x = +\frac{p}{3rr}yy + \frac{p^3}{5\times 9r^6}y^4 + \frac{2p^5}{3\times 5\times 7\times 9r^{10}}y^6$ &c. d'où l'on déduira $\frac{rr}{p} - x = \frac{rr}{p} - \frac{p}{3rr}yy - \frac{p^3}{5\times 9r^6}y^4 - \frac{2p^5}{3\times 5\times 7\times 9r^{10}}y^6$ &c. *Ce qui étoit proposé.*

Si l'on veut supposer, pour abreger, $\frac{rr}{p} = n$, on trouvera $\frac{rr}{p} - x = n - \frac{yy}{3n} - \frac{y^4}{5\times 9n^3} - \frac{2y^6}{3\times 5\times 7\times 9n^5}$ &c.

EXEMPLE XIII.

231. POUR trouver la valeur approchée de x dans l'équation $\frac{dx}{dy}\times\overline{qr+\overline{t-q}\times\sqrt{rr-xx}} - \sqrt{rr-xx} = 0$,

1°. Il faut supposer $x = ay + by^3 + cy^5 + ey^7$ &c. d'où l'on déduira $\frac{dx}{dy} = +a + 3byy + 5cy^4 + 7ey^6$ &c.
$+xx = +aayy + 2aby^4 + bby^6$ &c. $\quad +x^4 = +a^4y^4$
$+2acy^6$
$+4a^3by^6$ &c. $\quad +x^6 = +a^6y^6$ &c.

Il faut aussi réduire $\sqrt{rr-xx} = \overline{rr-xx}^{\frac{1}{2}}$ en la suite qui exprime cette grandeur, par le moyen de la formule generale,* où il ne faut que substituer $\frac{1}{2}$ à la place de n, rr à la
* 203. place de a, & $-xx$ à la place de b; & l'on aura $\sqrt{rr-xx} = \overline{rr-xx}^{\frac{1}{2}} = r - \frac{xx}{2r} - \frac{x^4}{2\times 4r^3} - \frac{x^6}{2\times 4\times 2r^5}$ &c.

Il faut concevoir cette valeur de $\sqrt{rr-xx}$ à la place

de $\sqrt{rr-xx}$ dans la proposée, & substituer les valeurs de $\frac{dx}{dy}$, xx, x^4, x^6, &c. à leur place dans la proposée, & l'on aura

$$0=\left\{\begin{array}{l}
+\frac{dx}{dy}\times qr = +aqr + 3bqryy + 5cqry^4 + 7eqry^6 \quad \&c. \\
+\frac{dx}{dy}\times t\sqrt{rr-xx} = +atr + 3btryy + 5ctry^4 + 7etry^6 \\
\qquad -\frac{a^3t}{2r}yy - \frac{2aabt}{2r}y^4 - \frac{abbt}{2r}y^6 \\
\qquad -\frac{3aabt}{2r}y^4 - \frac{6abbt}{2r}y^6 \quad \&c. \\
\qquad -\frac{a^5t}{2\times 4r^3}y^4 - \frac{7aact}{2r}y^6 \\
\qquad -\frac{4a^4bt}{2\times 4r^3}y^6 \\
\qquad -\frac{3a^4bt}{2\times 4r^3}y^6 \\
\qquad -\frac{a^7t}{2\times 4\times 2r^5}y^6 \\
+\frac{dx}{dy}\times -q\sqrt{rr-xx} = -arq - 3bqryy - 5cqry^4 - 7eqry^6 \\
\qquad +\frac{a^3q}{2r}yy + \frac{2aabq}{2r}y^4 + \frac{abbq}{2r}y^6 \\
\qquad +\frac{3aabq}{2r}y^4 + \frac{6abbq}{2r}y^6 \quad \&c. \\
\qquad +\frac{a^5q}{2\times 4r^3}y^4 + \frac{7aacq}{2r}y^6 \\
\qquad +\frac{4a^4bq}{2\times 4r^3}y^6 \\
\qquad +\frac{3a^4bq}{2\times 4r^3}y^6 \\
\qquad +\frac{a^7q}{2\times 4\times 2r^5}y^6 \\
-\sqrt{rr-xx} = -r + \frac{aa}{2r}yy + \frac{2ab}{2r}y^4 + \frac{bb}{2r}y^6 \\
\qquad +\frac{a^4}{2\times 4r^3}y^4 + \frac{2ac}{2r}y^6 \quad \&c. \\
\qquad +\frac{4a^3b}{2\times 4r^3}y^6 \\
\qquad +\frac{a^6}{2\times 4\times 2r^5}y^6
\end{array}\right.$$

2°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero.

3°. On trouvera par ces équations particulieres $a = +\frac{1}{t}$, $b = -\frac{q}{6rrt^4}$, $c = +\frac{10qq-9qt}{120r^4t^7}$, $e = -\frac{280q^3+504qqt-225qtt}{5040r^6t^{10}}$, &c.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, &c. dans l'équation supposée $x = ay + by^3 + cy^5$ &c. & l'on trouvera $x = \frac{y}{t} - \frac{qy^3}{6rrt^4} + \frac{10qq-9qt}{120r^4t^7}y^5 - \frac{280q^3+504qqt-225qtt}{5040r^6t^{10}}y^7$ &c. C'est la valeur de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE XIV.

232. POUR trouver la valeur de x dans l'équation $xx - \frac{yydx}{dy} - nn + ny = 0$, 1°. il faut ſuppoſer $x = a + by + cy^2 + ey^3$ + &c. les grandeurs a, b, c, e, ſont indéterminées.

2°. Il faut prendre par cette équation ſuppoſée la valeur de $\frac{dx}{dy}$, & l'on trouvera $\frac{dx}{dy} = b + 2cy + 3eyy$ + &c.

Il faut ſubſtituer la valeur de xx & celle de $\frac{dx}{dy}$, dans la propoſée, & l'on aura l'équation changée ſuivante.

$$\begin{aligned} xx &= aa + 2aby + bbyy + 2bcy^3 + \&c. \\ & \qquad\qquad\qquad + 2acyy + 2aey^3 \\ -\frac{yydx}{dy} &= \qquad\qquad\qquad - byy - 2cy^3 - \&c. \\ + ny &= \qquad + ny \\ - nn &= - nn \end{aligned}$$

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de cette équation égal à zero, & l'on trouvera par les équations particulieres que donnera cette ſuppoſition, $a = n$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = -\frac{1}{8n}$; $e = -\frac{1}{16nn}$.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs des indéterminées à leur place dans $x = a + by + cyy$ + &c. & l'on aura $x = n - \frac{1}{2}y - \frac{1}{8n}yy - \frac{1}{16nn}y^3$ &c. C'eſt la valeur de x que l'on cherchoit.

Seconde maniere de reſoudre le même exemple.

SI n étoit moindre que y, il faudroit prendre une ſuite où les puiſſances de y ſe trouvaſſent dans les dénominateurs des termes, c'eſt à dire, il faudroit que les expoſans des puiſſances de y fuſſent négatifs, de la maniere ſuivante.

1°. Il faut ſuppoſer $x = ay + by^0 + cy^{-1} + ey^{-2}$ + &c.

2°. Il faut prendre la valeur de $\frac{dx}{dy}$ par le moyen de cette équation, & l'on trouvera $\frac{dx}{dy} = a - cy^{-2} - 2ey^{-3}$ &c.

Il faut ſubſtituer les valeurs de xx & de $\frac{dx}{dy}$ dans la propoſée, & l'on aura l'équation changée ſuivante.

$$\begin{aligned} xx &= aayy + 2aby + bb + 2bcy^{-1} + \&c. \\ & \qquad\qquad\qquad + 2ac + 2aey^{-1} \\ -\frac{yydx}{dy} &= - ayy \quad * \quad + c - 2ey^{-1} \\ + ny &= \qquad + ny \\ - nn &= \qquad\qquad - nn \end{aligned}$$

3°. Il faut ſuppoſer chaque terme de cette équation égal

à zero, & l'on trouvera par cette ſuppoſition $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}n$, $c = +\frac{1}{4}nn$, $e = +\frac{1}{16}n^3$.

4°. Il faut ſubſtituer ces valeurs dans $x = ay + by^0 + cy^{-1}$ + &c. & l'on trouvera $x = y - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}nny^{-1} + \frac{1}{16}n^3y^{-2}$ &c. C'eſt la valeur de x que l'on cherchoit.

EXEMPLE XV, OÙ IL Y A TROIS INCONNUES.

AVERTISSEMENT.

233. IL y a des Problêmes de Geometrie où l'on eſt obligé d'employer trois inconnues x, y, z, avec leurs differences, dans l'équation qui en exprime toutes les conditions : Et il faut remarquer que cette équation qui exprime toutes les conditions du Problême, a été formée par les équations particulieres qui ont été réduites à cette ſeule équation qui les contient toutes ; & que par conſéquent s'il y a trois inconnues, ou un plus grand nombre, il doit y avoir des équations particulieres qui expriment à part le raport des unes aux autres : ces équations particulieres doivent être données ou connues dans les exemples où il s'agit de trouver la valeur de l'une des trois inconnues par une ſuite qui ne contienne que les deux autres avec les grandeurs connues de l'équation.

Pour trouver, par exemple, la valeur de x dans l'équation $zdx - xdy - ndy = 0$, ou diviſant par dy, dans l'équation $\frac{zdx}{dy} - x - n = 0$, où l'on ſuppoſe que dans le Problême qui a donné cette équation, l'on a l'équation particuliere $zdz - zdy - ydy = 0$, ou $dz = 1dy + \frac{ydy}{z}$, ou $\frac{dz}{dy} = 1 + \frac{y}{z} = 1 + z^{-1}y$, qui exprime le raport de z à y : pour trouver, dis-je, la valeur de x dans $\frac{zdx}{dy} - x - n = 0$, 1°, il faut ſuppoſer $x = az^{-1}y + bz^{-2}y^2 + cz^{-3}y^3 + ez^{-4}y^4$ + &c. a, b, c, e, ſont des grandeurs indéterminées.

2°. Il faut prendre la valeur de dx dans cette équation ſuppoſée, & l'on trouvera d'abord $dx = az^{-1}dy - az^{-2}ydz + 2bz^{-2}ydy - 2bz^{-3}y^2dz + 3cz^{-3}y^2dy - 3cz^{-4}y^3dz + 4ez^{-4}y^3dy$ — &c. Il faut ſubſtituer au lieu de dz ſa valeur $1dy + z^{-1}ydy$, & diviſer le tout par dy, & l'on aura

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} = az^{-1}dy + 2bz^{-2}y + 3cz^{-3}y^2 + 4ez^{-4}y^3 \ \&c. \\ - az^{-2}y - az^{-3}y^2 - 2bz^{-3}y^2 \\ - 2bz^{-4}y^3 - 3cz^{-4}y^3 \end{aligned}$$

Il faut substituer les valeurs de $\frac{dx}{dz}$ & de x dans la proposée, & l'on aura l'équation changée

$$\frac{zdx}{xdz} = a + 2bz^{-1}y + 3cz^{-2}y^2 + 4ez^{-3}y^3 \text{ \&c.}$$
$$- az^{-1}y - az^{-2}y^2 - 2bz^{-3}y^3$$
$$- 2bz^{-2}y^2 - 3cz^{-3}y^3$$
$$- x = - az^{-1}y - bz^{-2}y^2 - cz^{-3}y^3$$
$$- n = - n$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation égal à zero, ce qui fera trouver $a = n$, $b = n$, $c = \frac{4n}{3}$, $e = \frac{22}{12}n = \frac{11}{6}n$.

4°. Il faut substituer ces valeurs de a, b, c, &c. dans l'équation supposée, & l'on aura $x = nz^{-1}y + nz^{-2}y^2 + \frac{4}{3}nz^{-3}y^3 + \frac{11}{6}nz^{-4}y^4$ &c. C'est la valeur de x que l'on cherchoit.

Corollaires qui suivent de la premiere methode du second Problême.

COROLLAIRE I.

Qui contient ce qu'on appelle le retour des suites, ou la maniere de trouver la suite inverse d'une suite donnée.

234. LORSQU'ON a la valeur de x exprimée par une suite des puissances de y, avec des coéficients connus dans tous les termes, par exemple $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5$ &c. ou bien $x = ay + by^3 + cy^5 + ey^7 + fy^9$ &c. ou bien $x = ayy + by^4 + cy^6$ &c. ou de quelqu'autre maniere que ce puisse être; on peut, par la même methode, trouver la valeur de y par une suite des seules puissances de x, dont les coéficients connus n'auront que les grandeurs connues a, b, c, e, &c. de la suite supposée connue. C'est c'est ce qu'on appelle *le retour des suites*.

On suppose, par exemple, $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5$ &c. les coéficients a, b, c, e, f, &c. sont supposés representer des grandeurs connues. Pour trouver la valeur de y, l'équation proposée sera $0 = - x + ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5$ &c.

1°. On supposera $y = lx + mxx + nx^3 + px^4 + qx^5 + rx^6$ &c. les coéficients l, m, n, &c. sont supposés indéterminés.

2°. On déduira de cette supposition $yy = llxx + 2lmx^3$
$+ mmx^4 + 2lpx^5 + nnx^6$ &c.
$+ 2lnx^4 + 2mnx^5 + 2lqx^6$
$+ 2mpx^6$

$$y^3 = l^3x^3 + 3llmx^4 + 3lmmx^5 + 3llpx^6 \text{ \&c.}$$
$$+ 3llnx^5 + 6lmnx^6$$
$$+ m^3x^6$$
$$y^4 = l^4x^4 + 4l^3mx^5 + 6llmmx^6 \text{ \&c.}$$
$$+ 4l^3nx^6$$
$$y^5 = l^5x^5 + 5l^4mx^6 \text{ \&c.}$$
$$y^6 = l^6x^6 \text{ \&c.}$$

On substituera ces valeurs de y, yy, &c. à la place de y, yy, &c. dans la proposée, & l'on aura

$$- x = - x$$
$$+ ay = + alx + amxx + anx^3 + apx^4 + aqx^5 + arx^6$$
$$+ byy = + bllxx + 2blmx^3 + bmmx^4 + 2blpx^5 + bnnx^6$$
$$+ 2blnx^4 + 2bmnx^5 + 2blqx^6$$
$$+ 2bmpx^6$$
$$+ cy^3 = + cl^3x^3 + 3cllmx^4 + 3clmmx^5 + 3cllpx^6$$
$$+ 3cllnx^5 + 6clmnx^6$$
$$+ cm^3x^6$$
$$+ ey^4 = + el^4x^4 + 4el^3mx^5 + 6ellmmx^6$$
$$+ 4el^3nx^6$$
$$+ fy^5 = + fl^5x^5 + 5fl^4mx^6$$
$$+ gy^6 = + gl^6x^6$$

3°. On supposera chaque terme de l'équation changée égal à zero, & l'on trouvera par ces équations particulieres $l = + \frac{1}{a}$, $m = - \frac{b}{a^3}$, $n = \frac{2bb - ac}{a^5}$, $p = \frac{5abc - 5b^3 - aae}{a^7}$, $q = \frac{14b^4 + 6aabe - 21abbc + 3aacc - a^3f}{a^9}$, $r = - \frac{42b^5 + 84ab^3c}{a^{11}} - \frac{28aabcc - 28aabbe + 7a^3ce + 7a^3bf - a^4g}{a^{11}}$.

4°. On substituera ces valeurs des coéficients indéterminés l, m, n, &c. à leur place dans $y = lx + mxx + nx^3$ &c. & l'on trouvera $y = \frac{x}{a} - \frac{bxx}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aae}{a^7}x^4 + \frac{14b^4 + 6aabe - 21abbc + 3aacc - a^3f}{a^9}x^5$

$\frac{42b^7 + 84ab^4 \ldots \ldots - 28aabbc + 7a^4ce + 7a^4bf - a^4g}{a^{11}} x^6$ &c.

C'est la valeur de y que l'on cherchoit.

REMARQUES.

I.

235. ON peut de la même maniere trouver la valeur de y dans les équations $x = ay + by^3 + cy^5$ &c. $x = ayy + by^4 + cy^6$ &c. & dans les autres où les exposans des puissances de y sont en progression arithmetique.

Quand on aura les valeurs de y dans tous ces cas differens, ces valeurs serviront de formules pour trouver tout d'un coup la résolution des Problêmes qui sont les inverses de ceux qui sont exprimés par les équations où l'on a trouvé la valeur de x par une suite qui contenoit les puissances de y, dans les exemples précedens, & dans tous les autres semblables.

Pour en faire voir ici une application, on se servira du
* 227. neuviéme exemple,* qui sert dans la Geometrie à trouver le logarithme hyperbolique, representé en general par x, de tout nombre donné representé en general par $1 + y$.

L'on a trouvé le logarithme $x = 1y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c.

Pour trouver le nombre $1 + y$, qu'on suppose à present inconnu, par une suite qui contienne les puissances du logarithme connu x, il ne faut que supposer $1 = a$, $-\frac{1}{2} = b$, $+\frac{1}{3} = c$, $-\frac{1}{4} = e$, $+\frac{1}{5} = f$, &c. & substituer ce valeurs de a, b, c, &c. dans la formule $y = \frac{x}{a} - \frac{bxx}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5} x^3$ &c. & l'on trouvera $y = \frac{x}{1} + \frac{1}{2} xx + \frac{1}{2 \times 3} x^3$ &c.

Ajoutant l'unité à chaque membre, on aura $1 + y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{1}{2} xx + \frac{1}{2 \times 3} x^3$ &c. où x étant supposée connue, y l'est aussi. Ce qui étoit proposé.

II.

236. Sans supputer de nouvelles formules pour le retour des suites dans les cas où les exposans des puissances des y, ne sont pas dans la progression naturelle 1, 2, 3, &c. mais suivant la progression 2, 4, 6, &c. ou 1, 3, 5, 7, &c. ou une autre quelconque dont les termes sont des nombres entiers; on peut se servir dans ces cas de la formule seule du 1er Corollaire; par exemple, la valeur de $y = \frac{x}{a} - \frac{bxx}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5} x^3$ &c. peut servir de formule pour trouver tout d'un coup la valeur de y par les puissances de x, dans les équations infinies où les puissances de y seroient y, y^3, y^5, y^7, &c. en supposant, 1°, tous les termes de la formule où se trouvent les puissances paires de x, comme xx, x^4, x^6, &c. égaux à zero, & retranchés de la formule; & en supposant, 2°, égaux à zero tous les coéficients b, e, g, &c. des puissances paires de y, comme yy, y^4, y^6, &c. de l'équation supposée $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c.

Pour trouver, par exemple, la valeur de y dans l'équation * $x = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9$ &c. par le * 229.
moyen de la formule précedente, on supposera, 1°, les termes $-\frac{bxx}{a^3} + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7} x^4$, & les autres où les puissances de x sont paires, égaux à zero, & retranchés de la formule.

On supposera, 2°, afin que l'équation proposée $x = y + \frac{1}{6}y^3$ &c. soit representée par $x = ay + byy + cy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{6}$, $e = 0$, $f = \frac{3}{40}$, $g = 0$, $h = \frac{5}{112}$, &c.

3°. On substituera dans les termes de la formule où les puissances de x sont impaires, les valeurs précedentes de a, b, c, &c. & l'on aura $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ &c. C'est la valeur de y que l'on cherchoit.

On peut de même se servir de la valeur de $y = \frac{x}{a} - \frac{bxx}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5} x^3$ &c. pour le retour des suites dans les autres cas.

III.

237. Si x n'étoit pas lineaire dans la suite directe $x = ay + byy + cy^3 +$ &c. mais qu'il y eût par exemple $x^3 = ay + byy + cy^3 +$ &c. ou en general $x^n = ay + byy + cy^3 +$ &c. il faudroit dans ce cas commencer par élever chaque membre à la puissance $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{n}$, ce qui rendroit x lineaire dans le premier membre, & ensuite on trouveroit la valeur de y exprimée par une suite où il n'y auroit que les puissances de x avec les coéficients de l'équation proposée, comme dans le premier Corollaire.

COROLLAIRE II.

238. SOIT une équation dont chaque membre contienne une suite infinie, comme $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c.

$= ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5 + ry^6$ &c. dont tous les coéficients sont supposés representer des grandeurs connues, & dont chaque membre ne contient qu'une inconnue, c'est à dire, que l'inconnue d'un membre ne se trouve point dans l'autre membre: On peut, par la même methode, trouver la valeur de l'une des deux inconnues, par exemple de x, exprimée par une suite infinie qui ne contiendra que les puissances de y, avec des coéficients connus. Cette équation peut se marquer ainsi par transposition, $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. $- ly - myy - ny^3 - py^4 - qy^5 - ry^6$ &c. $= 0$.

Pour trouver la valeur de x, 1°, il faut supposer $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Ey^6$ &c. les coéficients A, B, C, &c. sont indéterminés.

On substituera cette valeur de x, & les puissances de cette valeur à la place de x & de ses puissances dans la proposée, & l'on aura l'équation changée suivante,

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllllll}
ax = & aAy + aByy & + aCy^3 & + aDy^4 & + aEy^5 & + aFy^6 & \&c. \\
+ bxx = & & + bAAyy + 2bABy^3 & + bBBy^4 & + 2bADy^5 & + bCCy^6 & \\
 & & & + 2bACy^4 & + 2bBCy^5 & + 2bAEy^6 & \&c. \\
 & & & & & + 2bBDy^6 & \\
+ cx^3 = & & + cA^3y^3 & + 3cA^2By^4 & + 3cABBy^5 & + cB^3y^6 & \&c. \\
 & & & & + 3cAACy^5 & + 6cABCy^6 & \\
 & & & & & + 3cAADy^6 & \\
+ dx^4 = & & & + dA^4y^4 & + 4dA^3By^5 & + 6dAABBy^6 & \&c. \\
 & & & & & + 4dA^3Cy^6 & \\
+ ex^5 = & & & & + eA^5y^5 & + 5eA^4By^6 & \&c. \\
+ fx^6 = & & & & & + fA^6y^6 & \&c. \\
- ly - myy - ny^3 - py^4 \ \&c. = & - ly & - myy & - ny^3 & - py^4 & - qy^5, \ - ry^6 & \&c.
\end{array} \right.$$

2°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée égal à zero.

3°. Il faut déterminer par ces équations particulieres les coéficients indéterminés A, B, C, &c. & l'on trouvera $A = \frac{l}{a}$, $B = \frac{m - bAA}{a}$, $C = \frac{n - 2bAB - cA^3}{a}$, $D = \frac{p - bBB - 2bAC - 3cABB - dA^4}{a}$.

On trouvera de même la valeur des autres.

Pour abréger le calcul, on laisse les capitales A, B, C, D, &c. qui sont les coéficients indéterminés, au lieu de leurs valeurs qui les précedent, & ces capitales les representent.

4°. Il faut substituer ces valeurs de A, B, C, D, &c. dans $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4$ &c.

& l'on aura $x = \frac{l}{a}y + \frac{m - bAA}{a}yy + \frac{n - 2bAB - cA^3}{a}y^3 + \frac{p - bBB - 2bAC - 3cAAB - dA^4}{a}y^4$ &c.

C'est la valeur de x que l'on cherchoit.

REMARQUES.

I.

139. CETTE valeur de x peut servir de formule pour trouver tout d'un coup la valeur de x dans les cas où les exposans des puissances des x & des y sont dans une autre progression arithmetique que celle des nombres naturels 1, 2, 3, &c.

Dans les cas, par exemple, où les exposans des puissances des x & des y sont impairs, comme 1, 3, 5, 7, &c. il faudra supposer, 1°, dans l'équation $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. $= ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5 + ry^6$ &c. les coéficients b, d, f, &c. m, p, r, &c. des puissances paires des x & des y, égaux à zero: Et, 2°, retrancher de la formule $x = \frac{l}{a}y + \frac{m - bAA}{a}yy$ &c. tous les termes où les puissances de y sont paires, sçavoir le 2ᵉ, le 4ᵉ, le 6ᵉ, &c. comme étant égaux à zero.

S'il étoit proposé, par exemple, de trouver par le moyen de la formule précedente, la valeur de x dans l'équation $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c. $= 1y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{15}{112}y^7 + \frac{105}{1152}y^9$ &c. il faudroit supposer, afin que cette équation fust representée par $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. $= ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5 + ry^6$ &c. que $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{6}$, $d = 0$, $e = \frac{3}{40}$, $f = 0$, &c. $l = 1$, $m = 0$, $n = \frac{1}{6}$, $p = 0$, $q = \frac{3}{40}$, $r = 0$, $s = \frac{15}{112}$, &c. Il faudroit encore supposer que les termes des puissances paires de y, sçavoir le 2ᵉ, le 4ᵉ, le 6ᵉ, &c. de la formule $x = \frac{l}{a}y + \frac{m - bAA}{a}yy$ &c. en sont retranchés, étant égaux à zero; & substituer ensuite les valeurs de a, b, c, d, &c. dans la formule, & l'on auroit la valeur de x dans l'équation proposée exprimée par une suite infinie où il n'y a que des y; ce qui est facile.

II.

140. Ce second Corollaire contient le premier, c'est à dire, la formule que fait trouver ce second Corollaire, contient la

formule ou la valeur de x du premier Corollaire ; il n'y a qu'à mettre dans l'équation $ly + my^2 + ny^3 +$ &c. $= ax + bx^2 + cx^3 +$ &c. x au lieu de y dans le premier membre, & y au lieu de x dans le second membre ; & supposer dans le premier membre $l = 1$, & $m = 0$, $n = 0$, c'est à dire, supposer que le premier membre ne contient que le premier terme, & cette équation deviendra $1x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 +$ &c. qui est l'équation du premier Corollaire. Ce qui fait voir que la formule du second Corollaire deviendra la formule du premier, en supposant dans cette formule du second Corollaire x à la place de y, & y à la place de x, & $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $q = 0$, &c.

COROLLAIRE III.

241. On peut par la même methode trouver la valeur de x dans l'equation $ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5$ &c. $= ax + \beta yx + \gamma yyx + \delta y^3x + \varepsilon y^4x$ &c. $+ bxx + \zeta yxx + \eta yyxx + \theta y^3xx + \kappa y^4xx$ &c. $+ cx^3 + \lambda yx^3 + \mu yyx^3 + \nu y^3x^3 + \rho y^4x^3$ &c. $+ dx^4 + \tau yx^4 + \upsilon yyx^4 + \phi y^3x^4 + \chi y^4x^4$ &c. dont tous les coéficients sont supposés representer des grandeurs connues, & où les deux inconnues x & y sont mêlées ensemble ; on peut, dis je, trouver la valeur de x par une suite infinie qui ne contienne que les puissances de y avec des coéficients connus.

Pour trouver la valeur de x, aprés avoir mis par transposition le premier membre dans le second, il faut, 1°, supposer $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4$ &c. les coéficients A, B, C, &c. sont indéterminés.

Il faut ensuite substituer les valeurs de x, xx, x^3, &c. qui se déduisent de cette supposition, dans l'équation proposée, & l'on aura l'équation changée qui suit,

$$0 = \left\{\begin{array}{lclllll}
+ax & = & aAy & + aByy & + aCy^3 & + aDy^4 & \&c. \\
+\beta yx & = & & +\beta Ayy & +\beta By^3 & +\beta Cy^4 & \&c. \\
+\gamma yyx & = & & & +\gamma Ay^3 & +\gamma By^4 & \&c. \\
+\delta y^3x & = & & & & +\delta Ay^4 & \&c. \\
+bxx & = & & +bAAyy & +2bABy^3 & +bBBy^4 & \&c. \\
 & & & & & +2bACy^4 & \\
+\zeta yxx & = & & & +\zeta AAy^3 & +2\zeta ABy^4 & \&c. \\
+\eta yyxx & = & & & & +\eta AAy^4 & \&c. \\
+cx^3 & = & & & +cA^3y^3 & +3cAABy^4 & \&c. \\
+\lambda yx^3 & = & & & & +\lambda A^3y^4 & \&c. \\
+dx^4 & = & & & & +dA^4y^4 & \&c. \\
-ly - myy - ny^3 - py^4\ \&c. & = & -ly & -myy & -ny^3 & -py^4 & \&c.
\end{array}\right.$$

2°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée égal à zero.

3°. Il faut trouver les valeurs des coéficients indéterminés A, B, C, &c. par le moyen de ces équations particulieres.

4°. Il faut substituer ces valeurs de A, B, C, &c. à leur place dans $x = Ay + Byy + Cy^3$ &c. & l'on trouvera

$$x = \frac{l}{a}y + \frac{m - \beta A - bAA}{a}yy + \frac{n - \beta B - \gamma A - 2bAB - \zeta AA - cA^3}{a}y^3$$
$$+ \frac{p - \beta C - \gamma B - \delta A - bBB - 2bAC - 2\zeta AB - \eta AA - 3cAAB - \lambda A^3 - dA^4}{a}y^4 \ \&c.$$

C'est la valeur de x que l'on cherchoit.

On a laissé, pour abreger, les lettres capitales à la place de leurs valeurs.

Cette valeur de x peut servir de formule pour resoudre toutes les équations qui peuvent être representées par la proposée.

REMARQUE.

242. Ce troisiéme Corollaire contient le second Corollaire, & par consequent il contient aussi le premier Corollaire ; c'est à dire, la formule de ce troisiéme Corollaire deviendra celle du second Corollaire, en supposant dans cette formule du troisiéme Corollaire, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\zeta = 0$, $\eta = 0$, $\theta = 0$, $\kappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\rho = 0$, $\tau = 0$, $\upsilon = 0$, $\phi = 0$, $\chi = 0$, &c.

COROLLAIRE IV.

243. Pour trouver les formules des Corollaires précedents, on peut se servir de la methode de prendre les chifres d'une maniere indéterminée *de M. de Leibnitz*, qui est dans les Actes de Lipsic*. Par exemple, pour avoir la formule du second Corollaire qui sert à trouver la valeur de x dans toutes les équations representées par $ax + bxx + cx^3 + dx^4$ &c. $= ly + myy + ny^3 + py^4$ &c. qui est l'équation du second Corollaire, où l'on suppose que les coéficients a, b, c, &c. l, m, n, &c. representent des grandeurs connues, on supposera toutes les mêmes équations representées par $10x + 20xx + 30x^3 + 40x^4 + 50x^5$, &c. $= 01y + 02yy + 03y^3 + 04y^4 + 05y^5$, &c.

* de l'an 1700.

Le premier chifre du rang le plus à gauche dans chaque terme represente le coéficient de la puissance de x dans ce terme; par exemple dans le terme $30x^3$, le chifre 3 du rang à gauche represente le coéficient du terme où est x^3, dans le terme $40x^4$, le chifre 4 represente le coéficient du terme où est x^4, & ainsi des autres; Et comme il n'y a point de x dans le second membre, il n'y a que des zeros dans le rang à gauche de chaque terme de ce second membre.

Les chifres du premier rang, c'est à dire du rang le plus à droite dans chaque terme, representent les coéficients des termes où sont les puissances de y. Par exemple, dans le terme $03y^3$, le chifre 3 represente le coéficient du terme de l'équation où est y^3, dans le terme $04y^4$, le chifre 4 represente le coéficient du terme où est y^4, & ainsi des autres.

Par exemple, l'équation $10x + 20xx + 30x^3 + 40x^4 + 50x^5$ &c. $= 01y + 02yy + 03y^3 + 04y^4 + 05y^5$ &c. representant l'équation $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5$, &c. $= ly + myy + ny^3 + py^4 + qy^5$ &c. le chifre 1 du terme $10x$ represente le coéficient a du terme ax representé par $10x$. Le chifre 2 du terme $20xx$ represente le coéficient b du terme $+ bxx$ representé par $20xx$, & ainsi des autres. Dans le second membre le chifre 1 du terme $01y$, represente le coéficient l du terme ly representé par $01y$; le chifre 2 du terme $02yy$, represente le coéficient m du terme myy representé par $02yy$; & ainsi des autres.

Les valeurs de 2, 3, 4, &c. des chifres de l'équation $10x + 20xx + 30x^3$, &c. $= 01y + 02yy + 03y^3$, &c. servent seulement à faire reconnoître quels sont les coéficients qu'ils representent, parceque 2, par exemple, dans $20xx$, étant égal à l'exposant de la puissance xx dans $20xx$, quand dans la résolution on aura 20, cela fera connoître que 20 represente le coéficient du terme où est xx.

De même dans $03y^3$, le chifre 3 étant égal à l'exposant de la puissance y^3, fera connoître dans la résolution que 03 represente le coéficient du terme où est y^3, & ainsi des autres.

Pour trouver une formule qui represente la valeur de x dans les équations representées par $10x + 20xx + 30x^3$ &c. $= 01y + 02yy + 03y^3$ &c.

1°. Il faut supposer $x = 101y + 102yy + 103y^3 + 104y^4$ &c. les coéficients 101, 102, &c. sont indéterminés, & ils ont trois rangs pour faire reconnoître que ce sont les coéficients indéterminés.

Les chifres 1, 2, 3, 4, &c. du premier rang à droite, servent à faire connoître les termes & à les distinguer, le chifre 1 marquant le premier terme où est y, le chifre 2 marquant le second terme où est yy, le chifre 3 marquant le troisiéme terme où est y^3, &c.

Il faut substituer dans la proposée $10x + 20xx + 30x^3$ &c. $- 01y - 02yy - 03y^3 = 0$, à la place de x, xx, x^3, &c. leurs valeurs prises dans l'équation supposée indéterminée $x = 101y + 102yy + 103y^3$ &c. & l'on aura l'équation changée qui suit,

$$0 = \left\{ \begin{array}{rlllll} 10 \times x = & 10 \times 101y & + 10 \times 102yy & + 10 \times 103 \times y^3 & + 10 \times 104y^4 & \text{\&c.} \\ + 20 \times xx = & & + 20 \times \overline{101}^2\, yy & + (2) \times 20 \times 101 \times 102y^3 & + 20 \times \overline{102}^2\, y^4 & \\ & & & & + (2) \times 20 \times 101 \times 103y^4 & \text{\&c.} \\ + 30 \times x^3 = & & & + 30 \times \overline{101}^3\, y^3 & + (3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102y^4 & \text{\&c.} \\ + 40 \times x^4 = & & & & + 40 \times \overline{101}^4\, y^4 & \text{\&c.} \\ - 01y - 02yy - 03y^3 - 04y^4 \text{ \&c.} = & - 01y & - 02yy & - 03y^3 & - 04y^4 & \text{\&c.} \end{array} \right.$$

2°. Il faut supposer chaque terme de l'équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres qui servent à trouver les valeurs des coéficients indéterminés 101, 102, 103, &c.

3°. Par la premiere de ces équations $10 \times 101 = 01$, on trouvera $101 = \frac{01}{10}$; par la seconde $10 \times 102 + 20 \times \overline{101}^2 = 02$, on aura $102 = \frac{02 - 20 \times \overline{101}^2}{10}$; par la troisiéme $10 \times 103 + (2) \times 20 \times 101 \times 102 + 30 \times \overline{101}^3 = 03$, on trouvera $103 = \frac{03 - (2) \times 20 \times 101 \times 102 - 30 \times \overline{101}^3}{10}$; par la quatriéme $10 \times 104 + 20 \times \overline{102}^2 + (2) \times 20 \times 101 \times 103 + (3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102 + 40 \times \overline{101}^4 = 04$, on aura $104 = \frac{04 - 20 \times \overline{102}^2 - (2) \times 20 \times 101 \times 103}{10}$ $- \frac{(3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102 - 40 \times \overline{101}^4}{10}$. On laisse dans ces valeurs, pour abreger le calcul, les coéficients indéterminés 101, 102; &c. à la place de leurs valeurs déja trouvées.

4°. Il faut substituer ces valeurs des coéficients indéterminés 101, 102, &c. à leur place dans l'équation supposée $x = 101y + 102yy + 103y^3$ &c. & l'on aura

$$x = \frac{01}{10}y + \frac{02 - 20 \times \overline{101}^2}{10}yy + \frac{03 - (2) \times 20 \times 101 \times 102 - 30 \times \overline{101}^3}{10}y^3$$
$$+ \frac{04 - 20 \times \overline{102}^2 - (2) \times 20 \times 101 \times 103 - (3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102 - 40 \times \overline{101}^4}{10}y^4 \text{ \&c.}$$

C'est la valeur de x que l'on cherchoit, ou plutôt c'est la formule generale qui sert à trouver la valeur de x dans toutes les équations representées par $10x + 20xx + 30x^3$ &c. $= 01y + 02yy + 03y^3$ &c. Il n'y aura plus qu'à substituer dans cette formule les coéficients des équations qu'on voudra resoudre, à la place des coéficients de la formule qui les representent, & l'on aura la valeur de x que l'on cherche exprimée par une suite où il n'y aura que des y.

AVERTISSEMENT.

Les chifres 2 & 3 renfermés par des parentheses, ne sont pas representatifs comme les autres, mais veritables; par exemple dans la grandeur $-(2) \times 20 \times 101 \times 102$, le chifre 2 marque qu'il faut prendre le produit $20 \times 101 \times 102$ deux fois; de même 3 dans $-(3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102$, marque qu'il faut prendre trois fois le produit representé par $30 \times \overline{101}^2 \times 102$, & ainsi des autres.

COROLLAIRE V.

244. Pour avoir une semblable formule qui serve à trouver la valeur de x dans les équations representées par celle du troisiéme Corollaire, où les x sont mêlés avec les y, on supposera que ces équations sont representées par l'équation $10x + 11yx + 12yyx + 13y^3x + 14y^4x$ &c. $+ 20xx + 21yxx + 22yyxx + 23y^3xx + 24y^4xx$ &c. $+ 30x^3 + 31yx^3 + 32yyx^3 + 33y^3x^3 + 34y^4x^3$ &c. $+ 40x^4 + 41yx^4 + 42yyx^4 + 43y^3x^4 + 44y^4x^4$ &c. $= 01y + 02yy + 03y^3 + 04y^4 + 05y^5$ &c. Les coéficients de chaque terme representent les coéficients donnés des termes de chaque équation donnée, qui est representée par celle-ci. Pour les distinguer & les reconnoître, il y a deux chifres dans le coéficient de chaque terme, celui qui est le plus à gauche est égal à l'exposant de la puissance de x, & celui qui est le plus à droite est égal à l'exposant de la puissance de y par laquelle la puissance de x est multipliée.

Par exemple, dans $34y^4x^3$, le chifre 3 est égal à l'exposant de la puissance x^3, & le chifre 4 est égal à l'exposant de la puissance y^4; mais les deux ensemble 34 marquent simplement, ou representent le coéficient donné du terme de l'équation donnée où se trouve le produit y^4x^3; & ainsi des autres.

Pour trouver la formule qui represente la valeur de x, exprimée par les seules puissances de y, & par les coeficients donnés representés par ceux de l'équation précedente,

1°. Aprés avoir mis le second membre dans le premier par transposition, on supposera $x = 101y + 102yy + 103y^3 + 104y^4$ &c. les coéficients 101, 102, &c. sont indeterminés, & ils ont trois rangs pour les faire reconnoître. Les chifres 1, 2, 3, &c. du rang le plus à droite, servent à en distinguer les termes, le chifre 1 marquant le premier terme où est y, 2 marquant le second où est yy, 3 marquant le troisiéme où est y^3 &c.

On substituera ensuite dans la proposée $10x + 11yx + 12yyx$ &c. à la place de x, xx, x^3, &c. leurs valeurs prises dans l'équation indéterminée $x = 101y + 102yy + 103y^3$ &c. & l'on aura l'équation changée qui suit,

$$0 = \left\{ \begin{array}{rlllll}
10 \times x & = 10 \times 101y & + 10 \times 102yy & + 10 \times 103y^3 & + 10 \times 104y^4 & \text{\&c.} \\
+ 11 \times yx & = & + 11 \times 101yy & + 11 \times 102y^3 & + 11 \times 103y^4 & \text{\&c.} \\
+ 12yyx & = & & + 12 \times 101y^3 & + 12 \times 102y^4 & \text{\&c.} \\
+ 13y^3x & = & & & + 13 \times 101y^4 & \text{\&c.} \\
\text{\&c.} & & & & & \\
+ 20xx & = & + 20 \times \overline{101}^2 yy & + (2) \times 20 \times 101 \times 102y^3 & + 20 \times \overline{102}^2 y^4 & \text{\&c.} \\
 & & & & + (2) \times 20 \times 101 \times 103y^4 & \text{\&c.} \\
+ 21yxx & = & & + 21 \times \overline{101}^2 y^3 & + (2) \times 21 \times 101 \times 102y^4 & \text{\&c.} \\
+ 22yyxx & = & & & + 22 \times \overline{101}^2 y^4 & \text{\&c.} \\
\text{\&c.} & & & & & \\
+ 30x^3 & = & & + 30 \times \overline{101}^3 y^3 & + (3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102y^4 & \text{\&c.} \\
+ 31yx^3 & = & & & + 31 \times \overline{101}^3 y^4 & \text{\&c.} \\
\text{\&c.} & & & & & \\
+ 40x^4 & = & & & + 40 \times \overline{101}^4 y^4 & \text{\&c.} \\
-01y - 02yy - 03y^3 - 04y^4 \text{\&c.} & = -01y & -02yy & -03y^3 & -04y^4 & \text{\&c.}
\end{array} \right.$$

2°. On supposera chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres propres à déterminer les coéficients indéterminés 101, 102, &c.

3°. Par la premiere de ces équations particulieres, qui est $10 \times 101 = 01$, on trouvera $101 = \frac{01}{10}$; par la 2° $10 \times 102 + 11 \times 101 + 20 \times \overline{101}^2 = 02$, on aura $102 = \frac{02 - 11 \times 101 - 20 \times \overline{101}^2}{10}$; par la 3° $10 \times 103 + 11 \times 102 + 12 \times 101 + (2) \times 20 \times 101 \times 102 + 21 \times \overline{101}^2 + 30 \times \overline{101}^3 = 03$, on aura $103 = \frac{03 - 11 \times 102 - 12 \times 101 - (2) \times 20 \times 101 \times 102 - 21 \times \overline{101}^2 - 30 \times \overline{101}^3}{10}$; par la 4° $+ 10 \times 104 + 11 \times 103 + 12 \times 102 + 13 \times 101$

$+ 20 \times \overline{102}^2 + (2) \times 20 \times 101 \times 103 + (2) \times 21 \times 101 \times 102$
$+ 22 \times \overline{101}^3 + (3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102 + 31 \times \overline{101}^3 + 40 \times \overline{101}^4$
$= 04$, on trouvera $104 = \frac{04 - 11 \times 103 - 12 \times 102 - 13 \times 101 - 20 \times \overline{102}^2}{10}$
$- \frac{(2) \times 20 \times 101 \times 103 - (2) \times 21 \times 101 \times 102 - 22 \times \overline{101}^3 - (3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102 - 31 \times \overline{101}^3 - 40 \times \overline{101}^4}{10}$.

4°. On substituera ces valeurs des coéficients indéterminés 101, 102, &c. à leur place dans $x = 101y + 102yy + 103y^3$ &c. & l'on aura $x = \frac{01}{10}y + \frac{02 - 11 \times 101 - 20 \times \overline{101}^2}{10}yy$
$+ \frac{03 - 11 \times 102 - 12 \times 101 - (2) \times 20 \times 101 \times 102 - 21 \times \overline{101}^2 - 30 \times \overline{101}^3}{10}y^3$
$+ \frac{04 - 11 \times 103 - 12 \times 102 - 13 \times 101 - 20 \times \overline{102}^2 - (2) \times 20 \times 101 \times 103}{10}y^4$
$- \frac{(2) \times 21 \times 101 \times 102 - 22 \times \overline{101}^2 - (3) \times 30 \times \overline{101}^2 \times 102 - 31 \times \overline{101}^3 - 40 \times \overline{101}^4}{10}y^4$ &c.
C'est la valeur de x que l'on cherchoit, ou plutôt c'est la formule generale qui sert à trouver la valeur de x dans toutes les équations representées par l'équation proposée $10x + 11yx + 12yyx + 13y^3x$ &c.

Il n'y aura qu'à substituer dans cette formule les coéficients des équations qu'on voudra resoudre, à la place des coéficients de la formule qui les representent, & l'on aura la valeur de x que l'on cherche exprimée par une suite où il n'y aura que des y.

Il faut faire ici la même remarque sur les chifres 2, 3, &c. renfermés par des parentheses, qu'on a faite dans l'avertissement. On a laissé dans la formule les grandeurs indéterminées 101, 102, &c. à la place de leurs valeurs, pour abreger le calcul.

COROLLAIRE VI.

245. On peut rendre plus generaux les Corollaires précedens,
* 106. par le moyen des formules generales * pour élever deux grandeurs & une suite infinie de grandeurs à une puissance quelconque; on prendra ici pour exemple le second Corollaire: car au lieu de l'équation du second Corollaire $ax + bxx + cx^3$ &c. $= ly + myy + ny^3$ &c. on peut proposer l'équation generale $ax^t + bx^{t+1} + cx^{t+2} + dx^{t+3}$ &c. $= ly^t + my^{t+1} + ny^{t+2} + py^{t+3}$ &c. les coéficients a, b, c, d, l, m, &c. sont donnés, ou representent des coéficients donnés, & t represente en general une puissance quelconque de x & de y.

Pour trouver la valeur de x dans cette équation generale, ou la formule generale qui represente cette valeur,

1°. Il faut supposer $x = Ay + Byy + Cy^3 + Dy^4$ &c. les coéficients A, B, C, &c. sont indéterminés.

2°. Il faut trouver par le moyen de la formule generale*les * 105.
valeurs de $x^t, x^{t+1}, x^{t+2}, x^{t-1}$ &c. dans l'équation $x = Ay + Byy + Cy^3$ &c. en substituant dans la formule generale $t, t+1$, &c. à la place de n.

Il faut ensuite substituer ces valeurs de x^t, x^{t+1}, x^{t+2} &c. à la place de x^t, x^{t+1} &c. dans l'équation proposée, & l'on aura l'équation changée suivante,

$$0 = \left\{\begin{array}{llll} ax^t = & aA^ty^t & + \frac{t}{1}aA^{t-1}By^{t+1} & + \frac{t}{1} \times \frac{t-1}{2} \times aA^{t-2}BBy^{t+2} \\ & & & + \frac{t}{1}aA^{t-1}Cy^{t+2} \text{ \&c.} \\ + bx^{t+1} = & & + bA^{t+1}y^{t+1} & + \frac{t+1}{1}bA^tBy^{t+2} \text{ \&c.} \\ + cx^{t+2} = & & & + cA^{t+2}y^{t+2} \text{ \&c.} \\ \text{\&c.} & & & \\ -ly^t - my^{t+1} - ny^{t+2} \text{ \&c.} = & -ly^t & -my^{t+1} & -ny^{t+2} \text{ \&c.} \end{array}\right.$$

3°. Il faut supposer chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour trouver les valeurs des coéficients indéterminés: On trouvera par la premiere $A^t = \frac{l}{a}$, & $A = \frac{l^{\frac{1}{t}}}{a^{\frac{1}{t}}}$; par la seconde, $B = \frac{m - bA^{t+1}}{taA^{t-1}}$, par la troisiéme, $C = \frac{n - cA^{t+2} - \frac{t+1}{1}bA^tB - \frac{t}{1} \times \frac{t-1}{2} \times aA^{t-2}BB}{taA^{t-1}}$.
On laisse, pour abreger le calcul, les lettres A, B, C, &c. à la place de leurs valeurs déja trouvées.

4°. Il faut substituer ces valeurs de A, B, C, &c. à la place de A, B, C, &c. dans $x = Ay + Byy + Cy^3$ &c. & l'on aura $x = \frac{l^{\frac{1}{t}}}{a^{\frac{1}{t}}}y + \frac{m - bA^{t+1}}{taA^{t-1}}yy +$
$\frac{n - cA^{t+2} - \frac{t+1}{1}bA^tB - \frac{t}{1} \times \frac{t-1}{2}aA^{t-2}BB}{taA^{t-1}}y^3$ &c.
C'est la valeur de x que l'on cherchoit, ou plutôt c'est la formule generale qui la represente, & qui sert à la trouver.

Il n'y aura plus, pour la trouver, qu'à substituer dans cette formule les coéficients, & les exposans des puissances de x & de y marqués par r des équations qu'on voudra resoudre, representés par ceux de l'équation generale $ax^r + bx^{r+1} + cx^{r+2}$ &c. $= ly^r + my^{r+1} + ny^{r+2}$ &c.

Remarques où l'on explique la maniere de connoître les exposans des puissances de la quantité y qui doit distinguer les termes de la suite qui est la valeur de x.

I.

246. 1°. Il faut que toutes les grandeurs de l'équation proposée dans lesquelles l'inconnue x, dont on cherche la valeur, ne se trouve point, soient employées dans l'équation changée, c'est à dire, il faut que dans les équations particulieres que l'on trouve en supposant chaque terme de l'équation changée égal à zero, chacune des grandeurs de l'équation proposée où x n'est point, serve à déterminer la valeur des indéterminées; d'où il suit que si quelqu'une de ces grandeurs ne peut servir à déterminer ces valeurs, ce qui arrive lorsqu'elle fait seule un terme de l'équation changée, il est certain que les exposans des puissances de y ne sont pas dans la progression arithmetique qu'il faut, dans la valeur de x que l'on a supposée; c'est à dire, que l'équation proposée ne peut pas être resolue par cette valeur de x qu'on a supposée; ou bien que l'équation proposée a besoin de préparation pour être resolue par cette methode du second Problême, & qu'elle ne le peut pas être dans l'état où elle est.

2°. Il faut que dans l'équation changée on puisse faire une équation de chaque terme, qui serve à déterminer les valeurs des indéterminées qu'on a supposées; & si cela n'arrivoit pas, on en concluroit les mêmes choses que dans l'article précedent; ainsi il faut que dans chaque terme de l'equation changée il y ait au moins deux grandeurs differentes.

3°. Les exposans des puissances de la quantité qui distingue les termes sont, comme on l'a vu dans les exemples, en progression arithmetique; & cette progression arithmetique va en augmentant quand ces exposans sont positifs, & en

augmentant pour ainsi dire en négation, quand ils sont tous négatifs: mais quand les premiers exposans des mêmes puissances sont positifs & deviennent au second terme, ou aux autres termes, négatifs; les positifs vont en diminuant, & les négatifs en augmentant dans leur négation.

4°. On voit par là qu'il suffit de trouver les exposans des puissances de la quantité qui distingue les termes de la valeur de x dans les deux premiers termes, pour avoir tous les autres.

II.

Pour les équations qui n'ont pas de differences.

1°. Quand il y a une quantité toute connue dans l'équation proposée, comme $2n^3$ dans le premier exemple, & qu'on veut chercher la valeur de x par une suite dont les termes sont distingués par les puissances de y qui ont leurs exposans positifs; il faut que le premier terme de la suite indéterminée qu'on doit supposer pour la valeur de x, n'ait qu'une grandeur indéterminée sans aucun y; ou, ce qui est la même chose, l'exposant de y doit être zero au premier terme; ainsi on supposera dans ce cas $x = ay^0 +$ &c.

Pour trouver dans ce cas l'exposant de y dans le second terme, il n'y a qu'à considerer attentivement quel exposant doit avoir y dans le second terme de la valeur indéterminée de $x = a + by +$ &c. afin qu'on puisse avoir par la substitution des deux termes $a + by$ considerés comme la valeur de x, à la place de x dans l'équation proposée, un second terme de l'équation changée, qui étant supposé égal à zero, donne une équation par laquelle on puisse déterminer la valeur de b; & l'on verra dans le premier exemple qu'il faut supposer y^1 dans le second terme de la valeur indéterminée de x. Ainsi l'on voit dans le premier exemple qu'il faut supposer $x = a + by + cy^2 +$ &c. En appliquant le même raisonnement aux cas semblables, on trouvera la suite des exposans de y, qu'il faut supposer dans la valeur indéterminée de x.

3°. Quand il n'y a aucun terme qui soit tout connu dans l'équation proposée, comme dans le huitiéme exemple $x^6 - \frac{5y^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}x^5 + \frac{y^3}{n}x^4 - 7nnyyxx + ppy^4 + 6n^3y^3 = 0$,

& qu'on veut trouver la valeur de x par une suite où les exposans de y soient positifs, dans ce cas, y doit être dans le premier terme de la valeur indéterminée de x. Pour avoir l'exposant de y dans le premier terme de cette valeur indéterminée de $x = ay^{\frac{1}{2}} +$ &c. il faut avoir égard à la grandeur $+ 6n^3y^3$, dans laquelle y^3 est au moindre degré sans qu'il y ait de x, & voir quel est l'exposant qu'il faut donner à y dans le premier terme de $x = ay^{\frac{1}{2}} +$ &c. afin qu'en élevant l'équation indéterminée $x = ay^{\frac{1}{2}} +$ &c. à la sixiéme puissance, $x^6 = a^6y^3 +$ &c. l'on puisse avoir la quantité a^6y^3 qui fasse avec la quantité $6n^3y^3$ de la proposée le premier terme de l'équation changée, de maniere qu'en supposant ce premier terme égal à zero, on puisse déterminer la valeur de la premiere indéterminée a. Or il est évident dans le huitiéme exemple, qu'il faut supposer $x = ay^{\frac{1}{2}} +$ &c. L'on a donc déja le premier exposant de y, il ne faut plus trouver que le second.

4°. Pour trouver ce second exposant de y dans la valeur indéterminée de $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} +$ &c. il faut voir quel est celui qu'on peut supposer pour avoir ces deux choses: la premiere, que la grandeur $+ ppy^4$ de l'équation proposée dans laquelle x n'est point, se puisse trouver dans un des termes de l'équation changée avec quelqu'autre grandeur qui contienne quelques-unes des indéterminées; car sans cela ppy^4 ne pourroit être employée dans la resolution de l'équation: La seconde, qu'en faisant la substitution de $ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} +$ &c. $= x$, à la place de x dans la proposée, on trouve un second terme dans l'équation changée, qui étant supposé égal à zero, donne une équation particuliere par laquelle on puisse déterminer la valeur de la seconde indéterminée b. Or l'on découvre aisément qu'en supposant $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} +$ &c. l'on aura ces deux choses; ainsi $1 + \frac{1}{2}$ est le second exposant de y dans l'équation indéterminée $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^{1+\frac{1}{2}} +$ &c. ce qui donne tous les autres suivans.

Ces

Ces Remarques suffisent pour apprendre aux Lecteurs celles qu'il faut faire dans tous les cas semblables, pour découvrir les exposans qu'il faut donner aux y, dans la valeur indéterminée de x, qu'il faut supposer pour en découvrir la veritable valeur par cette methode; & après s'être rendu cette methode bien familiere en l'appliquant à beaucoup d'exemples, ils découvriront aisément les exposans qu'il faut donner aux y, dans la valeur indéterminée de x, lorsqu'on veut chercher cette valeur par des y dont les exposans soient négatifs; & ils pourront facilement l'appliquer à toutes les équations qui auront deux ou plusieurs inconnues, sans qu'il soit necessaire d'en grossir ce Traité.

III.

Pour les équations qui ont des differences.

LES Regles que l'on a données dans les articles de la premiere remarque pour prendre les exposans des y tels qu'il faut dans la suite indéterminée que l'on doit supposer pour la valeur de x, conviennent aussi aux équations qui ont des differences; c'est à dire que pour résoudre les équations differentielles, il faut supposer une suite indéterminée égale à x, où les exposans des y soient en progression arithmetique, & aillent en augmentant, quand ils sont positifs, & en augmentant, pour ainsi dire, en négation, quand ils sont négatifs; & que s'ils commencent par être positifs, ils aillent d'abord en diminuant, & ensuite en augmentant en négation dès qu'ils deviennent négatifs; que ces exposants des y dans la suite indéterminée qu'on suppose, soient tels, 1°, que toutes les grandeurs de l'équation proposée se trouvent employées dans l'équation changée, & y servent à déterminer les valeurs des indéterminées; 2°, qu'on puisse faire de chaque terme de l'équation changée une équation particuliere en le supposant égal à zero, laquelle serve à trouver la valeur de quelque indéterminée, & qu'ainsi chaque terme de l'équation changée ait au moins deux grandeurs differentes; 3°, & qu'enfin si on ne peut trouver de progression arithmetique des y, soit positive, soit négative, propre à remplir ces deux conditions, on soit assuré que l'équation proposée ne peut pas être résolue telle qu'elle est, du moins si l'on n'y fait quelque préparation.

Mmm

Mais c'eſt une choſe particuliere aux équations differentielles, qu'en prenant la difference de la ſuite indéterminée $x = ay + by^2 + cy^3 +$ &c. ou $x = a + by + cy^2 + ey^3 +$ &c. ou $x = ay^1 + by^0 + cy^{-1} + ey^{-2} +$ &c. & la diviſant enſuite par la difference dy, l'expoſant de chaque y diminue d'une unité dans la ſuite des expoſans poſitifs, & augmente d'une unité négative dans la ſuite des expoſans négatifs ; & que ſi l'on ſuppoſe pour un terme une grandeur indéterminée ſans y, elle ne ſe trouve plus dans la difference : Cela eſt cauſe que la grandeur, où y a pour expoſant l'unité, ſe trouve ſans y dans la difference, & que celle où il n'y auroit aucun y, ne s'y trouve plus, & eſt devenue zero : C'eſt pourquoi quand il y a une grandeur toute connue ſans y dans l'équation propoſée, il n'eſt pas toujours neceſſaire de ſuppoſer dans la ſuite indéterminée, qui eſt la valeur de x, une grandeur indéterminée ſans y, comme dans les exemples 9^e, 10^e, 11^e, 12^e & 13^e. Mais dans le 14^e exemple on a ſuppoſé un terme qui contenoit une indéterminée ſans y, parceque ſans cela on n'auroit pas pû employer dans l'équation changée les grandeurs $+ ny - nn$ de la propoſée.

Ces Remarques ſuffiſent à ceux qui ſe ſont rendu la methode bien familiere, pour découvrir toujours certainement quelles doivent être les expoſans des y dans la ſuite indéterminée, qu'on doit ſuppoſer pour la valeur de x, dans les équations qui n'ont pas de differences, & dans celles qui ont des differences.

SECTION V.

Où l'on explique la ſeconde methode du ſecond Problême par le moyen de la transformation qui ſert à diminuer & à augmenter les racines d'une équation.

AVERTISSEMENT.

247. La ſeconde methode qu'on va expliquer, fait auſſi trouver pour la valeur de x une ſuite infinie, c'eſt à dire, qui a une infinité de termes qui ſont diſtingués les uns des autres par les puiſſances differentes de la ſeconde inconnue y, dont les

expoſans ſont en progreſſion arithmetique, qui va en augmentant quand ils ſont poſitifs, qui va en augmentant, pour ainſi dire, en négation, quand ils ſont négatifs, & qui va d'abord en diminuant quand ils ſont au commencement poſitifs, & qu'ils deviennent enſuite négatifs, & elle augmente aprés en négation.

On donnera une methode uniforme pour trouver chaque terme de la valeur de x, c'eſt à dire, la maniere de trouver le premier terme de cette valeur, ſera auſſi celle qu'on employera à trouver le ſecond terme, le troiſiéme, & tous les autres. Cela rendra la methode plus facile à concevoir & à pratiquer ; cependant on enſeignera dans les Remarques comment aprés avoir trouvé le premier terme de la valeur de x, on peut trouver le ſecond, le troiſiéme, & tous les autres ſuivans par la quatriéme & par la cinquiéme methode d'approximation du ſixiéme Livre, art. 159 & 166. Voici en quoi conſiſte cette ſeconde methode.

SECONDE METHODE.

248. Pour trouver le premier terme de la valeur de x ; 1°, il faut ſuppoſer une indéterminée a pour le coëficient de ce premier terme ; on ſuppoſera cette indéterminée ſeule, ou, ce qui eſt la même choſe, multipliée par y^0, s'il y a quelque grandeur toute connue ſans y dans l'équation propoſée, & qu'on veuille que les expoſans des puiſſances de y, qui doivent diſtinguer les termes de la ſuite qui eſt la valeur de x, ſoient poſitifs, & aillent en augmentant. S'il n'y a aucune grandeur toute connue ſans y dans la propoſée, on ſuppoſera l'indéterminée a multipliée par une puiſſance de y, qui ſoit telle, qu'en ſubſtituant le produit de a par cette puiſſance de y à la place de x dans la propoſée, l'on puiſſe trouver aprés la ſubſtitution au moins deux grandeurs differentes dans leſquelles la ſeconde inconnue y ſoit au même moindre degré, pour en faire une équation propre à déterminer la valeur de l'indéterminée a. Cette grandeur indéterminée a ſeule ou multipliée par une puiſſance de y, repreſentera le premier terme de la ſuite qu'on cherche, qui doit être la valeur de x.

2°. Il faut ſubſtituer cette grandeur indéterminée qui repreſente le premier terme de la valeur de x, à la place de x

dans l'équation proposée ; supposer toutes les grandeurs dans lesquelles y ne se trouve point, aprés la substitution, égales à zero ; & si y se trouve en toutes, supposer égales à zero celles où y est au même moindre degré ; & trouver la valeur de l'indéterminée a par l'équation que donne cette supposition, & ce sera le premier terme de la valeur de x que l'on cherche, si on a supposé l'indéterminée a seule sans y ; & si on a multiplié l'indéterminée a par y, multipliant cette valeur de a par la même puissance de y par laquelle on avoit multiplié l'indéterminée a, le produit sera le premier terme de la valeur de x.

3°. Il faut supposer le premier terme de la valeur de x qu'on vient de trouver plus une inconnue f, égale à x, & substituer cette valeur de x à sa place dans l'équation proposée, & l'équation qui en viendra sera la premiere transformée, qui servira à trouver le 2ᵉ terme de la valeur de x.

Pour trouver ce second terme de la valeur de x, 1°, il faut prendre une indéterminée b, & la multiplier par une puissance de y, qui soit telle, qu'en substituant le produit de b par cette puissance de y, à la place de f dans la premiere transformée, on ait au moins deux grandeurs differentes dans lesquelles y soit au même moindre degré. Ce produit de b par cette puissance de y, representera le second terme de la valeur de x que l'on cherche. 2°. Il faut substituer ce produit qui represente le second terme de la valeur de x, à la place de f dans la premiere transformée ; faire une équation des grandeurs dans lesquelles y est au même moindre degré, trouver par cette équation la valeur de l'indéterminée b, & multiplier cette valeur par la même puissance de y par laquelle b est multipliée ; & le produit sera le second terme de la valeur de x. 3°. Il faut supposer ce second terme plus une nouvelle inconnue g, égal à l'inconnue f de la premiere transformée, & substituer cette valeur de f à sa place dans la premiere transformée, & l'équation qui viendra de la substitution sera la seconde transformée ; on trouvera par son moyen le troisiéme terme de la valeur de x, de la même maniere qu'on a trouvé le premier & le second ; & ce troisiéme terme servira à faire une troisiéme transformée, qui fera de même découvrir le quatriéme terme de la valeur de x ; & ainsi de suite à l'infini.

Quand les exposans des puissances de y qui doivent distinguer les termes de la valeur de x, commencent par être positifs, & deviennent ensuite négatifs ; pour trouver le premier terme de la valeur de x, il faut multiplier la premiere indéterminée a par une puissance de y, qui soit telle, qu'en substituant le produit de a par cette puissance de y, à la place de x dans l'équation proposée, on puisse avoir au moins deux grandeurs differentes dans lesquelles y soit à la même puissance la plus élevée : & pour trouver le second terme, il faut multiplier la seconde indéterminée b par une puissance de y, qui soit telle, qu'en substituant le produit de b par cette puissance de y, à la place de l'inconnue f de la premiere transformée, dans la premiere transformée, on ait au moins deux grandeurs dans lesquelles y soit à la puissance la plus élevée ; & faire le reste comme on l'a marqué pour la recherche des deux premiers termes de la valeur de x, quand les exposans des y de cette valeur sont positifs.

Les exposans des puissances de y qui distinguent les termes de la valeur de x, devant être en progression arithmetique, il suffit d'avoir les exposans de y dans les deux premiers termes de cette valeur, pour avoir tous les autres : C'est pourquoi quand on a découvert ces deux premiers exposans, il faut supposer x égale à une suite indéterminée dont chaque terme contienne une indéterminée multipliée par la puissance de y qui convient à ce terme. Par exemple, pour trouver la valeur de x dans l'équation $\begin{array}{l} x^3 + nyx - y^3 = 0, \\ \quad\; + nnx - 2a^3 \end{array}$ aprés avoir trouvé que la puissance de y qui doit multiplier le premier terme de la valeur de x, doit être y^n, celle qui doit multiplier le second terme, doit être y^1 ; on supposera $x = ay^n + by^1 + cy^2 + dy^3 + ey^4 +$ &c. $a, b, c,$ &c. sont indéterminées. Si n est moindre que y, il faudra que les exposans des y commencent par être positifs à cause de y^3, & deviennent ensuite négatifs ; & aprés avoir trouvé que les exposans de y dans les deux premiers termes de la valeur de x, doivent être $ay^1 + by^0$, on supposera $x = ay^1 + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2} +$ &c. $a, b, c,$ &c. sont indéterminées.

De même pour avoir la valeur de x dans l'équation $x^4 - 5yx^3 + \frac{31a^4}{4} - 7anyyxx + ppy^4 + 6a^3y^1 = 0$, quand on aura trouvé que les exposans de y dans le premier & le second terme de la valeur de x, sont $y^{\frac{1}{2}}$, y^1, on supposera que $x = ay^{\frac{1}{2}} + by^1 + cy^{1+\frac{1}{2}} + dy^2 + ey^{2+\frac{1}{2}} +$ &c. a, b, c, &c. sont indéterminées. Il en est de même des autres exemples.

On aura par ce moyen la suite indéterminée qui represente la valeur de x; il ne faudra plus pour avoir la valeur déterminée de x, que trouver la valeur de chacune des indéterminées, ou de chaque terme indéterminé; on la trouvera cette valeur déterminée, 1°, en substituant ce terme indéterminé dans la proposée, à la place de x, si c'est le premier terme, ou dans la transformée qui convient à ce terme, si ce n'est pas le premier, à la place de l'inconnue de cette transformée; 2°, faisant une équation des grandeurs dans lesquelles y se trouve au même degré le moindre de tous, si les exposans des y sont tous positifs ou tous négatifs; & le plus élevé, si les exposans doivent commencer par être positifs, & devenir ensuite négatifs, & qu'on fasse la recherche des premiers : 3°, déterminant par cette équation la valeur de l'indéterminée du terme que l'on cherche, aprés quoi ce terme sera connu; & enfin, 4°, en supposant ce terme qu'on vient de connoître plus une nouvelle inconnue, égal à l'inconnue de la transformée qui a fait trouver ce terme, & substituant cette valeur à la place de l'inconnue dans cette transformée, on aura la transformée suivante, par le moyen de laquelle on trouvera le terme suivant de la valeur de x.

On ne fera la recherche des deux premiers termes que dans le premier exemple, pour apprendre la maniere de trouver les exposans de y dans les deux premiers termes; & pour abreger dans les autres exemples, on supposera la suite indéterminée de la valeur de x, & on déterminera les valeurs des indéterminées de cette suite de la maniere qu'on vient d'expliquer.

Application de la seconde methode aux exemples.

EXEMPLE I.

249. SOIT proposé de trouver, par cette seconde methode, la valeur de x dans l'équation $\begin{matrix} x^3 + nyx - y^3 \\ + nnx - 2n^3 \end{matrix} = 0$.

1°. Pour avoir le premier terme de cette valeur, il faut le supposer representé par l'indéterminée a multipliée par y^0,

c'est à dire, multipliée par l'unité, ou seule sans y, à cause de la grandeur toute connue $2n^3$.

2°. Il faut substituer a dans la proposée à la place de x, & l'on aura l'équation changée $\begin{matrix} a^3 + nya - y^3 \\ + nna - 2n^3 \end{matrix} = 0$. Il faut faire une équation de toutes les grandeurs dans lesquelles la seconde inconnue y ne se trouve point; & trouver par cette équation, qui est $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, la valeur de a, qui est $+n$. C'est le premier terme de la valeur de x qu'on cherche: & l'on a déja $x = +ny^0$, ou $x = 1n$.

3°. Il faut supposer $n + f = x$, & substituer cette valeur de x à sa place dans la proposée, & l'on aura la premiere transformée $\begin{matrix} -y^3 + nyf + 3nff + f^3 \\ + nny + 4nnf \end{matrix} = 0$, qui servira à trouver le second terme de la valeur de x.

Pour trouver ce second terme de la valeur de x, 1°, on le supposera representé par l'indéterminée b multipliée par y^1, parceque substituant by^1 à la place de f dans la premiere transformée, on aura les deux grandeurs $+ nny + 4nnby$ dans lesquelles y est au même moindre degré. 2°. On substituera by à la place de f dans la premiere transformée, & faisant une équation des deux grandeurs $+ nny + 4nnby = 0$, dans lesquelles y est au même moindre degré aprés la substitution, on trouvera par cette équation $b = -\frac{1}{4}$, mettant cette valeur de b dans le second terme indéterminé by^1 de la valeur de x, on aura pour le second terme de cette valeur $-\frac{1}{4}y^1$; l'on a donc déja $x = +n - \frac{1}{4}y^1$. 3°. On supposera $-\frac{1}{4}y + g = f$; & substituant cette valeur de f à sa place dans la premiere transformée, on aura la seconde transformée suivante, $\begin{matrix} -\frac{61}{64}y^3 + \frac{3}{16}y^2g - \frac{3}{4}ygg + g^3 \\ -\frac{1}{16}ny^2 - \frac{1}{2}nyg + 3ngg \\ + 4nng \end{matrix} = 0$, qui servira à trouver le troisiéme terme de la valeur de x.

A present qu'on a trouvé les exposans 0 & 1 de y dans les deux premiers termes de la suite qui doit être la valeur de x, on a tous les autres; & pour abreger, on supposera que la valeur indéterminée de x est $x = ay^0 + by^1 + cy^2 + dy^3 +$ &c. les valeurs de a & de b sont déja trouvées; il faut trouver les valeurs des indéterminées suivantes, qui sont c, d, e, &c.

Pour déterminer le troiſiéme terme cy^2 de la valeur indéterminée de x, il faut ſubſtituer cy^2 à la place de g dans la ſeconde transformée (il ſuffit de concevoir cy^2 ſubſtitué à la place de g, ſans qu'il ſoit neceſſaire de le ſubſtituer actuellement, ce qu'il faut remarquer pour la ſuite) & faire une équation des grandeurs $-\frac{1}{16}ny^2 + 4nncy^2 = 0$, dans leſquelles y eſt au même moindre degré, & l'on trouvera par cette équation $c = +\frac{1}{64n}$; ainſi le troiſiéme terme de la ſuite qui eſt la valeur de x, eſt $+\frac{1}{64n}y^2$, & l'on a déja $x = n - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64n}y^2$.

Il faut ſuppoſer $+\frac{1}{64n}y^2 + h = g$, & ſubſtituer cette valeur de g à ſa place dans la ſeconde transformée, & l'équation qui en viendra ſera la troiſiéme transformée, qui ſervira à déterminer le quatriéme terme $+dy^3$ de la valeur indéterminée de x.

Il eſt évident qu'on peut continuer à l'infini l'approximation de la valeur de x par cette ſeconde methode, les operations qu'on vient de faire ſuffiſent pour la faire concevoir clairement.

Seconde maniere de reſoudre le même exemple.

250. Si la grandeur n étoit moindre que y, il faudroit trouver une valeur de x qui fût telle, que les y ſe trouvaſſent dans les dénominateurs des termes de cette valeur, afin que ces termes fuſſent des fractions, & allaſſent en diminuant de valeur; ou, ce qui eſt la même choſe, il faudroit que les expoſans des y qui diſtinguent les termes de la valeur de x, fuſſent négatifs. Voici la maniere de trouver cette valeur par cette ſeconde methode.

Pour trouver le premier terme, il le faut ſuppoſer repreſenté par l'indéterminée a multipliée par y^1, c'eſt à dire, par ay^1; parcequ'en ſubſtituant ay à la place de x dans la propoſée

$$\begin{array}{l} x^3 + nyx - y^3 = 0, \\ \quad + nnx - 2n^3 \end{array}$$

on aura dans l'équation changée

$$\begin{array}{l} a^3y^3 + nay^2 - y^3 = 0, \\ \quad + nnay - 2n^3 \end{array}$$

les deux grandeurs $a^3y^3 - 1y^3$, dans leſquelles y eſt au même degré le plus élevé. Il faut en faire l'équation $a^3y^3 = 1y^3$, d'où l'on déduira $a = 1$, ainſi le premier terme de la valeur de x eſt $1y$.

Il

Il faut ſuppoſer $y + f = x$, & ſubſtituer cette valeur de x à ſa place dans la propoſée, & l'on trouvera la premiere transformée ſuivante

$$\begin{array}{llll} +ny^2 & +3y^2f & +3yff & +f^3 = 0, \\ +n^2y & +nyf & & \\ -2n^3 & +n^2f & & \end{array}$$

qui ſervira à trouver le ſecond terme de la valeur de x.

Pour trouver ce ſecond terme, il le faut ſuppoſer repreſenté par l'indéterminée b multipliée par y^0, c'eſt à dire ſans y; parcequ'en concevant b ſubſtituée à la place de f dans la premiere transformée, on aura les deux grandeurs $+ny^2 + 3by^2$, dans leſquelles y eſt au même degré le plus elevé, dont faiſant l'équation $3by^2 = -ny^2$, on trouvera $b = -\frac{1}{3}n$. L'on a donc déja $x = 1y - \frac{1}{3}n$.

Il faut ſuppoſer $-\frac{1}{3}n + g = f$, & ſubſtituer cette valeur de f à ſa place dans la 1^re transformée, & l'on trouvera la 2^e transformée

$$\begin{array}{llll} +n^2y & +3y^2g & +3ygg & +g^3 = 0, \\ -\frac{64}{27}n^3 & -nyg & -ngg & \\ & +\frac{4}{3}n^2g & & \end{array}$$

qui ſervira à trouver le troiſiéme terme de la valeur de x.

Les expoſans de y dans le premier & le ſecond terme de la valeur de x étant connus, on peut ſuppoſer pour la valeur de x la ſuite indéterminée $x = ay + by^0 + cy^{-1} + dy^{-2} + ey^{-3} +$ &c. dont les deux premiers termes ſont connus. Pour déterminer le troiſiéme terme repreſenté par cy^{-1}, il faut concevoir cy^{-1} ſubſtitué à la place de g dans la ſeconde transformée, & ſuppoſer égales à zero les deux grandeurs $+n^2y + 3cy = 0$, dans leſquelles y eſt au même degré le plus élevé, d'où l'on déduira $c = -\frac{1}{3}n^2$; ainſi le troiſiéme terme de la valeur de x eſt $-\frac{1}{3}n^2y^{-1}$.

Il faut ſuppoſer $-\frac{1}{3}n^2y^{-1} + h = g$, & ſubſtituer cette valeur de g à ſa place dans la ſeconde transformée, & l'on trouvera la troiſiéme transformée qui ſuit,

$$\begin{array}{llll} -\frac{1}{27}n^6y^{-3} & +\frac{1}{3}n^4y^{-2}h & -n^2y^{-1}h^2 & +h^3 = 0, \\ -\frac{1}{9}n^5y^{-2} & +\frac{2}{3}n^3y^{-1}h & -nh^2 & \\ -\frac{1}{9}n^4y^{-1} & -\frac{2}{3}n^2h & +3yh^2 & \\ -\frac{55}{27}n^3 & -nyh & & \\ & +3y^2h & & \end{array}$$

qui ſervira à trouver le quatriéme terme de la valeur de x.

Pour trouver ce quatriéme terme de la valeur de x, il faut concevoir dy^{-2} substituée dans la troisiéme transformée à la place de b, & supposer égales à zero les grandeurs $-\frac{55}{27}n^3 + 3d = 0$, dans lesquelles y ne se trouve point, ou bien dans lesquelles l'exposant de y est zero, & l'on aura $d = \frac{55}{81}n^3$. Ainsi le quatriéme terme de la valeur de x est $+\frac{55}{81}n^3y^{-2}$; & l'on a déja $x = 1y - \frac{1}{3}ny^0 - \frac{1}{9}n^2y^{-1} + \frac{55}{81}n^3y^{-2}$.

On peut continuer l'approximation à l'infini, en supposant $+\frac{55}{81}n^3y^{-2} + i = h$; & substituant cette valeur de b à sa place dans la troisiéme transformée, il en viendra une quatriéme transformée, dans laquelle concevant ey^{-3} substituée à la place de i, & faisant une equation des grandeurs dans lesquelles y aura pour exposant -1, c'est à dire, dans lesquelles il y aura y^{-1}, on déterminera par cette équation le cinquiéme terme de la valeur de x, & ainsi à l'infini. Les operations que l'on a faites suffisent pour faire clairement concevoir la seconde methode.

REMARQUES.

I.

251. On peut abreger de beaucoup le calcul de cette methode, 1°, en n'écrivant point les équations changées, mais en concevant seulement que le terme de la suite indéterminée qui represente la partie de la valeur de x que l'on cherche, est substitué à la place de l'inconnue; car on remarquera aisément quelles sont les grandeurs dans lesquelles, aprés cette substitution conçue, l'inconnue y ne se trouvera point, ou bien celles où y se trouvera au moindre degré; & les supposant égales à zero, on aura l'équation propre à trouver la partie de la racine que l'on cherche.

2°. On peut même remarquer qu'il n'est pas necessaire d'écrire le terme indéterminé dans les grandeurs qui étant supposées égales à zero, servent à faire trouver la partie de la racine que ce terme indéterminé represente.

Par exemple, au lieu d'écrire $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, dans la premiere resolution, on auroit pu former l'équation particuliere qui sert à trouver la premiere partie de la valeur representée par a, en supposant les termes $x^3 + nnx - 2n^3 = 0$, sans mettre a au lieu de x; car l'on auroit également

trouvé par cette équation, que la premiere partie de la valeur de x que l'on cherche, representée par a, est n, puisque $x - n = 0$ est un diviseur exact de $x^3 + nnx - 2n^3 = 0$, ainsi $x = n$, c'est à dire, n est la premiere partie de la valeur de x.

3°. Dans chaque transformée il suffit de diviser la grandeur du dernier terme, dans laquelle y est au moindre degré, par la grandeur du penultiéme terme où y est aussi au moindre degré; car le quotient, aprés en avoir changé le signe, sera la partie de la valeur de x que l'on cherche.

Ainsi dans la premiere transformée de la premiere resolution, en divisant $+nny$ par $+4nn$, on a pour quotient $+\frac{1}{4}y$; & changeant le signe $+$, on aura $-\frac{1}{4}y$ pour la seconde partie de la valeur de x que l'on cherche.

De même dans la seconde transformée de la premiere resolution, en divisant $-\frac{1}{16}nyy$ par $+4nn$, on aura $-\frac{1}{64n}yy$; & changeant le signe, on aura $+\frac{1}{64n}yy$ pour la troisiéme partie de la valeur de x que l'on cherche; & ainsi des autres transformées. La raison de cet abregé est évidente par l'operation même.

Quand on se sera rendu cette methode bien familiere, on verra qu'on peut negliger dans le calcul beaucoup de grandeurs dans les transformées, ce qu'un peu d'usage apprendra mieux qu'un long discours.

II.

252. Ce qu'on a dit dans le troisiéme article de la Remarque précedente, fait voir que la maniere de trouver la seconde partie, la troisiéme, & toutes les autres parties de la valeur de x par cette seconde methode, revient à la quatriéme methode d'approximation du sixiéme Livre, art. 159, c'est à dire, qu'aprés avoir trouvé la premiere partie de la valeur de x, qu'on nommera a, par le premier article de la seconde methode, pour trouver la seconde partie, qu'on nommera b, il faut faire la premiere transformée, en substituant $a + f = x$ à la place de x dans la proposée, diviser le premier terme par le coëficient du second terme de cette transformée, & le quotient, aprés en avoir changé le signe, sera la seconde partie b de la valeur de x. (On nomme ici le premier terme de chaque transformée celui où n'est point l'in-

connue f de la transformée; le second, celui où l'inconnue f est lineaire; & ainsi des autres.) Pour avoir la troisiéme partie de la valeur de x, qu'on nommera c, il faut faire la seconde transformée, en substituant $b+g=f$ à la place de f dans la premiere transformée, diviser le premier terme par le coéficient du second terme de cette seconde transformée, & le quotient, aprés en avoir changé le signe, sera la troisiéme partie c de la valeur de x. On peut continuer cette approximation à l'infini, comme on l'a expliqué dans la quatriéme methode 159. On peut même rendre chaque partie de la valeur de x plus approchante, comme on l'a enseigné dans cette quatriéme methode d'approximation.

III.

253. Aprés avoir trouvé la premiere partie de la valeur de x par le premier article de la seconde methode, on peut aussi trouver la seconde partie, la troisiéme, & toutes les parties suivantes de la valeur de x, par la cinquiéme methode d'approximation 166. Par exemple, ayant trouvé que la premiere partie de la valeur de x dans l'équation $\begin{matrix} x^3 + nyx - y^3 \\ + nnx - 2n^3 \end{matrix}$ $=0$, est $+n$, pour trouver les autres parties, il faut partager l'inconnue x en deux parties ε & z, & supposant $\varepsilon + z = x$, il faut substituer cette valeur de x à sa place dans la proposée, & l'on aura l'équation

$$\begin{matrix} \varepsilon^3 + 3\varepsilon\varepsilon z + 3\varepsilon zz + z^3 = 0. \\ + ny\varepsilon + nyz \qquad\qquad\qquad \\ + nn\varepsilon + nnz \qquad\qquad\qquad \\ - y^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\ - 2n^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \end{matrix}$$

Ce sera la transformée indéterminée qui fera trouver, la premiere partie étant supposée connue, toutes les autres parties de la valeur de x les unes aprés les autres: ε representera toutes les parties déja découvertes, & z ce qui reste à en découvrir; & à mesure qu'on découvrira ces parties, pour trouver la suivante, il n'y aura qu'à substituer la somme de toutes les parties déja découvertes à la place de ε, & aprés la substitution, diviser le premier terme par le coéficient du second terme; le quotient, aprés en avoir changé le signe, sera la partie suivante que l'on cherche.

Ainsi pour trouver la seconde partie de la valeur de x,

il faut substituer la premiere partie n connue par le premier article de la seconde methode, à la place de ε, & l'on aura $\begin{matrix} + nny + 4nnz + 3nzz + z^3 = 0; \\ - y^3 \;\; + nyz \qquad\qquad\qquad\quad \end{matrix}$ il faut diviser le premier terme $+nny - y^3$ par le coéficient $+4nn + ny$ du second terme (il suffit de diviser $+nny$ par $+4nn$) & le quotient $+\frac{1}{4}y$, aprés en avoir changé le signe, sera la seconde partie $-\frac{1}{4}y$ de la valeur de x que l'on cherche. Pour trouver la troisiéme partie de cette valeur de x, il faut substituer la somme des parties $+n-\frac{1}{4}y$ déja découvertes, à la place de ε dans la transformée indéterminée; & aprés la substitution, on trouvera cette troisiéme partie comme l'on a trouvé la seconde partie; & ainsi à l'infini.

IV.

254. S'il arrivoit dans la pratique de cette seconde methode, que le premier terme de quelque transformée, c'est à dire, le terme dans lequel l'inconnue de cette transformée ne se trouve point, fût égal à zero, toutes les grandeurs dont ce premier terme est composé se détruisant par des signes contraires, il est évident* que toutes les parties de la valeur *165. de x déja découvertes, en seroient la valeur exacte.

AVERTISSEMENT.

APRE'S avoir enseigné dans l'énoncé de la seconde methode, la maniere de trouver les exposans de y dans les termes de la suite qui doit être la valeur de x, pour abreger, dans les exemples suivans, on supposera d'abord la suite indéterminée qui represente la valeur de x.

EXEMPLE II.

255. TROUVER la valeur de x dans l'équation $xx + yy - rr = 0$; c'est l'équation du second exemple de la premiere methode, art. 184, où l'on a changé zz en xx, & xx en yy.

1°. Il faut supposer $x = a + byy + cy^4 + dy^6 + ey^8$ &c. les grandeurs a, b, c, d, &c. sont indéterminées, & elles representent avec les puissances de y, les parties de la valeur de x que l'on cherche, & elles serviront à les faire trouver: a est sans y dans le premier terme, parcequ'il y a rr dans la proposée, qui est une grandeur toute connue sans y.

2°. Pour trouver la premiere partie de x representée par a, il faut concevoir a substituée au lieu de x dans la proposée, & supposer $aa - rr$, qui sont les grandeurs où y n'est point, égales à zero; & l'équation $aa - rr = 0$, donnera $a = r$, ainsi r est la premiere partie de la valeur de x qu'on cherche.

On supposera $r + f = x$, f est une inconnue; & substituant $r + f$ dans la proposée, on aura la premiere transformée

$$r + f = x \left| \begin{array}{r|l} xx & = rr + 2rf + ff \\ +yy & = +yy \\ -rr & = -rr \\ \hline \text{1}^{\text{re}} \text{ transformée.} & +yy + 2rf + ff = 0. \end{array} \right.$$

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x par cette premiere transformée, laquelle partie est representée par byy, il faut concevoir $+byy$ à la place de f dans cette transformée, & faire l'équation $+yy + 2rbyy = 0$ des grandeurs $+yy + 2rbyy$, dans lesquelles y est au même moindre degré, d'où l'on aura $+2rbyy = -1yy$; & divisant chaque membre par $2ryy$, l'on aura $b = -\frac{1}{2r}$, & la seconde partie byy sera $-\frac{1}{2r}yy$. Il faut supposer $-\frac{1}{2r}yy + g = f$, & substituant $-\frac{1}{2r}yy + g$ à la place de f dans la transformée, on aura la seconde tranformée,

$$-\tfrac{1}{2r}yy + g = f \left| \begin{array}{r|l} ff & = \frac{y^4}{4rr} - \frac{yy}{r}g + gg \\ +2rf & = -yy + 2rg \\ +yy & = +yy \\ \hline \text{2}^{\text{e}} \text{ transformée.} & \frac{y^4}{4rr} - \frac{yy}{r}g + gg = 0. \\ & \qquad\quad + 2rg \end{array} \right.$$

4°. Pour trouver la troisiéme partie representée par cy^4, on concevra cy^4 à la place de g dans cette seconde transformée; & faisant une équation $+\frac{y^4}{4rr} + 2rcy^4 = 0$, ou bien $+2rcy^4 = -\frac{1}{4rr}y^4$, des grandeurs dans lesquelles y est au même moindre degré, on divisera chaque membre par $2ry^4$, & l'on aura $c = -\frac{1}{8r^3}$; par consequent la troisiéme partie que l'on cherche est $cy^4 = -\frac{1}{8r^3}y^4$.

Il faut supposer $-\frac{1}{8r^3}y^4 + h = g$, h est une inconnue; & substituant $-\frac{1}{8r^3}y^4 + h$ à la place de g dans la seconde transformée, on aura la troisiéme transformée,

$$-\tfrac{1}{8r^3}y^4 + h = g \left| \begin{array}{r|l} gg & = +\frac{1}{64r^6}y^8 - \frac{1}{4r^3}y^4h + hh \\ -\frac{1}{r}yyg & = +\frac{1}{8r^4}y^6 \quad - \frac{1}{r}yyh \\ +2rg & = -\frac{1}{4rr}y^4 \quad + 2rh \\ +\frac{1}{4rr}y^4 & = +\frac{1}{4rr}y^4 \\ \hline \text{3}^{\text{e}} \text{ transformée.} & +\frac{1}{64r^6}y^8 - \frac{1}{4r^3}y^4h + hh = 0. \\ & +\frac{1}{8r^4}y^6 - \frac{1}{r}yyh \\ & \qquad\qquad + 2rh \end{array} \right.$$

5°. Pour trouver la quatriéme partie de la valeur de x, representée par dy^6, il faut concevoir dy^6 à la place de h dans cette troisiéme transformée, & faire l'équation $+\frac{1}{8r^4}y^6 + 2rdy^6 = 0$, des grandeurs où y est au moindre degré; & divisant chaque membre de $+2rdy^6 = -\frac{1}{8r^4}y^6$ par $2ry^6$, l'on aura $d = -\frac{1}{16r^5}$, & $dy^6 = -\frac{1}{16r^5}y^6$ est la quatriéme partie de la valeur de x que l'on cherche.

Prenant la somme des parties de la valeur de x que l'on a trouvées, on aura $x = r - \frac{1}{2r}yy - \frac{1}{8r^3}y^4 - \frac{1}{16r^5}y^6$ &c. On en peut continuer l'approximation tant qu'on voudra.

EXEMPLE III.

256. TROUVER la valeur de x dans l'équation $0 = xx - a - by - cyy - dy^3 - ey^4$ &c. c'est le troisiéme exemple de la premiere methode, art. 185.

1°. Il faut supposer $x = p + qy + ryy + sy^3 + ty^4$ &c. les grandeurs p, q, r, s, t, &c. sont indéterminées; elles representent, avec les puissances de y, les parties de la valeur de x que l'on cherche, & elles serviront à les faire trouver.

2°. Pour trouver la premiere partie de x representée par p, il faut concevoir p substituée à la place de x dans la proposée, & faire une équation des grandeurs $pp - a$, dans lesquelles y ne se trouve point, & l'on aura $pp = a$; par consequent $p = a^{\frac{1}{2}}$.

On supposera $a^{\frac{1}{2}} + f = x$, & en substituant $a^{\frac{1}{2}} + f$ à la place de x dans la proposée, on aura la premiere transformée

$$a^{\frac{1}{2}} + f = x \quad \begin{array}{r|l} xx & = a + 2a^{\frac{1}{2}}f + ff \\ -a & = -a \\ -by & = -by \\ -cyy & = -cyy \\ \&c. & = \&c. \end{array}$$

$$\text{Premiere transformée.} \quad \begin{array}{l} -by + 2a^{\frac{1}{2}}f + ff \\ -cyy \\ \&c. \end{array}$$

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x, representée par qy, il faut concevoir qy substituée à la place de f, & faire une équation $2a^{\frac{1}{2}}qy = by$ des deux grandeurs dans lesquelles y est au même moindre degré ; & divisant chaque membre par $2a^{\frac{1}{2}}y$, on aura $q = \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$; par consequent $qy = \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y$ est la seconde partie de la valeur de x

Il faut supposer $\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y + g = f$; & substituant $\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y + g$ à la place de f dans la premiere transformée, on aura la seconde transformée,

$$\frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}y + g = f \quad \begin{array}{r|l} ff = & = +\frac{bb}{4a}yy + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}yg + gg \\ +2a^{\frac{1}{2}}f & = +by \qquad + 2a^{\frac{1}{2}}g \\ -by = & = -by \\ -cyy = & = -cyy \\ -dy^3 & = -dy^3 \\ \&c. & = \&c. \end{array}$$

$$\text{Seconde transformée.} \quad \begin{array}{l} +\frac{bb}{4a}yy + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}yg + gg \\ -cyy \quad + 2a^{\frac{1}{2}}g \\ -dy^3 \\ \&c. \end{array}$$

4°. Pour

4°. Pour trouver la troisiéme partie de la valeur de x, representée par ryy, il faut concevoir ryy substituée à la place de g dans la seconde transformée, & supposer les grandeurs $+\frac{bb}{4a}yy - cyy + 2a^{\frac{1}{2}}ryy$, dans lesquelles y est au même moindre degré, égales à zero, ce qui donnera l'équation $2a^{\frac{1}{2}}ryy = -\frac{bb}{4a}yy + cyy$; & divisant chaque membre par $2a^{\frac{1}{2}}yy$, on aura $r = -\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}$; par consequent $ryy = -\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy$ est la troisiéme partie de la valeur de x.

Pour continuer l'approximation, on supposera $-\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy + h = g$; & en substituant $-\frac{bb}{8a^{\frac{3}{2}}}yy + \frac{c}{2a^{\frac{1}{2}}}yy + h$ à la place de g dans la seconde transformée, on aura la troisiéme transformée, &c.

EXEMPLE IV.

257. TROUVER la valeur de x dans l'équation $0 = x^n - ay - byy - cy^3 - dy^4 - ey^5$ &c. c'est le septiéme exemple de la premiere methode, art. 222. On va y appliquer la seconde methode, pour faire voir qu'elle peut s'appliquer à toutes les équations qu'on peut resoudre par la premiere methode, cet exemple contenant une difficulté particuliere.

1°. Il faut supposer $x = py + qyy + ry^3 + sy^4 + ty^5$ &c. p, q, r, s, &c. sont des grandeurs indeterminées, qui representent avec les puissances de y dont elles sont les coéficients, les parties de la valeur de x, & servent à les trouver.

2°. Pour trouver la premiere partie de la valeur de x, representée par py, il faut concevoir py substituée à la place de x dans la proposée, & l'on aura $p^n y^n - ay - byy$ &c. $= 0$.

Afin que l'inconnue y soit au même degré lineaire dans $p^n y^n$ & dans $-ay$, il faut mettre au lieu de $p^n y^n$, la grandeur $y^{n-1} p^n y$ qui lui est égale, & supposer les deux grandeurs

Ooo

$y^{n-1}p^n y - ay$, dans lesquelles y est au même moindre degré, égales à zero; ce qui donnera l'équation $y^{n-1}p^n y = ay$, d'où l'on déduira $p = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}-1}$, & par consequent $py = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$ est la premiere partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Il faut supposer $a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + f = x$, & substituer $a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + f$ à la place de x dans la proposée, & l'on aura la premiere transformée,

$$\begin{array}{rcl} x^n & = & z\,ay + \frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} f + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{n-2}{n}} ff + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{n-3}{n}} f^3 \text{ \&c.} \\ -ay & = & -z\,ay \\ -byy & = & -byy \\ -cy^3 & = & -cy^3 \\ \text{\&c.} & = & \text{\&c.} \end{array}$$

z signifie que la grandeur que cette marque précéde, est effacée.

Plus on prendra de termes de la puissance $\overline{a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} + f}^{\,n} = x^n$, & plus on trouvera de parties de la valeur de x que l'on cherche. Les quatre termes qu'on en a pris dans cette transformée, suffisent pour faire concevoir l'application de la seconde methode à cet exemple.

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x, representée par qyy, il faut concevoir qyy substituée à la place de f dans la premiere transformée, & supposer les grandeurs $+\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} qyy - byy$, dans lesquelles y est au même moindre degré, égales à zero; ce qui donnera l'équation $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} qyy = byy$; & divisant chaque membre par $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} \times yy$, l'on aura $q = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} b$; par consequent $qyy = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} byy = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by^{\frac{1+n}{n}}$ est la seconde partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la seconde transformée, il faut remarquer que la seconde partie de la valeur de x qu'on vient de trouver, peut s'exprimer de ces trois manieres $\frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1-n}{n}} byy = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} by^{\frac{1+n}{n}} = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} by$. Cette derniere est la plus commode pour trouver la seconde transformée. Ainsi on supposera $\frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} by + g = f$, & on substituera cette valeur de f

à la place de f dans la premiere transformée, & l'on trouvera la seconde transformée,

$$\begin{array}{rcl} +\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{n-3}{n}} f^3 & = & +\frac{1}{nn} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{-2} b^3 y^4 + \frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{-\frac{1}{n}-1} y^{-\frac{1}{n}} bby^3 g + \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{-\frac{2}{n}} y^{-\frac{2}{n}} b \ldots + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{\frac{n-3}{n}} y \ldots \\ +\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{n-2}{n}} ff & = & +\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{-1} bby^3 \quad + \frac{n-1}{1} a^{-\frac{1}{n}} y^{-\frac{1}{n}} byyg + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{n-2}{n}} \ldots \\ +\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} f & = & +z\,byy \quad + \frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} g \\ -byy & = & -z\,byy \\ -cy^3 & = & -cy^3 \\ -dy^4 & = & -dy^4 \\ \text{\&c.} & = & \text{\&c.} \end{array}$$

z signifie que la grandeur que cette marque précéde est effacée.

4°. Pour trouver la troisiéme partie de la valeur de x, representée par ry^3, il faut concevoir ry^3 substituée à la place de g dans la seconde transformée, & supposer égales à zero les grandeurs $+\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{-1} bby^3 + \frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} ry^3 - cy^3$, dans lesquelles y est au même moindre degré; ce qui donnera l'équation $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} ry^3 = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{-1} bby^3 + cy^3$; & divisant chaque membre par $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} \times y^3$, on trouvera $r = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bby^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} cy^{\frac{1-n}{n}}$; par consequent $ry^3 = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} bby^{\frac{1+2n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} cy^{\frac{1+2n}{n}} = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} y^{\frac{1}{n}} byy + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} cyy$, est la troisiéme partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la troisiéme transformée, il faut supposer $-\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} y^{\frac{1}{n}} byy + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} y^{\frac{1}{n}} cyy + h = g$, & substituer cette valeur de g à la place de g dans la seconde transformée, & l'on trouvera la troisiéme transformée.

Mais comme il n'y a plus d'autre difficulté dans le reste de l'operation, que celle qui vient de la peine du calcul, il est inutile de la continuer ici, les operations précedentes suffisant pour faire concevoir l'application de la seconde methode à cet exemple.

Remarques où l'on donne la démonstration de la 2e methode.

258. On peut appliquer cette seconde methode à tous les exemples de la premiere; & aprés s'estre rendu l'une & l'autre

bien familieres, on verra clairement qu'elles reviennent l'une à l'autre ; ainſi la premiere etant démontrée, la ſeconde eſt auſſi démontrée.

* 252. 253. On a auſſi vû dans la ſeconde & troiſiéme remarque,* que cette ſeconde methode, la quatriéme methode d'approximation art. 139, & la cinquiéme methode d'approximation art. 166, reviennent à une même methode ; ainſi la démonſtration de ces deux dernieres démontre auſſi la ſeconde methode.

Enfin les parties ou les termes de la valeur de x que l'on trouve par cette ſeconde methode, deviennent des fractions qui vont toujours en diminuant à meſure qu'on continue l'approximation de la valeur de x ; d'où l'on voit qu'aprés des approximations infinies, le dernier terme ou le terme infinitiéme, pour ainſi parler, doit être zero ; comme dans une progreſſion geometrique qui va en diminuant, on regarde le dernier terme comme devenant zero : L'on conçoit donc qu'aprés des approximations infinies l'on arriveroit à la racine veritable que l'on cherche ; par conſequent plus on continuera l'approximation, & plus on approchera de cette veritable valeur de x.

La même methode peut s'appliquer aux équations qui ont plus de deux inconnues.

AVERTISSEMENT.

COMME l'on pourroit trouver de la difficulté à reſoudre par cette ſeconde methode les équations qui contiennent des differences, on va faire l'application de cette ſeconde methode à ces équations, & l'on verra qu'elle peut leur être appliquée avec la même facilité que la premiere methode.

EXEMPLE V.

259. TROUVER la valeur approchée de x dans l'équation differentielle $1 - \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{yydx^2}{dy^2} = 0$; c'eſt l'onziéme exemple de la premiere methode art. 229.

1°. Il faut ſuppoſer $x = ay + by^3 + cy^5 + ey^7$ &c. les grandeurs $a, b, c, e,$ &c. ſont indéterminées, & elles repreſentent avec les puiſſances de y, les parties de la valeur de x que l'on cherche, & elles ſerviront à les trouver.

2°. Pour trouver la premiere partie de la valeur de x, repreſentée par ay, il faut concevoir ay ſubſtituée à la place de x dans la propoſée de cette maniere ; il faut ſuppoſer $x = ay$; en prenant les differences de chaque membre on aura $dx = ady$, & $\frac{dx}{dy} = a$, & $\frac{dx^2}{dy^2} = aa$.

Il faut concevoir aa ſubſtituée à la place de $\frac{dx^2}{dy^2}$, les deux grandeurs où y ne ſe trouve point ſont $1 - aa$, il faut les ſuppoſer égales à zero, & l'on aura l'équation $aa = 1$; par conſequent $a = 1$; ainſi $ay = 1y$ eſt la premiere partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la premiere transformée, il faut ſuppoſer $1y + f = x$, f eſt une inconnue ou variable ; en prenant les differences de chaque membre, on aura $1dy + df = dx$; & diviſant par dy, on aura $1 + \frac{df}{dy} = \frac{dx}{dy}$; & quarrant chaque membre, on aura $1 + \frac{2df}{dy} + \frac{df^2}{dy^2} = \frac{dx^2}{dy^2}$. Il faut ſubſtituer dans la propoſée $1 - \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{yydx^2}{dy^2} = 0$, les valeurs de $\frac{dx^2}{dy^2}$ à la place de $\frac{dx^2}{dy^2}$, & on aura la premiere transformée,

$$
\begin{aligned}
+\frac{yydx^2}{dy^2} &= 1yy + \frac{2yydf}{dy} + \frac{yydf^2}{dy^2} \\
-\frac{dx^2}{dy^2} &= -1 - \frac{2df}{dy} - \frac{df^2}{dy^2} \\
+1 &= +1
\end{aligned}
$$

3°. Pour trouver la ſeconde partie de la valeur de x, repreſentée par by^3, il faut concevoir by^3 ſubſtituée à la place de f dans la premiere transformée.

Pour faire cette ſubſtitution, on ſuppoſera $by^3 = f$; prenant les differences de chaque membre, on aura $3byydy = df$, & $3byy = \frac{df}{dy}$; & quarrant chaque membre, on aura $9bby^4 = \frac{df^2}{dy^2}$.

Concevant à preſent $3byy$ ſubſtituée à la place de $\frac{df}{dy}$ dans la premiere transformée, & $9bby^4$ à la place de $\frac{df^2}{dy^2}$, les grandeurs dans leſquelles y eſt au même moindre degré, ſont $+1yy - 2 \times 3byy$; il faut les ſuppoſer égales à zero, & l'on aura l'équation $6byy = 1yy$; diviſant chaque membre par $6yy$, on aura $b = \frac{1}{6}$; par conſequent $by^3 = \frac{1}{6}y^3$ eſt la ſeconde partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la ſeconde transformée, il faut ſuppoſer $\frac{1}{6}y^3 + g = f$, g eſt une inconnue ; en prenant les differences de chaque membre on aura $\frac{1}{2}yydy + dg = df$, & diviſant par dy, $\frac{1}{2}yy + \frac{dg}{dy} = \frac{df}{dy}$; quarrant chaque membre, on aura $\frac{1}{4}y^4 + \frac{yydg}{dy} + \frac{dg^2}{dy^2} = \frac{df^2}{dy^2}$. Il faut à present substituer les valeurs de $\frac{df}{dy}$ & de $\frac{df^2}{dy^2}$ dans la premiere transformée, & l'on aura la seconde transformée,

$$+\frac{yydf^2}{dy^2} = +\frac{1}{4}y^6 + \frac{y^4dg}{dy} + \frac{yydg^2}{dy^2}$$
$$-\frac{df^2}{dy^2} = -\frac{1}{4}y^4 - \frac{yydg}{dy} - \frac{dg^2}{dy^2}$$
$$+\frac{2yydf}{dy} = + y^4 + \frac{2yydg}{dy}$$
$$-\frac{2df}{dy} = -1yy - \frac{2dg}{dy}$$
$$+yy = +1yy$$

1 signifie que la grandeur que cette marque précede est effacée.

4°. Pour avoir la troisiéme partie de la racine representée par cy^5, il faut concevoir cy^5 substituée à la place de g dans la seconde transformée : mais pour faire cette substitution, il faut supposer $cy^5 = g$; par consequent $5cy^4dy = dg$, & $5cy^4 = \frac{dg}{dy}$, & $25ccy^8 = \frac{dg^2}{dy^2}$.

Il faut à present concevoir $5cy^4$ substituée à la place de $\frac{dg}{dy}$ dans la seconde transformée, & si l'on veut $25ccy^8$ à la place de $\frac{dg^2}{dy^2}$, & $+ y^4 - \frac{3}{4}y^4 - 10cy^4$, ou bien $\frac{1}{4}y^4 - 10cy^4$, seront les grandeurs dans lesquelles y est au même moindre degré; il faut les supposer égales à zero, ce qui donnera l'équation $10cy^4 = \frac{1}{4}y^4$; divisant chaque membre par $10y^4$, on aura $c = \frac{1}{40}$; par consequent $cy^5 = \frac{1}{40}y^5$ est la troisiéme partie de la valeur de x que l'on cherche; l'on a donc déja $x = 1y + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{40}y^5$ &c. & l'on peut continuer l'approximation tant qu'on voudra ; il n'y a plus de difficulté dans le reste de l'operation que celle qui vient de la peine du calcul.

On resoudra de la même maniere toutes les équations differentielles.

EXEMPLE VI.

260. POUR trouver la valeur de x dans l'équation differentielle $xxdy^2 - yydydx - nndy^2 + nydy^2 = 0$, il faut d'abord diviser chaque terme par dy^2, & l'on aura l'équation préparée $xx - \frac{yydx}{dy} - nn + ny = 0$, dans laquelle la difference dy est dans le dénominateur. Aprés cette préparation,

1°. Il faut supposer $x = a + by + cyy + ey^3$ &c. a, b, c, e, &c. sont indéterminées, & representent avec les puissances de y, les parties de la valeur de x, & elles servent à les trouver.

2°. Pour trouver la premiere partie representée par a, il faut concevoir a substituée à la place de x dans la proposée, & supposer $aa - nn = 0$, d'où l'on aura $a = n$; ainsi n est la premiere partie de la valeur de x.

Pour avoir la premiere transformée, il faut supposer $n + f = x$, d'où l'on déduira $df = dx$; & substituant les valeurs de x & de dx dans la proposée, on aura la premiere transformée.

Premiere transformée.

$$xx = +1nn + 2nf + ff$$
$$-nn = -1nn$$
$$+ny = + ny$$
$$-\frac{yydx}{dy} = -\frac{yydf}{dy}$$

1 signifie que la grandeur que cette marque précede est effacée.

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x, representée par by, il faut concevoir by substituée à la place de f, & supposer ensuite $2nby - ny = 0$, d'où l'on déduira $b = -\frac{1}{2}$, & $by = -\frac{1}{2}y$ sera la seconde partie de la valeur de x que l'on cherche.

Pour avoir la seconde ~~transformée, il faut supposer~~ $-\frac{1}{2}y + g = f$, d'où l'on déduira $-\frac{1}{2}dy + dg = df$, & $-\frac{1}{2} + \frac{dg}{dy} = \frac{df}{dy}$. Il faut ensuite substituer les valeurs de f & de $\frac{df}{dy}$ à la place de ces grandeurs dans la premiere transformée, & l'on aura la seconde transformée.

Seconde transformée.

$$+ff = +\frac{1}{4}yy - yg + gg$$
$$+2nf = -1ny + 2ng$$
$$+ny = +1ny$$
$$-\frac{yydf}{dy} = +\frac{1}{2}yy - \frac{yydg}{dy}$$

4°. Pour trouver la troisiéme partie de la valeur de x, representée par cyy, il faut concevoir cyy substituée à la place de g dans la seconde transformée, & supposer $2ncyy + \frac{1}{4}yy + \frac{1}{2}yy = 0$, d'où l'on déduira $c = -\frac{3}{8n}$, & $cyy = -\frac{3}{8n}yy$ sera la 3e partie de la valeur de x que l'on cherche.

Pour avoir la troisiéme transformée, il faut supposer $-\frac{3}{8n}yy + h = g$, d'où l'on déduira $-\frac{3}{4n}ydy + dh = dg$, & $-\frac{3}{4n}y + \frac{dh}{dy} = \frac{dg}{dy}$; il faut substituer dans la seconde transformée les valeurs de g & de $\frac{dg}{dy}$, & l'on aura la troisiéme transformée.

Troisiéme transformée.

$$+gg = +\frac{9}{64nn}y^4 - \frac{3}{4n}yyh + hh$$
$$-yg = +\frac{3}{8n}y^3 - yh$$
$$+2ng = -1\frac{3}{4}yy + 2nh$$
$$+\frac{3}{4}yy = +1\frac{3}{4}yy$$
$$-\frac{yydg}{dy} = +\frac{3}{4n}y^3 - \frac{yydh}{dy}$$

5°. Pour trouver la 4e partie de la valeur de x, representée par ey^3, il faut concevoir ey^3 substituée à la place de h, & supposer $+ 2ney^3 + \frac{3}{8n}y^3 + \frac{3}{4n}y^3$

$=0$, d'où l'on deduira $e = -\frac{9}{16nn}$, & $ey^3 = -\frac{9}{16nn}y^3$ sera la 4^e partie de la valeur de x.

On a donc $x = n - \frac{1}{2}y - \frac{1}{8n}yy - \frac{9}{16nn}y^3$ &c.

On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

Seconde maniere de resoudre le sixiéme exemple.

261. Si n est moindre que y dans l'équation $xx - \frac{nydx}{dy} - nn + ny = 0$, il faut que les exposans des y qui doivent distinguer les termes de la valeur de x, deviennent négatifs ; c'est à dire, que les y se trouvent dans les dénominateurs des termes de la valeur de x, afin que ces termes aillent en diminuant de valeur. Voici la maniere de le faire par la seconde methode.

Il faut supposer que la valeur indéterminée de x est $x = ay + by^0 + cy^{-1} + ey^{-2} + fy^{-3} +$ &c. $a, b, c,$ &c. sont des indéterminées. Pour en trouver les valeurs, 1°, il faut concevoir le premier terme indéterminé $+ay$ substitué à la place de x dans la proposée, & la difference de ay, qui est ady, substituée à la place de dx ; & faire une équation des grandeurs $aay^2 - ay^2 = 0$, dans lesquelles y est au degré le plus élevé ; l'on en déduira $a = 1$, ainsi le premier terme de la valeur de x est $1y$, & l'on a déja $x = 1y$.

Il faut pour faire la premiere transformée, supposer $y + f = x$, d'où l'on déduira $dy + df = dx$, & $1 + \frac{df}{dy} = \frac{dx}{dy}$, & substituer dans la proposée ces valeurs de x & de $\frac{dx}{dy}$ à leur place, & l'on aura la premiere transformée

$$\begin{array}{l} +ny - \frac{nydf}{dy} + 2yf + ff = 0. \\ -nn \end{array}$$

Pour trouver le second terme de la valeur de x, representé par by^0, il faut concevoir by^0 substitué à la place de f dans la premiere transformée, & la difference de by^0, qui est zero, à la place de dx ; & faire une équation des grandeurs $+ny + 2by = 0$, dans lesquelles y est au même degré le plus élevé, on trouvera par cette équation $b = -\frac{1}{2}n$; ainsi le second terme de la valeur de x est $-\frac{1}{2}ny^0$.

Pour faire la seconde transformée, il faut supposer $-\frac{1}{2}ny^0 + g = f$, d'où l'on déduira $+dg = df$; & substituer les valeurs de f & de df à leur place dans la premiere transformée, & l'on aura la seconde transformée

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{4}nn - \frac{nydg}{dy} + 2yg + gg = 0. \\ -ng \end{array}$$

Pour

Pour trouver le troisiéme terme de la valeur de x, representé par cy^{-1}, il faut concevoir $+cy^{-1}$ substitué à la place de g dans la seconde transformée, & la difference de $+cy^{-1}$, qui est $-cy^{-2}dy$, substituée à la place de dg ; & faire une équation des grandeurs $-\frac{1}{4}nn + 3c = 0$, dans lesquelles y ne se trouve point, & l'on en déduira $c = +\frac{1}{4}nn$; ainsi le troisiéme terme de la valeur de x est $+\frac{1}{4}nny^{-1}$.

Pour faire la troisiéme transformée, il faut supposer $+\frac{1}{4}nny^{-1} + h = g$, d'où l'on déduira $-\frac{1}{4}nny^{-2} + \frac{dh}{dy} = \frac{dg}{dy}$; & substituer ces valeurs de g & de $\frac{dg}{dy}$ à leur place dans la seconde transformée, & l'on trouvera la troisiéme transformée

$$\begin{array}{llll} -\frac{1}{4}n^3y^{-1} & - \frac{nydh}{dy} & + 2yh & + hh = 0. \\ +\frac{1}{16}n^4y^{-2} & & - nh & \\ & & +\frac{2}{4}nny^{-1}h & \end{array}$$

Pour trouver le quatriéme terme de la valeur de x, representé par $+ey^{-2}$, il faut concevoir $+ey^{-2}$ substitué dans la troisiéme transformée à la place de h, & la difference de $+ey^{-2}$, qui est $-2ey^{-3}$, substituée à la place de dh, & faire une équation des grandeurs $-\frac{1}{4}n^3y^{-1} + 4ey^{-1} = 0$, dans lesquelles y est au même moindre degré négatif ; & l'on en déduira $e = +\frac{1}{16}n^3y^{-2}$, ainsi le quatriéme terme de la valeur de x est $+\frac{1}{16}n^3y^{-2}$, & l'on a déja $x = +y - \frac{1}{2}ny^0 + \frac{1}{4}n^2y^{-1} + \frac{1}{16}n^3y^{-2}$. On peut continuer l'approximation par cette seconde methode tant qu'on voudra, & les operations qu'on vient de faire suffisent pour faire clairement concevoir la maniere d'appliquer la seconde methode aux équations qui contiennent des differences, quand les exposans des y dans la suite qui est la valeur de x, doivent être positifs, & quand ils doivent être négatifs.

On peut facilement appliquer la même methode aux équations qui contiendront des secondes differences, des troisiémes differences, &c.

Remarques pour les équations differentielles.

I.

262. La seconde methode fait trouver, pour les équations differentielles, la suite des exposans des y qui doivent distinguer les termes de la valeur de x, avec la même facilité & la même certitude qu'elle les fait découvrir pour les équations qui

n'ont point de differences ; & voici ce qu'on doit considerer pour les avoir. 1°. Les exposans des y dans la valeur de x doivent être en progression arithmetique, & aller en augmentant quand ils sont tous positifs, & en augmentant, pour ainsi dire, en negation, quand ils sont tous negatifs ; & commencer par diminuer quand ils commencent par être positifs, & augmenter ensuite en negation, dès qu'ils deviennent negatifs. 2°. Le premier & le second y, & même tous les suivans, la methode étant uniforme, doivent être pris tels que les quantités où l'inconnue x ne se trouve point, viennent à être detruites par d'autres semblables qui ayent des signes contraires dans la suite de l'operation, & qu'elles servent à former les équations qui doivent determiner les termes de la valeur de x les uns aprés les autres, de maniere qu'il ne reste pas de ces quantités qui soient inutiles à la resolution. 3°. Il faut avoir égard à la proprieté particuliere des differences, qui est que la difference d'une quantité constante est zero ; ainsi étant substituée, elle rend égale à zero la quantité où elle est substituée ; que la difference d'un produit qui contient une puissance de y, divisée par dy, est ce produit même où l'exposant de y est diminué d'une unité s'il est positif, & augmenté d'une unité s'il est negatif ; d'où il suit que la difference de ay, divisée par dy, est la seule constante a sans y.

II.

Aprés ces considerations on n'aura aucune difficulté à trouver les exposans des y dans la valeur de x ; par exemple si les exposans des y doivent être positifs, qu'il y ait une quantité toute connue sans y dans une équation proposée, & que la quantité où est $\frac{dx}{dy}$ n'ait que des constantes, le premier terme de la valeur de x doit avoir y, & il le faut supposer representé par ay, car la difference de ay divisée par dy étant a, on pourra faire une équation de a & de la quantité de la proposée qui est sans y, laquelle servira à determiner a. Mais si les mêmes choses étant supposées, l'inconnue y se trouve dans la quantité où est $\frac{dx}{dy}$, comme dans le sixiéme exemple, où l'on a $\frac{zzdx}{dz}$, il faut que le premier terme de x soit representé par la seule constante a sans y.

Dans le même cas des exposans positifs de y dans la valeur

de x, pour avoir l'exposant de y dans le second terme de la valeur indéterminée de x, dont le coëficient est representé par b, il faut le supposer tel cet exposant de y dans by, qu'en substituant by à la place de l'inconnue f dans la premiere transformée, on puisse avoir au moins deux quantités dans lesquelles y soit au même moindre degré. On trouvera de même les exposans des y dans les termes suivans : mais comme ils sont en progression arithmetique, dont on a les deux premiers termes, on les a tous sans les chercher.

Ces remarques suffisent à ceux qui se sont rendu la seconde methode familiere, pour trouver les exposans des y dans la valeur de x, dans tous les cas qui peuvent se presenter.

Quand en suivant les regles qu'on a prescrites, on ne peut pas trouver de valeur de x, c'est une marque que l'équation ne peut pas être resolue, du moins sans preparation.

EXEMPLE VII. ~~dans lequel il y a trois inconnues.~~

263. POUR trouver par la seconde methode la valeur de x dans l'équation $\frac{zdx}{dz} - x - n = 0$, où $\frac{dz}{dy} = 1 + z^{-1}y$; il faut supposer que la valeur indéterminée de x est $x = az^{-1}y + bz^{-1}y^2 + cz^{-1}y^3 + ez^{-1}y^4 +$ &c. $a, b, c,$ &c. sont indéterminées.

Pour avoir le premier terme de cette valeur representé par $az^{-1}y$, il faut substituer dans la proposée $az^{-1}y$, à la place de x, & la difference de $az^{-1}y$ divisée par dy, (qui est $+ az^{-1} - \frac{az^{-2}ydz}{dy}$, & qui, en substituant au lieu de $\frac{dz}{dy}$ sa valeur $1 + z^{-1}y$, devient $+ az^{-1} - az^{-2}y - az^{-3}y^2$,) à la place de $\frac{dx}{dy}$; & faire une équation des grandeurs $+ a - n = 0$, dans lesquelles, aprés la substitution, y ne se trouve point ; & l'on déduira de cette équation $a = + n$; ainsi le premier terme de la valeur de x est $+ nz^{-1}y$, & l'on a déja $x = + nz^{-1}y$. Pour avoir la premiere transformée, il faut supposer $+ nz^{-1}y + f = x$; & prenant les differences, & divisant par dy, on aura $+ nz^{-1} - \frac{nz^{-2}ydz}{dy} + \frac{df}{dy} = \frac{dx}{dy}$; où mettant au lieu de $\frac{dz}{dy}$ sa valeur $1 + z^{-1}y$, l'on aura $\frac{dx}{dy} = + nz^{-1} - nz^{-2}y - nz^{-3}y^2 + \frac{df}{dy}$; il faut substituer dans la

propoſée les valeurs de x & de $\frac{dx}{dy}$, & l'on aura la premiere transformée $-2nz^{-1}y + \frac{zdf}{dy} + f = 0.$
$-nz^{-2}y^2$

Pour trouver le ſecond terme de la valeur de x, repréſenté par $+bz^{-2}y^2$, il faut ſubſtituer $+bz^{-2}y^2$ dans la premiere transformée, à la place de f, & la difference de $bz^{-2}y^2$ diviſée par dy, (qui eſt $2bz^{-2}y - \frac{2bz^{-3}y^2dz}{dy}$, & qui, en ſubſtituant la valeur de $\frac{dz}{dy}$, devient $+2bz^{-2}y - 2bz^{-3}y^2 - 2bz^{-4}y^3$,) à la place de $\frac{df}{dy}$; & faire une équation des grandeurs $-2nz^{-1}y + 2bz^{-1}y = 0$, dans leſquelles y eſt au même moindre degré, & l'on en déduira $b = +n$; ainſi le ſecond terme de la valeur de x eſt $+nz^{-2}y^2$, & l'on a déja $x = +nz^{-1}y + nz^{-2}y^2$.

Pour avoir la ſeconde transformée, il faut ſuppoſer $+nz^{-2}y^2 + g = f$; on en prendra la difference, qu'on diviſera par dy, & l'on aura $2nz^{-2}y - \frac{2nz^{-3}y^2dz}{dy} + \frac{dg}{dy} = \frac{df}{dy}$; & en y mettant la valeur de $\frac{dz}{dy}$, on aura $2nz^{-2}y - 2nz^{-3}y^2 - 2nz^{-4}y^3 + \frac{dg}{dy} = \frac{df}{dy}$; il faut ſubſtituer ces valeurs de f & de $\frac{df}{dy}$ dans la premiere transformée, & l'on trouvera la ſeconde transformée $-4nz^{-2}y^2 + \frac{zdg}{dy} + g = 0.$
$-2nz^{-3}y^3$

Pour trouver le troiſiéme terme de la valeur de x, repréſenté par $+cz^{-3}y^3$, il faut ſubſtituer dans la ſeconde transformée $+cz^{-3}y^3$ au lieu de g, & la difference de $cz^{-3}y^3$ diviſée par dy, (qui eſt $+3cz^{-3}y^2 - \frac{3cz^{-4}y^3dz}{dy}$, & qui, en y mettant la valeur de $\frac{dz}{dy}$, devient $+3cz^{-3}y^2 - 3cz^{-4}y^3 - 3cz^{-5}y^4$,) à la place de $\frac{dg}{dy}$; & faire une équation des grandeurs $-4nz^{-2}y^2 + 3cz^{-2}y^2 = 0$, dans leſquelles y eſt au même moindre degré; & l'on en déduira $c = \frac{4}{3}n$; ainſi le troiſiéme terme de la valeur de x eſt $+\frac{4}{3}nz^{-3}y^3$.

Pour avoir la troiſiéme transformée, il faut ſuppoſer $+\frac{4}{3}nz^{-3}y^3 + h = g$; on en déduira, en prenant les diffe-

rences & diviſant par dy, $+4nz^{-3}y^2 - \frac{4nz^{-4}y^3dz}{dy} + \frac{dh}{dy} = \frac{dg}{dy}$; & mettant au lieu de $\frac{dz}{dy}$ ſa valeur $1 + z^{-1}y$, l'on aura $\frac{dg}{dy} = +4nz^{-3}y^2 - 4nz^{-4}y^3 - 4nz^{-5}y^4 + \frac{dh}{dy}$. Il faut ſubſtituer dans la 2^e transformée les valeurs de g & de $\frac{dg}{dy}$, & l'on trouvera la 3^e transformée $-\frac{22}{3}nz^{-3}y^3 + \frac{zdh}{dy} + h = 0.$
$-4nz^{-4}y^4$

On trouvera le 4^e terme de la valeur de x, repréſenté par $ez^{-4}y^4$, en ſubſtituant dans cette 3^e transformée $+ez^{-4}y^4$ à la place de h, & la difference de $+ez^{-4}y^4$, diviſée par dy, (qui eſt $+4ez^{-4}y^3 - \frac{4ez^{-5}y^4dz}{dy}$, & qui, en mettant la valeur de $\frac{dz}{dy}$, devient $+4ez^{-4}y^3 - 4ez^{-5}y^4 - 4ez^{-6}y^5$,) à la place de $\frac{dh}{dy}$, & en faiſant une équation des grandeurs $-\frac{22}{3}nz^{-3}y^3 + 4ez^{-3}y^3 = 0$, dans leſquelles y eſt au même moindre degré, on en déduira $e = +\frac{22}{12}n = +\frac{11}{6}n$; ainſi le 4^e terme de la valeur de x eſt $+\frac{11}{6}nz^{-4}y^4$, & l'on a déja $x = nz^{-1}y + nz^{-2}y^2 + \frac{4}{3}nz^{-3}y^3 + \frac{11}{6}nz^{-4}y^4$.

On peut continuer l'approximation de la valeur de x tant qu'on voudra; les operations qu'on vient de faire ſuffiſent pour faire clairement concevoir la maniere d'y appliquer la ſeconde methode.

SECTION VI.

Application des methodes du ſecond Problême aux équations déterminées, c'eſt à dire aux équations qui n'ont qu'une ſeule inconnue.

AVERTISSEMENT.

Les methodes du ſecond Problême peuvent s'appliquer aux équations qui n'ont qu'une ſeule inconnue, en prenant une des lettres connues de l'équation pour tenir lieu de la ſeconde inconnue y; & quand les lettres connues de la propoſée n'ont pas les diſpoſitions qu'il faut pour ces methodes, il faut la leur donner, & préparer l'équation comme on le verra dans le ſecond exemple.

EXEMPLE I.

264. TROUVER la valeur approchée de x dans l'équation $x^3 + npx - p^3 = 0$, & continuer l'approximation à l'infini.
$ + nnx - 2n^3$

On prendra la lettre connue p pour tenir lieu de la seconde inconnue y, & ensuite on trouvera la valeur approchée de x par laquelle on voudra des deux methodes du second Problême.

PREMIERE METHODE.

1°. ON supposera $x = a + bp + cpp + dp^3 + ep^4$ &c. a, b, c, d, &c. sont des grandeurs indéterminées.

On prendra les valeurs de x par le moyen de cette équation indéterminée, on les substituera dans la proposée à la place de x, & on aura l'équation changée suivante,

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllll} x^3 = + a^3 & + 3aabp & + 3abbpp & + b^3p^3 & \&c. \\ & & + 3aacpp & + 6abcp^3 & \\ & & & + 3aadp^3 & \\ + npx = & + nap & + nbpp & + ncp^3 & \&c. \\ + nnx = + nna & + nnbp & + nncpp & + nndp^3 & \&c. \\ - p^3 = & & & - p^3 & \\ - 2n^3 = - 2n^3 & & & & \end{array} \right.$$

2°. On supposera chaque terme de cette équation changée égal à zero, ce qui donnera les équations particulieres dont on a besoin pour trouver les valeurs des indéterminées a, b, c, &c.

3°. Par la premiere de ces équations $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, on trouvera $a = n$, car $a - n = 0$, est un diviseur exact de cette équation.

En substituant n à la place de a dans la seconde $3aab + nnb = - na$, on trouvera $b = -\frac{1}{4}$, & $bp = -\frac{1}{4}p$.

En substituant les valeurs de a & de b dans la troisiéme $3aac + nnc = - 3abb - nb$, on trouvera $c = + \frac{1}{64n}$.

En substituant les valeurs de a, b, c, dans la quatriéme $3aad + nnd = - b^3 - 6abc - nc + 1$, on trouvera $d = + \frac{131}{512nn}$.

4°. On substituera les valeurs de a, b, c, d, &c. dans $x = a + bp + cpp + dp^3$ &c. & l'on aura $x = n - \frac{1}{4}p + \frac{1}{64n}pp + \frac{131}{512nn}p^3$ &c. On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

SECONDE METHODE.

POUR trouver par la seconde methode la valeur approchée de x dans l'équation $x^3 + npx - p^3 = 0$,
$ + nnx - 2n^3$

1°. On supposera $x = a + bp + cpp + dp^3$ &c. les grandeurs a, b, c, d, &c. sont indéterminées, & elles representent avec les puissances de p, les parties de la valeur de x que l'on cherche, & elles servent à les trouver.

2°. Pour avoir la premiere partie de la valeur de x, representée par a, il faut concevoir a substituée à la place de x dans la proposée, & supposer les grandeurs $a^3 + nna - 2n^3$, dans lesquelles p ne se trouve point, égales à zero, & l'on aura l'équation $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, dont $a - n = 0$ est un diviseur exact; ainsi $a = n$ est la premiere partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la premiere transformée, on supposera $n + f = x$; on substituera $n + f$ à la place de x dans la proposée, & l'on aura la premiere transformée,

$$n + f = x \qquad \begin{array}{l} x^3 = 1n^3 + 3nnf + 3nff + f^3 \\ + npx = + nnp + npf \\ + nnx = + 1n^3 + nnf \\ - p^3 = - p^3 \\ - 2n^3 = - 1 2n^3 \end{array}$$

1 signifie que la grandeur que cette marque précede est effacée.

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x, representée par bp, il faut concevoir bp substituée à la place de f dans la premiere transformée, & supposer égales à zero les grandeurs $4nnbp + nnp = 0$; ce qui donnera $b = -\frac{1}{4}$, & $bp = -\frac{1}{4}p$ est la seconde partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la seconde transformée, on supposera $-\frac{1}{4}p + g = f$; on substituera $-\frac{1}{4}p + g$ à la place de f dans la premiere transformée, & on aura seconde transformée,

$$-\frac{1}{4}p + g = f, \quad \begin{array}{l} f^3 = -\frac{1}{64}p^3 + \frac{3}{16}ppg - \frac{3}{4}pgg + g^3 \\ + 3nff = + \frac{3}{16}npp - \frac{3}{2}npg + 3ngg \\ + npf = -\frac{1}{4}npp + npg \\ + 4nnf = - 1nnp + 4nng \\ + nnp = + 1nnp \\ - p^3 = - p^3 \end{array}$$

4°. Pour trouver la troisiéme partie de la valeur de x, representée par cpp, il faut concevoir cpp substituée à la place de g dans la seconde transformée, & supposer égales à zero les grandeurs $4nncpp - \frac{1}{16}npp = 0$; ce qui donnera $c = +\frac{1}{64n}$, & $cpp = \frac{1}{64n}pp$ sera la troisiéme partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la troisiéme transformée, on supposera $\frac{1}{64n}pp + h = g$; & on substituera $\frac{1}{64n}pp + h$ à la place de g dans la seconde transformée, & l'on aura la troisiéme transformée,

$$\begin{array}{llll} +\frac{1}{262144n^3}p^6 & +\frac{3}{4096nn}p^4h & +\frac{3}{64n}pphh & +h^3 = 0. \\ -\frac{3}{16384nn}p^5 & -\frac{3}{128n}p^3h & -\frac{3}{4}phh & \\ +\frac{15}{4096n}p^4 & +\frac{9}{16}pph & +3nhh & \\ -\frac{111}{128}p^3 & -\frac{3}{2}nph & & \\ & +4nnh & & \end{array}$$

5°. Pour trouver la quatriéme partie de la valeur de x, representée par dp^3, il faut concevoir dp^3 substituée à la place de h, & supposer égales à zero les grandeurs $4nndp^3 - \frac{111}{128}p^3 = 0$, d'où l'on déduira $d = +\frac{111}{512nn}$; par consequent $dp^3 = +\frac{111}{512nn}p^3$ est la quatriéme partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

L'on a donc $x = +n - \frac{1}{4}p + \frac{1}{64n}pp + \frac{111}{512nn}p^3$ &c.

On peut continuer l'approximation autant qu'on voudra.

AVERTISSEMENT.

Si n étoit moindre que p il faudroit trouver une valeur de x dans laquelle les p fussent au dénominateur; c'est à dire, il faudroit que les exposans des p dans la suite qui est la valeur de x, fussent négatifs; ce qui est si facile à faire par la premiere & par la seconde methode du second Problême, après tous les exemples ausquels on les a appliquées, qu'il est inutile de s'y arrêter.

Cet exemple suffit pour faire entierement concevoir la maniere d'appliquer les deux methodes du second Problême aux équations qui n'ont qu'une seule inconnue, lorsque la lettre connue qui tient lieu de la seconde inconnue y, se trouve disposée comme il faut dans l'équation proposée.

Voici un second exemple où il faut préparer l'équation proposée, où l'on apprendra la maniere de la préparer.

EXEMPLE II.

EXEMPLE II.

265. TROUVER la valeur approchée de x dans l'équation $x^3 - 3nnx + n^3 = 0$.

On ne sçauroit appliquer les methodes du second Problême à cette équation, dont les racines sont incommensurables. Il faut la préparer, c'est à dire, il faut la changer en une équation qui soit la même, de maniere que les coéficients ou produits connus de la proposée conservent toujours la même valeur dans ce changement, & que cependant les grandeurs de ces produits connus soient telles qu'on y puisse appliquer les methodes du second Problême. Par exemple, on pourra changer la proposée $x^3 - 3nnx + n^3 = 0$, en cette équation $x^3 - 3pqx + ppr = 0$, qui sera la même que la proposée, en supposant $-3pq = -3nn$, & $+ppr = +n^3$. Ce changement se fera dans cet exemple, en prenant une grandeur comme arbitraire p tant petite qu'on voudra, & faisant cette proportion $p . n :: n . q$, on aura $-3pq = -3nn$; mettant pq au lieu de nn dans n^3, on aura $n^3 = npq$; & faisant $p . n :: q . r$, on aura $pr = nq$, & par consequent $ppr = n^3$.

Pour trouver à present la valeur approchée de x dans l'équation préparée $x^3 - 3pqx + ppr = 0$, on prendra p pour tenir lieu de la seconde inconnue y, & on se servira de celle qu'on voudra des deux methodes du second Problême. On employera ici la seconde.

1°. On supposera $x = ap + bpp + cp^3$ &c. a, b, c, sont des grandeurs indeterminées, & elles representent les parties de la valeur de x que l'on cherche.

2°. Pour trouver la premiere partie representée par ap, il faut concevoir ap substituée à la place de x dans l'équation préparée, & supposer $-3appq + ppr = 0$; d'où l'on déduira $a = \frac{1}{3q}r$; & par consequent $ap = \frac{r}{3q}p$ est la premiere partie de la valeur de x que l'on cherchoit.

Pour avoir la premiere transformée, on supposera $\frac{r}{3q}p + f = x$, & on substituera $\frac{r}{3q}p + f$ à la place de x, & l'on aura la premiere transformée,

$$\begin{array}{llll} \frac{r^3}{27q^3}p^3 & +\frac{rr}{qq}ppf & +\frac{r}{q}pff & +f^3 = 0. \\ & -3pqf & & \end{array}$$

3°. Pour trouver la seconde partie de la valeur de x representée par bpp, il faut concevoir bpp substituée à la place de f, & supposer $\frac{r^3}{27q^3}p^3 - 3bp^2q = 0$, d'où l'on déduira $b = + \frac{r^3}{81q^4}$; par consequent $\frac{r^3}{81q^4}pp$ est la seconde partie de la valeur de x que l'on cherchoit. Le reste de l'operation est facile, & il est inutile d'en grossir ce traité.

REMARQUE.

166. LORSQU'EN cherchant la premiere partie de la valeur de x dans les équations qui ont deux inconnues x & y, on trouve qu'il faut resoudre une équation composée dont la racine est incommensurable, on pourra preparer l'équation comme dans l'exemple précedent, & ensuite on trouvera la valeur approchée de la premiere partie de la valeur de x que l'on ~~cherchoit, par la même methode~~; ou bien on la trouvera cette valeur approchée par le premier Problême.

Fautes qu'il faut corriger avant que de lire ce premier Volume.

Page,	ligne,	faute,	correction.
11	17	$-\frac{1}{27}p$	$-\frac{1}{27}p^3$
30	26	l'équation $-y^5$,	l'équation $+y^5$
80	20	$-p$	$-q$
109	24	$x - aa$	$xx - aa$
126	34	1.3.6.9	1.2.3.6.9.18
126	36	$x - 3$	$y - 3$
143	10	n, g, s	n, q, s.
146	1		mettez 2 à la place du premier dénominateur.
165	35	$g = \frac{f^3 - nff - 3f + g}{2f - n}$	$g = \frac{f^3 - nff + 3f - g}{2f - n}$
~~169~~	~~1~~	$\cancel{g = \frac{f^3 + naf - 3f + g}{2f - n}}$	$\cancel{g = \frac{f^3 - nff - 3f - g}{2f}}$
181	30	$xx + 2xx - 3 = 0$	$xx + 2x - 3 = 0$
231	22	$x^4 - 2ax$	$x^4 - 2ax^3$
281	13	$y - a$	$y - b$
301	6	augmente	augmenté
304	27	dans l'équation qui la précede	dans toutes les équations qui la précedent
304	35	*après* des limites, *ajoutez*	& donnoient zero étant substituées dans la proposée
305	2	*après* des limites, *ajoutez*	& dans la proposée
305	5	*après* des limites, *ajoutez*	& qu'elles donnassent zero étant substituées dans les précedentes
305	8	*après* dans la seconde, *ajoutez*	& dans les précedentes
305	12	qui la précede	& dans les autres qui la précedent
314	17 & 18	*effacez*	& n'a point par consequent alors de difference
340	25	$7' + 9$	$7' + g$
340	30	$-18ff$	$-18ff$

page,	ligne,	faute,	correction.
340	31	$+5367ff$	$+5367f$
359	7	plus élevé	plus élevé, & dans toutes celles qui précedent,
359	8	si ces deux équations,	si toutes ces équations
370	4	*aprés* égales à 4, *ajoutez*	car on trouve zero en y substituant 4
379	13	ligne c	ligne e
379	19	$-3de$	$-3dex$
381	27	y^0, y^2, &c. ou a^0, a^2, &c.	y^0, y^1, y^2, &c. ou a^0, a^1, a^2, &c.
385	8	$+by$	$+by=0$
402	15	$\frac{n+1}{s+1}$	$\frac{n-1}{s+1}$
404	23		*lisez* $s = D \times \frac{n-1+E}{E}$
411	19	$\overline{a+b}^3 \times \overline{a+c}^{-1}$	$\overline{a+b}^3 \times \overline{a+c}^{-2}$
414	2	$\frac{1}{aa+bb}$	$\frac{1}{aa+ab}$
425	derniere		*lisez* $+\frac{2}{n}a^{\frac{1-n}{n}}cy^{\frac{1+2n}{n}}$
436	21	$+fy^4$	$+fy^3$
438	27	$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}xx$	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}xx$
438	29	$-\frac{1}{2}xx$	$+\frac{1}{2}xx$

p. 195. Lisez aprés ces mots égal a zero, il me semble quon doit ajouter = et son second terme aussi égal a zero; car cest de cette seconde supposition quon tire la premiere equation $2t = -n$