COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES.

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. EDM. BOUR,

INGÉNIEUR DES MINES.

Multa pars mei.

PREMIER FASCICULE.

CINÉMATIQUE

AVEC ATLAS DE 30 PLANCHES IN-4°.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1887

TABLE DES MATIÈRES.

COURS
DE MÉCANIQUE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

La *Mécanique* est la science du *mouvement* et des *forces*.

Nous savons tous ce que c'est que le mouvement; nous savons tous aussi ce que c'est que le *temps* et l'*espace*; et pourtant on peut affirmer qu'il n'est pas possible de définir clairement ces deux notions fondamentales, dont la combinaison produit l'idée de mouvement.

« Réunissez, dit Charles Nodier, Orphée, Épicure, Démocrite, Aristote, Hippocrate, Archimède, Marc-Aurèle, Cicéron, Montaigne, Bacon, Locke, Leibnitz, Bossuet, Kant, Georges Cuvier, et toi aussi, mon cher Ballanche; donnez-leur pour rapporteur ce bon prince de la Mirandole, qui s'était engagé à soutenir une thèse contre tout venant, *de omni re scibili*, et demandez à ces gens-là s'ils savent ce que c'est que le temps et l'espace : ils vous répondront qu'ils ne le savent pas, que l'homme ne peut pas le savoir. »

Essayerons-nous de dire, avec Leibnitz, que l'espace est l'*ordre des choses qui coexistent*, et le temps, l'*ordre des existences successives*. Mais il est évident non seulement que nous n'avons rien expliqué, rien défini, mais encore que nous avons fait un cercle vicieux, l'idée de succession dérivant nécessairement de celle de temps.

La *Géométrie* est la science de l'espace et de sa mesure. On fait déjà quelquefois intervenir en Géométrie le mouvement :

par exemple quand on définit une ligne comme décrite par le *mouvement* d'un point, une surface par le *mouvement* d'une ligne.

On pourrait définir la surface de la sphère, en disant que tous ses points sont à égale distance d'un point intérieur appelé *centre*. Mais, quand on regarde cette même surface comme engendrée par le *mouvement* d'une demi-circonférence qui tourne autour de son diamètre, l'image devient infiniment plus nette, plus continue, plus lumineuse : on a tout de suite l'objet défini devant les yeux, et on saurait l'exécuter au besoin. On n'est pas plus embarrassé quand on rencontre en Géométrie des définitions, telles que celle de l'hélice, basées sur des combinaisons de mouvement plus ou moins compliquées. Et, en définitive, ces emprunts de la science de l'espace à celle du mouvement n'offrent pas le plus léger inconvénient, puisqu'ils ne donnent lieu à aucune pétition de principe et qu'ils présentent à notre esprit des images d'une grande netteté, la notion du mouvement étant au nombre de celles qui nous sont certainement le plus familières.

Le mouvement et ses propriétés générales, dit d'Alembert, sont le premier et le principal objet de la Mécanique. Cette science, dont l'étude doit suivre immédiatement celle de la Géométrie, s'en distingue nettement par l'introduction d'une notion nouvelle : celle du *temps* qui s'écoule pendant que les mobiles dont on s'occupe, passant d'une position à une autre, parcourent un certain chemin dans l'espace.

On sait que le lieu d'un corps dans l'étendue se détermine au moyen de certaines grandeurs géométriques nommées *coordonnées*. Si l'on observe ce corps (que nous réduirons, pour plus de simplicité, à un point mathématique), et que l'on mesure ses coordonnées à des instants suffisamment rapprochés, on connaîtra la série des positions successives de ce point; on pourra construire la courbe lieu géométrique de ces positions, courbe qu'on appelle la *trajectoire* du mobile. On n'a fait jusqu'ici que de la Géométrie.

Si, de plus, on a soin de noter le temps qui s'écoule entre deux observations consécutives quelconques, on connaîtra le mouvement d'une manière complète; et on le séparera de tous les autres mouvements qui s'en distinguent, soit parce que la trajectoire n'est pas la même, soit parce que des espaces égaux sont parcourus dans des temps différents. C'est ce dernier point dont on n'avait pas à se préoccuper en Géométrie.

L'Astronomie vous enseignera les moyens de mesurer le temps. Les appareils d'*horlogerie*, aussi bien ceux qu'on emploie dans la vie commune que ceux qui servent aux expériences de précision, sont en effet réglés sur les phénomènes célestes. L'unité de temps, dans la Mécanique, est invariablement la *seconde de jour solaire moyen*, comme l'unité de longueur est toujours le *mètre*.

Quand, par l'observation simultanée d'un corps en mouvement et d'une horloge à secondes, on est arrivé à déterminer les espaces parcourus par le mobile et les temps employés à parcourir ces espaces, on dit qu'on connaît la *loi du mouvement*; et l'on est en état de résoudre le double problème suivant :

1° *Quelle est, à un instant donné, la position du point mobile dans l'espace?*

2° Réciproquement : *Le lieu du mobile ayant été déterminé par l'observation, quelle heure est-il?*

C'est par la connaissance de la loi des mouvements des astres que l'Astronomie sait assigner le point du ciel où se trouvera, à une époque donnée, tel corps céleste que l'on voudra; qu'elle calcule plusieurs années à l'avance le lever et le coucher du Soleil, de la Lune et des planètes; qu'elle prédit les éclipses, les marées et tous les phénomènes qui intéressent, à des degrés divers, l'astronome, le géographe ou le navigateur.

Inversement, l'observation de ces phénomènes donne les moyens de déterminer avec une grande précision, soit l'heure du lieu où l'on se trouve, soit même l'heure simultanée d'un autre point du globe, éléments dont la différence est égale, comme on sait, à la longitude de la station, prise par rapport à un point connu.

Dans un autre ordre d'idées, c'est par la connaissance des mouvements des mécanismes qu'on est parvenu, depuis un siècle environ, à remplacer presque partout, dans nos ateliers, la main de l'ouvrier par les forces aveugles de la nature inanimée. C'est ainsi que l'industrie a été dotée de ces engins merveilleux, esclaves obéissants qui tissent nos vêtements, transportent nos fardeaux, façonnent les métaux pour les usages les plus variés, accomplissent en un mot toutes les fonctions qui semblaient jusqu'ici l'apanage exclusif du travail intelligent.

Il est évident que, par l'observation directe, aidée de l'application seule de la Géométrie et du calcul, on peut, *sans le secours d'aucun principe nouveau*, trouver les propriétés générales du mouvement, varié suivant une loi quelconque. C'est ainsi qu'ont procédé les créateurs de la Mécanique proprement dite, les Kepler et les Galilée.

Mais, comment arrive-t-il que le mouvement d'un corps suive telle ou telle loi particulière? C'est sur quoi la Géométrie seule ne peut rien nous apprendre; et c'est aussi ce qu'on doit regarder comme le premier problème qui appartienne, à proprement parler, à la Mécanique.

On voit d'abord fort clairement qu'un corps ne peut se donner le mouvement à lui-même. Il ne saurait donc être tiré du repos que par l'action de quelque cause étrangère [1].

Telle est la loi fondamentale de l'*inertie*, sur laquelle nous aurons à revenir pour en faire apprécier le véritable caractère et la haute portée. Bornons-nous, pour le moment, à dire que quand un corps (dont nous pouvons toujours supposer les dimensions plus petites que toute grandeur assignable, infiniment petites, pour parler le langage de l'Analyse), quand un pareil corps, dis-je, passe de l'état de repos à l'état de mouvement, ce phénomène a nécessairement une cause; et cette cause, d'après notre principe, il la faut chercher *en dehors* du corps qui en subit l'action.

L'étude des causes capables de faire naître le mouvement et la recherche des relations qui existent entre ces causes et le mouvement produit sont de la plus grande importance au point de vue des applications. En effet, la connaissance approfondie de ces causes motrices peut seule nous permettre, en les mettant convenablement en jeu, d'obtenir dans nos manufactures

(1) D'ALEMBERT, *Traité de Dynamique*, nouvelle édition. Paris, 1758; Discours préliminaire, p. VII, VIII et IX.

les mouvements dont nous avons besoin, de nous opposer, au contraire, à ceux qui seraient inutiles ou nuisibles.

Cette étude est le deuxième objet dont la Mécanique ait à s'occuper.

Or les mouvements qui nous sont le plus familiers sont ceux que, dès notre enfance et par le moyen de nos organes, nous imprimons journellement soit à notre propre corps, soit aux objets qui nous entourent. La cause de ces mouvements (remarquez que je ne dis pas la cause première), la cause immédiate de ces mouvements est ce que nous appelons notre *force musculaire*, dont le déploiement est la condition indispensable de la manifestation des phénomènes qui nous occupent.

La force de l'homme, telle est la première cause de mouvement qui ait été connue, la première qu'on ait utilisée pour les travaux les plus essentiels à la vie.

Mais on n'a pas dû tarder beaucoup à connaître et à employer d'autres agents naturels, capables de suppléer à l'insuffisance de notre force musculaire. C'est ainsi qu'on a eu recours d'abord à la *force* des animaux, convenablement dirigée, puis à la *force* de l'eau, du vent; à celle de la vapeur, qui vient d'opérer pour ainsi dire sous nos yeux toute une révolution dans les conditions de la vie sociale; à celle de l'électricité, qui réserve à ceux qui viendront après nous des transformations peut-être encore plus inattendues.

En général, et nous conformant en cela au langage vulgaire, nous donnerons le nom de *force* à toute cause produisant ou pouvant produire le mouvement. Par exemple, un corps que nous cessons de soutenir se met en mouvement, il tombe. La cause de ce mouvement, d'après notre définition, est une force : c'est celle qui a reçu le nom de *pesanteur*.

Maintenant quelle est la cause de la pesanteur? Si nous répondons que c'est l'attraction de la Terre, on nous demandera quelle est la cause de l'attraction, et ainsi de suite. Aussi nous abstiendrons-nous, avec le plus grand soin, de toute discussion relative à des questions de ce genre, ainsi que de toute hypothèse sur l'essence intime de la matière, ces problèmes ne paraissant pas, en ce moment du moins, susceptibles d'une solution basée sur l'expérience et le raisonnement.

Nous avons dit que l'objet de la Mécanique est l'étude du *mouvement* et des *forces*. La division de notre Cours ressort tout naturellement de cette définition, suffisamment éclaircie par les explications que je viens de donner.

I. *L'étude des mouvements considérés en eux-mêmes, tels que nous les observons dans les corps qui nous environnent, et spécialement dans les appareils appelés machines,* constitue une première Partie à laquelle nous donnerons le nom de *Cinématique*, d'après une dénomination introduite par Ampère, et aujourd'hui généralement adoptée (¹).

J'ai déjà indiqué, d'après d'Alembert, le caractère essentiel de cette Partie en quelque sorte préliminaire, qui n'exige aucun nouveau principe, qui n'invoque aucun fait d'expérience, et qui doit plutôt être rapportée à la Géométrie qu'à la Mécanique.

Non seulement la Cinématique étudie le mouvement comme effet, sans chercher à remonter aux causes, mais encore elle considère uniquement les éléments géométriques des corps, en faisant abstraction de la matière dont ils sont composés. Aussi les théorèmes de la Cinématique sont-ils indépendants de la connaissance plus ou moins complète que nous pouvons avoir de la constitution des corps, et ont-ils toute la valeur des vérités géométriques.

On n'entre réellement dans le domaine de la Mécanique, continue d'Alembert, que quand on se demande comment il arrive que le mouvement d'un corps, placé dans des conditions déterminées, suive telle ou telle loi plutôt que telle autre.

Or nous verrons que, pour résoudre ce problème, nous aurons besoin de poser des principes, des axiomes spéciaux, et de doter la matière, plus ou moins arbitrairement, de certaines propriétés, telles que celle de l'inertie dont nous avons déjà parlé; et l'on comprend qu'avant d'avoir recours à de nouveaux axiomes, toujours, dans une certaine mesure, hypothétiques, on tienne à s'être bien rendu compte de tout ce qui ne dépend pas de la vérité ou de la fausseté de ces axiomes.

(¹) *Essai sur la Philosophie des Sciences*, p. 50; 1834.

Carnot signale à plusieurs reprises la haute importance, à la fois pour la Géométrie et pour la Mécanique, de l'étude des *mouvements géométriques*, notamment dans sa *Géométrie de position*, p. 336 :

« Il me semble même que la Géométrie ne devrait point se borner là, et qu'elle pourrait embrasser les mouvements qui ne résultent pas de l'action et de la réaction des corps les uns sur les autres; car la Mécanique n'est pas, à proprement parler, la science du mouvement, mais la science de la communication du mouvement.

» L'idée de mouvement est aussi simple que celle de dimension et peut-être en est-elle inséparable. Les premières notions de la Géométrie enseignent à regarder la ligne comme la trace d'un point qui se meut, et cette notion s'accorde avec l'opération matérielle par laquelle on trace effectivement une ligne sur le papier, avec une plume ou un crayon; elles enseignent de même à regarder une surface comme produite par le mouvement d'une ligne, et le solide comme produit par le mouvement d'une surface. Pourquoi n'irait-on pas plus loin, en considérant ce que produit à son tour le mouvement du solide dans l'espace ? Ce n'est pas ce mouvement en lui-même qui fait l'objet de la Mécanique, mais l'effet des modifications qu'il éprouve... »

Et plus loin (p. 338) : « Si la théorie des mouvements géométriques était approfondie, la Mécanique et l'Hydraulique seraient infiniment simplifiées; elles se réduiraient au développement du principe général de la communication du mouvement, qui n'est autre chose que celui de la réaction toujours égale et contraire à l'action. Les grandes difficultés analytiques qu'on rencontre dans la science de l'équilibre et du mouvement viennent principalement de ce que la théorie des mouvements géométriques n'est point faite : elle mérite donc toute l'attention des savants. »

C'est Ampère qui a définitivement constitué la science des mouvements géométriques, en la définissant d'une manière précise, traçant les limites de son domaine, enfin en lui donnant un nom que chacun s'est empressé d'adopter.

Il est juste de dire que, bien antérieurement, le général Poncelet avait professé à l'École d'application et à l'hôtel de ville de Metz ce que nous appelons aujourd'hui la *Cinématique*. Depuis, M. Chasles, à qui la Géométrie du mouvement doit une partie de ses récents progrès, lui donna une place dans son Cours de Machines (Cours autrefois séparé du Cours de Mécanique) à l'École Polytechnique. Enfin, aujourd'hui le vœu de Carnot se trouve entièrement réalisé : la théorie des mouvements géométriques est faite. Sous le nom de *Cinématique*, elle constitue une science de deuxième ordre, laquelle a sa place marquée entre la Géométrie pure et la Mécanique proprement dite.

Elle emprunte à la Géométrie ses méthodes, et, par une juste réciprocité, elle lui fournit de puissants secours pour la résolution de ses problèmes les plus transcendants.

D'un autre côté, elle se rattache à la Mécanique, pour le compte de laquelle elle se charge d'élucider toutes les propriétés *nécessaires* du mouvement, celles qui sont du même ordre que le théorème du carré de l'hypoténuse, et qui ne sauraient dépendre, en aucune façon, ni de la nature des causes motrices ni des conditions physiques de la réalisation du mouvement.

Le mot de *Cinématique* ayant été pris, par les divers auteurs qui se sont occupés de cette science, dans des acceptions qui diffèrent légèrement l'une de l'autre, il convient de rappeler ici la définition donnée par Ampère :

« La Cinématique, dit-il, doit renfermer tout ce qu'il y a à dire des différentes sortes de mouvement, indépendamment des forces qui peuvent les produire.

» Elle doit d'abord s'occuper de toutes les considérations relatives aux espaces parcourus dans les divers mouvements, aux temps employés à les parcourir, à la détermination des vitesses d'après les diverses relations qui peuvent exister entre ces espaces et ces temps.

» Elle doit ensuite étudier les différents instruments à l'aide desquels on peut changer un mouvement en un autre (¹). »

C'est donc à la Cinématique qu'appartient la connaissance des organes ou instruments servant à changer la direction ou

(¹) AMPÈRE, Ouvrage cité, p. 50.

la vitesse d'un mouvement donné, connaissance qui, plus ou moins instinctive chez tous les hommes voués à la pratique des machines, leur inspire tant d'ingénieuses inventions. Il suffit à cet égard de nommer le métier à la Jacquart, les filatures mécaniques, les machines à coudre, etc.

De là une sous-division de la Cinématique, à laquelle on peut donner avec Robert Willis le nom de *Théorie des mécanismes*, division qui a une très grande importance au point de vue pratique et qui a fait depuis quelque temps de bien notables progrès. La théorie géométrique des mécanismes nous apprend à produire, au moyen d'un moteur donné, les mouvements les plus divers; son application comporte une assez grande précision. Il existe même un grand nombre de machines, notamment dans l'horlogerie, pour lesquelles l'étude géométrique des mécanismes employés est pour ainsi dire rigoureusement suffisante, tant est secondaire la considération des forces qui doivent leur donner le mouvement.

Hâtons-nous pourtant d'ajouter que l'emploi exclusif de la Cinématique expose à de graves mécomptes ceux qui se livrent à la recherche de nouvelles combinaisons mécaniques, sans essayer de se rendre compte des forces qu'il faudra développer pour donner naissance aux mouvements qu'ils ont en vue. On citerait une foule de mouvements géométriques qui ne sont pas réalisables utilement, soit à cause des frottements, soit à cause des efforts considérables qui s'exercent entre les diverses pièces, soit enfin pour un grand nombre de raisons que nous étudierons à propos de chaque mécanisme.

Par exemple : tout le monde sait ce que c'est qu'une vis et qu'un écrou; tout le monde sait aussi qu'en tournant la vis, on l'enfonce dans son écrou supposé fixe. Géométriquement, on devrait donc, en poussant la vis dans l'autre sens, l'obliger à se dévisser. Or ceci n'est généralement pas possible : c'est même sur cette propriété qu'est fondée la presse à vis, dans laquelle en tournant une vis, on exerce sur un corps un effort considérable, sans que la réaction de celui-ci, quelque grande qu'elle soit, puisse avoir pour effet de desserrer la vis abandonnée à elle-même.

Autre exemple. Considérons la combinaison très simple et bien connue qui constitue le rouet de la fileuse. Il est évident qu'en tournant la roue à la main, on fera prendre à la pédale un mouvement d'oscillation autour de son point d'attache. Résulte-t-il de là qu'en imprimant directement ce mouvement à la pédale, on soit assuré de produire la rotation continue du rouet? C'est là une chose qui n'est rien moins qu'évidente : elle n'aura lieu en effet que sous certaines conditions, que l'habitude enseigne promptement aux fileuses, mais dont nous aurons à faire une étude approfondie quand nous voudrons appliquer le même principe géométrique à des machines puissantes.

De là la nécessité de se rendre un compte exact des efforts qui s'exercent entre toutes les pièces des mécanismes étudiés en Cinématique et, en général, d'apprendre à calculer les forces qu'il faut appliquer à un corps donné pour lui faire prendre un mouvement déterminé : tel est l'objet de la deuxième Partie du Cours, de la *Dynamique*.

II. La *Dynamique* est relative aux forces, à leur mesure et à la manière dont elles produisent ou modifient le mouvement. Cette science comprend l'ensemble des principes et des théorèmes qui nous mettront à même de résoudre le double problème suivant :

1° *Étant données les forces qui agissent sur un corps quelconque, déterminer le mouvement qui prendra naissance si le corps est au repos ou, dans le cas contraire, chercher comment se modifiera le mouvement acquis en vertu de causes antérieures.*

2° Réciproquement : *Connaissant le mouvement d'un mobile, trouver les forces qui agissent actuellement* (¹) *sur ce mobile.*

Lorsqu'un corps, primitivement en repos, vient à se trouver soumis à l'action de plusieurs forces, il ne se met pas nécessairement en mouvement : c'est là un fait d'expérience journalière. On voit souvent l'état de repos persister malgré la

(¹) Il faut bien remarquer le mot *actuellement*; car, philosophiquement, il est impossible de conclure des phénomènes actuels aux causes antérieures; et toute induction de ce genre doit être reléguée dans le domaine fantaisiste de l'hypothèse.

présence des forces; on dit alors que les forces se font *équilibre* ou que le corps est en *équilibre* sous l'action des forces.

Des forces appliquées à un corps en mouvement peuvent aussi se faire équilibre. On le reconnaît en ce que le mouvement du corps n'est pas changé, selon qu'on introduit ou qu'on supprime ces forces.

Les questions relatives à l'équilibre sont évidemment comprises parmi celles qui font l'objet de la Dynamique; elles embrassent tous les cas où le mouvement cesse d'être. Ces questions sont cependant beaucoup trop importantes pour qu'on puisse se borner à les traiter plus ou moins légèrement dans un Chapitre de la Dynamique.

En effet l'art de la construction n'est autre chose que la recherche des moyens économiques de disposer des matériaux en équilibre, sous l'action des forces auxquelles l'édifice projeté doit se trouver soumis; et, d'autre part, bien que les machines soient faites pour être en mouvement, pour marcher, nous verrons que les cas où elles sont en équilibre donnent en réalité la clef de tous les phénomènes du fonctionnement normal.

La science de l'équilibre constitue une division spéciale de la Mécanique, division qui a reçu le nom de *Statique*.

Nous avons dit, et l'esprit conçoit aisément, qu'on peut déduire la Statique de la Dynamique. Inversement, d'Alembert a su réduire à une simple question de Statique le problème général de la Dynamique que nous venons d'énoncer, et qui paraît au premier abord d'un ordre de complication infiniment supérieur.

Mais il faut bien se garder d'escamoter ainsi l'une des deux sciences au profit de l'autre. Chacune d'elles a ses principes distincts, son enchaînement de théorèmes, ses applications spéciales : chacune a donc le même droit que l'autre à l'indépendance.

Historiquement, la naissance de la Statique a précédé de beaucoup celle de la Dynamique. Archimède nous a laissé deux Traités relatifs à la théorie de l'équilibre. Il s'appuie sur le *principe du levier*, lequel consiste, comme on sait, en ce que, si un levier droit est chargé de deux poids quelconques placés de part et d'autre du point d'appui, à des distances de ce point réciproquement proportionnelles aux mêmes poids, ce levier sera en équilibre, et son appui sera chargé de la somme des deux poids.

Pour trouver le premier exemple de la résolution d'un problème de Dynamique, il faut franchir d'un bond dix-huit siècles et passer d'Archimède à Galilée; car, suivant la belle expression de Lagrange, l'intervalle qui sépare ces deux grands génies disparaît dans l'histoire de la Mécanique. Galilée a trouvé les lois de la chute des graves et celles du mouvement parabolique des projectiles. Huygens, Newton et leurs successeurs, développant les idées de Galilée, ont résolu la plupart des problèmes qui se rapportent au mouvement des corps sous l'influence de forces données.

C'est ainsi qu'a été fondée la Mécanique céleste, science véritablement prodigieuse, si l'on considère à la fois la grandeur de son objet, la simplicité de ses méthodes et la rigoureuse précision de ses résultats; science prodigieuse, ai-je dit, et qui pourtant doit en définitive être regardée comme la plus facile entre toutes les branches de la Mécanique appliquée, grâce à la netteté des conditions des problèmes, à l'ancienneté des observations dont on dispose et surtout à ces instruments puissants qui nous font connaître les astres les plus éloignés, aussi bien que les objets tombant immédiatement sous nos sens.

Mais quittons le ciel de Newton et de Laplace pour revenir à ce qui nous intéresse plus particulièrement aujourd'hui, à l'objet et au plan de notre *Cours élémentaire*. Nous avons distingué dans la science du *mouvement* et des *forces* trois grandes divisions traitant respectivement :

1° Du *mouvement*, abstraction faite des forces qui l'ont fait naître;

2° Des *forces*, indépendamment du mouvement qu'elles peuvent produire;

3° Enfin du mode d'action des forces relativement au mouvement, c'est-à-dire de la manière dont les forces font naître le mouvement ou modifient celui qui est acquis.

Ces trois Parties :

Cinématique,
Statique,
Dynamique,

constituent ce qu'on appelle communément la *Mécanique rationnelle*. L'épithète de *rationnelle* indique que les spéculations de la Mécanique ne s'appliquent, *immédiatement*, qu'à des *êtres de raison*, c'est-à-dire à des êtres purement fictifs, que la raison conçoit, mais qui n'existent pas dans la nature.

Ainsi nous considérerons les corps solides, tels que les métaux, les pierres, comme indéfiniment durs et rigides, quels que soient les efforts auxquels on les soumette; les liquides, au contraire, seront dotés d'une absence complète de cohésion et d'une incompressibilité absolue; les cordes seront parfaitement flexibles et inextensibles, et ainsi du reste.

Mais, dira-t-on, à quoi bon cette savante étude de corps purement imaginaires? Pourquoi tout ce laborieux échafaudage de notions *théoriques* uniquement propres à fausser les idées, de calculs qui ne trouvent leur application que dans le ciel? Cette objection est spécieuse; elle mérite que nous nous arrêtions un instant à la discuter, car elle touche à l'une des choses qui ont été et qui seront longtemps encore également fatales aux progrès des sciences et de l'industrie; je veux parler de l'antagonisme radical qu'on cherche trop souvent à établir entre ce qu'on nomme la *théorie* et la *pratique*.

Quand la science d'Archimède et de Galilée, fière d'avoir soumis les espaces célestes et trouvé le secret des mouvements des astres capricieux de notre système solaire, quand la Mécanique, dis-je, descendant du ciel sur la Terre, voulut appliquer ses puissants moyens d'investigation aux questions de la pratique technique et industrielle, elle trouva, dans la constitution moléculaire des corps matériels, comme autant d'univers nouveaux attendant à leur tour un législateur.

« Sortes de systèmes, dit M. Biot [1], non moins merveilleux que le monde planétaire, mais d'une complication infiniment supérieure, où des myriades de particules indiscernables, agissant et réagissant les unes sur les autres à des distances qui défient les moyens d'observation les plus perfectionnés, offrent au calculateur des difficultés incomparablement plus grandes que les mouvements réguliers qui s'opèrent dans la solitude des cieux. »

---

(1) Biot, *Mélanges*, t. I, p. 13.

Il faut le dire, on n'est pas encore parvenu à introduire en toute rigueur les considérations mathématiques dans l'étude de ce nouvel ordre de phénomènes. En attendant, le progrès suit son cours : l'industrie fait tous les jours de nouvelles découvertes, partout de puissantes machines sont créées, de gigantesques manufactures s'élèvent, et la science, impuissante à régulariser l'essor de la pratique, doit faire au moins tous ses efforts pour contenir les écarts inévitables dans des limites non dangereuses pour le développement de la civilisation. C'est ainsi que les Navier, les Coriolis, les Poncelet, ont créé une science de transition, si l'on peut s'exprimer ainsi, science que nous appellerons la *Mécanique appliquée*, par opposition à la *Mécanique rationnelle*.

Le Cours de l'École Polytechnique ne peut en aucune façon passer pour un Cours pratique. Mais, quand on a fixé les bases des programmes actuels, on a voulu que, préparant aux travaux variés des diverses carrières militaires ou civiles, notre enseignement renfermât, à côté des principes de la Mécanique rationnelle, lesquels dérivent de la raison, des principes d'un tout autre ordre, qui nous sont révélés par une observation attentive des phénomènes que présentent les corps considérés par rapport au mouvement.

Il importe, dès à présent, de nous bien pénétrer de l'esprit qui nous dirigera dans la Partie du Cours consacrée aux applications de la Mécanique.

Après avoir reconnu tout de suite l'impossibilité, pour ainsi dire absolue, de résoudre rigoureusement la plus simple des questions de ce genre, empressons-nous d'ajouter qu'une pareille solution serait tout aussi inutile au point de vue des applications (lequel nous préoccupe actuellement) que pourrait l'être en Géométrie une solution exacte du fameux problème de la quadrature du cercle, par exemple. Tout ce qu'il faut, c'est que l'exactitude des résultats soit suffisante pour les besoins de l'industrie. Or ceci nous conduit tout naturellement à comprendre l'utilité pratique des spéculations relatives aux êtres de raison.

En effet, après avoir étudié physiquement les corps soumis à l'expérience et les conditions où ces corps se trouvent placés, nous imaginerons des corps fictifs, doués de propriétés qu'on leur attribuera de manière à simplifier la question, tout en s'écartant le moins possible des propriétés que l'observation aura révélées dans les corps naturels. Ce dernier point est essentiel.

C'est à ces corps hypothétiques, à ces êtres de raison bien définis, qu'on appliquera le calcul. La solution obtenue ne s'appliquera évidemment pas au problème qu'on avait à résoudre, puisqu'on a supposé les corps différents de ce qu'ils sont dans la nature; mais du moins elle ne différera pas beaucoup de la solution cherchée, dont elle fournira *une première approximation*.

Il faudra ensuite corriger cette solution, en évaluant numériquement les petites erreurs qui proviennent de l'inexactitude des hypothèses fondamentales. Enfin on passera à la vérification des résultats théoriques définitifs; car il ne faut jamais oublier qu'une solution fournie par la méthode que je viens de décrire ne saurait être valable pratiquement qu'après avoir été soumise à la sanction de l'expérience et *dans les limites* où la vérification expérimentale a eu lieu.

Nous verrons, dans la suite de ce Cours, un certain nombre de théories où l'accord intelligent du calcul et de l'expérience conduit à des résultats qui, sans avoir la prétention de suppléer d'une manière absolue à la pratique proprement dite, fournissent cependant des indications précieuses à l'architecte, au mécanicien, à l'ingénieur. Et, si dans d'autres cas nos efforts moins heureux ne parviennent pas à triompher des difficultés d'un problème plus rebelle, il faudra bien nous résigner à avouer franchement notre impuissance et nous borner à reconnaître et à signaler les écueils, fameux souvent par quelque illustre naufrage.

C'est d'ailleurs toujours une chose assez fâcheuse que de voir la science pure forcée d'abdiquer la direction de l'activité industrielle d'une époque; car c'est l'ère des tâtonnements, des erreurs et des mécomptes; c'est l'ère des efforts sublimes et des chutes douloureuses, de Dédale et d'Icare, audacieux et infortunés précurseurs de Montgolfier; c'est l'ère de la machine à vapeur avant Watt, des machines caloriques ou électromagnétiques encore aujourd'hui.

J'espère que ces quelques considérations préliminaires ne vous auront pas paru trop inutiles : il importe, avant de se lancer dans une carrière aussi vaste que celle de la Mécanique, de savoir clairement d'où l'on part et où l'on va.

Cela fait, on peut se mettre en route; mais il faut avoir le plus grand soin d'observer attentivement le pays qu'on traverse, afin de retrouver plus tard son chemin sans hésitation, quel que soit le point où l'on se voie accidentellement transporté, et de recommencer au besoin sans guide la route que nous allons aujourd'hui parcourir ensemble.

Nous reviendrons d'ailleurs très fréquemment et pour ainsi dire à satiété, dans toute la suite de ce Cours, sur les principes généraux dont je viens de vous exposer l'enchaînement, principes qui s'éclairciront peu à peu par la vertu de la plus puissante des figures de rhétorique, la répétition. Enfin, quand nous reprendrons une dernière fois ces notions, dans les Leçons consacrées à la revision, nous serons, je l'espère, tout à fait en mesure d'embrasser d'un coup d'œil l'harmonieuse unité de la Mécanique théorique et expérimentale, en comprenant comment tout se réduit en définitive à un petit nombre de principes, et à un très petit nombre de conséquences fondamentales, qui sont ce qu'on doit surtout s'attacher à retenir.

PREMIÈRE SECTION.

CINÉMATIQUE PURE.

Nous distinguons deux Sections dans la science des mouvements géométriques, telle que nous l'avons définie dans nos préliminaires :

La *Cinématique pure* [1], sorte de Géométrie transcendante dans laquelle on étudie, comme le demandait Carnot, *ce que produit le mouvement d'un solide dans l'espace*, le temps se comportant ici, pour ainsi dire, comme une quatrième dimension ultra-géométrique;

La *Théorie des mécanismes*, comprenant l'application des théorèmes de la Cinématique pure au tracé géométrique des organes de machines.

Nous nous occuperons d'abord, pour suivre l'ordre logique, de la première des deux divisions que nous venons d'indiquer; et, comme il est évident qu'on connaît le mouvement d'un corps quand on connaît le mouvement des divers points de ce corps, nous commencerons la Cinématique pure par l'étude du mouvement d'un point géométrique.

[1] J'emprunte la dénomination de *Cinématique pure* à M. Resal, qui a publié sous ce titre un Traité complet des mouvements, considérés au point de vue géométrique (1 vol., Mallet-Bachelier, 1862).

CHAPITRE PREMIER.

MOUVEMENT SIMPLE D'UN POINT.

On détermine la position d'un point dans l'espace en rapportant ce point à un système de comparaisons fixe et invariable, généralement à trois axes rectangulaires. Pour savoir si un point est en repos ou en mouvement, il faut mesurer à des intervalles de temps déterminés les coordonnées de ce point par rapport à trois axes rectangulaires fixes, ou à tout autre système de coordonnées bien défini. Si ces coordonnées varient, c'est que le point est en mouvement.

On voit que, dans ce cas, nos observations nous font connaître une série de positions successives du point mobile, c'est-à-dire la trajectoire de ce point, si ces positions sont suffisamment rapprochées. Elles donnent aussi, si l'on a eu soin de noter les temps des observations, les instants (1) du passage de ce mobile à certains points bien déterminés de sa trajectoire ; et l'on a ainsi les deux éléments de ce que nous avons appelé la *loi du mouvement étudié*.

C'est par l'application de cette méthode qu'on voit la liste des planètes télescopiques s'enrichir chaque année de plusieurs noms nouveaux. Les astronomes voués à ce genre de recherches explorent avec soin les régions du zodiaque dont ils possèdent des cartes exactes. Aperçoivent-ils un astéroïde non marqué sur ces cartes, ils en mesurent chaque jour les coordonnées célestes, et, s'ils trouvent constamment les mêmes valeurs, le nouveau corps doit être rapporté aux étoiles fixes;

(1) Il ne faut pas attribuer au mot *instant* le sens d'intervalle de temps très court, dt : l'instant est à la durée ce que le point est à l'étendue.

Quant au mot de *moment*, synonyme d'*instant* dans le langage vulgaire, nous le rencontrerons plus tard fréquemment en Mécanique, pris dans l'acception du latin *momentum*.

dans le cas contraire, ce corps est une planète ou une comète. De plus, quand les observations sont en nombre suffisant, on en conclut les éléments de l'orbite de la planète ou de la comète et son moyen mouvement : on est alors à même de décider d'une manière définitive à quelle catégorie appartient l'astre qu'on vient de découvrir.

Nous avons dit que la connaissance complète de la loi du mouvement d'un point comprend deux parties parfaitement distinctes (1), qui sont :

1° La recherche de la trajectoire;

2° L'étude de la loi qui lie, sur cette trajectoire supposée connue, les espaces parcourus aux temps employés à les parcourir.

Nous traiterons séparément ces deux éléments, en commençant par le deuxième, c'est-à-dire par la relation des espaces parcourus sur une trajectoire donnée, aux temps employés à parcourir ces espaces.

§ I. — Étude de la loi du mouvement d'un point, indépendamment de la nature de la trajectoire.

Supposons la trajectoire connue : une position M du point mobile sur cette trajectoire (*fig.* 1) sera déterminée par la distance s du point M à un certain point fixe O. Ce point O est l'origine des coordonnées s, mesurées suivant la courbe OM.

Les longueurs OM seront naturellement affectées du signe + ou du signe —, selon qu'elles devront être portées à droite ou à gauche de l'origine O.

Pour que la loi du mouvement soit définie, il faut que l'on donne à chaque instant t la valeur de cette coordonnée s. A ce point de vue, la quantité s est une fonction de la variable in-

(1) Il est évident que ces deux choses sont absolument indépendantes l'une de l'autre, des trajectoires identiques pouvant être parcourues suivant des lois bien différentes les unes des autres, et réciproquement.

Il est à peine utile de faire observer que cette indépendance subsiste seulement lorsqu'on considère le mouvement en lui-même sans se préoccuper de ses causes; autrement il est évident que les causes qui produisent un certain mouvement influent à la fois sur la nature de la trajectoire et sur les espaces parcourus dans des temps donnés.

dépendante t, ce qui s'exprime généralement par une équation de la forme

$$s = f(t).$$

Lorsque la relation de s à t est donnée analytiquement, on sait résoudre par les procédés ordinaires du calcul le double problème qui fait l'objet de la Cinématique :

1° *Quelle est, à un instant donné, la position du point mobile dans l'espace?*

2° Réciproquement, *le lieu du mobile étant donné, quelle heure est-il?*

Quelquefois on connaît s en fonction de t par une Table dont les éléments ont été déterminés par l'observation. Souvent alors, comme dans le problème de la chute des graves ou dans celui du mouvement elliptique des planètes, on peut substituer à la Table une formule qui en est la traduction fidèle; on rentre ainsi dans le cas précédent. Au contraire, il sera généralement commode, pour l'usage des praticiens, de transformer une formule en une Table. Alors le problème de la détermination du lieu du corps, ainsi que le problème inverse, se résout par les méthodes ordinaires d'interpolation, ou par des méthodes graphiques qui sont extrêmement utiles et auxquelles nous arrivons dans un instant.

Mouvement uniforme. — La loi de mouvement la plus simple qu'on puisse imaginer est celle du *mouvement uniforme*, dans lequel les espaces parcourus dans des temps égaux sont égaux, quelque petits que soient ces temps. Ceci revient à dire que, dans le mouvement uniforme, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps.

Soient (*fig.* 2) M_0 la position du mobile à l'instant pris pour l'origine des temps, M sa position à l'époque t, O l'origine des coordonnées s.

L'espace parcouru pendant le temps t est

$$M_0M = OM - OM_0 = s - s_0;$$

cette quantité devant être proportionnelle au temps t, on a

$$\frac{s - s_0}{t} = a,$$

a étant une constante positive ou négative, suivant que s est plus grand ou plus petit que s_0, t étant positif; c'est-à-dire suivant que le mouvement s'effectue dans le sens que nous avons choisi comme positif ou dans le sens opposé.

On déduit de là

$$(1) \qquad s = s_0 - at,$$

équation du mouvement uniforme. On voit que, dans ce mouvement, l'espace s est une fonction linéaire du temps t.

Vitesse dans le mouvement uniforme. — La constante a est l'espace parcouru dans l'unité de temps. Elle varie d'un mouvement uniforme à un autre, selon que le mouvement est plus ou moins *rapide*; c'est même cette quantité qu'on prend habituellement pour mesure du degré plus ou moins grand de rapidité ou de lenteur, quand on dit, par exemple, qu'un train parcourt tant de lieues à l'heure ou un projectile tant de mètres par seconde : nous la nommerons la *vitesse* du mobile. Ainsi :

On appelle vitesse, *dans le mouvement uniforme, l'espace parcouru par le mobile dans l'unité de temps.*

La vitesse est, si l'on veut, le rapport constant de l'espace parcouru pendant un certain temps t, et d'un mouvement uniforme, au temps t employé à parcourir cet espace.

Inutile de dire qu'on ne peut pas ainsi comparer un espace à un temps, mais bien les rapports de ces deux quantités à leurs unités respectives. Il résulte de là qu'il n'y a pas d'unité de vitesse : la vitesse, définie comme nous venons de le faire, est un nombre abstrait, dont la grandeur varie à la fois avec l'unité de longueur et l'unité de temps, le rapport de deux vitesses étant toutefois indépendant de ces deux unités.

Habituellement le temps est considéré comme un nombre abstrait, c'est-à-dire que l'homogénéité des formules par rapport au temps ne se trouve pas immédiatement en évidence. Dans ce système la vitesse est une longueur, un nombre de mètres; et il faut sous-entendre : *parcourus dans une seconde*.

Mesure de la vitesse des navires. — Dans la navigation maritime, les vitesses sont exprimées en *nœuds*.

Un nœud répond à un mille marin, soit à un tiers de lieue marine ou à 1852^m par heure, c'est-à-dire à $0^m,514$ par seconde. On aura donc la vitesse d'un navire en multipliant $0^m,514$ par le nombre de nœuds.

Pour mesurer la vitesse d'un navire, il faut avoir un repère fixe ou sensiblement fixe. On obtient ce repère en lançant à

guindole

la mer un petit corps flottant nommé *bateau de loch*, retenu par un cordage nommé *ligne de loch*. L'observation prouve que les ébranlements qui se propagent à la surface d'un liquide n'impriment aux corps flottants qu'un mouvement d'oscillation à peu près vertical; et l'on peut admettre que le loch reste immuable dans le sens horizontal, dès qu'il se trouve à une distance du navire égale à la longueur du bâtiment.

Cet instant est indiqué sur la ligne de loch par un morceau d'étamine appelé *houache*. On retourne alors un sablier, et on laisse filer de la ligne pendant toute la durée de l'écoulement du sable dans le sablier, durée qui est ordinairement d'une demi-minute.

Le chemin parcouru pendant cette demi-minute est donné par des nœuds qui se trouvent sur la ligne de loch, à des distances réglées de manière qu'un nœud dans une demi-minute réponde à un mille par heure. Telle est l'origine de l'habitude d'estimer les vitesses en nœuds.

Si l'on calcule la distance de deux nœuds par la proportion que nous avons indiquée, on trouve $15^m,4$ ou environ 47 pieds. Mais il faut remarquer que le flotteur n'est pas entièrement libre, et que la ligne de loch, toujours légèrement tendue, lui communique nécessairement un petit mouvement dans le sens du navire. Pour corriger cette cause d'erreur, l'expérience a prouvé qu'il fallait prendre la distance de deux nœuds égale à 45 pieds ou 9 brasses.

J'ai insisté un peu sur cette opération bien simple, qui nous a fourni un premier exemple de la résolution d'une question pratique. J'ajouterai encore que le bateau de loch a une forme triangulaire; qu'il est lesté de manière à se tenir verticalement, position qui diminue les mouvements latéraux; et qu'enfin, pour l'empêcher de s'incliner par l'action de la ligne de loch, on emploie une cheville qui est rattachée à un point convenablement choisi sur cette ligne, et qui pénètre dans un trou A (*fig.* 3).

Pour retirer le loch, on commence par lui imprimer une

secousse; par l'effet de cette secousse, la cheville se dépasse, le triangle flotte à plat, et on le ramène facilement à bord.

Équations du mouvement uniforme. — Nous aurons défini la vitesse d'une manière complète si nous lui attribuons le sens dans lequel s'effectue le mouvement. Alors elle est dirigée vers les s positifs ou en sens contraire, suivant que a est positif ou négatif.

Convenons de regarder la vitesse comme positive lorsqu'elle est dirigée dans le premier sens, et comme négative lorsqu'elle est dirigée dans le sens opposé; le coefficient a représentera maintenant la vitesse du mobile en grandeur et en signe; et, si nous la désignons d'une manière générale par v, nous aurons pour exprimer les lois du mouvement uniforme les deux équations

$$(2)\qquad \begin{cases} s = s_0 + at, \\ v = a. \end{cases}$$

Nous aurons achevé la discussion des diverses quantités qui figurent dans ces équations, si nous remarquons que le temps doit aussi être considéré comme pouvant être pris positivement ou négativement.

En effet, nous avons choisi arbitrairement un certain instant que nous avons appelé *initial*, à partir duquel nous avons commencé à compter les temps, comme on compte les dates historiques à partir de la naissance de Jésus-Christ. Or il n'y a aucune impossibilité à ce que le mobile ait été en mouvement avant cet instant initial; et les équations (2) pourront représenter ces positions antérieures, à la condition d'admettre pour t des valeurs négatives.

Mouvement varié. — Quand le mouvement n'est pas uniforme, on dit qu'il est *varié*. La distance s du mobile à l'origine des espaces n'est plus une fonction linéaire du temps t; ces deux variables sont liées l'une à l'autre par une équation quelconque, que nous représentons par

$$s = f(t).$$

Mouvements périodiques. — Il faut distinguer parmi les mouvements variés ceux qui sont *périodiques* ou périodiquement uniformes, c'est-à-dire dans lesquels les espaces parcourus dans des temps égaux convenablement choisis sont égaux, comme dans le mouvement uniforme. Mais cette égalité, dans les mouvements périodiques, ne subsiste pas quelque petits que soient les temps égaux considérés, mais seulement quand ces temps sont des multiples d'un certain intervalle constant appelé *période*.

La plupart des mouvements qui nous apparaissent comme uniformes dans la nature ne sont que périodiquement uniformes : tels sont la marche des animaux, le mouvement apparent du Soleil autour de la Terre, celui des aiguilles d'une horloge, d'une roue hydraulique, du volant d'une machine à vapeur, etc.

Mouvements variés quelconques. Courbes des espaces. — Quelle que soit la fonction $f(t)$, algébrique, transcendante ou même non susceptible d'une expression analytique, on conçoit qu'on construise graphiquement l'équation $s=f(t)$, en coordonnées rectangulaires ou obliques.

Prenons (*fig.* 4) deux droites rectangulaires KS, KT, pour axes des espaces et des temps. Puis, ayant choisi arbitrairement une longueur convenable pour représenter une seconde de temps, portons sur l'axe KT des abscisses Kp_1, Kp_2, ..., proportionnelles aux temps t_1, t_2, ..., comptés à partir d'un certain instant initial. Enfin, par les points ainsi déterminés, élevons des ordonnées proportionnelles aux valeurs de s correspondantes. Nous aurons ainsi construit une courbe, dite *courbe des espaces*, dont l'équation sera $s=f(t)$, et qui nous servira à résoudre graphiquement le double problème de la détermination de s au moyen de t ou de t au moyen de s. Cette méthode d'interpolation graphique offrira une exactitude suffisante dans un grand nombre de cas.

Les applications des courbes à la représentation des fonctions d'une variable, et celles des surfaces à la représentation d'une fonction de deux variables indépendantes, ont été exposées dans le Cours de Géométrie. Même quand on a l'expression analytique d'une loi, les courbes ont l'avantage de peindre cette loi aux yeux de la manière la plus nette; leur usage commence à se répandre dans la pratique.

Mais c'est principalement quand on se propose de déterminer la loi d'un mouvement par l'observation qu'il est pour ainsi dire indispensable de consigner dans un Tableau graphique les résultats bruts de l'expérience. Les notions les plus élémentaires de la continuité des lignes courbes ne permettent pas à une erreur un peu grave de passer inaperçue; les particularités remarquables de la loi qu'on étudie se trouvent mises bien nettement en évidence par les diverses affections géométriques de la courbe; les erreurs qui proviennent du défaut de précision de la méthode d'observation, du moins les erreurs non systématiques, se corrigent tout naturellement par le tracé même de la figure.

Enfin la comparaison de cette figure avec les principales courbes, connues, paraboliques, hyperboliques, logarithmiques, trigonométriques, etc., facilitera, s'il y a lieu, la recherche de l'expression analytique de la loi.

Application au mouvement uniforme. — La courbe des espaces est une ligne droite (*fig.* 5). L'ordonnée à l'origine de cette droite est la distance s_0, positive ou négative, qui sépare le mobile, à l'instant initial, de l'origine des espaces sur la trajectoire.

Le coefficient angulaire de la droite des espaces fait connaître la vitesse en grandeur et en signe. Pour avoir la vitesse en mètres par seconde, il faut porter, à partir d'un point quelconque m et parallèlement à l'axe des temps, la longueur $m\mu$ qui représente une seconde à l'échelle adoptée. La perpendiculaire $\mu m'$ donne la vitesse à l'échelle des espaces.

Tous les problèmes auxquels donne lieu le mouvement uniforme se trouvent résolus par la théorie de la ligne droite à laquelle on peut se contenter de renvoyer pour tous les détails. Exemple :

Problème. — *Connaissant les positions d'un mobile à deux époques données, et sachant d'ailleurs que son mouvement sur une ligne connue est uniforme, trouver l'équation de ce mouvement.*

Prenons à volonté l'origine des distances et celle des temps et soient

s_1 et s_2 les distances à l'origine O des deux positions connues;
t_1 et t_2 les temps écoulés depuis l'instant initial jusqu'à ceux qui correspondent à ces deux positions.

Au moyen de ces données, on trouve

$$s_0 = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1}, \qquad a = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1};$$

d'où

$$s = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1} + \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} t,$$

ou

$$s - s_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} (t - t_1).$$

Vitesse dans le mouvement varié. — Dans le mouvement varié, la courbe des espaces est une courbe quelconque (*fig.* 6). Considérons deux points m, m' de cette courbe; la différence qm' des ordonnées correspondant aux temps t' et t représente l'espace parcouru pendant le temps $t' - t$; et, si cet espace avait été parcouru d'un mouvement uniforme, on aurait eu, pour figurer la loi des espaces pendant le temps $t' - t$, la droite mm' au lieu de la courbe qui joint ces deux points. La vitesse de ce mouvement uniforme aurait été donnée par le rapport $\frac{qm'}{mq}$, égal au coefficient angulaire de la corde mm': ce rapport est ce qu'on peut appeler la *vitesse moyenne* du mouvement varié, correspondant au point M de la trajectoire et à l'intervalle de temps pp'; cette quantité est une fonction à la fois de l'époque t et de l'intervalle considéré $t' - t$. Mais, si l'on conçoit que cet intervalle et la longueur pp' diminuent indéfiniment, la corde mm' tendra vers une position limite, qui est la tangente à la courbe des espaces au point m. En même temps la vitesse moyenne, le coefficient angulaire de la corde, tendra vers une limite $\frac{ds}{dt}$, qui ne dépendra plus que du temps t ou de la position du point M sur la trajectoire.

Cette limite $\frac{ds}{dt}$ ou $f'(t)$ est ce que nous appellerons la *vitesse* du mouvement varié à l'époque t.

L'élément ds étant positif ou négatif suivant que le mouvement est dirigé dans le sens des s positifs ou dans le sens opposé, l'expression $\frac{ds}{dt}$ fait connaître en même temps la grandeur et, par son signe, le sens de la vitesse. C'est la vitesse

du mouvement uniforme qu'on peut toujours considérer, pendant un temps infiniment petit, comme identique au mouvement étudié.

Ainsi se trouve généralisée notre définition de la vitesse dans le mouvement uniforme. Analytiquement, la vitesse est la dérivée de l'espace par rapport au temps; géométriquement, c'est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe des espaces : on la construit en prenant parallèlement à l'axe des temps une longueur $m\mu$ égale à une seconde, puis menant la perpendiculaire $\mu\nu$, limitée à la tangente au point m.

C'est de cette manière qu'on détermine à chaque instant la vitesse d'un mobile dont le mouvement a été observé directement et réduit en Tables. Il faut alors passer par l'intermédiaire de la courbe des espaces et opérer comme précédemment.

Quelquefois on se dispense de construire et la Table et la courbe, en obligeant le mobile à tracer lui-même cette dernière automatiquement.

Nous reviendrons sur les divers procédés fort ingénieux au moyen desquels on oblige un mobile qui, par sa grande vitesse, semble se dérober à nos observations, à écrire lui-même les lois de son mouvement dans le langage dont je viens de vous donner la clef. Je me contenterai pour le moment de citer, comme exemple de cette méthode expérimentale, la détermination des lois de la chute des graves au moyen de l'appareil que le général Morin a fait construire, d'après les indications du général Poncelet.

Le corps qui tombe est armé d'un crayon et marque sa trace sur une feuille de papier qui se déplace horizontalement, par l'effet d'un mouvement d'horlogerie, de manière à présenter à chaque instant, en regard de la verticale de chute, des verticales dont les distances sont proportionnelles au temps. Habituellement, pour plus de commodité, la feuille de papier est enroulée sur un cylindre; en la développant sur un plan, on obtient la courbe des espaces.

Courbe des vitesses. — Il résulte de ce qui précède que, dans le mouvement varié, la vitesse est une fonction du temps t, fonction dont on sait trouver la valeur à chaque instant quand on connaît la loi du mouvemant. Il est naturel de représenter aussi cette fonction v par une courbe, et ceci nous procurera des avantages du même ordre que ceux qui résultent de la considération de la courbe des espaces.

Pour construire la courbe des vitesses, connaissant la courbe des espaces $m m_1 m_2$ (*fig.* 7), nous déterminerons, comme nous l'avons indiqué, la vitesse $\mu\nu$ correspondant au point m de la courbe mm_1 ou au point M de la trajectoire; nous porterons ensuite la longueur $\mu\nu$ sur l'ordonnée du point p, en faisant bien attention au signe, et nous aurons ainsi autant de points que nous le voudrons de notre courbe des vitesses.

Réciproquement, connaissant cette courbe des vitesses, on peut en déduire la courbe des espaces : soit analytiquement, en intégrant l'équation

$$ds = v\,dt, \tag{3}$$

soit graphiquement, par une quadrature.

Mais, pour que le problème soit déterminé, il faut qu'outre la courbe des vitesses on donne un premier point de la courbe des espaces cherchée, afin qu'on puisse trouver la valeur de la constante arbitraire introduite par l'intégration de l'équation (3), équation dont on peut mettre l'intégrale sous la forme

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt.$$

Soit m_0 ce premier point de la courbe (*fig.* 8) : pendant le temps dt, l'accroissement ds de l'ordonnée est égal à $v\,dt$, c'est-à-dire au petit rectangle n_0p_1, dont la base est égale à dt et la hauteur à la vitesse v. Ayant pris q_1m_1 égal à ce rectangle, nous prendrons de même $q_2m_2 = n_1p_2$; enfin un accroissement fini quelconque qm sera représenté par l'aire correspondante n_0npp_0, qui est la limite de la somme de ces rectangles [1].

Quand on ne saura pas calculer exactement l'intégrale définie $\int_{t_0}^{t} v\,dt$, ce qui arrivera, par exemple, toutes les fois que

[1] Les temps, c'est-à-dire l'une des dimensions des aires dont nous parlons, devant être considérés comme des nombres abstraits, on voit qu'en définitive chacune de ces aires représente un nombre de mètres, c'est-à-dire une longueur.

la courbe des vitesses sera donnée par un tracé graphique, on calculera les espaces parcourus en appliquant à l'aire n_0p les formules connues de quadrature approximative.

On a construit des machines qui tracent elles-mêmes la courbe des vitesses.

Il existe aussi des appareils qui servent à quarrer mécaniquement une courbe quelconque supposée tracée, ce sont les *planimètres*; enfin, dans d'autres dispositions, la courbe se quarre en même temps qu'elle se construit ou qu'elle est censée se construire automatiquement. Nous retrouverons ces appareils dans une autre Partie du Cours.

On prend quelquefois pour ordonnées des fonctions de l'espace ou de la vitesse, soit qu'on y soit forcé par la nature des instruments de mesure et de tracé, soit qu'on ait uniquement en vue de simplifier les opérations graphiques à exécuter sur ces courbes. Nous nous bornons à faire ici mention des courbes dont les ordonnées sont proportionnelles à la variable qu'il s'agit de représenter.

Mouvement uniformément varié. — Le mouvement varié le plus simple est celui dans lequel les vitesses acquises dans des temps égaux sont égales, quelque petits que soient ces temps : c'est le *mouvement uniformément varié*.

Soient v_0 la vitesse à l'instant initial, v la vitesse au bout du temps t; la vitesse acquise est $v - v_0$, et l'on a par définition

$$\frac{v - v_0}{t} = j,$$

j étant une constante. On tire de là

$$v = v_0 + jt,$$

expression de la loi des vitesses dans le mouvement uniformément varié.

La courbe des vitesses est une ligne droite, dont v_0 est l'ordonnée à l'origine et j le coefficient angulaire (*fig.* 9).

De l'accélération. — Cette quantité j, qui joue par rapport à la vitesse le même rôle que celle-ci par rapport aux espaces, se nomme l'*accélération*. Quand on introduit ainsi dans la science une expression tirée du langage vulgaire, il faut avoir soin de préciser le sens qu'on y attache. Il est possible que notre accélération soit un retard, v étant plus petit que v_0; alors j est négatif. D'autres fois, au contraire, le retard est indiqué par une accélération positive, lorsque la vitesse v est négative. Inutile d'insister sur ces particularités, qui n'offrent aucune difficulté.

L'accélération constante j est ce qui distingue l'un de l'autre les différents mouvements uniformément variés; c'est la vitesse acquise pendant l'unité de temps. On la construit en prenant $n\nu$ égale à une seconde et menant la perpendiculaire $\nu n'$.

Lois de la chute des graves. — L'expérience prouve que le mouvement d'un corps qui tombe librement dans le vide est uniformément accéléré. L'accélération de ce mouvement est la même pour tous les corps; elle varie avec la position géographique du lieu et en même temps avec l'altitude; enfin, à la latitude de Paris et au niveau de la mer, elle est représentée par le nombre 9,8088, qu'on remplace habituellement par la lettre g.

D'après ce que nous avons dit à propos de la vitesse, le temps étant un nombre abstrait, l'accélération est un certain nombre de mètres, nombre qui varie quand on change l'unité de temps.

Par exemple, si l'on prenait pour unité de temps la minute, la valeur de g serait 3600 fois plus grande. En effet, d'une part, la vitesse acquise au bout d'une minute est 60 fois la vitesse acquise au bout d'une seconde, puisque les vitesses acquises croissent proportionnellement au temps; d'autre part, le nombre de mètres qui exprime une vitesse donnée est 60 fois plus considérable en prenant pour unité la minute, puisque la vitesse est l'espace parcouru *d'un mouvement uniforme* pendant l'unité de temps, et que cette unité est devenue 60 fois plus grande. Donc, en définitive, le nombre qui mesure l'accélération g est devenu 3600 fois plus considérable.

Équations du mouvement uniformément varié. — Pour avoir la loi des espaces, il suffit d'égaler $s - s_0$ à l'aire du trapèze $n_0 p$ (*fig.* 10), dont la hauteur est égale à t et dont les bases sont respectivement v_0 et v ou $v_0 + jt$; on a ainsi

$$s - s_0 = t \times \tfrac{1}{2}(v_0 + v_0 + jt),$$

d'où

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} j t^2;$$

c'est ce qu'aurait donné l'intégration de l'équation

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + jt.$$

Construisons les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2, \\ v = v_0 + jt. \end{cases}$$

La première représente une parabole dont l'axe est parallèle à celui des s, et qui peut occuper les quatre positions indiquées par la *fig.* 11, suivant les signes des quantités v_0 et j:

1° $v_0 > 0$, $j > 0$, mouvement uniformément accéléré proprement dit.

2° $v_0 < 0$, $j > 0$, mouvement d'abord retardé, puis accéléré, dans le sens ordinaire du mot; c'est-à-dire que la vitesse diminue d'abord en valeur absolue, s'annule, puis que le mouvement recommence dans le sens opposé, avec une vitesse indéfiniment croissante.

3° $v < 0$, $j < 0$, mouvement accéléré dirigé du côté des s négatifs.

4° $v_0 > 0$, $j < 0$; le mouvement, d'abord dirigé vers les s positifs, voit sa vitesse diminuer jusqu'à zéro, pour reprendre ensuite vers les s négatifs.

Propriétés du mouvement uniformément varié. — On peut, au moyen des équations (4) diversement combinées, démontrer un certain nombre de propriétés du mouvement uniformément varié. Par exemple, éliminons j entre ces équations; il vient

$$\frac{s - s_0}{t} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

1° *Dans le mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne pendant un certain temps t est la moyenne arithmétique des vitesses prises aux deux instants extrêmes de ce temps.*

Dans l'équation précédente, remplaçons v par $v_0 + jt$; il vient

$$\frac{s - s_0}{t} = v_0 + j\frac{t}{2}.$$

2° *Dans le mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne du mobile, pendant un certain temps t, est égale à la vitesse v, prise à l'instant milieu de ce temps.*

Enfin l'élimination de t entre les équations (4) produit

$$\tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = j(s - s_0).$$

3° *Dans le mouvement uniformément varié, la moitié de l'accroissement du carré de la vitesse est le produit de l'accélération constante par l'espace parcouru.*

On simplifie les équations (4) en comptant les temps à partir de l'instant où la vitesse v_0 est nulle, et les espaces à partir de la position que le mobile occupe à cet instant; il vient alors

$$(5)\qquad \begin{cases} s = \tfrac{1}{2}jt^2, \\ v = jt. \end{cases}$$

La première de ces équations montre que :

4° *Dans le mouvement uniformément varié, l'accélération j est le double de l'espace parcouru pendant la première seconde du mouvement.*

Problèmes sur l'ascension et la chute des corps.

Les équations (4) et (5) servent à résoudre tous les problèmes qu'on peut se proposer sur le mouvement vertical des corps pesants dans le vide, en faisant $j = -g$ ou $j = g$, selon qu'on dirigera la partie positive de la verticale en haut ou en bas.

Problème I. — *Calculer la hauteur à laquelle s'élèvera un corps animé d'une vitesse donnée v_0, dirigée de bas en haut.*

Les équations du mouvement sont

$$(6)\qquad \begin{cases} s = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ v = v_0 - gt. \end{cases}$$

On trouve la durée de l'ascension en faisant $v = 0$, ce qui donne

$$T = \frac{v_0}{g};$$

en portant ensuite cette valeur dans l'équation des espaces, on a la hauteur à laquelle s'élève le mobile

$$H = \frac{v_0^2}{2g};$$

c'est la *hauteur due à la vitesse v_0.*

Le temps de la descente est égal au temps de l'ascension

$$T' = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}};$$

et le mobile repasse au point de départ avec une vitesse égale à v_0, c'est-à-dire à

$$\sqrt{2gH};$$

c'est la *vitesse due à la hauteur* H.

Problème II. — *Un corps descend d'une hauteur* H *dans un temps t plus petit que $\sqrt{\frac{2H}{g}}$: déterminer la hauteur de laquelle il est tombé.*

Soit s_0 la distance du point de départ inconnu à l'origine de la hauteur H : on a

$$H = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2$$

et

$$s_0 = \frac{v_0^2}{2g};$$

en éliminant v_0, on trouve

$$s_0 = \frac{1}{2}g\left(\frac{H}{gt} - \frac{1}{2}t\right)^2.$$

Problème III. — *Deux corps partent d'un même point, sans vitesses initiales, à des époques séparées par un intervalle θ : déterminer l'instant où la distance de ces deux corps sera a, et les chemins qu'ils auront alors parcourus.*

Soient t le temps écoulé depuis le départ du premier corps jusqu'à l'instant cherché, et z la hauteur de chute correspondante : on a

$$z = \tfrac{1}{2}gt^2$$

et

$$z - a = \tfrac{1}{2}g(t-\theta)^2.$$

Problème IV. — *Calculer la profondeur d'un puits d'après le temps qui s'écoule depuis le départ d'un corps qu'on laisse tomber sans vitesse jusqu'à l'instant où le bruit de la chute arrive à l'orifice du puits.*

Etc., etc.

Mouvement varié quelconque. — Quand le mouvement n'est pas uniformément varié, la vitesse acquise pendant un certain temps $t'-t$ n'est pas la même à une époque quelconque du mouvement. On considère alors l'accélération moyenne pendant le temps $t'-t$; et, en supposant ce temps infiniment petit, on appelle *accélération du mouvement* à une époque t la quantité $\frac{dv}{dt}$, c'est-à-dire la limite de l'accélération moyenne.

On a ainsi, en général,

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

et l'on peut construire une courbe des accélérations analogue aux courbes des espaces et des vitesses [1].

Problèmes sur les lois de mouvement.

Pour terminer ce qu'il y a à dire sur les lois du mouvement considéré indépendamment de la trajectoire, donnons la solution des six problèmes élémentaires qui sont relatifs aux espaces, aux vitesses et aux accélérations, problèmes qui se ramènent tous à des quadratures, c'est-à-dire à l'intégration de différentielles de la forme $f(x)\,dx$.

[1] Nous avons simplement appelé *accélération* la quantité j; et cette dénomination n'a aucun inconvénient pour le moment. Plus tard, quand nous étudierons le mouvement d'un peu plus près, en y faisant entrer la considération de la trajectoire, nous introduirons d'autres quantités auxquelles nous serons conduits à donner aussi le nom générique d'*accélération*, accompagné d'une épithète caractéristique : nous verrons alors que, toutes les fois que le mouvement sera curviligne, la quantité j s'appellera l'*accélération tangentielle* du mobile. Laissons pour le moment de côté ces distinctions, qui ne nous sont point encore nécessaires.

I. On donne l'espace en fonction du temps,

$$s = f(t).$$

On déduit de là les expressions de la vitesse et de l'accélération :

$$v = f'(t), \qquad j = f''(t).$$

II. Donnée $v = \mathrm{f}(t)$. On a

$$j = \mathrm{f}'(t), \qquad s = s_0 + \int_0^t \mathrm{f}(t)\,dt.$$

III. Donnée $j = \varphi(t)$. On a

$$v = v_0 + \int_0^t \varphi(t)\,dt, \qquad s = s_0 + \int_0^t v\,dt.$$

IV. Donnée $v = \psi(s)$. On a

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\psi(s)}, \qquad j = \psi'(s)\frac{ds}{dt} = \psi(s)\,\psi'(s).$$

V. Donnée $j = \pi(s)$.

L'équation

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \pi(s)$$

n'est point immédiatement soluble par une quadrature; mais, multipliée par $2\frac{ds}{dt}\,dt$, elle devient intégrable et donne

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} \pi(s)\,ds,$$

ce qui nous ramène au problème précédent, au cas où l'on a v en fonction de s.

VI. Donnée $j = \chi(v)$. On a

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\chi(v)}, \qquad s = s_0 + \int_0^t v\,dt.$$

§ II. — Étude du mouvement sur la trajectoire.

Après avoir dit du mouvement d'un point tout ce qu'on peut en dire sans s'occuper de la trajectoire de ce point, il faut, pour compléter notre étude, examiner ce que peut ajouter à ce qui précède la considération purement géométrique de la trajectoire.

A ce nouveau point de vue, le mouvement le plus simple est le mouvement rectiligne; la théorie développée dans le paragraphe précédent renferme tout ce qui est relatif à ce mouvement.

Quant au mouvement curviligne, nous allons montrer comment on en ramène l'étude à celle du mouvement rectiligne, au moyen de la considération des *mouvements simultanés.*

Théorie des mouvements simultanés.

Soit MM' la trajectoire d'un point, rapportée à trois axes quelconques (*fig.* 13). Considérons, en même temps qu'un point M de cette trajectoire, la projection P de ce point sur l'axe des x, faite parallèlement au plan $z\mathrm{A}y$.

Pendant que le point M se déplace sur sa trajectoire, le point P se déplace sur l'axe Ax; on dit que ces deux mouvements sont *simultanés.* Ils sont d'ailleurs tellement liés entre eux, que l'un se déduit immédiatement de l'autre, si la trajectoire est connue. Si elle ne l'est pas, il faudra, pour que le mouvement du point M soit bien défini, connaître les mouvements des projections de ce point sur trois axes concourants quelconques.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x=\varphi_1(t), \\ y=\varphi_2(t), \\ z=\varphi_3(t) \end{cases}$$

les équations de ces mouvements rectilignes. L'élimination de t entre ces trois relations donnera les équations de la trajectoire sous la forme ordinaire, à moins toutefois qu'on n'aime mieux conserver, pour représenter la trajectoire, les trois équations (1) qui définissent cette courbe par l'intermédiaire d'une variable auxiliaire t, ce qui sera tout aussi commode.

Les relations (1) s'appellent les *équations du mouvement du point* M.

Nous avons ainsi ramené l'étude d'un mouvement curviligne quelconque à celle de trois mouvements rectilignes simultanés; mais il importe encore de faire voir comment on peut déduire les divers éléments du premier de ceux des deuxièmes, supposés connus.

Auparavant, remarquons que, dans notre manière de considérer la vitesse, cette quantité est une longueur ds, affectée d'un dénominateur numérique dt.

D'après cela, la direction de la longueur finie $\frac{ds}{dt}$ est celle de l'élément ds, prolongé dans le sens du mouvement; et, si l'on veut avoir la définition complète de la vitesse d'un mobile, au double point de vue de la grandeur de cette droite et de sa position dans l'espace, il faudra porter une longueur égale à $\frac{ds}{dt}$ sur la tangente à la trajectoire de ce mobile (*fig.* 12), à partir du point de contact et dans le sens du mouvement. La droite MN, ainsi obtenue, représentera à la fois la grandeur, la direction et le sens de la vitesse du mobile.

Nous pouvons maintenant chercher les relations de position et de grandeur qui existent entre la vitesse du point M et les vitesses des trois projections de ce point.

Vitesses dans les mouvements simultanés. — Considérons sur la trajectoire un point M' infiniment voisin du point M (*fig.* 14), de sorte qu'on puisse indifféremment regarder ce point M' comme situé sur la courbe elle-même, ou sur la tangente au point M.

Les accroissements infiniment petits des coordonnées dx, dy, dz forment les trois côtés d'un parallélépipède dont ds est la diagonale. Construisons un parallélépipède semblable sur les mêmes arêtes prolongées, et donnons-lui des côtés qui soient à leurs homologues dans le premier parallélépipède comme l'unité est à dt.

Les côtés de ce nouveau prisme seront respectivement égaux à

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt};$$

et il est évident que la diagonale prendra la valeur correspondante $\frac{ds}{dt}$, en conservant d'ailleurs sa direction, qui est celle de la tangente à la trajectoire.

On déduit de là les résultats suivants :

Théorème I. — *La vitesse d'un mobile est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélépipède fait sur les vitesses simultanées de ses trois projections.*

Théorème II. — *La vitesse de la projection d'un point sur un axe quelconque est égale à la projection, faite sur le même axe et parallèlement au même plan, de la vitesse du point donné.*

Enfin, si l'on considère le mouvement de la projection du point M sur un plan quelconque $x\mathrm{A}y$, on voit encore, à l'inspection de la *fig.* 14, que :

Théorème III. — *La vitesse de la projection orthogonale ou oblique d'un point sur un plan quelconque est, en grandeur et en direction, la projection de la vitesse du mobile sur ce plan.*

Cas d'une trajectoire plane. — Quand la trajectoire est une ligne plane, il est naturel de la rapporter à des axes situés dans son plan (*fig.* 15); on n'a plus alors à considérer qu'un triangle infiniment petit MM'N, dont les côtés sont respectivement proportionnels à la vitesse du mobile et aux vitesses de ses deux projections.

Ce triangle est connu dans la Science sous le nom de *triangle infinitésimal de Barrow*, nom qu'on devrait remplacer par celui de *triangle de Fermat*.

Fermat est en effet le premier qui ait étudié les propriétés de ce triangle célèbre, propriétés qu'on doit reconnaître comme le point de départ de la *méthode des fluxions* et de la découverte du Calcul infinitésimal.

Les théorèmes auxquels donne lieu la projection du mouvement plan ne diffèrent pas de ceux que nous avons démontrés plus haut.

Digression sur les résultantes ou sommes géométriques.

On énonce ordinairement les théorèmes sur les mouvements simultanés d'une manière qui nécessite quelques définitions préalables.

Définition. — *Étant donnée une série de droites ayant chacune une longueur, une direction et un sens bien déterminés, si, en partant d'un point quelconque, on porte toutes ces droites bout à bout, la ligne qui, partant du même point, ferme le polygone ainsi formé, s'appelle la* résultante des lignes données.

Ainsi OF (*fig.* 16) est la *résultante* des droites OA, AB, ..., droites qui, relativement à la ligne OF, reçoivent la dénomination de *composantes*.

Propriétés des résultantes géométriques. — On voit en premier lieu qu'une résultante ne change pas quand on intervertit l'ordre de deux composantes consécutives et, par suite, celui de deux ou plusieurs composantes quelconques.

En deuxième lieu, on voit que la résultante diffère seulement par le sens qui lui est attribué, du côté qui fermerait le polygone des composantes.

Enfin il est évident que la projection d'une résultante sur un axe quelconque est la somme algébrique des projections des composantes sur le même axe.

Lorsqu'il y a seulement deux composantes (*fig.* 17), la résultante est la diagonale du parallélogramme fait sur ces deux droites, supposées portées dans un sens convenable à partir d'une origine quelconque O. Quand ces mêmes composantes sont au nombre de trois (*fig.* 18), la résultante est la diagonale du parallélépipède des composantes.

On peut donc énoncer le théorème suivant, qui comprend à la fois le cas du mouvement dans un plan et celui d'un mouvement quelconque :

Théorème IV. — *La vitesse d'un mobile est la résultante des vitesses simultanées de ses projections.*

Relations analytiques entre les composantes et la résultante : 1° *Cas du triangle ou du parallélogramme.* — Soient (*fig.* 19) A et B deux droites, R leur résultante; on a, par la Trigonométrie rectiligne,

$$\frac{R}{\sin \overline{A,B}} = \frac{A}{\sin \overline{B,R}} = \frac{B}{\sin \overline{A,R}};$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \overline{A,B},$$

$$A^2 = B^2 + R^2 - 2BR \cos \overline{B,R},$$

$$B^2 = A^2 + R^2 - 2AR \cos \overline{A,R}.$$

La dissymétrie des dernières formules tient à ce que la résultante ne se compte pas dans le même sens que ses composantes.

Quand l'angle des deux composantes est droit, les formules deviennent

$$A = R \cos \overline{A,R},$$

$$B = R \cos \overline{B,R},$$

$$R^2 = A^2 + B^2.$$

2° *Cas du parallélépipède.* — Bornons-nous au cas le plus habituel, celui où les trois composantes sont rectangulaires.

Soient A, B, C les composantes, R la résultante, α, β, γ (¹) les angles formés par cette ligne avec les trois premières. On a

$$A = R \cos \alpha,$$

$$B = R \cos \beta,$$

$$C = R \cos \gamma;$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

3° *Cas d'un polygone ou d'un nombre quelconque de composantes.* — Soit D l'une de ces composantes; on a, en projetant sur trois axes rectangulaires quelconques,

$$R \cos \overline{R,x} = \sum D \cos \overline{D,x} = X,$$

$$R \cos \overline{R,y} = \sum D \cos \overline{D,y} = Y,$$

$$R \cos \overline{R,z} = \sum D \cos \overline{D,z} = Z,$$

équations d'où l'on conclut

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

$$\cos \overline{R,x} = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos \overline{R,y} = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos \overline{R,z} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

(¹) Les angles α, β, γ sont liés entre eux par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

il est pourtant nécessaire de connaître ces trois angles, pour que la direction de la droite à laquelle ils appartiennent soit bien définie; et même, lorsque ces angles sont donnés chacun par une ligne trigonométrique, il est indispensable que cette ligne soit un cosinus, c'est-à-dire une ligne qui change de signe quand on passe d'un arc à son supplément, et qui ne change pas, quel que soit le sens dans lequel on mesure l'angle compris entre deux directions déterminées.

Toutes les fois qu'on considère des grandeurs géométriques, c'est-à-dire des longueurs à chacune desquelles est affecté une certaine direction, un certain sens, les résultantes prennent la place des sommes proprement dites; on pourrait les appeler *sommes géométriques*, pour rappeler l'idée de sommes dans lesquelles on a égard à la direction, de même que dans les sommes algébriques on a égard au signe des quantités qu'il s'agit de sommer.

Une longueur n'a pas de signe, elle doit être portée sur sa direction dans un certain sens; ses projections ont un signe, c'est celui du cosinus de l'angle formé par la ligne qu'on projette avec l'axe de la projection. Une fois que plusieurs longueurs sont ramenées par la projection à une direction unique, la résultante se transforme en une somme algébrique.

Il suit de là que les résultantes jouissent de toutes les propriétés des sommes : ainsi l'on peut les construire ou les calculer sans avoir égard à l'ordre de leurs éléments constituants; on peut aussi trouver d'abord la résultante d'un certain nombre de ces éléments, puis une deuxième résultante partielle, une troisième, etc., et chercher enfin la résultante de toutes ces résultantes.

J'ai dit qu'une longueur n'a pas de signe; cependant, quand la longueur qu'il faut porter dans un certain sens est une fonction de quantités algébriques susceptibles de prendre plusieurs valeurs, il est possible que certaines de ces valeurs rendent la fonction dont nous nous occupons négative. Mais ceci n'altère en rien la généralité des formules et ne peut donner lieu à aucune difficulté.

Théorie générale des mouvements simultanés.

La considération des mouvements simultanés d'un point et de sa projection sur un axe quelconque nous a donné le moyen de ramener l'étude du mouvement sur une trajectoire courbe à l'étude du mouvement rectiligne.

Mais là ne se borne point l'utilité de cette idée bien simple, qui consiste à chercher des relations entre les éléments de divers mouvements assujettis à s'accomplir simultanément.

Il est évident que, si l'on se donne une loi géométrique quelconque, en vertu de laquelle la position d'un certain point mobile soit liée à celle d'un ou plusieurs autres points, cette loi établit nécessairement une relation entre les vitesses simultanées des divers points que l'on considère. On trouvera cette relation, analytiquement par différentiations, géométriquement par des procédés particuliers, basés sur des règles que nous allons exposer, en généralisant la théorie qui précède.

Les théorèmes de Cinématique qui sont relatifs aux vitesses simultanées dérivent des énoncés géométriques ordinaires, comme l'équation qui donne le coefficient angulaire de la tangente à une courbe dérive de l'équation finie de cette courbe. Inversement : les rapports des vitesses de tous les points d'une figure mobile sont nécessairement indépendants du temps, en vertu de la simultanéité des mouvements; donc ces rapports sont des quantités purement géométriques, et l'on voit qu'on repasse immédiatement de la Cinématique à la Géométrie; ou plutôt, une relation quelconque entre des vitesses simultanées peut s'énoncer indifféremment avec le langage de la Cinématique ou celui de la Géométrie pure : nous avons déjà dit que des considérations du genre de celles qui nous occupent actuellement, fécondées par le génie de Newton, ont été l'origine de la magnifique découverte de l'Analyse infinitésimale.

Occupons-nous d'abord des formules qui se présentent quand on rapporte la trajectoire d'un point à un système de coordonnées polaires, en nous bornant d'ailleurs au cas où le mouvement s'effectue dans un plan.

Soit PM le rayon vecteur correspondant à une époque quelconque t (*fig.* 20); menons la tangente et la normale à la courbe (M), et soit i l'angle de la normale avec le rayon vecteur.

On a, par la Géométrie élémentaire,

$$\operatorname{tang} i = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}, \qquad \sin i = \frac{dr}{ds}, \qquad \cos i = \frac{r\,d\theta}{ds};$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \mathrm{PN}, \qquad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \mathrm{MN}.$$

Voici maintenant quelles sont les différentes vitesses simultanées dont il est intéressant de s'occuper (*fig.* 21).

Vitesse de circulation. — Considérons le mouvement du rayon vecteur assujetti à contenir toujours le point décrivant M. Dans ce mouvement, tous les points de la droite PM décrivent simultanément des arcs de cercle concentriques autour du pôle P; et, en particulier, le point qui coïncidait avec le mobile M, dans la position PM du rayon vecteur, décrira pendant le temps dt un arc de cercle MM_1, dont le rayon est égal à PM ou à r. Nous donnerons à la vitesse du point dont le mouvement est ainsi défini le nom de *vitesse de circulation*.

Vitesse de glissement. — Considérons un point qui soit entraîné avec le rayon vecteur, et qui glisse en même temps sur la droite PM, de manière à coïncider constamment avec le point de cette droite qui décrit la trajectoire. Pendant le temps que le rayon vecteur aura mis à venir de PM en PM', ce nouveau mobile fictif aura décrit l'espace $\mathrm{M_1M'}$; la vitesse correspondante s'appelle *vitesse de glissement* ou *vitesse le long du rayon vecteur*.

Vitesse angulaire. — Prenons sur le rayon vecteur une longueur constante Pm égale à l'unité. Le déplacement de ce point m, assujetti à rester ainsi à l'unité de distance du centre P, mesure l'*angle* décrit par le rayon vecteur. La vitesse du point m est ce qu'on appelle la *vitesse angulaire;* on la désigne habituellement par ω [1].

Vitesse aréolaire. — Enfin, considérant l'aire décrite par le rayon vecteur, limité à la courbe que nous étudions, j'adopterai le nom de *vitesse aréolaire* pour désigner le quotient de l'aire PMM' par le temps dt, sans rapporter d'ailleurs cette vitesse à un point déterminé du rayon vecteur mobile.

Relations entre les vitesses précédemment définies. — On a d'abord, en désignant par w la vitesse de circulation, par v_a la vitesse aréolaire, par v_g la vitesse de glissement,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad v_g = \frac{dr}{dt},$$
$$w = r\frac{d\theta}{dt} = \omega r,$$
$$v_a = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}\omega r^2.$$

D'un autre côté, en considérant le triangle infinitésimal $MM'M_1$, dont les côtés sont proportionnels respectivement à la vitesse sur la trajectoire, à la vitesse de circulation et à la vitesse de glissement; ou bien le triangle fini semblable au précédent, construit en prenant pour côtés ces vitesses elles-mêmes, on a le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *La vitesse d'un mobile sur sa trajectoire est la résultante de la vitesse de circulation et de la vitesse de glissement.*

[1] Il ne faut pas oublier que, pour le calcul de ω, le temps doit être exprimé en secondes, et que l'arc mm_1 est rapporté à son rayon, supposé égal à l'unité de longueur.

Dans les applications de la Cinématique aux machines, on est dans l'usage de définir une vitesse angulaire constante par le nombre des révolutions effectuées par le rayon vecteur dans une minute. Soit une roue faisant N tours par minute; un point de cette roue, situé à l'unité de distance du centre, parcourra par minute un arc égal à $2\pi N$, et par seconde un arc égal à $\frac{2\pi N}{60}$, le mouvement étant supposé uniforme. On a donc, pour un rayon quelconque de la roue,

$$\omega = \frac{2\pi N}{60}.$$

Dans le cas actuel, le triangle infinitésimal est toujours rectangle. On a donc

$$w = v\cos i, \qquad v_g = v\sin i,$$
$$v^2 = w^2 + v_g^2.$$

Ainsi que nous l'avons dit quand nous avons posé d'une manière générale les bases de la théorie des mouvements simultanés, tous les théorèmes de Géométrie infinitésimale qui se rapportent aux coordonnées polaires donnent lieu à des théorèmes corrélatifs de Cinématique, c'est-à-dire à des relations entre les vitesses que nous venons de définir.

Par exemple, en divisant par dt les équations

$$dr = \mathrm{PN}\,d\theta,$$
$$ds = \mathrm{MN}\,d\theta,$$

qui donnent les valeurs de la sous-normale et de la normale, on obtient les théorèmes suivants :

THÉORÈME VI. — *Quand on rapporte le mouvement d'un point dans un plan à un système de coordonnées polaires quelconque, le rapport de la vitesse de glissement à la vitesse angulaire est donné par la sous-normale à la trajectoire.*

THÉORÈME VII. — *Le rapport de la vitesse d'un point mobile à la vitesse angulaire autour d'un pôle quelconque est égal à la normale correspondante.*

Application au mouvement des planètes. — Dans le mouvement des planètes autour du Soleil, on sait, d'après l'une des lois de Kepler, que la vitesse aréolaire v_a est une constante.

On a donc, en se reportant à l'expression de cette vitesse,

$$\tfrac{1}{2}\omega r^2 = C;$$

d'où

$$\omega = \frac{2C}{r^2},$$
$$w = \omega r = \frac{2C}{r},$$

et enfin

$$v = \frac{w}{\cos i} = \frac{2C}{r\cos i} = \frac{2C}{p},$$

en désignant par p la perpendiculaire $r\cos i$ abaissée du pôle sur la tangente MH (*fig.* 22).

De là les énoncés suivants :

Dans le mouvement d'une planète autour du Soleil :

1° *La vitesse angulaire est en raison inverse du carré de la distance de la planète au Soleil;*

2° *La vitesse de circulation est en raison inverse de cette même distance;*

3° *La vitesse de l'astre dans son orbite est en raison inverse de la perpendiculaire abaissée du centre du Soleil sur la tangente à la trajectoire.*

Généralisation des résultats précédents.

Dans tous nos raisonnements relatifs aux coordonnées polaires, il faut bien remarquer que le pôle P est simplement le point de rencontre d'un certain rayon vecteur PM avec sa position infiniment voisine (*fig.* 23). Rien n'oblige à supposer qu'un troisième rayon vecteur infiniment voisin soit assujetti à venir passer au point de rencontre des deux premiers, encore moins que ce point de rencontre ou pôle soit fixe d'une manière absolue.

Tous les résultats que nous venons de trouver pour les systèmes de coordonnées polaires ordinaires s'appliquent donc à des rayons vecteurs mobiles suivant une loi quelconque, en substituant au pôle fixe, pour chacun de ces rayons vecteurs, le point où ce rayon est coupé par sa position infiniment voisine, c'est-à-dire le point où il est tangent à son enveloppe.

Cette remarque bien simple a une grande importance au point de vue des applications à la Géométrie.

§ III. — Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes aux lignes courbes.

Sur la fin du XVII^e siècle, les géomètres français et étrangers se préoccupèrent beaucoup du problème des tangentes aux lignes courbes.

D'une étude historique faite par Duhamel, il ressort que Descartes donna la première méthode analytique rigoureuse pour la solution de ce problème. Descartes fut suivi dans

cette voie par Fermat, Barrow, Huygens, Newton, et c'est de ces recherches que sont sorties les méthodes analytiques actuelles, basées sur le calcul inventé simultanément par Newton et par Leibnitz.

Vers la même époque, Roberval ([1]) avait fait connaître une méthode géométrique pour le tracé des tangentes, méthode fort remarquable que nous allons exposer avec détail. Des procédés directs, plus ou moins analogues à ceux de Roberval, ont été mis en usage par plusieurs géomètres ses contemporains, entre autres par le marquis de l'Hôpital, dans son *Analyse des infiniment petits;* puis ce genre de spéculations s'est trouvé presque complètement abandonné, sous l'influence du vif éclat que jetait la nouvelle invention du Calcul infinitésimal. On y est revenu de nos jours, et la méthode de Roberval, convenablement entendue, peut s'employer avantageusement dans un grand nombre de questions auxquelles le calcul algébrique s'appliquerait peu élégamment.

Principe de Roberval. — Pour arriver à tracer la tangente à une courbe définie géométriquement, Roberval considère cette courbe comme la trajectoire d'un point mobile; puis il pose l'axiome suivant :

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point.

Si donc nous pouvons trouver par la définition donnée, soit les vitesses simultanées des projections d'un point de la courbe sur deux axes coordonnés rectangulaires ou obliques, soit la vitesse de circulation et la vitesse de glissement dans un système polaire quelconque, nous aurons, par une construction connue, la grandeur de la vitesse propre du point mobile et la direction de cette vitesse qui est celle de la tangente cherchée.

J'ai déjà fait observer que les définitions de la Géométrie ne peuvent donner les vitesses simultanées elles-mêmes; mais elles donnent les rapports de ces vitesses, et c'est tout ce qu'il faut pour déterminer une direction.

([1]) *Traités des mouvements composés :* Divers Ouvrages de Mathématiques et de Physique, par Messieurs de l'Académie des Sciences, p. 80.

Le principe de la méthode de Roberval est donc extrêmement simple; nous allons en montrer l'utilité par de nombreuses applications.

Tangente à la conchoïde. — La définition de la conchoïde ordinaire ou conchoïde de Nicomède peut être généralisée de la manière suivante :

D'un point fixe O (*fig.* 24), *on mène un rayon vecteur qui vient rencontrer une courbe quelconque en* M; *à partir de ce point d'intersection, on porte sur la direction du rayon vecteur une longueur constante* MM'.

La courbe que nous considérons est le lieu des points M'.

Pour mener la tangente à cette courbe, élevons au point M une perpendiculaire sur le rayon vecteur et regardons une longueur arbitraire Mm, comptée sur cette perpendiculaire, comme représentant la vitesse de circulation correspondant au point M. Par le point m, ainsi déterminé, concevons une perpendiculaire mm_1 sur Mm; la longueur de cette perpendiculaire, limitée à la tangente connue MT, représentera la vitesse du point M le long de son rayon vecteur.

Faisons la même construction pour le point M' : la vitesse de circulation $M'm'$ est dirigée suivant la perpendiculaire à OM'; d'ailleurs cette vitesse est à la vitesse de circulation Mm dans le rapport de OM' à OM; donc le point m' est sur la ligne Om prolongée. D'autre part, la vitesse de glissement est dirigée suivant la perpendiculaire à $m'M'$ et elle est égale à mm_1, puisque la distance MM' est constante; donc enfin on aura la tangente cherchée en prenant $m'm'_1 = mm_1$ et joignant $M'm'_1$.

On peut remarquer que les normales aux deux courbes se coupent en un point N de la perpendiculaire élevée en O sur le rayon vecteur. En effet, nous avons vu que la sous-normale est égale au rapport de la vitesse de glissement à la vitesse angulaire; cette ligne a donc la même valeur pour la courbe (M) et pour la courbe (M').

D'après la remarque qui termine le § II, la construction précédente s'appliquerait encore si les droites telles que OM, au lieu de passer toutes par un point fixe, étaient menées tangentiellement à une courbe quelconque.

La méthode de Roberval permet de trouver la tangente à la spirale d'Archimède et à un grand nombre d'autres courbes; mais, si elle peut rendre de très grands services, elle est par contre assez délicate à appliquer : l'inventeur lui-même s'y est fréquemment trompé. L'erreur de Roberval consistait à confondre les composantes de la vitesse du mobile, suivant deux directions obliques, avec les projections orthogonales de cette même vitesse. La faute était d'autant plus difficile à apercevoir qu'on arrivait d'ailleurs à une construction exacte, par une compensation d'erreurs. Voici, par exemple, le raisonnement relatif au tracé de la tangente à l'hyperbole (*fig.* 25).

Puisque la différence entre les rayons vecteurs menés d'un point de la courbe aux deux foyers est constante, la vitesse est évidemment la même le long de l'un ou de l'autre des rayons vecteurs MF, MF'. Partant de là, Roberval obtenait la tangente en portant sur les rayons vecteurs des longueurs égales représentant cette vitesse commune et composant ensuite ces deux droites par la règle du parallélogramme, lequel se trouvait dans l'espèce être un losange : la diagonale de ce losange était précisément la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs. Le résultat était donc juste, mais le raisonnement était faux; car les vitesses de glissement MN, MN' ne sont pas les composantes de la vitesse du point M sur les directions obliques MF, MF'.

Voici comment il eût fallu présenter les choses. Soit MT (*fig.* 26) la vitesse du point qui décrit l'hyperbole; si nous prenons le foyer F pour pôle, la vitesse MT se présente comme la résultante d'une certaine vitesse de circulation MM_1 et de la vitesse de glissement correspondante M_1T. Relativement au pôle F', nous aurons à considérer des composantes analogues MM'_1, M'_1T; et il résulte de l'égalité des deux vitesses de glissement que le point T est sur la bissectrice de l'angle M.

Tangente à une conique définie par son foyer et sa directrice. — Soit (*fig.* 27) M un point de la courbe. Projetons le mouvement de ce point sur la directrice et sur une perpendiculaire; la vitesse MM' est la résultante de deux longueurs MP, QM', proportionnelles aux vitesses des projections du point M. Cette même vitesse, si l'on rapporte le mouvement au foyer F considéré comme pôle, est la résultante de la vitesse de circulation MQ' et de la vitesse de glissement Q'M'.

Mais on a évidemment, d'après la définition de la courbe,

$$\frac{M'Q'}{M'Q} = \frac{MF}{MP};$$

si donc on élève FL perpendiculaire sur FM, le quadrilatère PMFL est semblable à QMQ'M', et le point M' se trouve sur la diagonale ML : cette diagonale est donc la tangente à la conique (M).

Une construction identique fait connaître la tangente à une courbe définie par le rapport des distances du point décrivant à deux courbes quelconques, question qui se rattache à une célèbre théorie de Géométrie. Supposons que des rayons lumineux, s'échappant normalement d'une courbe donnée (A) (*fig.* 28), se réfractent sur une courbe (M). D'après les lois connues, le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction est constant. De plus, si l'on prend sur le prolongement virtuel du rayon réfracté une longueur MR qui soit à MI dans le rapport des sinus, le lieu du point R coupe à angle droit tous les rayons réfractés : nous appellerons cette courbe (B) l'*anticaustique* [1] de (M) par rapport aux rayons incidents.

Réciproquement, le lieu du point M est une courbe telle, que le rapport des distances d'un de ses points aux deux courbes (A) et (B), considérées comme données, est constant [2]. En partant de cette définition et appliquant ce qui précède, on trouve aisément que, pour avoir un point de la tangente à la courbe (M), il faut élever aux points I et R des droites perpendiculaires respectivement sur MI et MR, et prolonger ces droites jusqu'à leur point de rencontre N. La ligne MN est la tangente cherchée.

La circonférence décrite sur MN comme diamètre passe par les points I et R; d'où il suit que les sinus des angles i et i'

[1] L'expression d'*anticaustique* est due à Jacques Bernoulli, qui s'en est servi seulement dans le cas de la réflexion. M. Quetelet a étudié les anticaustiques sous le nom assez impropre de *caustiques secondaires*.

[2] Lorsque les courbes (A) et (B) se réduisent chacune à un cercle, le lieu est un *ovale de Descartes*; c'est une circonférence quand les deux cercles sont évanouissants.

sont dans le même rapport que les longueurs MI et MR : on déduirait de là une démonstration *a posteriori* du théorème fondamental de la théorie des caustiques.

Développement de la méthode de Roberval.

Ces exemples suffisent pour montrer comment la méthode ingénieuse, imaginée par Roberval, conduit à la détermination géométrique des tangentes aux lieux courbes. Mais, si l'on appliquait directement le principe de cette méthode à tous les cas, on aurait souvent un grand nombre de vitesses simultanées à considérer, et l'on pourrait se trouver conduit à des constructions, sinon impraticables, du moins extrêmement compliquées.

Pour éviter cet inconvénient, il faut chercher à dégager du principe de Roberval un petit nombre d'éléments simples, éléments qui joueront dans cette théorie le rôle que remplissent dans le Calcul différentiel les formules donnant la dérivée d'un produit, d'un quotient, d'une fonction de fonction, etc. C'est ce qu'a fait M. Mannheim dans des travaux encore à peu près inédits [1], dont nous allons extraire quelques formules fondamentales et les élégantes constructions qui en découlent.

Première formule : *Expression de la variation de longueur d'une droite.* — Considérons (*fig.* 29) un rayon vecteur issu du point O et coupé aux points M et M' par deux courbes quelconques.

Soient N et N' les points où les normales à ces deux courbes viennent rencontrer la perpendiculaire élevée en O sur le rayon vecteur. Nous avons trouvé

$$d.OM = ON\,d\theta,$$
$$d.OM' = ON'\,d\theta;$$

donc

$$(1)\qquad d.MM' = NN'\,d\theta.$$

[1] *Voir* toutefois *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 323, et t. XVIII, p. 371; Note de Géométrie infinitésimale (*Annales de Tortolini*, t. II); enfin une Note insérée à la fin du premier Volume des *Applications d'Analyse et de Géométrie* du général Poncelet.

Cette formule donne la variation de la longueur MM', interceptée sur une droite mobile par deux courbes quelconques. La loi du mouvement de la droite indéfinie OMM' est arbitraire; le point O est celui où cette droite est tangente à son enveloppe [1].

APPLICATION. — *Une droite MM' (fig. 30) se meut suivant une loi qu'on définit en donnant l'enveloppe des positions successives de cette droite; elle rencontre deux courbes quelconques aux points M, M'. On partage la distance MM' au point M'' en deux parties dont le rapport λ soit constant : trouver la normale au lieu du point M''.*

Traçons la perpendiculaire ON, les normales MN, M'N', aux courbes données; et soit M''N'' la normale cherchée. On a

$$MM'' = \lambda M'' M';$$

d'où l'on conclut

$$d.MM'' = \lambda d.M''M'.$$

Or

$$d.MM'' = NN'' d\theta,$$
$$d.M''M' = N''N' d\theta;$$

donc

$$NN'' = \lambda N''N'.$$

On obtient la normale en joignant M'' au point N'', qui divise NN' dans le rapport donné.

Problème inverse de celui des tangentes. — Remarquons que l'inverse du problème qui consiste à mener la tangente à une courbe est celui dans lequel on demande, étant donnée la loi du mouvement d'une droite, de déterminer le point où cette droite est tangente à son enveloppe. Par exemple :

RÉCIPROQUE DU PROBLÈME PRÉCÉDENT. — *Une droite rencontre trois courbes données, de manière que le rapport des segments interceptés soit constant. On demande le point où la droite est tangente à son enveloppe.*

---

[1] Dans le cas où la longueur MM' est une constante, on a

$$d.MM' = 0, \quad \text{par conséquent} \quad NN' = 0.$$

C'est un résultat que nous avons déjà eu occasion d'énoncer à propos de la conchoïde.

Dans ce cas, les normales aux trois courbes sont les données de la question, et le problème se trouve ramené par ce qui précède à la recherche d'une perpendiculaire à la droite considérée, perpendiculaire qui soit divisée par les trois normales dans le rapport donné.

Voici deux cas particuliers de ce problème :

Centre de courbure de l'ellipse. — On sait que les parties de la normale à l'ellipse, comprises entre la courbe et les axes, sont dans le rapport constant $\frac{b^2}{a^2}$. Il suit de là que la solution que nous venons de trouver nous fera connaître le centre de courbure de l'ellipse, en considérant ce point comme celui où la normale est tangente à son enveloppe, c'est-à-dire à la développée de l'ellipse.

Soit (*fig.* 31) MM'M'' la normale donnée. Nos trois courbes sont ici l'ellipse elle-même, et ses deux axes CA, CB. Traçons les normales M'N', M''N''; il s'agit de construire une perpendiculaire à MM', telle que l'on ait

$$\frac{ON'}{ON''} = \frac{MM'}{MM''} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Soit T le point où la tangente à l'ellipse rencontre l'axe focal : je dis que la ligne M''T passe par le point N'.

En effet, prolongeons MT jusqu'au point K où cette ligne rencontre M''N''; on a évidemment

$$\frac{ON'}{ON''} = \frac{MT}{MK} = \frac{MM'}{MM''}.$$

De là la construction suivante :

Élever en M' une perpendiculaire à M'M; par le point I où cette perpendiculaire vient couper le rayon CM, mener IO parallèlement à CB; cette ligne rencontre MM'' au centre de courbure.

Centre de courbure de l'épicycloïde. — L'épicycloïde est la courbe engendrée par un point M (*fig.* 32), lié à un cercle (C_1), lorsque ce cercle roule sur un cercle fixe (C).

On sait que la normale à cette courbe est la ligne qui joint le point décrivant M au point de contact M' des deux cercles.

Joignons MC_1 et menons par C une parallèle à cette ligne, jusqu'à la rencontre de la normale, en M″. On a

$$\frac{CM''}{C_1M} = \frac{R}{R_1},$$

en appelant R, R_1 les rayons respectifs du cercle fixe et du cercle mobile. Or C_1M est constant; donc CM″ est également constant, et le lieu du point M″ est un cercle concentrique au cercle (C).

De plus,

$$\frac{MM'}{M'M''} = \frac{R_1}{R};$$

donc la normale MM′ est divisée par la courbe elle-même et par les deux cercles décrits autour du point C en deux segments dont le rapport est constant, et l'on aura le centre de courbure O de l'épicycloïde en construisant une perpendiculaire ON′N″ à MM′, telle que l'on ait

$$\frac{ON'}{N'N''} = \frac{R_1}{R}.$$

Pour cela, élevons en M′ une perpendiculaire sur MM″, terminée à MC_1, joignons AC; le point de rencontre de cette ligne avec MM′ n'est autre chose que le point O (*).

En effet, prolongeons AM′ jusqu'en B; on a bien

$$\frac{ON'}{N'N''} = \frac{AM'}{M'B} = \frac{R_1}{R}.$$

Ces exemples montrent que le problème des centres de courbure se résout par les mêmes principes que le problème des tangentes.

De même que nous avons ramené au premier ordre les questions qui se rapportent au deuxième ordre différentiel, nous y ramènerions évidemment celles du troisième ordre, et ainsi de suite.

(*) Cette construction porte le nom de *construction de Savary*.

Nouvelle application de la formule (1). — Résolvons encore un problème long et pénible à traiter par la méthode directe de Roberval, mais pour lequel la formule (1) fournit une solution aussi simple qu'élégante.

Considérons un certain nombre de droites qui se coupent toutes en un même point M (*fig.* 33). Chacune de ces droites est tangente à une courbe fixe et limitée à deux autres courbes données : on demande la normale au lieu du point d'intersection de ces droites, lorsqu'on fait varier celles-ci de manière qu'on ait entre les longueurs interceptées une relation donnée quelconque.

Soit MA l'une des droites. Représentons les longueurs telles que AA′ par r, et soit

$$f(r, r_1, \ldots) = 0$$

l'équation donnée; cette équation différentiée produit

$$\frac{df}{dr}dr + \frac{df}{dr_1}dr_1 + \ldots = 0$$

ou

$$\sum \frac{df}{dr}dr = 0.$$

Mais, en menant les normales aux trois courbes (A), (E), (A′), nous avons trouvé

$$dr = NN'd\theta,$$

$d\theta$ étant l'angle de deux positions infiniment voisines de AM. Donc

$$\sum \frac{df}{dr}NN'd\theta = 0.$$

Au lieu de l'angle $d\theta$, différent pour chacune des droites, introduisons le facteur commun ds, qui représente le chemin élémentaire parcouru par le point M et qui est lié à $d\theta$ par l'équation

$$ds = MP\, d\theta;$$

il vient

$$\sum \frac{df}{dr}\frac{NN'}{MP} = 0.$$

Prenons sur MA une longueur MF égale à $\frac{df}{dr}$, élevons en F une perpendiculaire sur MA et joignons AN, A'N'; on a

$$\frac{NN'}{MP} = \frac{GH}{ML},$$

et, puisque MF a été pris égal à $\frac{df}{dr}$,

$$\sum MF \frac{GH}{ML} = 0.$$

Mais le rapport $\frac{MF}{ML}$ est le cosinus de l'angle EMP, que nous avons toujours désigné par i; on obtient donc en définitive

$$(a) \qquad \sum GH \cos i = 0.$$

Or GH $\cos i$ représente la projection de GH sur la tangente cherchée, et la somme $\sum$ GH $\cos i$ est la projection sur cette même tangente de la ligne qui fermerait le polygone formé par toutes les droites telles que GH, mises bout à bout à partir du point M. Donc l'équation (a) nous apprend que la résultante de ces droites est perpendiculaire à la tangente, c'est-à-dire qu'elle est précisément la normale au lieu (M).

Comme cas particulier, supposons que la courbe (E) soit la développée de (A') (*fig.* 34), et que les courbes telles que (A) se confondent avec le lieu décrit par le point M.

L'équation $f(r, r_1, \ldots) = 0$ établit alors une relation entre les distances d'un point du lieu à des courbes données, distances comptées sur les normales à ces courbes. L'équation (a) du cas général devient, comme il est facile de le voir,

$$\sum FL \cos i = 0$$

ou

$$\sum MF \sin i = 0.$$

D'après cela, on peut remplacer la construction générale indiquée plus haut par la suivante.

On portera sur les normales MA', MA'$_1$, ... des longueurs MF, MF$_1$, ..., proportionnelles aux dérivées $\frac{df}{dr}$, $\frac{df}{dr_1}$, ..., et l'on composera toutes ces droites : la résultante est la normale cherchée.

Cette solution, qu'il est très simple d'obtenir directement en employant la formule

$$dr = ds \sin i,$$

se trouve dans l'*Analyse des infiniment petits* (¹).

Application à l'hyperbole. — Dans ce cas, les courbes (A') sont au nombre de deux et se réduisent chacune à un point (*fig.* 35). On a

$$f(r, r_1) = r - r_1 - 2a = 0;$$

d'où

$$\frac{df}{dr} = 1, \qquad \frac{df}{dr_1} = -1.$$

Deuxième formule : *Expression du rapport de deux arcs infiniment petits.* — Considérons toujours un déplacement infiniment petit de la droite OM (*fig.* 29) et désignons par ds, ds' les arcs décrits par les points M et M' sur deux courbes données quelconques.

On a

$$ds = MN\,d\theta,$$
$$ds' = M'N'\,d\theta;$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{ds}{ds'} = \frac{MN}{M'N'}.$$

Application. — *Soit un triangle* MM'M'' (*fig.* 36), *variable de forme et de position suivant une loi quelconque; on donne l'enveloppe de chacun de ses côtés et les courbes décrites par les sommets* M, M' : *on demande la normale au lieu du troisième sommet* M''.

Soient ds, ds', ds'' les arcs décrits par les points M, M', M''; MB, M'B' les normales aux courbes (M) et (M'); enfin M''B'' la

(¹) Section II, Proposition X. Le marquis de l'Hôpital cite Tchirnhaus et Fatio comme ayant résolu avant lui des cas particuliers de cette question.

normale demandée. On a, en menant les normales aux courbes (O), (O′), (O″),

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{MB}{M'A'}, \qquad \frac{ds'}{ds''} = \frac{M'B'}{M''A'}, \qquad \frac{ds''}{ds} = \frac{M''B''}{MA}.$$

En multipliant ces relations membre à membre, il vient

$$1 = \frac{MB . M'B' . M''B''}{MA . M'A' . M''A''} \text{ (}^1\text{)},$$

équation d'où l'on tire le rapport

$$\frac{M''A''}{M''B''}.$$

On est ramené à un problème de Géométrie élémentaire, lequel consiste à mener par un point M″ une droite qui soit coupée par deux autres droites dans un rapport déterminé.

Formule de Newton. — Newton a donné du rapport $\frac{ds}{ds'}$ une expression qu'on ramènerait aisément à la forme (2).

Menons les tangentes MA, M′A (*fig.* 37) et considérons la position infiniment voisine de la droite mobile comme une transversale coupant les trois côtés du triangle AMM′. En écrivant que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres, il vient

$$OM'.AM'.ds = OM.AM.ds',$$

d'où

$$\text{(2 bis)} \qquad \frac{ds}{ds'} = \frac{OM.AM}{OM'.AM'}.$$

Cette formule résout immédiatement le problème suivant :

Une droite mobile détache d'une courbe donnée un arc constant : trouver le point où cette droite touche son enveloppe.

Pour exprimer que l'arc intercepté est constant, il suffit d'écrire que les chemins infiniment petits ds, ds', parcourus respectivement par les points M et M′, sont égaux.

(¹) Cette relation est vraie pour un polygone variable d'un nombre quelconque de côtés. Elle se trouve dans la *Statique* de Möbius pour le cas seulement où les côtés du polygone sont de grandeur constante.

Or la formule (2 *bis*) donne dans ce cas

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{AM'}{AM};$$

on obtient le point O en menant la bissectrice AB de l'angle des tangentes (*fig.* 38) et prenant OM′ = BM.

Troisième formule : *Expression de la variation de l'angle de deux droites.* — On donne les enveloppes des deux droites et la courbe décrite par leur point de rencontre (*fig.* 39).

En désignant par $d\theta$ et $d\theta'$ les déplacements angulaires des rayons vecteurs OM, O′M et appliquant les formules connues, on a

$$d\theta = \frac{ds}{MN}, \qquad d\theta' = \frac{ds}{MN'};$$

d'où

$$\text{(3)} \qquad d\Phi = d\theta' - d\theta = ds\left(\frac{1}{MN'} - \frac{1}{MN}\right).$$

Application. — Considérons (*fig.* 40) la normale MN à l'ellipse, laquelle partage en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs FMF′. De l'équation

$$FMN = NMF',$$

on conclut

$$d.FMN = d.NMF';$$

d'où, d'après la formule (3), en supprimant ds et représentant par O le point où MN touche son enveloppe, c'est-à-dire le centre de courbure de l'ellipse,

$$\frac{1}{MO} - \frac{1}{MN} = \frac{1}{MN'} - \frac{1}{MO},$$

$$\frac{2}{MO} = \frac{1}{MN} + \frac{1}{MN'};$$

O est donc l'harmonique conjugué de M par rapport à N et à N′.

Quatrième formule : *Expression de la variation d'une aire curviligne.* — Enfin la formule de la vitesse aréolaire

$$\text{(4)} \qquad dS = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta$$

s'emploiera de la même manière que les précédentes dans les questions où entreront des aires.

Par exemple, si l'on suppose qu'une droite MM' (*fig.* 41) se meuve de telle sorte que l'aire du segment MM' soit constante, on trouve immédiatement que le point de contact O de la droite MM' avec son enveloppe est le milieu de la corde interceptée.

De plus, nous obtiendrons le centre de courbure de l'enveloppe (O), en considérant la droite MM' comme assujettie à être coupée en deux parties égales par une courbe très voisine de l'enveloppe. D'après les principes établis, la normale à la courbe auxiliaire vient rencontrer la normale ON au milieu C de NN', et, si l'on suppose que notre courbe fictive se confonde avec l'enveloppe, ce milieu C n'est autre chose que le centre de courbure de cette enveloppe.

Application à l'hyperbole (*fig.* 42). — La droite mobile MM' coupe deux droites fixes de manière à former avec celles-ci un triangle d'aire constante. L'enveloppe est une hyperbole ayant les droites fixes pour asymptotes; le point de contact est au milieu de MM', et la construction précédente fait connaître le centre de courbure correspondant C.

En résumé, les quatre formules primordiales que nous venons d'établir sont les éléments d'une méthode générale qui permet de résoudre simplement un grand nombre de problèmes de Géométrie infinitésimale.

Ces formules et d'autres analogues [1] facilitent singulièrement les applications de la méthode de Roberval et donnent à cette belle méthode une portée dont on ne paraît pas s'être jusqu'ici suffisamment rendu compte.

---

(1) J'ai dû me borner à donner ici ce court extrait des recherches de M. Mannheim, lequel suffit pour montrer de quelle utilité sont en Géométrie les considérations du domaine de la Cinématique.

Il est facile de comprendre que les formules que nous avons posées, et qui se rapportent à de simples lignes planes, ne sont pour M. Mannheim que le point de départ de recherches relatives aux expressions géométriques d'infiniment petits de divers ordres, se rattachant à des figures planes, sphériques, tracées sur des surfaces arbitraires, ou encore à des déplacements quelconques dans l'espace.

Nous laissons à cet habile géomètre le soin de faire lui-même en temps et lieu l'exposition complète de ses travaux intéressants de Géométrie infinitésimale, avec tout le développement que comporte un pareil sujet.

§ IV. — De l'accélération dans les mouvements simultanés.

Nous avons réduit l'étude d'un mouvement curviligne quelconque à celle de trois mouvements rectilignes simultanés, et nous avons donné sous une forme élégante les relations de grandeur et de direction qui existent entre la vitesse propre du mobile $\frac{ds}{dt}$ et les vitesses de ses projections sur trois axes coordonnés $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

Cherchons de même les lois qui régissent les accélérations de ces divers mouvements, à savoir $\frac{d^2s}{dt^2}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$.

Étudions d'abord le cas d'une trajectoire rectiligne.

Mouvement rectiligne.

Soient (*fig.* 43) MD la trajectoire, Ax, Ay, Az trois axes que nous supposerons, pour fixer les idées, rectangulaires. De l'équation

$$v_x = v\cos\alpha, \tag{1}$$

α étant constant, on déduit

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha,$$

c'est-à-dire, en désignant par j_x et par j l'accélération de la projection et l'accélération du mobile lui-même,

$$j_x = j\cos\alpha, \tag{2}$$

équation de même forme que l'équation (1).

Ainsi, *dans le cas du mouvement rectiligne*, tous les résultats qui sont relatifs aux projections des vitesses s'appliquent aux accélérations, et nous pouvons énoncer, relativement à la projection orthogonale ou oblique du mouvement rectiligne, le théorème général suivant :

Théorème I. — *Dans le mouvement rectiligne, la résultante des vitesses des trois projections du point mobile est dirigée suivant la trajectoire de ce mobile et égale à sa vitesse* v;

la résultante des accélérations des projections est aussi dirigée suivant la trajectoire rectiligne : elle a pour valeur $\frac{dv}{dt}$.

En supposant toujours le mouvement rectiligne, on trouverait des relations projectives du même genre entre les dérivées du troisième, du quatrième ordre, etc., si l'on voulait s'en occuper.

Mouvement curviligne.

Les théorèmes relatifs aux vitesses s'appliquent à une trajectoire curviligne aussi bien qu'à une trajectoire rectiligne; en effet, tant qu'on s'occupe seulement de deux points infiniment voisins, il est permis de remplacer une courbe quelconque par sa tangente.

Au contraire, la courbure de la trajectoire intervient nécessairement dans les questions qui se rapportent aux accélérations, questions dans lesquelles on doit considérer sur la trajectoire, non plus deux, mais trois points infiniment voisins, deux éléments consécutifs.

En effet, dans le cas où la trajectoire MM' est une ligne courbe (*fig.* 44), l'angle α n'est pas constant, et la différentiation de l'équation (1) produit

$$j_x = j\cos\alpha - v\frac{d.\cos\alpha}{dt}. \qquad (3)$$

L'équation (2) cesse donc d'avoir lieu, et l'accélération de la projection n'est pas la projection de l'accélération du mobile; ou, si l'on veut, la résultante des quantités j_x, j_y, j_z, dans le mouvement curviligne, n'est pas dirigée suivant la tangente à la trajectoire; elle n'a pas pour valeur $\frac{dv}{dt}$.

On est ainsi averti de l'existence d'un nouvel élément, qui dépend, on ne saurait en douter, de la courbure de la trajectoire du mobile : c'est en cherchant, par une étude approfondie, à apprécier l'influence de cette courbure, que nous arriverons à donner la relation géométrique qui existe entre les éléments du second ordre différentiel, dans les divers mouvements simultanés qui nous occupent.

Mais auparavant faisons une application de ce qui est déjà acquis, afin de bien éclaircir toutes ces notions primordiales.

Mouvement de la projection d'un point qui se meut sur un cercle d'un mouvement uniforme.

Soient Ax, Ay (*fig.* 45) deux axes auxquels nous rapportons le mouvement. Prenons le point O pour origine des espaces et convenons de compter les temps à partir de l'instant où le mobile M est en ce point.

Les équations du mouvement circulaire uniforme de ce mobile sont

$$s = at,$$
$$v = a = \omega R,$$

en désignant la vitesse angulaire par ω.

Considérons le mouvement du point P, projection de M sur l'axe des y. L'équation qui donne l'espace parcouru en fonction du temps est

$$y = OP = R(1 - \cos\omega t); \qquad (4)$$

d'où, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à t,

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \omega R \sin\omega t. \qquad (5)$$

Mais la quantité v_y peut aussi s'obtenir, en vertu de la théorie précédente, en considérant la vitesse du point P comme la projection de la vitesse ωR, comptée sur la tangente au cercle dans le sens de la flèche : on retrouve ainsi précisément la valeur (5), ce qui vérifie le théorème de la projection des vitesses.

Quant à l'accélération du point P, nous l'aurons en différentiant l'équation (5)

$$\frac{dv_y}{dt} = \omega^2 R \cos\omega t = \omega^2(R - y) = \omega^2 \times CP. \qquad (6)$$

Cette accélération est proportionnelle à la distance qui sépare le point P du point fixe C.

Or, dans le cas actuel, l'accélération du point M étant nulle, il est bien évident que l'accélération de la projection n'est pas la projection de l'accélération.

Construisons les courbes des espaces, des vitesses, des accélérations, pour le mouvement du point P, d'après les équations (4), (5) et (6) (*fig.* 46). On voit par ces courbes que le point P est animé d'un mouvement de va-et-vient, dont l'amplitude est donnée par le diamètre du cercle. La durée T d'une oscillation complète est égale au temps d'une révolution du point M, soit $\frac{2\pi}{\omega}$. En introduisant cette quantité T dans les formules, à la place de ω, il vient

$$(7)\quad \begin{cases} y = R\left(1 - \cos 2\pi \dfrac{t}{T}\right), \\ v_y = \dfrac{2\pi R}{T} \sin 2\pi \dfrac{t}{T}, \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} \cos 2\pi \dfrac{t}{T}. \end{cases}$$

On a souvent besoin, dans les machines, de communiquer à certaines pièces un mouvement oscillatoire, rectiligne ou à peu près. Les données de la question sont alors l'amplitude de l'excursion et la durée d'une oscillation complète, c'est-à-dire les quantités 2R et T des formules (7); quant à la loi du mouvement entre les positions extrêmes, elle est assez généralement à peu près arbitraire.

Toutes les fois qu'il en sera ainsi, on devra toujours se rapprocher le plus possible de la loi précédente.

En effet, les trois courbes qui représentent cette loi sont parfaitement continues, régulières et symétriques : la vitesse et l'accélération diminuent graduellement jusqu'à l'instant de leur changement de sens; et les écarts de ces deux quantités suivent des lois identiques, de part et d'autre de leurs valeurs moyennes.

Considérons une manivelle (*fig.* 47) tournant autour d'un centre fixe et terminée par un bouton M. Pour projeter le point M sur une direction fixe, le moyen *géométriquement* le plus simple consiste à engager le bouton de la manivelle dans une rainure, fixée à l'extrémité d'une tige guidée : si le mouvement de la manivelle est uniforme, un point quelconque de la tige est animé du mouvement dont nous venons de donner les lois.

Nous verrons (IIe Section, § XIII) que le petit appareil appelé *excentrique triangulaire* fournit également une solution du problème géométrique qui nous occupe, au moins dans certaines périodes de son mouvement.

Mais, ces dispositions offrant certains inconvénients au point de vue pratique, on préfère généralement employer une barre rectiligne ou bielle, qui s'articule d'une part avec le bouton de la manivelle, d'autre part avec la tige guidée qui doit recevoir le mouvement de va-et-vient. Ce mouvement ne sera pas tout à fait identique à celui de la projection du point M, en raison de l'obliquité variable de la bielle; mais l'influence de cette obliquité est d'autant moins sensible que la bielle est plus longue par rapport à la manivelle : en supposant la bielle infinie, on retomberait exactement sur le cas précédent.

Pratiquement, quand la bielle dépasse cinq fois la longueur de la manivelle, le mouvement de l'extrémité de cette bielle diffère assez peu du mouvement oscillatoire type que nous venons d'étudier.

Nous reviendrons sur toutes ces questions dans la partie du Cours consacrée spécialement à l'étude géométrique des machines.

Théorie générale de l'accélération dans le mouvement curviligne.

Considérons une trajectoire curviligne quelconque (*fig.* 48), rapportée à trois axes coordonnés rectangulaires ou obliques; et soit

$$(8)\qquad x = \varphi(t)$$

l'équation du mouvement de la projection du mobile sur l'axe des x.

On peut toujours développer la fonction $\varphi(t)$ par la formule de Maclaurin et écrire

$$(9)\qquad x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \ldots;$$

d'où

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x = B + 2Ct + 3Dt^2 + \ldots, \\ \dfrac{dv_x}{dt} = 2C + 6Dt. \end{cases}$$

En faisant $t=0$ dans ces équations, on trouve

$$A = x^0, \quad B = v_x^0, \quad C = \tfrac{1}{2} j_x^0, \quad \ldots; \tag{11}$$

d'où, en désignant par θ un temps infiniment petit et négligeant les termes du troisième ordre,

$$x = x^0 + v_x^0 \theta + \tfrac{1}{2} j_x^0 \theta^2 \text{ (}^1\text{)}. \tag{12}$$

Cela posé, quel que soit le système de projections employé, nous savons que la vitesse v_x^0 est la projection de la vitesse v^0; mais nous ne connaissons aucune relation entre les accélérations, telles que j_x, des projections du mobile sur un axe quelconque; nous ne savons pas non plus comment ces diverses quantités sont liées avec l'accélération proprement dite j.

Simplification des équations du mouvement. — Pour arriver à combler cette lacune, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est de transporter les axes coordonnés au point M_0, dans le voisinage duquel nous nous proposons d'étudier les diverses affections du mouvement. On a ainsi

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad z^0 = 0. \tag{1}$$

De plus, je prends pour plan des xy le plan osculateur de la trajectoire; alors, quelle que soit la direction de l'axe des z, l'une des équations du mouvement sera nécessairement, avec l'approximation dont nous nous contentons,

$$z = 0,$$

puisque le plan osculateur contient par définition trois points infiniment voisins de la trajectoire du mobile, les seuls dont nous nous occupions actuellement.

Enfin, dirigeons l'axe des x suivant la tangente à la trajectoire, au point M_0; il résulte de là que, quel que soit l'axe des y dans le plan osculateur, la projection de la vitesse v^0 sur cet axe sera nulle, et la projection de la même vitesse sur l'axe des x sera égale à v^0.

(1) On voit que négliger les termes du troisième degré en θ revient à supposer le mouvement uniformément varié. Il est évident que, pour chercher des relations entre des accélérations simultanées, il n'est pas nécessaire de s'inquiéter des variations que ces quantités doivent subir par la suite. A ce point de vue, on peut indifféremment conserver ou supprimer l'indice o, dont les accélérations sont affectées dans les formules (11), (12), et autres analogues.

On aura donc, en définitive, en négligeant d'écrire l'équation $z=0$, les équations du mouvement sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} x &= v^0\theta + \tfrac{1}{2} j'\theta^2, \\ y &= \tfrac{1}{2} j''\theta^2, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

j' et j'' étant de certains coefficients, qui dépendent du système d'axes adopté.

Cela posé, à partir du point M_0 (*fig.* 49), je prends sur la tangente une longueur M_0T égale à $v^0\theta$; je joins le point T, ainsi déterminé, au point M, et je prends un nouvel axe des y parallèle à TM.

L'abscisse du point M, dans ce système, se trouve ainsi, par construction, égale à M_0T ou à $v^0\theta$; quant à l'expression de y, elle conserve la forme (13), à la condition d'attribuer au coefficient que j'avais représenté d'une manière générale par j'' la valeur particulière qui convient aux nouveaux axes coordonnés. Soit J cette valeur; nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Quelle que soit la trajectoire d'un point mobile, on peut toujours trouver dans le plan osculateur de cette courbe deux axes, généralement obliques, tels que les équations du mouvement, rapporté à ces deux axes, aient la forme simple*

$$\left\{\begin{aligned} x &= v^0\theta, & v_x &= v^0, \\ y &= \tfrac{1}{2} J\theta^2, & v_y &= J\theta. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Accélération totale. — La marche même que nous avons suivie pour établir ce théorème démontre que le système d'axes dont il est ici question est unique; et il est naturel de penser que la quantité J doit jouer le principal rôle dans la théorie des accélérations. Cette quantité J, que nous venons de définir, est ce qu'on appelle *l'accélération totale*, et la direction de l'axe $M_0 y'$, qui correspond aux équations simplifiées (14), est la direction de l'accélération totale.

La considération de l'accélération totale est due au général Poncelet; elle a une très grande importance en Cinématique.

Cette importance résulte du théorème suivant, qui est fondamental dans la théorie des accélérations simultanées :

Théorème III. — *L'accélération de la projection d'un point mobile sur un axe quelconque est la projection de l'accélération totale sur le même axe.*

Reprenons l'équation générale

$$x = x^0 + v_x^0 \theta + \tfrac{1}{2} j_x \theta^2,$$

qui donne la loi du mouvement de la projection d'un point mobile sur une droite quelconque, quand on néglige les puissances de θ supérieures à la deuxième.

On sait qu'il n'y a qu'une seule manière de développer une fonction suivant les puissances croissantes de la variable dont elle dépend; dès lors, si, par un moyen quelconque, nous trouvons pour x une expression de la forme

$$A + B\theta + C\theta^2 + \ldots,$$

le coefficient C sera nécessairement égal à la moitié de l'accélération j_x du mouvement rectiligne du point P.

Ceci posé, prenons trois axes quelconques Ax, Ay, Az (*fig.* 51), et projetons l'arc infiniment petit M_0M sur l'axe des x : la projection de cet arc est égale à celle du chemin brisé M_0TM. Or la projection de M_0T est $v_x^0\theta$; la projection de TM est de même le produit du facteur numérique $\frac{\theta^2}{2}$ par la projection de J, projection qu'il est naturel de représenter par J_x; donc

$$x = x^0 + v_x^0 \theta + \tfrac{1}{2} J_x \theta^2.$$

On conclut de là que j_x est la même chose que J_x, c'est-à-dire que l'accélération de la projection sur un axe quelconque est la projection de l'accélération totale sur le même axe.

Projection du mouvement sur un plan. — Si nous projetons sur un plan (*fig.* 52), parallèlement à une direction quelconque, l'arc de courbe M_0M et la ligne brisée M_0TM, nous démontrerons par un raisonnement analogue que :

Théorème IV. — *L'accélération totale de la projection d'un mobile sur un plan est la projection de l'accélération totale sur ce plan.*

Construction de l'accélération totale. — De la définition que nous avons donnée de l'accélération totale résulte un premier moyen de construire cette quantité en grandeur et en direction. Il suit en effet de cette définition que :

Théorème V. — *Si l'on considère l'arc parcouru pendant le temps infiniment court θ, et qu'on porte sur la tangente à cet arc une longueur $M_0T = v^0\theta$, la ligne TM donne la direction de l'accélération totale; et, en divisant la longueur de cette ligne par le carré du temps, on obtient la moitié de* J.

Ce résultat peut encore s'énoncer ainsi :

La corde du chemin parcouru pendant le temps θ est la résultante des quantités $v^0\theta$ et $\frac{1}{2}J\theta^2$.

Les équations

$$v_x = v^0,$$
$$v_y = J\theta$$

fournissent une autre construction de l'accélération totale (*fig.* 50), quand on connaît les vitesses v^0 et v en grandeur et en direction; en effet :

Théorème VI. — *La vitesse, au bout d'un temps infiniment petit θ, est la résultante de la vitesse initiale v^0 et de la vitesse $J\theta$.*

En d'autres termes :

Si l'on décompose la vitesse v en deux, dont l'une soit la vitesse initiale v^0, l'autre sera en grandeur et en direction égale à $J\theta$ (1).

(1) Dans le mouvement rectiligne, les deux quantités v_0 et $J\theta$ ont une direction commune, et c'est leur *somme algébrique* qui donne la vitesse finale v. Dans le cas général, la somme est remplacée par une résultante, comme cela arrive toutes les fois qu'on a à ajouter des longueurs dont les directions ne sont pas les mêmes.

Quand on connaît les lois du mouvement des projections du mobile sur trois axes, on a, d'après le théorème III, les projections correspondantes de l'accélération totale; on peut donc construire cette quantité.

Ceci démontre le théorème suivant, qui n'est autre chose que le théorème III sous une autre forme :

Théorème VII. — *Les accélérations des projections d'un point mobile, sur trois axes coordonnés quelconques, ont une résultante qui est située dans le plan osculateur de la trajectoire, et qui représente en grandeur et en direction l'accélération totale* J.

La grandeur et la direction de cette résultante sont indépendantes du système d'axes considéré.

Enfin, quand on connaît la trajectoire et la loi du mouvement du mobile sur cette trajectoire, on peut construire l'accélération totale en n'employant que des quantités finies et sans passer par l'intermédiaire des projections du mouvement sur trois axes.

Pour cela, calculons la quantité $\frac{dv}{dt}$, que nous appelions simplement l'accélération, quand nous étudiions le mouvement indépendamment de la trajectoire.

Reprenons pour axes la tangente à la trajectoire, au point M_0, et la direction de l'accélération totale (*fig.* 50) : on a, dans ce système et pour tous les points compris entre M_0 et M,

$$v_x = v^0, \qquad v_y = J\theta;$$

d'où

$$v^2 = v^{02} + J^2\theta^2 + 2v^0 J\theta\cos\alpha.$$

Différentions cette équation, il vient

$$(15) \qquad v\frac{dv}{dt} = J^2\theta + v^0 J\cos\alpha;$$

d'où, comme θ est infiniment petit et que par suite v diffère infiniment peu de v^0,

$$\frac{dv}{dt} = J\cos\alpha.$$

Il suit de là que $\frac{dv}{dt}$ est la projection de l'accélération totale sur la tangente à la trajectoire.

Cette quantité $\frac{dv}{dt}$ s'appellera désormais *accélération tangentielle* [1]; et l'on a le théorème :

Théorème VIII. — *L'accélération tangentielle est la projection orthogonale de l'accélération totale sur la tangente.*

Ayant ainsi la projection de l'accélération totale sur la tangente, nous aurons achevé de définir cette quantité, si nous en donnons la projection sur la normale principale.

Or l'équation du mouvement, projeté orthogonalement sur la normale principale, est de la forme

$$y = \tfrac{1}{2} J\sin\alpha . \theta^2.$$

Mais, en considérant l'arc M_0M comme appartenant au cercle osculateur de la trajectoire et désignant le rayon de ce cercle par ρ, on a (*fig.* 53)

$$ds^2 = 2\rho y;$$

d'où, en remplaçant y par sa valeur,

$$ds^2 = J\rho\sin\alpha . \theta^2.$$

Enfin, comme le quotient de ds par θ ou dt n'est autre chose que la vitesse v, on trouve, pour la projection cherchée,

$$(16) \qquad J\sin\alpha = \frac{v^2}{\rho}.$$

Théorème IX. — *La projection de l'accélération totale sur la normale principale est égale à* $\frac{v^2}{\rho}$: *elle est centripète, c'est-à-dire dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire.*

L'*accélération centripète* est proportionnelle à la courbure $\frac{1}{\rho}$, quand on considère divers mobiles parcourant des

[1] Dorénavant le mot *accélération*, quand il nous arrivera, pour abréger, de l'employer sans épithète, devra toujours être entendu dans le sens d'*accélération totale*.

trajectoires différentes avec des vitesses égales. Si l'on veut introduire, à la place de la vitesse propre v, la vitesse angulaire ω autour du centre de courbure, il faudra faire

$$v = \omega\rho,$$

d'où

$$\frac{v^2}{\rho} = \omega^2\rho,$$

nouvelle expression de l'accélération centripète.

L'accélération totale étant comprise dans le plan osculateur de la trajectoire, l'accélération tangentielle et l'accélération centripète suffisent à la détermination de cette quantité. Ces deux composantes dépendent des données immédiates de Géométrie et de Cinématique qui définissent le mouvement dont on s'occupe; elles montrent distinctement l'influence, sur l'accélération du mouvement projeté, de la courbure de la trajectoire d'une part, du changement de la vitesse propre, de l'autre :

Dans le mouvement curviligne uniforme, l'accélération tangentielle est nulle, donc l'accélération totale est centripète (¹);

Dans le mouvement rectiligne, l'accélération normale à la trajectoire est nulle, et il n'y a pas d'autre accélération que l'accélération tangentielle;

Enfin, dans le cas général, les deux accélérations partielles se composent, pour donner naissance à l'accélération totale.

Théorème X. — *Si l'on mène en un point de la trajectoire d'un point mobile la tangente et la normale principale et*

(¹) On voit que nous appliquons ici à un mouvement uniforme le mot *accélération*, modifié d'ailleurs par une épithète convenable. Il faut bien remarquer que, lorsqu'il s'agit de grandeurs géométriques, deux lignes dont les longueurs sont les mêmes, mais dont les directions sont différentes, ne doivent pas être considérées comme géométriquement égales.

L'extension que nous donnons ici au mot *accélération* me semble donc parfaitement légitime, et je ne saurais admettre avec M. Duhamel (*Cours de Mécanique*, 3ᵉ édition, p. 19) que ce *soit par trop détourner les mots de leur sens naturel*.

J'ajouterai que je ne crois pas que jamais personne ait *désigné* la quantité J *sous le nom d'accélération du mouvement sur la trajectoire*. La dénomination d'*accélération totale*, tirée des Leçons du général Poncelet, ne peut donner lieu à aucune ambiguïté.

qu'on porte respectivement sur ces lignes des longueurs égales à $\frac{dv}{dt}$ et à $\frac{v^2}{\rho}$, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites représente en grandeur et en direction l'accélération totale du mobile.

Nous avons maintenant ce qu'il faut pour compléter l'étude du mouvement oscillatoire défini par les équations (4), (5) et (6) (p. 63).

Dans le mouvement circulaire uniforme du point M, l'accélération totale est centripète; elle a pour valeur ω^2R. La projection de cette ligne sur le diamètre OC ou sur l'axe Ay est

$$J_y = \omega^2 R \cos\omega t.$$

C'est précisément l'expression que nous avons trouvée directement pour l'accélération du point P.

Faisons encore une application de la théorie tout à fait capitale que nous venons d'exposer.

Accélération totale dans le mouvement des planètes autour du Soleil.

1° Je dis en premier lieu que l'accélération totale est dirigée constamment vers le foyer ou pôle F, autour duquel les aires décrites sont proportionnelles aux temps (*fig.* 54).

En effet, considérons la planète dans une position quelconque M_0, et soient M, M_1 deux positions infiniment voisines de la première, répondant à deux intervalles de temps consécutifs égaux.

Comme les aires parcourues sont proportionnelles aux temps, on a

$$MM_1F = FMM_0.$$

Cela posé, pour avoir la direction de l'accélération totale, il faut prendre sur la direction de l'élément M_0M une longueur M_0T, égale à l'espace parcouru en vertu de la vitesse v^0 pendant le temps correspondant au déplacement réel M_0M_1 et joindre le point T au point M_1.

Les deux éléments consécutifs du temps ayant été pris égaux, on a

$$MT = M_0M;$$

d'où l'on conclut

$$MTF = FMM_0 = MM_1F.$$

Mais, les deux triangles MTF et MM_1F ayant la base MF commune, leurs sommets T, M_1 sont sur une parallèle à cette base; donc TM_1 est parallèle à MF, et la direction de l'accélération totale au point M_0 est celle du rayon vecteur MF ou M_0F.

2° Nous avons trouvé précédemment, en supposant la vitesse aréolaire constante et égale à C, que la vitesse correspondante v du mobile sur sa trajectoire avait pour expression $\frac{2C}{r\cos i}$; donc

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{4C^2}{\rho r^2 \cos^2 i}.$$

D'après la théorie précédente, cette quantité est aussi égale à $J\cos i$; on a ainsi, pour l'accélération totale :

$$(17) \qquad J = \frac{4C^2}{r^2 \times \rho \cos^3 i}.$$

Newton a démontré, d'autre part, que le produit $\rho\cos^3 i$ est constant dans l'ellipse; donc l'accélération totale varie en raison inverse du carré de la distance de la planète au Soleil.

Remarquons que notre premier résultat est indépendant de la nature de la courbe décrite; ainsi :

Toutes les fois que les aires décrites par un mobile autour d'un point fixe F *sont proportionnelles aux temps, l'accélération totale est dirigée vers le point* F.

Quant à la grandeur de cette accélération totale, elle dépend de la nature de la trajectoire et de la position du pôle F dans le plan de cette courbe par la quantité $\rho\cos^3 i$. Ainsi :

Dans l'ellipse rapportée à son centre, on trouve

$$\rho\cos^3 i = \frac{K}{r^3}, \qquad J = K'r;$$

Dans la spirale logarithmique, on a

$$\rho\cos^3 i = Kr, \qquad J = \frac{K_1}{r^3}.$$

CHAPITRE II.

MOUVEMENT D'UN POINT RELATIVEMENT A UN SYSTÈME MOBILE.

La notion du mouvement relatif nous est aussi familière que celle du mouvement absolu. Nous avons dit que, pour étudier le mouvement d'un point dans l'espace, on compare les positions successives de ce point à certains points fixes, qu'on nomme *points de repère*. Le géomètre emploie habituellement pour système de comparaison trois axes rectangulaires; on peut d'ailleurs faire usage de tout autre système de coordonnées que l'on voudra.

Mais si, au lieu de comparer les positions successives du mobile à des points fixes, on les rapporte à des points de repère qui soient eux-mêmes en mouvement, il est clair que le mouvement qu'on observera ainsi ne sera pas le mouvement véritable; on l'appelle *mouvement relatif*.

C'est ainsi qu'un voyageur en bateau voit se déplacer tous les objets parfaitement fixes qui sont sur les rives. Par contre, un objet qui se mouvrait sur le pont du bateau, en sens inverse de la marche de celui-ci et avec une vitesse égale, serait réellement au repos. Dans tous les cas il est évident que le mouvement réel ou *absolu* dépend à la fois du mouvement apparent et du déplacement du bateau ou *mouvement d'entraînement*. On dit que le mouvement absolu est *composé* des deux derniers, et le problème qui consiste à déterminer le mouvement absolu, quand on connaît le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement, est connu sous le nom de problème de la *composition des mouvements*.

§ V. — Définition du mouvement relatif d'un point.

Il s'agit de préciser ces notions. Imaginons que nous mesurions à chaque instant les coordonnées d'un point mobile par rapport à trois axes, rectangulaires ou obliques. Si ces axes sont fixes, les variations des coordonnées nous feront connaître le mouvement absolu du point.

Dans le cas contraire, considérons quelque part trois axes fixes pareils aux premiers et un point fictif assujetti à avoir à chaque instant, par rapport à ces axes fixes, des coordonnées égales à celles du point en question par rapport aux axes mobiles. Le mouvement absolu de ce point est ce qu'on appelle le *mouvement relatif du point donné*. Ainsi :

DÉFINITION. — *Le mouvement d'un point relativement à des axes mobiles est le mouvement absolu d'un point fictif qui aurait à chaque instant, par rapport à des axes fixes, les mêmes coordonnées que le premier par rapport aux axes mobiles.*

La trajectoire de ce point fictif est la *trajectoire relative* du point donné, sa vitesse est la *vitesse relative*, son accélération totale est l'*accélération totale relative*.

Importance de la théorie des mouvements relatifs. — C'est ici le lieu de remarquer qu'au commencement du Cours nous avons fait une pétition de principe, qui n'avait pas alors d'inconvénients, mais sur laquelle il faut revenir à présent.

Nous avons dit qu'on reconnaissait l'état de repos ou de mouvement d'un point en mesurant les coordonnées de ce point par rapport à trois axes fixes. Or, il est clair qu'en supposant que nous possédions ainsi trois axes reconnus pour fixes, nous avons admis précisément ce qui était en question. Ceci n'infirme d'ailleurs en rien les résultats auxquels nous sommes arrivés, du moins au point de vue rationnel; en effet, si jusqu'ici nous n'avons aucun moyen de nous procurer des axes fixes, nous concevons certainement l'existence d'un pareil système d'axes, et cela suffit pour légitimer toutes les spéculations qui précèdent.

Mais il importe actuellement d'examiner le cas où les axes auxquels on rapporte le mouvement d'un corps sont mobiles, puisqu'on n'est jamais assuré d'avoir à sa disposition des points de repère fixes d'une manière absolue.

Les anciens, croyant à l'immobilité de notre globe, rapportaient les mouvements qui s'effectuent à la surface de la Terre, et même dans le ciel, à des axes tels que la verticale du lieu où ils observaient, l'horizontale méridienne, et celle qui est

perpendiculaire à celle-ci. On sait aujourd'hui que la Terre tourne; et il est à remarquer que des phénomènes purement mécaniques auraient pu, à défaut des découvertes astronomiques, conduire les savants à la connaissance de cette vérité. En effet, la rotation de la Terre produit, comme nous le verrons plus tard, des perturbations sensibles dans les mouvements des pendules, le tir des projectiles, la chute des corps pesants, etc. Pour ne citer qu'un seul exemple, l'observation attentive des oscillations du pendule, en montrant que les phénomènes observés sont incompatibles avec l'hypothèse de la fixité de la Terre, aurait démontré récemment le mouvement de rotation de notre globe, si cette vérité n'avait été déjà bien et dûment acquise à la Science. C'est dans le ciel qu'on cherche aujourd'hui des points de repère fixes. Encore est-il des phénomènes, exigeant une observation plus délicate, qui semblent démontrer que les étoiles dites fixes elles-mêmes sont en mouvement par rapport à notre système solaire. Il suit de là que, quoi que nous fassions, nous n'observerons jamais que des mouvements relatifs : c'est ce qui donne un grand intérêt à la théorie que nous allons aborder.

Admettons donc qu'on rapporte le point mobile qu'on étudie à un système de comparaison animé lui-même d'un certain mouvement. Pour définir le mouvement de ce système, il faut que nous anticipions un peu sur le Chapitre suivant, consacré au mouvement des systèmes de points et en particulier des corps solides; mais il n'y a à cela aucun inconvénient : il y en aurait au contraire beaucoup à vouloir s'astreindre à un ordre trop méthodique, si l'on devait y perdre sous le rapport de la clarté.

Considérons un système de points mobiles dont la réunion constitue un corps solide, c'est-à-dire non déformable. Pour appliquer le calcul aux mouvements de ce système, nous choisirons trois axes, fixes par rapport à lui, Ox_1, Oy_1, Oz_1 : les coordonnées de tous les points du corps par rapport à ces axes seront des constantes, le corps étant supposé invariable de forme, et il suffira évidemment de connaître le mouvement de ces trois axes pour que celui du système tout entier soit déterminé. En effet, on pourra toujours assigner à un instant donné la position d'un point du système d'après la connaissance de la situation actuelle des axes et des coordonnées x_1, y_1, z_1, prises par rapport à ces axes, coordonnées qui n'ont pas changé de valeur. Quand nous dirons que nous considérons un point comme lié invariablement au solide, cela voudra dire qu'à partir de l'instant où nous établissons cette liaison, les coordonnées x_1, y_1, z_1 de ce point resteront constantes.

D'autres fois, on trouvera plus commode de définir simplement les mouvements de trois points du système (non situés en ligne droite) : ceci fait également connaître le mouvement du solide tout entier, puisque les distances mutuelles de deux points d'un solide sont invariables, quel que soit le déplacement commun de l'ensemble.

Cela posé, si l'on cherche à se représenter un corps solide qui se transporte dans l'espace d'une manière quelconque, on se fait fort difficilement une idée d'un pareil mouvement. On a, au contraire, une idée très nette de deux mouvements simples que nous allons définir, et qui sont les seuls dont nous nous occuperons pour le moment.

Mouvement de translation.

Si trois points A, B, C d'un corps solide en mouvement (*fig.* 55) ont à un instant donné quelconque des vitesses égales et parallèles, le mouvement porte le nom de *mouvement de translation.*

Les côtés du triangle ABC se meuvent parallèlement à eux-mêmes : car, dans un espace de temps infiniment petit, les sommets de ce triangle parcourent tous trois des chemins parallèles, et égaux au produit de la vitesse commune par l'élément du temps. Une droite quelconque du système reste également parallèle à elle-même dans toutes les positions du solide : on dit souvent que le corps tout entier se meut *parallèlement à lui-même.* Enfin les trajectoires de tous les points sont superposables ; elles peuvent être d'ailleurs rectilignes ou curvilignes.

La vitesse commune de tous les points, à un instant donné, s'appelle la *vitesse du solide* à cet instant. La direction et la grandeur de cette vitesse varient en général avec le temps d'une manière quelconque.

Mouvement de rotation.

Si deux points d'un solide en mouvement restent constamment immobiles dans l'espace, tous les points de la ligne qui joint ces deux points restent aussi fixes. Les autres points du corps décrivent des cercles perpendiculaires à cette droite. On dit que le solide *tourne* autour de la droite fixe, à laquelle on donne le nom d'*axe de rotation.*

Il serait possible que cet axe n'appartînt pas au solide proprement dit : c'est ce qui arrive dans le cas d'un anneau tournant autour de son axe de figure. Cette circonstance ne modifie en rien ce que nous venons de dire, d'après la définition que nous avons donnée de ce qu'on doit entendre par un *solide*, au point de vue géométrique.

Dans le mouvement de rotation, les perpendiculaires abaissées des divers points du solide sur l'axe décrivent simultanément des angles égaux; la valeur commune de tous ces angles, correspondante à un temps quelconque, est ce qu'on appelle le *déplacement angulaire* du solide pendant ce temps. Un mouvement de rotation est défini par la loi qui donne la valeur de ce déplacement angulaire en fonction du temps. La *vitesse angulaire* est le quotient d'un déplacement angulaire infiniment petit par le temps dt.

Soient ω cette vitesse angulaire et v la vitesse d'un point quelconque situé à une distance r de l'axe de rotation; on a

$$v = \omega r.$$

Un mouvement de rotation est uniforme ou varié, selon que la vitesse angulaire est constante ou variable : dans ce dernier cas, la quantité $\frac{d\omega}{dt}$ s'appelle l'*accélération angulaire.*

Il faut bien se garder de confondre une translation suivant une trajectoire circulaire avec une rotation. On dit communément que la Lune tourne autour de la Terre; mais, pour que cette assertion soit fondée, il faut démontrer que le mouvement de la Lune est bien un mouvement de rotation et non pas une translation circulaire.

Représentons par C (*fig.* 56) une position du globe lunaire, et par AB la trace, sur le plan de l'orbite, du cercle de contour apparent.

Dans l'hypothèse d'un mouvement de translation, le diamètre AB doit rester parallèle à lui-même; et il est évident qu'on verra successivement de la Terre, supposée en T, toutes les parties de la Lune dans la période entière de sa révolution. Si, au contraire, le mouvement est une rotation, le diamètre AB restera toujours perpendiculaire à la ligne des centres et, par suite, on ne verra jamais qu'un seul des hémisphères de la Lune. L'observation ayant démontré que c'est précisément là ce qui arrive (du moins si l'on fait abstraction des petites inégalités du mouvement de notre satellite), il s'ensuit qu'on a le droit de dire que la Lune a un mouvement de rotation autour de la Terre supposée fixe.

Le Soleil, dans son mouvement apparent, décrit, lui aussi, à peu près un cercle autour de la Terre; mais, comme cet astre se montre successivement à nous sous toutes ses faces, on voit que son mouvement n'est pas une rotation. Ce n'est d'ailleurs pas davantage une translation : c'est un mouvement plus compliqué sur lequel nous reviendrons.

Il est évident qu'il n'y a lieu de faire ces distinctions que dans le cas où il s'agit d'un corps de dimensions finies : le mouvement d'un point n'est pas plus une translation qu'une rotation; c'est un mouvement simple.

Données numériques relatives à la rotation diurne de la Terre. — La Terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de la ligne des pôles. La durée d'une révolution complète est ce que les astronomes appellent le *jour sidéral*, lequel se compose de 86164 secondes de temps moyen.

On a donc, pour la vitesse angulaire de la Terre,

$$n = \frac{2\pi}{86164} = 0,000073.$$

La vitesse d'un point situé à l'équateur est nR ou 0,000073R, c'est-à-dire environ 465^m : c'est à peu près la vitesse d'un boulet de canon.

Enfin le carré de la vitesse angulaire de la Terre est une quantité fort petite dont la valeur est

$$n^2 = 0,0000000053.$$

Représentation géométrique des rotations.

Pour qu'une rotation soit définie d'une manière complète, il faut qu'on connaisse l'axe autour duquel elle s'effectue, la vitesse angulaire ω et enfin le sens du mouvement. On représente la vitesse angulaire par une longueur, en la rapportant à une unité arbitraire, et l'on porte cette longueur sur la direction de l'axe; de sorte qu'une simple ligne terminée OP (*fig.* 57) représente à la fois l'axe et la grandeur de la rotation. Cette même ligne *en indiquera encore le sens, par cette convention qu'en se plaçant à l'extrémité* P *considérée comme le nord, pour regarder devant soi le point* O *considéré comme le midi, la rotation se fera de gauche à droite, comme se fait, à nos yeux, le mouvement du Soleil* (1).

Ce sens est celui dans lequel tournent les aiguilles d'une montre, celui d'une vis que l'on enfonce. C'est le sens rétrograde des astronomes, le sens direct étant celui des mouvements réels.

Axe de la rotation terrestre. — Il suit de là que la ligne qui représente la rotation diurne est dirigée du centre de la Terre vers le pôle sud : si l'on veut prendre pour axe la partie nord de la ligne des pôles, il faut attribuer à la vitesse angulaire la valeur négative

$$\omega = -n.$$

Il résulte encore de la convention précédente que, si l'on considère trois axes rectangulaires disposés à la manière ordinaire (*fig.* 58), une rotation Oz correspond à un mouvement dirigé de Ox vers Oy, et ainsi de suite, conformément aux flèches.

Composition et décomposition des mouvements.

Le problème de la composition des mouvements est celui dans lequel on demande de trouver le mouvement composé, quand on connaît le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif. Le problème inverse consiste, étant donné le mouvement réel d'un point, à trouver son mouvement par

(1) Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps.*

rapport à un système dont le mouvement est également donné; ou bien encore, connaissant le mouvement réel et le mouvement apparent, à trouver le mouvement dont est animé le système de comparaison.

Nous prendrons toujours pour ce système de comparaison trois axes rectangulaires, Ox, Oy, Oz (*fig.* 59). Nous mesurerons à chaque instant les coordonnées du point mobile par rapport à ces trois axes : en reportant ces coordonnées sur trois axes fixes, nous obtiendrons la trajectoire relative. Le mouvement relatif est celui qu'on observe quand on participe, sans en avoir conscience, au mouvement des axes de comparaison, et, dans ce cas, on qualifie souvent le mouvement relatif de mouvement *apparent;* mais on conçoit qu'il est également possible de mesurer les coordonnées d'un point par rapport à des axes mobiles desquels on est soi-même tout à fait indépendant, et dont on connaît parfaitement le mouvement.

Reportons-nous maintenant à l'origine du mouvement (c'est-à-dire à un instant quelconque, pris pour origine des temps), et supposons qu'à partir de cet instant les axes mobiles entraînent avec eux la trajectoire relative; le point M, dans son mouvement absolu, restera constamment sur celle-ci : et l'on saura trouver à chaque instant la position de ce mobile dans l'espace, puisque l'on connaît par le mouvement des axes la position de la trajectoire relative, au temps t, et par la loi du mouvement sur cette trajectoire, le lieu apparent du mobile à la même époque.

Soient (*fig.* 60) AB, A′B′, A″B″, ... les positions de la trajectoire relative, aux temps t, t', t'', ...; et supposons qu'à ces diverses époques le mobile se trouve aux points M, N, P, ..., de la courbe mobile AB.

A la fin du temps t, le mobile est en M; à la fin du temps t' il est au point N de la courbe AB; mais cette courbe se trouve alors dans la position A′B′, et le point N a été transporté en N′ : donc, à la fin du temps t', le mobile est en N′. On verra de même qu'à la fin du temps t'' il se trouve en P″, et ainsi de suite. Le point mobile décrit donc dans l'espace la trajectoire MN′P″ ..., et il occupe sur cette trajectoire les positions M, N′, P″, ..., aux valeurs t, t', t'', ... du temps.

On a ainsi la trajectoire absolue, ainsi que la loi du mouvement sur cette trajectoire, c'est-à-dire que l'on connaît d'une manière complète le mouvement absolu, par le moyen des deux mouvements composants.

Analytiquement, le problème de la composition et de la décomposition des mouvements est une pure question de transformation de coordonnées.

Soient ξ', η', ζ' les coordonnées de l'origine des axes mobiles; désignons par a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' les cosinus des angles formés par ces axes mobiles avec les axes fixes; c'est-à-dire posons

$$\begin{array}{lll} a = \cos\overline{x,\xi}, & a' = \cos\overline{y,\xi}, & a'' = \cos\overline{z,\xi}, \\ b = \cos\overline{x,\eta}, & b' = \cos\overline{y,\eta}, & b'' = \cos\overline{z,\eta}, \\ c = \cos\overline{x,\zeta}, & c' = \cos\overline{y,\zeta}, & c'' = \cos\overline{z,\zeta}; \end{array}$$

enfin soient x, y, z les coordonnées relatives du point dont nous étudions le mouvement. Les formules générales de transformation donnent les valeurs suivantes pour les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes

$$\begin{aligned} \xi &= \xi' + ax + a'y + a''z, \\ \eta &= \eta' + bx + b'y + b''z, \\ \zeta &= \zeta' + cx + c'y + c''z. \end{aligned}$$

En différentiant ces équations une première, puis une seconde fois, on trouverait les relations qui existent, d'abord entre les vitesses, puis entre les accélérations des divers mouvements considérés.

Ce sont ces relations que nous allons établir géométriquement dans les deux paragraphes suivants.

Composition d'un nombre quelconque de mouvements. — Il est aisé de comprendre qu'on peut avoir à composer non pas seulement deux, mais un nombre quelconque de mouvements.

Un point se meut sur un bateau, le bateau se meut à la surface de la Terre, la Terre tourne autour de la ligne des pôles; enfin cet axe du monde lui-même se transporte aux divers points de l'orbite elliptique que décrit notre globe autour du Soleil. Le mouvement absolu du point doit être considéré comme composé de tous ces divers mouvements; et l'on peut effectuer cette composition de proche en proche, au moyen des principes que nous venons de poser, absolument comme s'il n'y avait que deux mouvements.

Le mouvement du point sur le bateau est un mouvement relatif : en considérant le mouvement du bateau par rapport à la Terre comme un mouvement d'entraînement, et composant ces deux mouvements, on trouvera le mouvement du point mobile par rapport à la Terre.

Le mouvement qu'on obtient par cette composition est encore un mouvement relatif, puisque la Terre n'est pas en repos, et la rotation diurne autour de la ligne des pôles est un nouveau mouvement d'entraînement, par rapport au mouvement que nous venons de déterminer : la composition de ces deux derniers mouvements donnera le mouvement du point mobile par rapport à des axes de direction constante, passant par le centre de la Terre, et ainsi de suite.

§ VI. — Composition des vitesses.

Bornons-nous d'abord au cas de deux mouvements composants. La vitesse absolue d'un point, à chaque instant t, peut se déduire par une construction très simple de la vitesse relative du même point et de la vitesse dite d'*entraînement*, c'est-à-dire de la vitesse d'un point qui coïnciderait avec le point mobile M à l'époque t et qui resterait ensuite invariablement lié aux axes mobiles.

Soient M (*fig.* 61) la position du mobile à l'époque t, AB sa trajectoire relative. Au bout du temps t' cette trajectoire, par l'effet du mouvement des axes, s'est trouvée transportée en A'B', les divers points M, N, P, ... venant en M', N', P', ...

Si le point M n'avait pas de mouvement relatif, il serait en M' au bout du temps t' ; mais on sait qu'il se déplace sur sa trajectoire relative et qu'au lieu de se trouver en M' il occupe la position N' à l'époque t'. Il suit de là que :

M'N' est le déplacement relatif du point mobile ;

MN' est son déplacement absolu ;

MM' est le déplacement du point du système de comparaison qui coïncidait avec M, à l'époque t.

A la simple inspection de la figure, et quel que soit l'intervalle $t'-t$, on reconnaît que :

Théorème I. — *La corde du chemin réellement parcouru dans un temps quelconque est la résultante* (¹) *de la corde du déplacement relatif et de celle du chemin suivi par le point lié aux axes, qui coïncidait avec le point mobile à l'instant initial.*

Parallélogramme des vitesses. — Imaginons maintenant que l'intervalle $t'-t$ tende indéfiniment vers zéro : les cordes tendront de plus en plus à se confondre avec leurs arcs, et à la limite elles auront pour valeurs respectivement

$$v\,dt,\quad v_r\,dt,\quad v_e\,dt,$$

si l'on se reporte à la définition de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. En même temps la figure MNN'M' a pour limite un parallélogramme, et nous venons de voir que les côtés infiniment petits et la diagonale de ce parallélogramme sont proportionnels aux vitesses v_r, v_e, v. Si donc sur la vitesse relative et la vitesse d'entraînement on construit un parallélogramme semblable à celui-ci (*fig.* 62), la diagonale de ce parallélogramme représentera, en grandeur et en direction, la vitesse absolue du mobile.

Donc :

Théorème II. — *La vitesse absolue est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.*

Cette proposition est connue sous le nom de *parallélogramme des vitesses.*

On peut observer que, si les vitesses v_e, v_r changeaient de rôle, c'est-à-dire si la première était une vitesse relative et la deuxième une vitesse d'entraînement, la construction qui donne la vitesse absolue conduirait à un résultat parfaitement identique au précédent. Dans ce sens, on confond souvent les deux vitesses v_e, v_r, sous le nom de *composantes* de la vitesse absolue : c'est là une chose parfaitement indifférente.

(¹) On sait ce que nous entendons par une droite *résultante* de deux autres.

au point de vue géométrique. Au point de vue de la réalité des choses, il faut bien remarquer que l'une des composantes est la vitesse du mobile, observée d'une certaine manière, et que l'autre est une vitesse d'entraînement qui n'a aucun rapport nécessaire avec le mouvement de ce mobile.

Si l'on se proposait de trouver la vitesse relative, les données étant la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement, on aurait à construire un côté d'un parallélogramme, connaissant la diagonale et le deuxième côté. On peut aussi considérer le côté inconnu MV_r (*fig.* 63) comme la diagonale du parallélogramme $MVV_rV'_e$, ce qui conduit au théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La vitesse relative est la résultante de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.*

Problème général de la composition des vitesses.

La règle que nous venons de démontrer pour un mouvement, composé de deux mouvements donnés seulement, s'étend sans difficulté au cas où les mouvements composants sont en nombre quelconque.

Dans ce cas, la vitesse MB (*fig.* 64), fournie par la composition de v_e et de v_r, doit être considérée comme une deuxième vitesse relative v'_a ; en la composant avec la deuxième vitesse d'entraînement, on aura une nouvelle résultante MC, et l'on continuerait ainsi tant qu'on aurait de nouvelles vitesses à composer. La vitesse absolue est la ligne qui ferme le polygone de toutes les vitesses composantes : c'est leur *résultante*, dans le sens géométrique du mot. On a donc le théorème général :

THÉORÈME IV. — *Quel que soit le nombre des mouvements à composer, la vitesse absolue est la résultante de toutes les vitesses correspondantes.*

Ce théorème est indépendant de l'ordre dans lequel on considère les vitesses composantes. Il permet de déterminer la direction et la grandeur de la vitesse absolue : soit géométriquement, en construisant le polygone des vitesses, soit analytiquement, en projetant ce polygone sur trois axes rectangulaires quelconques. On a ainsi les équations

$$V\cos\overline{V,x} = \sum v\cos\overline{v,x} = X,$$

$$V\cos\overline{V,y} = \sum v\cos\overline{v,y} = Y,$$

$$V\cos\overline{V,z} = \sum v\cos\overline{v,z} = Z;$$

$$V^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Remarques sur la composition des vitesses.

I. Dans la théorie qui précède, nous n'avons pas eu à nous préoccuper de définir les mouvements d'entraînement d'une manière complète : il nous a suffi de considérer la vitesse d'un seul point dans chaque système mobile, de celui qui coïncide avec le point M, à une époque déterminée.

Cependant, si l'un des mouvements d'entraînement n'est pas une translation, la direction des axes auxquels on doit rapporter la vitesse relative correspondante est essentiellement variable, tandis que la vitesse absolue et la vitesse d'entraînement sont rapportées à des directions fixes. Mais comme, pendant un temps très court, la direction des axes mobiles ne peut changer qu'infiniment peu, les angles formés par les différentes vitesses avec ces axes, considérés au commencement ou à la fin du temps dt, diffèrent seulement de quantités infiniment petites : quantités qu'on est en droit de négliger, devant les angles finis formés par les côtés du polygone des vitesses.

Les théorèmes relatifs à la composition des vitesses ne dépendent donc en aucune façon du mouvement de tout le système de comparaison, mais uniquement de la vitesse d'un seul point de ce système.

II. *Sur la théorie des mouvements simultanés.* — Nous avons ramené le mouvement curviligne au mouvement rectiligne, en substituant au premier certains mouvements simultanés, dont nous avons indiqué les relations avec le mouvement principal qu'il s'agissait d'étudier.

La considération des mouvements relatifs nous aurait conduits à des résultats du même genre; en effet, quel que soit le mouvement d'un point M (*fig.* 65), on peut toujours ramener ce mouvement à s'effectuer sur une ligne droite, en supposant cette droite animée elle-même d'un mouvement convenable [1]. Mais on ne devra jamais dire qu'un point est animé de plusieurs mouvements simultanés.

Plusieurs points ont des mouvements simultanés, si leurs positions sont liées l'une à l'autre par une loi géométrique; un point n'a qu'un seul mouvement : on peut d'ailleurs rapporter ce mouvement, par la méthode des coordonnées, soit à un système fixe, soit à des axes mobiles; le point de vue de l'observateur aura changé, mais ce sera toujours le même mouvement. Quant au mouvement des axes de comparaison (mouvement d'entraînement), il est absolument indépendant de celui du point lui-même et ne saurait, dans aucun cas et sous aucun prétexte que ce soit, être considéré comme appartenant à ce point.

Ceci une fois éclairci, il est évident qu'on pourra faire les conventions de langage que l'on voudra, pourvu qu'on se comprenne bien.

§ VII. — Composition des accélérations.

Nous avons clairement défini le mouvement d'un point relativement à un système d'axes mobiles, en disant que c'est le mouvement absolu d'un point fictif dont les coordonnées, par rapport à trois axes fixes, seraient les mêmes à chaque instant que celles du point donné par rapport aux axes mobiles.

Quant au *mouvement d'entraînement* proprement dit, nous ne pouvons pas pour le moment nous le figurer d'une manière suffisamment nette, puisque nous n'avons pas encore étudié

[1] Il faudra évidemment que, de la définition du mouvement d'entraînement, il résulte nettement que le point M soit assujetti à se trouver à chaque instant sur la droite mobile.

Les mouvements d'entraînement les plus simples qu'on puisse imaginer (sur un plan) sont un mouvement de translation dans une direction bien définie, ou un mouvement de rotation autour d'un point fixe. Nous nous sommes bornés à considérer ces deux mouvements-là, mais il est évident qu'il en existe une infinité d'autres.

toutes les différentes sortes de mouvement dont un solide invariable peut être animé.

Quoi qu'il en soit, il est bien clair qu'en général, et sauf le cas où le mouvement d'entraînement est une translation, les divers points du système solide de comparaison n'auront ni la même vitesse, ni la même accélération totale. Et il ne faudra jamais perdre de vue quand nous dirons, en étudiant le mouvement relatif d'un point, la *vitesse* ou l'*accélération d'entraînement*, que nous entendons par ces mots la vitesse ou l'accélération du point du système de comparaison qui coïncide avec le point mobile, à l'instant considéré.

Notre théorème I, relatif à la composition des cordes, résulte immédiatement de la définition du mouvement relatif : il est vrai pour un mouvement fini quelconque, et quel que soit le mouvement des axes de comparaison. En appliquant ce théorème à un déplacement infiniment petit, nous en avons déduit la règle évidente de la composition des vitesses, règle dont Aristote paraît avoir eu déjà connaissance.

Le même théorème I, si nous considérons deux éléments consécutifs sur chaque trajectoire (*fig.* 66), va nous permettre de résoudre le problème de la composition des accélérations.

Ce problème, de la composition des accélérations, diffère du problème de la composition des vitesses par la nécessité où l'on se trouve d'avoir égard, s'il y a lieu, au changement de direction des axes. En effet, l'accélération totale se construit en décomposant la vitesse V' existant au bout du temps dt en deux autres, dont l'une soit la vitesse V au commencement de l'intervalle dt : l'autre est l'accélération totale J, multipliée par dt. Pour appliquer cette construction au cas d'un mouvement relatif, il faut remarquer que les angles qui déterminent la vitesse initiale v_r sont rapportés à la position initiale des axes mobiles, tandis que la vitesse v'_r doit être rapportée à la position finale; dès lors une variation infiniment petite dans la direction des axes influe sur l'angle infiniment petit que font entre elles les vitesses v_r et v'_r, et par conséquent sur la direction et sur la grandeur de la ligne $J_r dt$ qui joint leurs extrémités; donc l'accélération totale relative est fonction de cette variation, et le problème de la composition des accélérations sera tout de suite assez compliqué, dès que les axes n'auront pas un simple mouvement de translation.

Nous examinerons d'abord le cas où les axes sont animés d'un mouvement de translation, puis celui d'une rotation uniforme autour d'une droite fixe. Nous nous bornerons d'ailleurs, pour le moment, à ces deux cas particuliers.

1er Cas. — *Étude de la composition des accélérations, lorsque le système solide est animé d'un mouvement de translation.*

Rappelons les trois théorèmes suivants :

I. Dans tout mouvement, la corde du chemin parcouru dans un temps infiniment petit θ est la résultante de la quantité $v\theta$, portée sur la tangente, et de la quantité $\frac{1}{2}J\theta^2$, portée dans la direction de l'accélération totale.

II. La corde d'un déplacement absolu quelconque est la résultante de la corde du mouvement relatif et de la corde du mouvement d'entraînement.

III. La vitesse absolue d'un point est la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

Cela posé, considérons toujours notre triangle curviligne $MM'M_1$, et soient (*fig.* 67)

$$MT = v\,\theta, \qquad TM_1 = \tfrac{1}{2}J\,\theta^2,$$
$$MT' = v_e\theta, \qquad T'M' = \tfrac{1}{2}J_e\theta^2,$$
$$M'T_1 = v_r\theta, \qquad T_1M_1 = \tfrac{1}{2}J_r\theta^2.$$

D'après le théorème du parallélogramme des vitesses, $T'T$ est égal à $M'T_1$; de plus, ces deux lignes sont parallèles, puisque la trajectoire relative s'est déplacée parallèlement à elle-même, le mouvement d'entraînement étant une translation.

Il suit de là que TT_1 est aussi égal et parallèle à $T'M'$. Donc la ligne qui représente en grandeur et en direction $\frac{1}{2}J\theta^2$ est la résultante des lignes qui représentent de même $\frac{1}{2}J_e\theta^2$ et $\frac{1}{2}J_r\theta^2$:

Théorème V. — *Lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, l'accélération totale du mouvement d'un point est la résultante de l'accélération totale relative et de l'accélération d'entraînement.*

Ou bien :

Théorème VI. — *Lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, l'accélération totale relative est la résultante de l'accélération totale absolue et de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire.*

Construisons (*fig.* 68) le triangle MAA_1 formé, à une époque déterminée, par les vitesses v_e, v_r et v. Au bout du temps θ, ce triangle est devenu $MA'A'_1$, et la ligne $A_1A'_1$ représente l'accélération J du mouvement absolu, multipliée par le facteur numérique θ.

Quel que soit le nombre des mouvements composants, pourvu que tous les mouvements d'entraînement soient des translations, on obtient toujours (*fig.* 69) l'accélération du mouvement composé en joignant les sommets homologues du polygone des vitesses; et la figure montre que cette accélération est bien la résultante géométrique de toutes les accélérations composantes.

Ces résultats ne diffèrent en aucune façon de ceux qui sont relatifs à la composition des vitesses.

2e Cas. — *Étude de la composition des accélérations lorsque le système solide est animé d'un mouvement de rotation.*

Si nous supposons maintenant que les axes auxquels on rapporte le mouvement relatif soient animés d'un mouvement quelconque, la tangente à la trajectoire relative, au point M (*fig.* 70), ne conserve pas une direction constante; de sorte que, quand le point M se trouve transporté en M', le point T_1, extrémité de la longueur $v_r\theta$, ne coïncide pas avec le quatrième sommet du parallélogramme construit sur $T'T$ et $T'M'$. Soit V'_r ce quatrième sommet, on a

$$TM_1 = \tfrac{1}{2}J\theta^2,$$
$$T_1M_1 = \tfrac{1}{2}J_r\theta^2,$$
$$T_1V'_r = T'M' = \tfrac{1}{2}J_e\theta^2;$$

mais ces trois lignes ne forment pas les trois côtés d'un triangle, et l'on ne peut plus dire que la première soit la résultante des deux autres.

En effet, il existe une lacune entre les points V'_r et T_1, en raison du déplacement angulaire de la tangente MV_r. De plus, on ne peut pas dire que cette lacune soit négligeable; car la distance $T_1V'_r$ est le troisième côté d'un triangle isoscèle dont les côtés égaux sont infiniment petits du premier ordre et comprennent un angle qui est lui-même infiniment petit du premier ordre. Il suit de là que le troisième côté de ce triangle est infiniment petit du second ordre, et comparable aux autres grandeurs considérées [1].

Il faut donc ajouter une quatrième ligne aux trois lignes que nous considérions tout à l'heure, pour avoir un polygone fermé; et, dans le cas général, on doit considérer l'accélération relative comme la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire et d'une troisième accélération *complémentaire*, dont la direction est celle de la droite $T_1V'_r$ et dont la grandeur s'obtiendra en divisant la longueur $T_1V'_r$ par $\frac{1}{2}\theta^2$.

Détermination de l'accélération complémentaire. — Cette longueur $T_1V'_r$ est le produit de $M'T_1$ par l'angle infiniment petit $T_1M'V'_r$; or $M'T_1$ est égal à $v_r\theta$, et l'angle M' n'est autre chose que l'angle formé par deux positions infiniment voisines de la tangente à la trajectoire relative, au point M.

Pour calculer cet angle, qui dépend uniquement du mouvement des axes mobiles, nous supposerons que ce mouvement soit une rotation uniforme ω, représentée par la droite OP (*fig.* 71). C'est ici seulement qu'il y a lieu d'introduire cette restriction, tout ce qui précède s'appliquant à un mouvement d'entraînement quelconque.

Par le point O, menons deux droites, parallèles respectivement aux droites MV_r (ou $M'V'_r$) et $M'T_1$. Ces deux lignes sont également inclinées sur l'axe OP : on peut les considérer comme deux génératrices d'un cône de révolution dont l'axe serait OP; et l'angle formé par les deux plans méridiens correspondants est précisément égal au *déplacement angulaire* $\omega\theta$ de tout le système pendant le temps θ.

[1] Cette lacune existait également dans le triangle des vitesses, mais il n'y avait pas à en tenir compte, car les grandeurs dont on s'occupait alors étaient des infiniment petits du premier ordre.

Il suit de là que l'angle des génératrices elles-mêmes est le produit de $\omega\theta$ par le sinus du demi-angle au sommet du cône, c'est-à-dire par le sinus de l'angle formé par la direction de la vitesse relative v_r avec la direction de la droite qui représente la rotation ω.

On a donc en définitive

$$T_1V'_r = v_r\theta \times \omega\theta \sin\overline{\omega, v_r} = \omega v_r \sin\overline{\omega, v_r} \times \theta^2,$$

relation de laquelle on conclut la longueur de la droite qui ferme le polygone des accélérations :

$$\frac{2.T_1V'_r}{\theta^2} = 2\omega v_r \sin\overline{\omega, v_r}.$$

Accélération centrifuge. — Remarquons enfin que dans le cas auquel nous nous bornons actuellement, celui d'un système de comparaison animé d'un mouvement de rotation uniforme, l'accélération d'entraînement, pour un point situé à une distance r de l'axe, est *centripète* et égale à $\omega^2 r$; donc cette accélération, prise en sens contraire, est *centrifuge*, et elle a la même valeur $\omega^2 r$.

De là le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Quand le mouvement d'entraînement est une rotation uniforme autour d'un axe fixe, l'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération centrifuge et d'une troisième accélération qu'on appelle* accélération centrifuge composée.

Cette dernière est égale au double produit de la vitesse relative par la vitesse angulaire des axes mobiles, et par le sinus de l'angle formé par la vitesse relative avec l'axe de rotation du système.

Ce théorème est connu sous le nom de *Théorème de Coriolis*.

Coriolis est en effet le premier qui ait introduit dans la théorie des mouvements relatifs la notion de l'*accélération centrifuge composée* [1]. Cette manière d'interpréter les for-

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, XXIVe Cahier, p. 142; année 1835.

mules est fort élégante; elle permet d'étudier géométriquement un mouvement relatif, sans passer par l'intermédiaire du mouvement absolu, et d'une transformation de coordonnées [1].

Il résulte de l'expression écrite plus haut que l'accélération centrifuge composée s'annule dans trois cas :

1° Lorsque $\omega = 0$;

2° Lorsque $v_r = 0$;

3° Enfin, lorsque

$$\sin \overline{\omega_r v_r} = 0,$$

c'est-à-dire quand la tangente à la trajectoire relative est parallèle à l'axe de la rotation d'entraînement.

Les *fig.* 70 et 71 montrent que la droite $T_1 V'_r$ est perpendiculaire à la fois à la vitesse relative et à l'axe de la rotation d'entraînement. Quand on projette le mouvement sur un plan perpendiculaire à OP, l'accélération centrifuge composée est perpendiculaire et proportionnelle à la projection de la vitesse relative; elle est dirigée de T_1 vers V'_r, c'est-à-dire en sens contraire de la rotation de l'extrémité V_r de la vitesse relative.

Si nous supposons un observateur placé dans la direction OP (*fig.* 71) et regardant dans le sens de la vitesse relative, l'accélération centrifuge composée sera dirigée vers la gauche de cet observateur. En empruntant à l'Électrodynamique une forme de langage très usitée dans l'enseignement, nous dirons que :

L'accélération centrifuge composée est dirigée à gauche de la vitesse relative.

---

[1] Coriolis emploie dans son Mémoire la méthode analytique directe, ainsi que l'avaient fait ses devanciers, à savoir : Newton, dans le cas où les axes mobiles ont un simple mouvement de translation; Clairaut, pour le cas d'un mouvement plan quelconque; Ampère, etc.

MM. Bélanger et Poncelet n'ont pas tardé à démontrer géométriquement le théorème de Coriolis; depuis, divers auteurs ont donné de ce même théorème un grand nombre de démonstrations élémentaires, toutes plus ou moins identiques quant au fond.

L'analyse de Coriolis n'est pourtant pas entièrement dénuée d'intérêt : nous la donnons à la fin de cette Section, en restituant aux axes un mouvement quelconque.

Application aux mouvements terrestres.

Occupons-nous d'abord de notre hémisphère boréal et projetons cet hémisphère sur le plan de l'équateur (*fig.* 72). La rotation de la Terre, pour un observateur placé au pôle nord N, ayant lieu dans le sens opposé à celui du mouvement des aiguilles d'une horloge, l'axe de cette rotation est dirigé vers le pôle sud. Il suit de là que l'accélération centrifuge composée, pour un mouvement quelconque, est dirigée *à droite* de la projection de la vitesse relative du point mobile.

Cela posé, considérons un certain nombre de cas particuliers :

1° *Mouvement vertical ascendant.* — La vitesse relative se projette suivant une direction telle que f; l'accélération centrifuge composée est dirigée dans le sens de la flèche σ, c'est-à-dire du côté de l'occident par rapport au méridien dans lequel s'effectue le mouvement.

2° *Mouvement de haut en bas.* — Le sens de la flèche f étant renversé (f'), l'accélération centrifuge composée change également de sens, et se tourne du côté de l'orient [1].

3° *Mouvement horizontal.* — Si nous considérons nos flèches comme représentant actuellement les projections d'une vitesse relative horizontale, telle que la vitesse d'une bille sur le tapis d'un billard, celle d'un glaçon flottant sur une rivière, d'un train parcourant une ligne de fer, nous trouverons toujours aisément la direction de l'accélération centrifuge composée, en prenant la *droite* d'un observateur qui suivrait la direction de la vitesse relative. Avec cette règle simple, on sera toujours assuré de ne pas commettre d'erreur.

Supposons par exemple que la vitesse relative d'un mobile M (*fig.* 74) soit horizontale et contenue dans le plan méridien NS; supposons de plus qu'il n'y ait pas d'accélération absolue.

Si la Terre était immobile, le point M ne sortirait pas de

---

[1] Nous devons pour le moment nous borner à ces indications. Nous reviendrons sur ce sujet dans la partie du Cours qui est consacrée à la Dynamique; nous serons alors en mesure d'analyser complètement l'influence de la rotation du globe sur le mouvement vertical des corps pesants dans le vide, sur les oscillations du pendule simple, etc.

l'horizontale méridienne, suivant laquelle est dirigée sa vitesse initiale; et il se trouverait sur cette droite, au bout du temps θ, à une distance $v_r\theta$ de son point de départ.

Eu égard à la rotation du globe, il faut, pour avoir le déplacement relatif de notre point, composer avec le chemin $v_r\theta$ deux autres chemins élémentaires, parcourus respectivement dans les directions des deux composantes de l'accélération totale relative.

Par l'effet de l'accélération centrifuge, le corps se détachera du plan horizontal, dans le sens du prolongement du rayon du parallèle terrestre. Cette conséquence géométrique évidente de la rotation de la Terre n'avait pas échappé à Galilée.

Par l'effet de l'accélération centrifuge composée, ce même corps déviera de la méridienne : à l'occident si son mouvement est dirigé vers le sud, à l'orient dans le cas contraire. Il est à remarquer que, dans cette dernière hypothèse, le mobile est en avant, dans le sens du mouvement diurne, des points de la méridienne avec lesquels il aurait dû coïncider successivement, si la Terre avait été en repos.

Dans l'hémisphère austral (*fig.* 73), l'accélération centrifuge composée est dirigée *à gauche* de la vitesse relative; il est aisé de voir quelles sont les modifications introduites par cette circonstance dans les résultats précédents, et nous nous dispenserons d'insister davantage sur ce sujet.

Théorie générale du mouvement relatif d'un point.

Il y a lieu d'ajourner le complément de la théorie des mouvements relatifs, jusqu'à ce que nous ayons défini les divers mouvements dont un système solide est susceptible d'être animé, sans que son invariabilité de forme soit compromise.

Nous verrons d'ailleurs que le paragraphe actuel renferme implicitement la solution du problème de la composition des accélérations dans le cas le plus général : celui où le mouvement d'entraînement n'est ni une translation, ni une rotation.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT D'UN CORPS OU SYSTÈME SOLIDE.

Après avoir élucidé les principales questions qui se rapportent au mouvement d'un point mathématique, il faut passer à l'étude du mouvement d'un corps de dimensions finies.

Un *corps*, au point de vue géométrique, c'est la collection d'une infinité de points, remplissant une portion limitée de l'étendue; un *corps solide* est un système de points, formant une figure invariable. Pour se représenter un pareil système, il suffit de considérer trois axes mobiles, Ox_1, Oy_1, Oz_1, et l'ensemble des points dont les coordonnées, relatives à ces axes, restent constantes. Il est bien évident que les mouvements simples de tous ces points ne sont pas indépendants les uns des autres : c'est la recherche des relations qui existent entre ces mouvements qui constitue l'étude des mouvements d'un solide.

Ainsi que nous l'avons remarqué, on n'a qu'une idée extrêmement obscure de ce qu'est en général le mouvement d'un corps de figure quelconque; et les seuls mouvements qu'on voie immédiatement sont le mouvement de *translation* et le mouvement de *rotation*. Ce n'est que par une succession de travaux bien remarquables, dont nous allons ici présenter l'analyse, que les géomètres sont arrivés par degrés à réduire le mouvement le plus général dont un corps solide puisse être animé, aux deux mouvements simples que nous avons déjà eu occasion de définir.

Décomposition du mouvement d'un solide.

Pour simplifier la question, nous commencerons par la diviser en deux autres : attachons-nous à regarder un point quelconque O du solide, par lequel nous ferons passer trois axes assujettis à rester constamment parallèles à eux-mêmes. Il est clair que le solide, dans son mouvement relatif à ces axes, ne peut que tourner sur l'origine mobile O, comme autour d'un centre fixe, de sorte que le mouvement se trouve décomposé en deux, dont l'un est une pure translation. Si nous connaissions *a priori* un point fixe dans le système, c'est par ce point que nous ferions passer nos axes de comparaison, et le premier des deux mouvements composants disparaîtrait.

Mais le second de ces mouvements, c'est-à-dire celui d'un corps mobile autour d'un point fixe, sur lequel il a la liberté de pirouetter dans tous les sens, ne présente lui-même qu'une idée très obscure; et c'est cette idée que nous allons tout d'abord nous proposer d'éclaircir.

§ VIII. — Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Vers le milieu du siècle dernier, d'Alembert et Euler, à peu près dans le même temps et par des méthodes différentes, ont les premiers traité la question du mouvement d'un corps solide dans l'espace, question qui se ramène immédiatement, comme nous l'avons vu, à celle qui fait l'objet de ce paragraphe. Ils se sont occupés, chacun à deux reprises séparées par plus de vingt-cinq ans, de ce problème qui donne lieu, comme le dit Euler, à deux ordres de recherches, les unes géométriques (*cinématiques*) et les autres mécaniques. Ces deux points de vue sont ici, et peut-être pour la première fois, nettement séparés par Euler.

La priorité de la découverte de la proposition fondamentale de cette théorie appartient à d'Alembert (¹). Il fut d'ailleurs bientôt suivi dans cette voie par Euler (²), qui s'empara de ce sujet avec sa ténacité habituelle et s'en préoccupa toute sa vie (³).

Euler ne réussit pourtant pas à éclaircir tous les points délicats qui se rencontrent dans la théorie de la rotation des corps

(¹) *Traité de la précession des équinoxes* (1749).

(²) *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique* (*Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1750, imprimés en 1752).

(³) « Le sujet que je me propose de traiter ici est de la dernière importance dans la Mécanique, et j'ai déjà fait plusieurs efforts pour le mettre dans tout son jour. Mais, quoique le calcul ait assez bien réussi, et que j'aie découvert des formules analytiques qui déterminent tous les changements dont le

autour d'un point fixe; il ne put triompher à sa pleine satisfaction de l'obscurité qui régnait sur cette question, et qui, dit-il quelque part (¹), tire son origine de la difficulté qu'on éprouve à se bien représenter le mouvement dont un corps tourne sur un point fixe.

Il était réservé à Poinsot de dissiper cette obscurité d'une manière complète et de donner du problème de la gyration d'un corps solide autour d'un point fixe une solution qui est un véritable chef-d'œuvre de clarté et d'élégance géométrique, *véritable solution du problème*, dit-il (²), *en ce qu'elle fait image et qu'on y voit le mouvement du corps avec autant de clarté que le mouvement d'un point.*

Théorème fondamental de d'Alembert.

Le seul mouvement de rotation dont nous ayons une idée nette est celui d'un corps qui tourne sur un axe immobile; c'est donc à cette idée qu'il faut tâcher de réduire celle du mouvement d'un corps qui pirouette d'une manière quelconque autour d'un point ou centre fixe O.

Considérons (*fig.* 75) la sphère décrite du point O comme centre avec l'unité pour rayon, et la *perspective* du corps mobile sur cette sphère. Il est évident que le mouvement de cette figure sphérique est déterminé par le mouvement de notre solide, et que réciproquement, à un instant quelconque, la position de la perspective sur la sphère suffit pour faire connaître le lieu du corps lui-même dans l'espace.

Cela posé, nous allons établir la proposition suivante, qui se rapporte au mouvement, considéré pendant un temps infiniment court :

Lorsqu'un des points d'un solide en mouvement est fixe, les autres points du corps ne sauraient, à un instant donné, être

mouvement d'un corps autour d'un point fixe est susceptible, leur application était pourtant sujette à des difficultés qui m'ont paru presque tout à fait insurmontables. » (*Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1758, imprimés en 1765.) Voir aussi : *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765), et un grand nombre de Mémoires du même auteur.

(¹) *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1760, p. 179.

(²) *Théorie nouvelle de la rotation des corps.*

tous à la fois en mouvement; et il y a toujours une infinité de points, situés sur une même ligne droite, *qui ont à l'instant considéré une vitesse nulle, c'est-à-dire qui conservent des positions fixes pendant un temps très court.*

Ainsi que je l'ai dit, ce beau théorème est dû à d'Alembert; j'emprunte la démonstration géométrique suivante à Euler [1].

Soient AB (*fig.* 76) un arc de grand cercle réunissant deux points de la perspective, et A′B′ la nouvelle position de cet arc de grand cercle, au bout du temps θ.

Prolongeons les arcs AB et A′B′ jusqu'à leur rencontre au point C, et prenons

$$A'C' = AC;$$

nous aurons en C′ la nouvelle position du point C, considéré comme lié à l'arc AB.

Pour trouver de même la position finale d'un point quelconque M de notre perspective, il faut rattacher ce point aux points déjà connus A, B, C, par un système de coordonnées quelconque. On pourra, par exemple, joindre MC par un arc de grand cercle; puis, faisant au point C′ un angle M′C′A′ égal à MCA, et prenant C′M′ = CM, on aura un point M′ qui occupera par rapport à l'arc A′B′ la même situation que le point M par rapport à l'arc AB.

Prolongeons MC et M′C′ jusqu'à leur point de rencontre I. Tous les points du cercle IMC sont venus se placer quelque part sur le cercle IM′C′; et, si l'on avait CI = C′I, le point I serait resté fixe dans le mouvement. Cherchons s'il ne serait pas possible, en choisissant convenablement l'arc CM, dont nous avons jusqu'ici supposé la direction arbitraire, de rendre le triangle CIC′ isoscèle.

Il faut pour cela satisfaire à l'égalité

$$(1) \qquad ICC' = IC'C.$$

Mais on a

$$(2) \qquad \begin{cases} ICC' = ICB - BCB', \\ IC'C = 180^\circ - IC'B' = 180^\circ - ICB, \end{cases}$$

(1) *Découverte d'un nouveau principe, etc.*

puisqu'on a fait

$$IC'B' = ICB.$$

En substituant les valeurs (2) dans l'équation (1), il vient

$$ICB - BCB' = 180^\circ - ICB;$$

d'où

$$(3) \qquad ICB = 90^\circ + \frac{BCB'}{2}.$$

En donnant à l'angle ICB cette valeur, c'est-à-dire en prenant l'arc CM perpendiculaire à l'arc $C\gamma$, bissecteur de l'angle BCB′, nous satisferons à l'équation de condition (1), et nous serons assurés qu'il existe quelque part sur l'arc CM un point I, qui n'a pas participé au déplacement de la figure.

Pour trouver la grandeur de l'arc CI, menons $I\omega$ perpendiculaire sur le milieu de la base de notre triangle isoscèle. Dans le triangle rectangle $IC\omega$, on connaît le côté $C\omega$ qui est la moitié de CC′, et l'angle C qui est égal à $90^\circ - \frac{1}{2}BCB'$; on a donc

$$(4) \qquad \operatorname{tang} CI = \frac{\operatorname{tang} C\omega}{\cos IC\omega} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}CC'}{\sin\frac{1}{2}BCB'}.$$

Mouvement infiniment petit.

Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, le déplacement de nos points de repère A et B pouvait être quelconque. Si nous supposons ce déplacement infiniment petit, on voit aisément les modifications qu'il faut faire subir aux constructions et aux calculs précédents. Le point C, intersection de deux positions infiniment voisines de la ligne AB, est le point de contact de cette ligne avec son enveloppe, l'arc CI devient perpendiculaire à l'arc AB; enfin la formule (4) se transforme en

$$(5) \qquad \operatorname{tang} CI = \frac{CC'}{BCB'}.$$

Axe instantané de rotation. — Notre système ayant, à l'instant considéré, deux points fixes : le centre O de la sphère et le point I, il résulte des principes que nous avons posés que tous les points de la droite OI sont également immobiles; le mouvement du solide est une rotation autour de cette droite tant qu'elle reste fixe, c'est-à-dire pendant un temps infiniment court [1].

Pendant l'élément de temps suivant, le mouvement du corps est encore une rotation simple, mais autour d'un autre axe, de sorte que le mouvement du corps peut être considéré comme une suite de ces mouvements simples, dont chacun ne présente à l'esprit qu'une idée nette.

Ainsi se trouve établi le théorème suivant :

THÉORÈME DE D'ALEMBERT. — *Le mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque autour d'un point fixe n'est autre chose qu'une rotation de ce corps sur un axe qui passe toujours par le point fixe, mais dont la direction change d'un instant à l'autre : axe que, pour cette raison, on appelle* AXE INSTANTANÉ DE ROTATION [2].

Caractère de l'axe instantané. — Il faut bien remarquer que cet axe instantané change de position et dans le corps et dans l'espace tout à la fois. En effet, comme il est immobile dans le corps et dans l'espace pendant le temps dt et qu'au bout de ce temps on le trouve dans une autre position, il est clair qu'il ne peut plus être au même lieu, ni dans l'espace absolu, ni dans l'intérieur du corps [3].

Lors donc que nous voyons un corps tourner sur un axe qui *semble* invariable de position dans le corps, mais qui change de position dans l'espace, nous devons affirmer que cet axe n'est point l'axe instantané autour duquel se fait réellement la rotation, car l'axe instantané ne pourrait rester immobile dans le corps sans rester également immobile dans l'espace.

De cette remarque bien simple on déduit immédiatement

(1) Ceci veut dire que les *vitesses* de tous les points du corps sont les mêmes que si ce corps tournait effectivement autour de l'axe que nous venons de déterminer.

Il faut bien se garder d'étendre ce résultat aux accélérations; car notre axe ne reste pas fixe pendant deux éléments successifs du temps.

(2) Expression introduite par d'Alembert, *Traité de la précession des équinoxes*, p. 83.

(3) On peut même ajouter que l'angle qu'il décrit dans l'espace, et qui fait son mouvement absolu, est égal à celui qu'il décrit dans l'intérieur du corps, et qui fait son mouvement relatif.

des résultats importants, dont nous allons présenter deux exemples.

PREMIER EXEMPLE : *Mouvement diurne de la Terre.* — On a longtemps considéré la Terre comme animée d'un mouvement de rotation autour d'une droite fixe, qu'on nomme *ligne des pôles* ou *axe du monde*. Depuis la découverte de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre, on sait que cet axe prétendu n'est pas fixe dans l'espace; et l'on se représente le mouvement diurne de la Terre en supposant que, pendant qu'elle tourne uniformément autour de son axe, cet axe même ait un certain mouvement par lequel il décrit à peu près, autour de la perpendiculaire au plan de l'écliptique, un cône dont le demi-angle au sommet est de 23°27′30″.

Cette manière d'envisager le mouvement diurne de la Terre, dit Euler, paraît d'abord la plus naturelle et la plus convenable pour la pratique, et l'on aura de la peine à s'imaginer qu'elle soit assujettie à de fort grandes difficultés : non pas à l'égard des petites irrégularités de ce mouvement, lesquelles peut-être ne sont pas encore toutes connues, mais à l'égard de la manière même de concevoir ce mouvement [1].

Et d'abord, en effet, qu'est-ce que l'axe de la Terre?

L'observation prouve qu'il y a toujours dans le ciel deux points diamétralement opposés qui semblent, du moins pour quelque temps, être en repos, et autour desquels le ciel avec les étoiles nous paraît accomplir ses révolutions journalières. C'est la droite qui joint ces deux points (droite qu'on peut toujours supposer menée par le centre de la Terre) qu'on nomme l'*axe du monde*. Cela posé, on admet, tout à fait gratuitement, que cette ligne passe toujours par les mêmes points de la Terre.

Cette hypothèse ne saurait être vraie, d'après la théorie précédente, qu'autant que la ligne des pôles répondrait toujours aux mêmes points du ciel; or, comme cela n'arrive pas, on est forcé d'admettre que la rotation diurne ne se fait pas autour d'un axe fixe dans l'intérieur de la Terre, mais bien

(1) *Remarques générales sur le mouvement diurne des planètes* (*Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1758, imprimés en 1765, p. 194).

autour d'un axe instantané, mobile à la fois dans le globe et dans l'espace. Autrement, le pôle effectif de la rotation terrestre n'est point fixe; il décrit à la surface du globe une courbe dont nous allons tout à l'heure déterminer la nature et calculer les dimensions.

Nous verrons alors que les variations des pôles terrestres sont contenues dans des limites fort resserrées, de sorte qu'on peut regarder ces pôles comme fixés sans qu'il résulte de cette supposition aucune erreur bien grave. Quoi qu'il en soit, je le répète, la mobilité absolue et la mobilité relative des pôles sont deux choses qui ne sauraient exister l'une sans l'autre; de sorte que, l'un quelconque de ces phénomènes étant une fois bien établi par l'observation, l'autre s'en conclut comme une conséquence nécessaire.

Second exemple : *Rotation des projectiles.* — On sait que, par des raisons que nous n'avons pas à développer ici, on s'attache aujourd'hui à donner aux projectiles une forme oblongue et à leur communiquer dans l'âme de la pièce un mouvement de rotation autour de leur axe de figure.

Ces projectiles décrivent à leur sortie de l'arme une trajectoire plus ou moins courbée; d'où il suit qu'ils se présentent obliquement à la résistance de l'air, du moins tant que l'axe de figure conserve sa direction initiale, qui est celle de la tangente à la trajectoire au point de départ.

Si, pour diminuer la résistance, on veut chercher à rendre cet axe de figure constamment tangent à la trajectoire, il est bien essentiel d'être prévenu que l'axe géométrique, en changeant ainsi de direction dans l'espace, cessera par le fait même d'être axe de rotation. En effet, l'axe de rotation, par définition, est à chaque instant la ligne dont la direction reste fixe à la fois dans le corps et dans l'espace.

Mouvement fini.

La démonstration par laquelle Euler prouve l'existence d'une ligne invariable, dans le mouvement d'un corps autour d'un point fixe, s'applique sans modification au cas où l'on considère un déplacement fini du corps, au lieu d'un déplacement infiniment petit.

On comprend même difficilement qu'Euler n'ait pas aperçu tout de suite cette conséquence immédiate de ses recherches (¹), et qu'il ait attendu vingt-cinq ans pour donner cette généralisation du théorème de d'Alembert (²).

Mais, si l'on peut concevoir que le corps (supposé toujours fixé par un point) passe d'une position à une autre position quelconque par l'effet d'une simple rotation autour d'un axe fixe, nous savons que les choses ne se passent pas ainsi dans la réalité, et que le mouvement réel consiste en une suite de rotations autour d'axes sans cesse variables. C'est là une idée qui présente encore une sorte d'obscurité, c'est-à-dire qu'on ne voit pas très bien ce qui arrive au corps, et qu'on a quelque peine à le suivre dans le cours de cette espèce de rotation changeante. Nous allons, avec Poinsot, tâcher d'éclaircir encore cette idée et de présenter à l'esprit quelque image plus nette et plus sensible.

Or, on vient de démontrer qu'un mouvement quelconque d'un corps autour d'un point fixe est une rotation de ce corps sur un certain axe, qui change de position d'un instant à l'autre. Comme cet axe *instantané* passe toujours par le point fixe, il ne peut décrire dans l'espace qu'une certaine surface conique dont le sommet est en ce point; et de même, il est évident qu'il ne peut décrire dans l'intérieur du corps qu'une autre surface conique de même sommet.

(¹) « Quamobrem maximi momenti erit investigare utrum si translatio fuerit finita, etiam detur talis axis. » [*Formulæ generales pro translatione quacumque corporum rigidorum* (*Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg* pour 1770, t. XX, p. 199; 1776).]

Le mot *translatio* est pris ici dans le sens de *déplacement*, et non dans celui de notre mot *translation*.

(²) Encore faut-il remarquer que, même à cette époque, Euler est obligé de renoncer, après plusieurs efforts, à démontrer analytiquement la propriété dont il s'agit.

Ce fut Lexell qui, dans le même volume de l'Académie de Saint-Pétersbourg, leva la difficulté (*Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum*, p. 239-270).

D'Alembert, de son côté, ne tarda pas à démontrer, par des voies différentes et fort simples, les deux théorèmes d'Euler sur le déplacement fini (t. VII des *Opuscules mathématiques*, p. 372; 1780).

Citons encore un Mémoire de M. O. Rodrigues (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. V), où la question est traitée par l'Analyse.

Soient O ce commun sommet, et OI l'axe instantané dans sa position actuelle (*fig.* 77). Concevons du centre O, et d'un rayon OI égal à l'unité, une sphère décrite qui coupe les deux surfaces coniques suivant deux courbes, lesquelles seront comme les bases de ces surfaces. De ces deux courbes, la première (σ) est fixe dans l'espace absolu; la seconde (s) est fixe dans le corps et, par conséquent, mobile avec lui dans l'espace.

Divisons le temps t en intervalles égaux infiniment petits dt; et marquons sur la courbe fixe (σ) les positions correspondantes, α, β, γ, δ, ... du pôle I de l'axe de rotation.

Prenons sur l'autre courbe (s), qui sert de base au cône mobile, des arcs Ia, ab, bc, ... respectivement égaux aux premiers; il est clair qu'au premier instant le corps qui tourne sur OI amène le point a du corps sur le point α de l'espace; que, dans l'instant suivant, le corps qui tourne sur Oα amène le point b du corps sur le point β de l'espace, et ainsi de suite d'un instant à l'autre. Il suit de là que les deux courbes, et par conséquent les deux surfaces coniques, sont tangentes : car une rotation infiniment petite autour de OI ne fait décrire au point a qu'un espace infiniment petit du second ordre. Comme de plus les arcs Ia et Iα sont égaux, ainsi que les arcs ab et $\alpha\beta$, bc et $\beta\gamma$, etc., on voit que le mouvement du corps pourrait être produit par celui du cône mobile roulant, *sans glisser*, sur le cône fixe dont il s'agit.

Nous avons donc ce nouveau théorème :

Théorème de Poinsot. — *De quelque manière qu'un corps se meuve en tournant autour d'un point fixe, ce mouvement ne peut être autre chose que celui d'un certain cône, dont le sommet est en ce point, et qui roule actuellement, sans glisser, sur la surface d'un autre cône fixe de même sommet.*

Je veux dire que le cône mobile, considéré comme attaché au corps et l'entraînant avec lui, s'il vient à rouler sur l'autre cône qui est fixe dans l'espace absolu, fera prendre à ce corps le mouvement précis dont on le suppose animé; la ligne de contact des deux cônes est, à chaque instant, l'axe autour duquel le corps tourne dans cet instant, ou ce qu'on appelle l'axe *instantané* : d'où l'on voit comment cet axe est à la fois

mobile dans le corps et dans l'espace absolu, décrivant dans l'espace la surface du cône fixe et dans l'intérieur du corps la surface du cône mobile dont on vient de parler (1).

Tel est, dit Poinsot, le plus haut point de clarté où l'on puisse porter l'idée si complexe et si obscure du mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque autour d'un centre fixe. Il n'y a point de mouvement de cette nature qu'on ne puisse exactement produire en faisant rouler un certain cône sur un autre cône fixe de même sommet; de sorte que, si l'on imagine tous les cônes possibles et qu'on les fasse ainsi rouler l'un sur l'autre, on a l'image fidèle de tous les mouvements dont un corps soit susceptible, autour d'un point sur lequel il a la liberté de pirouetter en tous sens.

Formules diverses relatives à la rotation autour d'un point.

Si les deux courbes (s) et (σ), qui servent de bases aux deux surfaces coniques dont il a été question, sont données,

(1) Il n'est peut-être pas inutile d'insister sur l'idée nette qu'il faut attacher aux mots quand on dit « le *mouvement* de l'axe instantané », ou qu'on emploie quelque autre terme qui suppose la *mobilité* de cet axe, soit dans le corps, soit dans l'espace. Ce n'est ici qu'une manière de s'exprimer. L'axe instantané ne se *meut* point : car il est immobile de sa nature pendant un instant, et, au bout de cet instant, c'est une autre ligne qui devient à son tour l'axe de rotation. Mais, en se figurant l'ensemble de toutes ces lignes, menées d'avance, les unes dans le corps, les autres dans l'espace, et leur donnant le commun nom d'*axe instantané*, on peut dire naturellement la surface *décrite* par cet axe, au lieu de dire la surface formée par la suite de toutes les lignes, dont chacune doit devenir à son tour l'axe de rotation. Et de même, au lieu de l'angle $d\varphi$, compris entre deux génératrices consécutives de cette surface, on peut dire l'angle *décrit* pendant le temps dt par l'axe instantané, et nommer ainsi le rapport $\frac{d\varphi}{dt}$ la *vitesse angulaire* avec laquelle cet axe trace à la fois les deux surfaces coniques dont il s'agit. C'est dans le même sens qu'on nomme le rapport $\frac{ds}{dt}$, ou le rapport $\frac{d\sigma}{dt}$ qui lui est égal, la *vitesse* avec laquelle le pôle instantané I se meut le long de l'une ou de l'autre des deux courbes (s) et (σ), tracées l'une dans le corps et l'autre dans l'espace, quoique le point du corps qui fait en ce moment l'office du pôle instantané n'ait de sa nature aucune vitesse. En effet, ce point du corps, tant qu'il fait le pôle, est immobile; et, sitôt qu'il se meut, il n'est plus le pôle de la rotation.

ainsi que la vitesse angulaire ω autour de l'axe instantané OI, il est évident que le mouvement du corps sera entièrement déterminé.

Si, la vitesse angulaire ω étant toujours connue, une seule des deux courbes (s) et (σ) est donnée, avec la vitesse du pôle qui la décrit, l'autre courbe sera nécessairement déterminée.

Supposons, par exemple, que la courbe fixe (σ) soit donnée, avec la vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$ du pôle instantané I, le long de cette courbe. Comme le corps tourne sur OI avec une vitesse angulaire ω, qui est aussi donnée, il est clair que le point du corps qui, au bout du temps dt, doit venir tomber sur la courbe donnée (σ) pour y être à son tour le pôle instantané, est un point déjà déterminé dans le corps; et il en est de même des autres points du corps que les rotations successives doivent amener l'un après l'autre sur la courbe fixe (σ), pour servir de pôles à leur tour; d'où l'on voit que l'autre courbe (s), qui marque la route du pôle dans l'intérieur du corps, est entièrement déterminée.

Et réciproquement, si, au lieu de la courbe fixe (σ), on se donne la courbe mobile (s), avec la vitesse $\frac{ds}{dt}$ et la vitesse de rotation ω, on verra de même que la courbe fixe (σ) se trouvera entièrement déterminée dans l'espace.

En général, dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point fixe, il se présente naturellement plusieurs éléments à considérer, tels que la vitesse angulaire ω autour de l'axe instantané OI; la vitesse angulaire θ avec laquelle cet axe trace les deux surfaces coniques S et Σ qu'il décrit en même temps, l'une dans l'intérieur du corps, l'autre dans l'espace absolu; les rayons de courbure r et ρ de ces deux surfaces; les mouvements angulaires p et π du pôle, l'un autour de l'axe OP du cône osculateur de la surface mobile S, et l'autre autour de l'axe OΠ du cône osculateur de la surface fixe Σ, etc. Et si, de ces différentes choses, trois quelconques sont connues, on peut dire que les autres le sont aussi et que le mouvement est entièrement déterminé.

Cherchons les relations qui existent entre ces quantités.

Par l'effet de la rotation instantanée autour de OI, le cône

mobile tourne, pour venir appliquer l'élément ds de sa base sur l'élément égal $d\sigma$, d'un angle formé par la somme de son angle de contingence $d\epsilon$ et de l'angle de contingence du cône fixe $d\varepsilon$ [ou par la différence de ces deux angles, si les deux courbes (s) et (σ) ont leurs convexités tournées dans le même sens] (*fig.* 78). La vitesse angulaire ω autour de l'axe instantané OI est donc exprimée par la somme ou par la différence de ces deux angles, divisée par l'élément dt du temps, de sorte qu'on a

$$\omega = \frac{d\epsilon + d\varepsilon}{dt},$$

en ayant soin d'affecter les angles $d\epsilon$ et $d\varepsilon$ d'un signe convenable.

Or, l'angle de contingence $d\epsilon$ a pour mesure $\frac{ds}{r}$, si l'on nomme r le rayon de courbure de la surface conique (c'est-à-dire le rayon de courbure de la section normale à la génératrice du cône) au point I que l'on considère; donc

$$d\epsilon = \frac{ds}{r}.$$

On a de même

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{\rho},$$

en nommant ρ le rayon de courbure de l'autre surface au même point I; d'où résulte, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente,

$$\omega = \frac{ds}{r\,dt} + \frac{d\sigma}{\rho\,dt}.$$

Mais $\frac{ds}{dt}$ $\left(\text{ou } \frac{d\sigma}{dt} \text{ qui lui est toujours égal}\right)$ n'est autre chose que la vitesse angulaire avec laquelle l'axe instantané OI décrit à la fois les deux surfaces coniques; en faisant donc

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = \theta,$$

on a

$$\omega = \theta\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right),$$

ce qui donne une relation très simple entre la vitesse de rotation ω, le mouvement angulaire θ de l'axe instantané et les rayons de courbure r et ρ des deux surfaces coniques qu'il décrit.

Si l'on suppose menés ces deux rayons de courbure $\mathrm{IP}=r$, $\mathrm{I\Pi}=\rho$ (*fig.* 79) et qu'on joigne OP et OΠ, on aura les axes des deux cônes droits et circulaires, osculateurs des deux surfaces S et Σ. Les perpendiculaires abaissées du pôle I sur ces deux axes OP et OΠ sont les rayons a et α des cercles qui servent de bases à ces cônes osculateurs.

Or on a, par la figure,

$$r^2=\frac{a^2}{1-a^2},\qquad \rho^2=\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

En introduisant dans l'équation précédente, au lieu des rayons de courbure r et ρ des deux cônes, les rayons a et α des deux cercles qui leur servent de bases, il vient

$$\omega=\frac{\theta}{a}\sqrt{1-a^2}+\frac{\theta}{\alpha}\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Mais, θ étant la vitesse angulaire de l'axe instantané sur la surface du cône, il est clair que $\frac{\theta}{a}$ est la vitesse angulaire de la projection de cet axe OI sur la base, et, par conséquent, c'est le mouvement angulaire du pôle I autour de l'axe OP de ce cône; de même, $\frac{\theta}{\alpha}$ est son mouvement angulaire autour de l'axe OΠ de l'autre cône. Si donc on désigne ces deux mouvements angulaires par p et π, ou qu'on fasse

$$\frac{\theta}{a}=p,\qquad \frac{\theta}{\alpha}=\pi,$$

on a, d'une part, l'égalité

$$ap=\alpha\pi,$$

et ensuite, d'après l'équation précédente,

$$\omega=p\sqrt{1-a^2}+\pi\sqrt{1-\alpha^2}=p\cos x+\pi\cos\xi,$$

en faisant

$$\mathrm{IOP}=x,\qquad \Pi\mathrm{OI}=\xi.$$

Comme on a

$$a=\sin x,\qquad \alpha=\sin\xi,$$

les deux relations précédentes équivalent à cette suite de rapports égaux

$$p:\pi:\omega::\sin\xi:\sin x:\sin(x+\xi),$$

ce qui montre que p et π sont les deux côtés d'un parallélogramme dont ω est la diagonale, c'est-à-dire que ω est la résultante des deux longueurs p et π, portées respectivement sur les axes OP et OΠ.

Si trois des quantités dont il vient d'être question sont constantes, toutes les autres le sont aussi, et le mouvement du corps est celui d'un cône droit à base circulaire, qui roule uniformément sur un cône fixe également droit et circulaire.

Application à la rotation diurne.

Soit OI (*fig.* 80) l'axe instantané, OΠ l'axe de l'écliptique. Prenons sur ce dernier axe une longueur $\mathrm{O}\pi$, représentant la vitesse angulaire π du mouvement rétrograde (positif) des équinoxes, quantité qui est environ de $0'',136795$ par jour. Portons de même sur l'axe OI, et dans un sens convenable, une longueur $\mathrm{O}\omega$ représentant la rotation diurne. La construction du parallélogramme $\mathrm{O}\pi\omega p$ nous fait connaître l'axe OP du cône fixe par rapport à la Terre; et les points d'intersection de cette ligne avec la surface du globe sont ceux qu'il convient de désigner sous le nom de *pôles terrestres*.

Cela posé, on a, en prenant le jour sidéral pour unité de temps,

$$p=-360^\circ,\qquad \pi=0'',136795,\qquad \xi=23^\circ27'30'';$$

d'où l'on conclut

$$\sin x=\frac{0'',136795\sin 23^\circ27'30''}{360\times 60\times 60}.$$

L'angle x, mesuré à la surface de la Terre, répondrait à peine à un arc de $0'',27$, ce qui donne à peu près $1^{\mathrm{m}},684$ de longueur à la petite circonférence que le pôle instantané de la rotation de la Terre décrit chaque jour à sa surface. Quant à la rotation réelle et instantanée ω, on voit aussi qu'elle diffère très peu de la rotation apparente p, sur l'axe de figure ON.

§ IX. — Mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe.

Je passe à un cas particulier de la question précédente. L'importance de ce cas particulier réclame une étude spéciale; mais les détails que nous venons de donner nous permettront d'abréger considérablement ce qu'il nous reste à dire.

Je veux parler du mouvement d'un solide invariable, parallèlement à un plan fixe. Dans ce mouvement, les distances de chacun des points du solide au plan fixe restant constantes, il suffit de connaître à chaque instant la position de la projection de ce corps sur le plan fixe. Cette projection conserve d'ailleurs une figure invariable; et le problème qui consiste à déterminer le mouvement de cette figure dans son plan est un cas particulier de la question précédente, où il s'agissait du mouvement d'une figure sphérique sur sa sphère.

Nous n'avons, en effet, qu'à supposer le rayon de la sphère infini, et tous les théorèmes qui ne dépendent pas de la grandeur de ce rayon s'appliqueront, convenablement modifiés, au problème actuel.

On a ainsi les résultats suivants :

Théorème I. — *Quand une figure plane se déplace dans son plan sans changer de forme, il y a toujours à chaque instant un point de cette figure dont la vitesse est nulle et autour duquel la figure tout entière tourne pendant un espace de temps très court.*

Ce point s'appelle *centre instantané de rotation*. Quand il est à l'infini, la rotation se change en une translation.

Ce beau théorème, cas particulier de celui de d'Alembert, a été découvert, quelque temps avant ce dernier, par Jean Bernoulli (¹). La démonstration donnée par Bernoulli a toute

(¹) *De centro spontaneo rotationis* (*Opera*, t. IV, p. 265; 1742).

La solution donnée par Descartes du problème de la tangente à la cycloïde (*Lettres de Descartes*, t. II de l'édition de 1725, p. 39) repose sur un cas particulier du théorème de Bernoulli, et c'est dans cette solution *merveil-*

la rigueur et toute la généralité désirables; mais elle a l'inconvénient d'être fondée sur des considérations de Dynamique, tandis que l'existence d'un point qui reste fixe dans le déplacement d'une figure plane sur son plan, ou d'une figure sphérique sur sa sphère, est une propriété purement géométrique.

Il est facile, en effet, de démontrer directement le théorème suivant, sans faire intervenir aucune considération de mouvement :

Théorème II. — *Quand deux polygones égaux (ou en général deux figures égales quelconques) sont placés d'une manière quelconque dans un plan* (¹), *il existe toujours un point du plan qui est également distant de deux sommets homologues quelconques des polygones; ce point est semblablement placé par rapport aux deux polygones.*

Soient (*fig.* 81) ABCDE, A'B'C'D'E' deux polygones égaux.

Tous les points de la perpendiculaire, élevée au milieu de la *corde* AA', sont également distants des points A et A'. Le point O, où cette perpendiculaire est coupée par la perpendiculaire élevée sur le milieu de BB', est également distant à la fois des points, A et A' d'une part, B et B' de l'autre. Je dis qu'on a de même

$$OC = OC', \quad OD = OD', \quad \ldots.$$

En effet, les deux triangles ABO, A'B'O sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Il suit de là que le point O, considéré comme appartenant à la première figure, est lui-même son homologue dans la seconde; par

leuse de simplicité, dit Chasles, que se trouve la première trace des propriétés d'une figure en mouvement.

Nous verrons plus tard que le mouvement épicycloïdal, étudié par Descartes, comprend comme cas particuliers tous les mouvements possibles d'une figure plane invariable dans son plan; mais Descartes et Bernoulli ignoraient l'existence de cette propriété.

(¹) Pour que le théorème soit vrai, il faut que les deux polygones représentent deux positions d'une même figure dans son plan, c'est-à-dire qu'on doit pouvoir effectuer la superposition, sans être obligé de retourner l'une des figures.

suite, il est également distant des points C et C′, D et D′ et de tous les autres couples homologues.

Nous appellerons indifféremment *point central* ou *centre de rotation* ce point autour duquel on peut faire tourner une des figures pour l'amener à coïncider avec l'autre.

L'énoncé du théorème II, qui s'applique à un déplacement fini ou infiniment petit, est emprunté à M. Chasles [1], qui a restitué au théorème de Bernoulli son véritable caractère, et qui a fondé sur ce théorème une méthode géométrique des tangentes, laquelle n'est autre chose que celle de Descartes généralisée.

La méthode de M. Chasles est basée sur cette observation que, si le déplacement qui nous occupe est infiniment petit, le point O se trouve à la fois sur les normales à toutes les trajectoires des divers points A, B, C,... de la figure. Il suit de là que ces normales se croisent toutes nécessairement en un point unique, et l'on a le théorème suivant :

Théorème III. — *Quand une figure plane invariable est animée d'un mouvement quelconque dans son plan, les normales aux trajectoires des différents points de cette figure se coupent toutes en un même point* [2].

De là résulte une méthode fort simple pour déterminer les normales ou les tangentes des courbes décrites dans le mouvement d'une figure de forme invariable.

Considérons, par exemple, une droite de longueur constante AB (*fig.* 82), dont les extrémités s'appuient sur deux droites fixes Ox, Oy, ou sur deux courbes quelconques (P) et (Q); et supposons qu'on demande la tangente au lieu décrit par le sommet d'un triangle invariable, construit sur la base AB.

Le point A décrit Oy : donc le centre instantané est sur la perpendiculaire élevée au point A sur Oy. De même, la trajectoire de B étant la ligne Ox, le centre de rotation se trouve

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques de Férussac*, t. XIV, p. 321; 1830; et *Correspondance mathématique de M. Quetelet*, t. VII, p. 353.

(2) Ce point remplit, pour un déplacement infiniment petit de la figure, le rôle du *point central* dont il vient d'être question : c'est un *centre instantané de rotation*.

sur la perpendiculaire élevée en B sur Ox : donc le centre instantané est au point de rencontre C de ces perpendiculaires. Or la normale à la trajectoire du point M doit passer par le point ainsi déterminé; donc cette normale est CM.

« Cette méthode, dit M. Chasles, diffère de celle de Roberval, qui repose aussi sur des considérations de mouvement : elle est en outre susceptible d'un bien plus grand nombre d'applications. Elle se prête même à la détermination des rayons de courbure des courbes [1].

» Mais on conçoit que cette méthode si facile sera aussi, comme celle de Roberval, bornée dans ses applications, puisqu'elle suppose que l'on connaîtra les conditions géométriques du mouvement d'*une figure de forme invariable* à laquelle appartient le point décrivant. »

Théorème IV. — *Les normales aux différentes courbes qu'on peut considérer comme entraînées dans le mouvement de la figure mobile, élevées aux points de contact de ces courbes avec leurs enveloppes respectives, vont passer au centre instantané de rotation.*

Ce théorème, qui se déduit du théorème d'Euler sur les mouvements sphériques, est facile à démontrer directement.

Considérons une courbe (K) (*fig.* 83), entraînée dans le mouvement d'une figure invariable (F).

Un point quelconque M décrit une trajectoire dont la normale est MC, C étant le centre instantané de rotation de F.

(1) *Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable* (*Comptes rendus*, t. LI et LII). *Voir* aussi *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, p. 548; 1837, et *Journal de Mathématiques*, t. X, p. 148 et 204.

Remarquons à cette occasion que la méthode de M. Mannheim, que nous avons exposée (p. 51-60), apprend à construire la normale à la trajectoire d'un point, considéré comme faisant partie d'un système susceptible de changer de forme en même temps que de position d'une manière quelconque. Cette méthode est donc plus générale que celle de M. Chasles.

Nous verrons, quand nous aurons terminé l'étude des propriétés du centre instantané, que ces propriétés sont de simples cas particuliers de celles qui ont été démontrées précédemment, et qui sont relatives à des figures déformables.

Quant au point A où la courbe proposée touche son enveloppe, il doit, en se transportant sur la position voisine de (K), rester en même temps sur la position première, puisque l'enveloppe est le lieu des intersections de deux positions successives de l'enveloppée. La direction du mouvement du point A doit donc être celle de la tangente AT de la courbe (K); donc cette tangente est perpendiculaire à la ligne AC.

Théorème V. — *Les vitesses des différents points de la figure sont entre elles comme les distances de ces points au centre instantané de rotation.*

Cette propriété résulte de ce que le mouvement peut être regardé, pendant un temps très court, comme une rotation autour du centre instantané. Le quotient de la vitesse d'un point quelconque par sa distance au centre est la vitesse angulaire du mouvement instantané de rotation [1].

Les théorèmes III et V expriment d'ailleurs tout ce qu'un centre instantané a de commun avec un centre effectif de rotation : ce sont les propriétés qui se rapportent à un élément infiniment petit du temps. La distinction s'établit dès que l'on considère deux éléments consécutifs.

Soit MM_1 (*fig.* 85) la trajectoire d'un point d'une figure mobile : la normale au point M passe par le centre instantané de rotation C; mais la normale au point M_1 est dirigée vers un nouveau centre C_1, dont la distance au point C est du même ordre que l'arc MM_1 lui-même; donc le centre de courbure de cet arc est un point distinct de C et de C_1.

Les propriétés que nous venons d'exposer donnent lieu à un grand nombre d'applications; en voici un exemple :

[1] Dans le cas général d'une figure qui se déforme (*fig.* 84), le rapport des vitesses de deux points M, M' de cette figure s'exprime par le rapport

$$\frac{MN}{M'N'},$$

en considérant les points N, N', où les normales aux lieux (M) et (M') sont coupées par la normale à l'enveloppe de la droite MM'.

On voit ainsi le centre instantané se dédoubler, pour ainsi dire, quand la longueur MM' est variable; et la distance des deux points résultant de ce dédoublement est proportionnelle à la variation de MM'. On sait, en effet, que cette variation de longueur est proportionnelle à la distance NN'.

Des systèmes de corps rigides articulés.

Considérons un système de corps rigides, réunis par des *articulations*.

Le polygone dont les points d'articulation sont les sommets est variable de forme, mais chacun de ses côtés constitue, pris isolément, une figure invariable; et la théorie précédente fait connaître les relations géométriques qui existent entre les vitesses des divers points du système, quand le mouvement de celui-ci est suffisamment déterminé.

Par exemple, deux droites de longueur constante (*fig.* 86) tournent respectivement autour des centres C et C'. Pour transmettre le mouvement de l'une de ces droites à l'autre, c'est-à-dire pour faire en sorte que le mouvement de l'une soit déterminé par celui de l'autre, on articule les extrémités M, M' des deux rayons ou manivelles à un lien invariable : on demande le rapport des vitesses des points M et M'.

Dans ce cas le centre instantané de rotation du lien MM' est au point O, intersection des deux rayons prolongés; donc

$$\frac{v}{v'} = \frac{OM}{OM'}.$$

En remplaçant les longueurs OM, OM' par les sinus des angles qui leur sont opposés dans le triangle MOM', on a :

1° *Les vitesses des deux extrémités du lien sont en raison inverse des sinus des angles de ce lien avec les rayons.*

La même propriété subsiste évidemment quand les trajectoires des points M et M' sont des courbes quelconques, CM, C'M' étant les normales à ces courbes et la longueur MM' restant toujours invariable; donc, en général :

2° *Les vitesses des deux extrémités du lien sont en raison inverse des cosinus des angles du lien avec les trajectoires de ses extrémités.*

Pour trouver le rapport des vitesses angulaires des deux manivelles, on écrira l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\omega CM}{\omega' C'M'} = \frac{MO}{M'O};$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{C'M' \times MO}{CM \times M'O} = \frac{CT}{C'T},$$

en appliquant le théorème des transversales[2] au triangle OCC'. Donc :

3° *Les vitesses angulaires des deux rayons vecteurs sont en raison inverse des segments déterminés par le lien sur la ligne des centres* [1].

Enfin les triangles CPT, C'P'T étant semblables, on peut encore énoncer le théorème suivant :

4° *Les vitesses angulaires sont en raison inverse des perpendiculaires abaissées des deux centres sur le lien.*

Des propriétés géométriques identiques se retrouvent dans un autre mode de transmission, fort usité dans l'industrie.

Transmission du mouvement par courroies. — Au lieu de relier par une barre rigide deux corps assujettis à tourner autour des centres C et C', on peut employer un lien flexible, tel qu'une corde, une courroie, qu'on enroule sur deux surfaces convexes fixées à chacun des deux corps respectivement (*fig.* 87).

Seulement, avec ce système, un corps ne peut entraîner l'autre que dans un sens, la courroie ne fonctionnant qu'à la condition d'être tendue. Cette restriction étant posée, cherchons le rapport des vitesses angulaires des deux corps tournants.

Relativement au corps (C), la droite MM' tourne autour de son point de contact M avec la courbe sur laquelle elle s'enroule, absolument comme s'il y avait une articulation en M. Les choses se passent de la même manière au point M'; et, comme on admet que la courroie reste tendue, on rentre, pour un mouvement infiniment petit, dans le cas d'une barre rigide articulée à deux bras de longueur invariable. Il suit de là que tous les théorèmes précédents s'appliquent sans modification. Ainsi :

Les vitesses angulaires des deux arbres sont en raison inverse des deux segments déterminés sur la ligne des centres par le prolongement de la partie rectiligne de la courroie.

[1] Dans le cas où les trajectoires (M) et (M') sont quelconques, les points C et C' sont les centres de courbure de ces trajectoires.

[2] Si se cortan los tres lados de un triángulo por una línea recta, el producto de los tres segmentos no contiguos es igual al producto de los otros tres :

$C'M' \times MO \times CT = OM' \times CM \times C'T$;

Mouvement épicycloïdal plan.

Ainsi que je l'ai dit, le point de départ des recherches relatives aux propriétés du mouvement d'une figure plane est le théorème suivant, dû à Descartes :

THÉORÈME VI. — *Lorsqu'une courbe mobile roule sans glisser sur une courbe fixe, le centre instantané de rotation de toute figure invariablement liée à la courbe mobile est à chaque instant le point de contact actuel des deux courbes.*

Soit (m) (*fig.* 88) une courbe qui roule sur une courbe (f). Si M et M_1 sont deux points de contact successifs des deux courbes, et que M' soit le point de la courbe mobile qui se trouvait d'abord en M, on a

$$MM_1 = M'M_1.$$

Il résulte de là que MM' est un infiniment petit du deuxième ordre; donc le point M est animé, à l'instant considéré, d'une vitesse nulle, ce qui est le caractère d'un centre instantané de rotation.

Dès lors, en raisonnant comme dans le paragraphe précédent et considérant dans un mouvement quelconque d'une figure plane invariable le lieu décrit par le centre instantané dans l'espace absolu, et le lieu correspondant décrit par le même point sur le plan de la figure mobile (*fig.* 89), nous arriverons, par une image analogue à celle qu'a donnée Poinsot pour les mouvements sphériques, à nous représenter clairement le mouvement fini le plus général d'une figure plane dans son plan :

THÉORÈME VII. — *Quel que soit le mouvement d'une figure invariable dans son plan, on peut toujours le ramener à un mouvement épicycloïdal.*

En d'autres termes, on pourrait produire le même mouvement en supposant que les points qu'on étudie soient entraînés par une certaine courbe mobile, roulant sans glisser sur une courbe fixe convenablement choisie.

La courbe mobile est la *courbe roulante* ou la *roulette*, d'après une dénomination anciennement usitée. La courbe fixe s'appelle la *base de la roulette*.

Propriétés des épicycloïdes. — Le cas de mouvement épicycloïdal le plus intéressant à étudier est celui dans lequel la courbe mobile et la courbe fixe sont deux circonférences de cercle. En effet, non seulement les courbes ainsi engendrées ont un grand nombre d'applications industrielles; mais de plus il est évident que, pour toutes les questions qui se rapportent au deuxième ordre infinitésimal, on a le droit, dans un mouvement épicycloïdal quelconque, de remplacer la roulette et sa base par leurs cercles osculateurs respectifs.

On distingue les *épicycloïdes extérieures* et les *épicycloïdes intérieures* ou *hypocycloïdes*. Elles sont *allongées* ou *raccourcies*, selon que le point décrivant est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle mobile. On appelle plus particulièrement *épicycloïdes* (¹) celles qui sont décrites par un point de la circonférence roulante.

On a représenté (*fig.* 91) quelques épicycloïdes et hypocycloïdes. On voit que, dans celles qui sont allongées, les points de rebroussement sont remplacés par des boucles; ces mêmes points sont représentés par de simples sinus dans les épicycloïdes raccourcies.

(¹) Ces dernières possèdent une propriété géométrique remarquable : celle de pouvoir être engendrées de deux manières différentes par le roulement d'un cercle mobile sur un même cercle fixe.

Considérons, par exemple, une épicycloïde extérieure (*fig.* 90) : soient C le centre du cercle fixe, C_1 le centre du cercle mobile, R et R_1 les rayons de ces cercles, enfin M une position du point décrivant.

La normale MA rencontre le cercle fixe en un deuxième point A'. Si l'on décrit une circonférence passant par le point M et tangente en A' à la circonférence fixe, et qu'on fasse rouler la circonférence ainsi déterminée sur la base primitive (C), le point M, considéré comme fixé à la nouvelle roulette, décrira une épicycloïde identique à la proposée. (*Voir* DUHAMEL, *Éléments de Calcul infinitésimal*, 2ᵉ édit., t. I, p. 188).

Le rayon de la nouvelle roulette est donné par la relation

$$R'_1 = R + R_1,$$

qui devient, dans le cas d'une épicycloïde intérieure,

$$R'_1 = R - R_1.$$

Ligne droite et ellipse considérées comme hypocycloïdes. — L'hypocycloïde la plus curieuse est celle qui est engendrée par un point d'une circonférence, roulant dans l'intérieur d'une circonférence de rayon double. On sait que chacun des points de la circonférence mobile décrit un diamètre du cercle fixe (CARDAN) : il suit de là qu'une corde quelconque, AB, de la roulette peut être considérée comme une droite dont les extrémités parcourent des droites fixes.

Si l'on se donne la droite AB (*fig.* 92), ainsi que les directrices du mouvement de cette droite, Ox, Oy, on déterminera, comme nous l'avons vu, le centre instantané C; OC est le diamètre du cercle mobile et le rayon du cercle fixe, qu'il faut choisir pour ramener à un mouvement épicycloïdal le mouvement d'une droite dont les extrémités parcourent des droites fixes.

Un point M de la droite AB décrit une ellipse dont on connaît immédiatement la normale MC, et dont on obtient le centre de courbure au moyen de la construction de Savary.

Les directions des axes de cette ellipse se construisent en joignant le point M au centre I du cercle mobile : en effet, le point M est sur la droite de longueur constante ab, mobile sur les droites rectangulaires OX, OY; Ma et Mb sont les longueurs des deux demi-axes; OM et MC sont les longueurs de deux demi-diamètres conjugués, le dernier étant dirigé suivant ON, perpendiculaire à la normale MC (¹).

Si l'on faisait rouler la grande circonférence sur la petite, les diamètres de la première pivoteraient chacun autour d'un point fixe de la seconde. Ce théorème est le corrélatif du théorème de Cardan.

Rayon de courbure d'une courbe épicycloïdale plane. — Soit M le point décrivant (*fig.* 93). Prenons sur la courbe fixe et sur la courbe mobile, à partir du point de contact A, deux arcs infiniment petits égaux, AB, AB_1; et soit M' la position qu'aura prise M, lorsque B_1 sera venu en B. La normale en M' se construit en joignant le point M' au point B ou B_1 :

(¹) M. Mannheim a déduit de cette figure un procédé pour construire les axes d'une ellipse, quand on connaît un système de diamètres conjugués (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 187).

cette ligne vient couper la normale MA au centre de courbure cherché X.

Faisons

$$MM' = ds, \qquad AB = AB_1 = d\sigma,$$

$$AC = R, \qquad AC_1 = R_1, \qquad MA = r, \qquad MX = \rho.$$

La rotation de la figure mobile autour du centre instantané A, pour le déplacement AB du point de contact, est égale à la somme des angles de contingence respectifs des deux cercles : elle a pour expression

$$d\sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right);$$

ce qui donne, pour la valeur de l'arc MM',

$$ds = r\,d\sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right).$$

D'un autre côté, si l'on désigne par i l'angle que fait AM avec la ligne des centres, on a, dans les triangles infiniment petits XMM', XAB_1,

$$ds : d\sigma \cos i :: \rho : \rho - r;$$

d'où enfin, en égalant les deux valeurs de ds,

$$\frac{\rho \cos i}{\rho - r} = r\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)$$

ou

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r}\right)\cos i = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

On déduit de ces équations la construction de Savary, que nous connaissons [1] (*voir* p. 54).

[1] *Développée de l'épicycloïde ordinaire.* — Pour exprimer que le point décrivant est sur la circonférence (C_1), il faudra faire dans la relation (1)

$$\cos i = \frac{r}{2R_1};$$

d'où

$$\frac{\rho}{\rho - r} = \frac{2(R + R_1)}{R}, \qquad \frac{\rho - r}{r} = \frac{R}{R + 2R_1}.$$

Décrivons un cercle qui passe par le point X (*fig.* 94) et qui soit tan-

Centre de courbure de l'enveloppe d'une figure mobile. — Considérons maintenant, au lieu d'un point unique, une courbe (e) entraînée dans le mouvement de la roulette (m) sur la base (f) (*fig.* 96). Nous savons que le point M, où la courbe (e) touche son enveloppe, est sur la normale qui passe au centre instantané A.

Pour trouver le rayon de courbure de l'enveloppe (E), je remarque qu'une série de courbes parallèles (e), (e_1), (e_2) enveloppent évidemment des courbes parallèles, la distance normale des enveloppes étant constante et égale à la distance des enveloppées correspondantes.

Il résulte de là que les centres de courbure de toutes les enveloppes sont en un même point X, lequel est aussi le centre de courbure de la trajectoire du point Y, centre de courbure commun à toutes les enveloppées. On trouvera donc le point X en appliquant la construction de Savary au point Y. De là le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Quand une figure entraînée dans le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe reste constamment tangente à une certaine enveloppe, les lignes qui joignent les centres de courbure respectifs des deux courbes mobiles d'une part, et des deux courbes fixes de l'autre, se coupent en un point de la perpendiculaire élevée au centre instantané de rotation, sur la normale commune à la courbe donnée et à son enveloppe.*

La question précédente, qui nous sera utile dans la théorie

gent en A aux deux précédents. Soit R'_1 le rayon de ce cercle : on a

$$\frac{R'_1}{R_1} = \frac{\rho - r}{r} = \frac{R}{R + 2R_1}.$$

Si l'on désigne de même par R' la longueur CA' ou $R - 2R'_1$, on trouve

$$\frac{R'}{R} = \frac{R}{R + 2R_1},$$

d'où

$$\frac{R'_1}{R'} = \frac{R_1}{R}.$$

On trouvera aisément que le lieu géométrique du point X est une épicycloïde semblable à l'épicycloïde (M), mais non semblablement placée. Le rapport de similitude est égal au rapport du rayon du cercle fixe à ce même rayon augmenté du diamètre du cercle mobile.

des engrenages, a été résolue pour la première fois par Euler (¹).

Faisons

$$(2) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{a},$$

la formule (1) devient

$$(3) \qquad \rho = \frac{r^2}{r - a\cos i}.$$

On voit que ρ dépend seulement des quantités r et $a\cos i$; si l'on prend (*fig.* 95)

$$AI = a\cos i,$$

le rayon de courbure MX est une troisième proportionnelle aux lignes MI et MA.

La formule (3) ne change pas quand on fait varier les rayons R et R_1, sans altérer a : on peut donc prendre

$$R = \infty, \qquad R_1 = a,$$

c'est-à-dire remplacer le mouvement *épicycloïdal* par un mouvement *cycloïdal*, tant qu'il s'agit seulement de déterminer les centres de courbure des trajectoires des points d'une figure invariable, ou des enveloppes des courbes liées à cette figure.

Le cercle de rayon a a reçu de M. Transon le nom de *cercle de roulement* (²).

Centre instantané du second ordre.

Quand on connaît le centre A_1 (*fig.* 95) du cercle de roulement, on trouve le point X en prolongeant la ligne MA_1 jusqu'à son intersection avec la perpendiculaire AP, et menant par le point P une parallèle à AA_1. C'est la construction de Savary, appliquée au cas où le point C est à l'infini.

Il suit de là qu'il suffit de connaître le point A_1, pour être en état de résoudre toutes les questions *géométriques* qui se rapportent au deuxième ordre différentiel, de même que le point A nous donne la solution des questions relatives au premier ordre.

(¹) *Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg pour* 1766, t. XI, p. 209.

(²) TRANSON, *Méthode géométrique pour les rayons de courbure* (*Journal de Mathématiques*, t. X, p. 154; 1845).

Il convient donc de donner au point A_1 le nom de *centre instantané du deuxième ordre* (¹). Il existe des points doués de propriétés analogues pour le troisième, le quatrième ordre, etc.; c'est-à-dire qu'il suffit pour chaque ordre de connaître un point unique, pour résoudre toutes les questions de l'ordre correspondant, auxquelles donne lieu le déplacement infiniment petit d'une figure plane dans son plan (²).

Circonférence des inflexions. — Bornons-nous aux éléments du second ordre, et soient A et A_1 les deux centres instantanés (*fig.* 97).

Décrivons une circonférence dont le diamètre soit le rayon AA_1 du cercle de roulement : le centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque de la circonférence AA_1, dans le mouvement qui nous occupe, est à l'infini (³); donc :

THÉORÈME IX. — *La circonférence décrite sur la ligne qui joint les deux centres instantanés comme diamètre est le lieu géométrique des points qui décrivent des éléments de lignes droites à l'instant considéré.*

Toutes ces droites passent au centre instantané du deuxième ordre.

Circonférence des centres. — La construction que nous venons de donner fait trouver le point décrivant M, quand on connaît le centre de courbure correspondant. Ce point M passe à l'infini quand le centre X' est situé sur la circonférence symétrique de la précédente; donc :

THÉORÈME X. — *La circonférence symétrique de la circonférence des inflexions est le lieu des centres de courbure des*

(¹) Je ne puis adopter le nom de *centre des accélérations* proposé par M. Bresse dans un Mémoire inséré au XXXV^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 89. Le centre instantané des accélérations (dont je ne m'occupe pas ici) ne coïncide généralement pas avec le point A_1. On trouvera tous les détails relatifs à la théorie qui fait l'objet de ce paragraphe dans le *Traité de Cinématique pure* de M. Resal, p. 176.

(²) *Traité de Cinématique pure*, p. 211.

La théorie des centres instantanés des divers ordres a été faite par la méthode la plus simple et la plus directe par M. Nicolaïdès (*Théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan*, 1863).

(³) MANNHEIM, *Construction des centres de courbure*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVII^e cahier, p. 179).

trajectoires décrites par les points du plan situés à l'infini, ou, si l'on veut, des enveloppes de toutes les droites, mobiles avec la figure considérée.

Les deux cercles que nous venons de définir servent à construire les centres de courbure des trajectoires des divers points d'une figure invariable.

Il est rare, en effet, qu'on puisse trouver ces centres par la construction de Savary, à moins que la roulette et sa base ne soient des données immédiates de la question. Dans le cas contraire, il faudrait commencer par construire les courbures de ces deux lignes; or ces quantités sont des éléments du troisième ordre (¹), plus difficiles à déterminer que les rayons de courbure des trajectoires des points de la figure mobile.

Considérons un point M et le centre de courbure correspondant X : le point I (*fig.* 95), déterminé par la relation

$$\overline{MA}^2 = MI \times MX,$$

est un point de la circonférence des inflexions, laquelle passe aussi par le centre instantané A. Si donc on connaît les centres de courbure des trajectoires de deux points, on pourra construire cette circonférence, et, par suite, on saura trouver le centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque, formant un triangle invariable avec les deux premiers.

Considérons seulement le cas où les deux points directeurs décrivent des lignes droites.

Problème. — *La base d'un triangle invariable se meut entre deux droites fixes* (*fig.* 98). *On demande le centre de courbure de la trajectoire du sommet de ce triangle, c'est-à-dire d'un point quelconque lié à la base mobile.*

Solution. — Les points E et F, décrivant des lignes droites, sont situés sur le cercle d'inflexion, lequel passe aussi, d'après une remarque que nous avons faite, au point d'intersection A_1 des droites (E) (F).

(¹) Il est à remarquer que les termes du troisième ordre disparaissent dans la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$, puisqu'on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{a}.$$

Le centre instantané de rotation est en A, diamétralement opposé au point A_1; et l'on obtient le centre de courbure de (M) en élevant AP perpendiculaire à MA, et menant PX parallèle à AA_1.

Le symétrique du cercle d'inflexion, par rapport à sa tangente en A, contient les centres de courbure des enveloppes des trois côtés du triangle MEF. Ce cas particulier du théorème X avait été remarqué par Bobillier.

Mouvement le plus général d'un solide parallèlement à un plan fixe.

Si nous considérons une figure plane mobile dans son plan comme la projection d'un solide invariable, assujetti à se mouvoir parallèlement au plan de cette figure, nous nous représenterons immédiatement le mouvement infiniment petit de ce solide comme une rotation autour d'un axe instantané, perpendiculaire au plan directeur (¹).

Quant au mouvement fini de ce même solide, nous l'obtiendrons en considérant les deux surfaces cylindriques formées par la série des axes instantanés, l'une dans le corps, l'autre dans l'espace, et en supposant que le corps soit entraîné dans le mouvement épicycloïdal du premier cylindre sur le second.

§ X. — Mouvement de deux solides assujettis à rester en contact.

Transmission de mouvement par contact. — Deux corps terminés par des surfaces cylindriques, et tournant respectivement autour des axes O et O′, sont assujettis à rester constamment en contact. Il suit de là qu'un de ces corps ne peut se mouvoir sans entraîner l'autre, sans lui *transmettre*, comme

(¹) Signalons pour mémoire un cas d'exception assez curieux. Considérons un plan (P), et une figure quelconque tracée dans un plan (Q), perpendiculaire à (P). Si l'on fait tourner cette figure autour d'une droite contenue dans son plan, les vitesses de tous ses points seront perpendiculaires à ce plan (Q), et par conséquent parallèles à (P); et pourtant la projection de la figure sur (P) ne conservera pas sa forme rectiligne pendant un temps infiniment petit, les points de l'infini parcourant dans ce temps des espaces finis.

on dit, son mouvement, suivant une loi géométrique évidemment déterminée : on demande le rapport des vitesses angulaires de ces deux corps.

Puisque nous supposons les deux surfaces cylindriques, si nous admettons de plus qu'elles ne se déplacent pas dans le sens de leurs génératrices, il nous suffira de considérer le mouvement des sections droites de ces surfaces.

Soient (*fig.* 99) C le point de contact, M et M' les centres de courbure des deux courbes. Pour un mouvement infiniment petit, je substitue aux courbes leurs cercles osculateurs : la longueur MM', qui est la somme des rayons de ces cercles, ne variera pas, non plus que les longueurs des lignes OM, O'M'. Les mouvements angulaires de ces deux lignes, c'est-à-dire de deux rayons quelconques de chaque solide, sont donc les mêmes que si les points M et M' étaient articulés à un lien rigide MM', lien dont la direction est celle de la normale commune aux deux courbes en contact.

On peut donc dire, en appliquant le théorème relatif à la transmission de mouvement par tiges articulées (p. 118) :

Dans la transmission par contact, le rapport des vitesses angulaires des deux corps tournants est l'inverse de celui des segments déterminés sur la ligne des centres de rotation par la normale commune.

Le rapport des vitesses angulaires n'est pas le seul élément géométrique qu'il soit important d'étudier, dans la théorie qui nous occupe. Pour aller plus loin, nous réduirons l'une de nos deux courbes au repos; c'est-à-dire que nous prendrons deux axes, fixes par rapport à celle-ci, auxquels nous rapporterons le mouvement.

Théorie du roulement et du glissement des lignes planes.

Soient donc deux figures planes quelconques, l'une fixe, l'autre mobile, assujetties à rester en contact. La courbe fixe est l'enveloppe de la courbe mobile, puisque l'enveloppe d'une figure mobile n'est autre chose que la ligne à laquelle celle-ci reste constamment tangente. Mais la condition, pour une figure mobile, de rester constamment tangente à une enveloppe donnée, ne suffit pas pour déterminer la série des positions de cette figure : en ayant égard à la loi qui règle les déplacements simultanés du point de contact sur les deux courbes, on distingue les trois genres de mouvement que voici :

1° Si les arcs infiniment petits, parcourus par le point de contact sur les deux courbes, ont même longueur, on dit qu'il y a *roulement*;

2° Si cet arc est nul pour l'une des deux courbes, le mouvement est un *glissement simple*;

3° Enfin, dans tous les autres cas, on a affaire à un mouvement mixte, qui tient à la fois du roulement et du glissement.

Soient (*fig.* 100) (e) la courbe mobile, (E) la courbe fixe, m le point actuel de contact, m_1, m_2 les points qui doivent arriver en coïncidence, par l'effet d'un mouvement infiniment petit.

Ce mouvement infiniment petit, dans le cas le plus général, peut être considéré comme composé d'un roulement et d'un glissement. On peut en effet, pour amener la courbe (e) de sa première à sa seconde position, faire d'abord rouler cette courbe sur son enveloppe jusqu'à ce que le point m_1 soit arrivé en un point μ, tel que $m\mu = mm_1$, et la faire ensuite glisser jusqu'en m_2.

La longueur μm_2 mesure l'*étendue du glissement élémentaire*, étendue qui est aussi égale à $m_1 m_2$, ou à mm', puisque les distances des points m_1 et m' à la courbe (E) sont infiniment petites du second ordre. Donc :

Théorème I. — *L'étendue du glissement élémentaire est égale à la distance qui sépare, au bout du temps dt, les deux points qui se trouvaient réunis au commencement de ce temps dt.*

Ce théorème s'applique sans modification, quand on restitue à la courbe supposée fixe le mouvement dont elle est animée en réalité, puisque la grandeur de l'arc de glissement dépend uniquement du mouvement relatif des deux courbes.

En divisant l'arc mm' par dt, on a la *vitesse de glissement*. La direction de cette vitesse est celle de la ligne μm_2, ou mm' : c'est-à-dire, à la limite, celle de la tangente commune mT.

Construction du centre instantané de rotation. — Le mouvement élémentaire, que nous venons de décomposer en un roulement et un glissement (c'est-à-dire en une rotation autour du point m et une translation dans la direction mT), revient aussi, comme on sait, à une simple rotation autour d'un centre instantané A (*fig.* 101), situé quelque part sur la normale commune NN' [1]. Le point A est facile à déterminer quand on connaît les centres de courbure de la courbe (e) et de son enveloppe, ainsi que le rapport des arcs mm_1, mm_2. C'est la limite vers laquelle tend le point γ, intersection des deux normales G_1m_1, Gm_2 [2]. L'angle de rotation $d\varphi$ est la somme des angles de contingence des deux courbes :

$$d\varphi = d\tau + d\tau_1.$$

Calcul de l'arc de glissement. — La figure montre que l'arc m_1m_2 a pour expression

$$r(d\tau - d\tau_1) = r\,d\varphi.$$

---

(1) Considérons une came, dont le profil soit la courbe quelconque (e). Il résulte du beau théorème relatif au mouvement épicycloïdal que nous pourrons toujours faire prendre à cette came le mouvement précis dont nous avons besoin qu'elle soit animée, en attachant la courbe (e) à une figure (m) convenablement choisie, et assujettie à *rouler sans glisser* sur une courbe fixe (f).

Ceci est important au point de vue des applications. En effet, le glissement donne lieu dans les machines à une résistance dite *frottement*, aussi nuisible sous le rapport de l'économie du travail que sous celui de la précision du jeu de la machine; le roulement, au contraire, n'occasionne qu'une résistance négligeable par rapport à la première : ce que nous venons de voir nous apprend à produire un mouvement plan quelconque, sans faire intervenir le glissement.

D'autres fois, au contraire, il y aura un intérêt majeur à passer par-dessus les inconvénients du frottement, et à substituer au roulement un mouvement mixte ; la théorie actuelle nous guidera également dans le tracé des courbes qui, par leur action mutuelle, produiront d'une autre manière le mouvement qu'on se propose d'obtenir.

(2) Il est à remarquer que les données dont nous nous sommes servi ne déterminent pas la tangente au lieu décrit par le point A. Cette tangente est un élément du deuxième ordre, qui se construit quand on connaît les rayons de courbure des trajectoires de deux points de la figure mobile : points non en ligne droite avec le point A.

En effet, chaque rayon de courbure fait connaître la projection du centre du deuxième ordre sur la normale correspondante (p. 126) ; deux projections déterminent ce centre A_1, et la ligne AA_1 est la normale demandée.

r étant la distance du centre instantané au point m [1]. L'un des deux angles $d\tau_1$, $d\tau$ est nul, si le mouvement est un glissement simple, mais ces deux angles ne sauraient s'évanouir tous les deux à la fois; donc le glissement ne peut être nul que quand on a $r = 0$:

THÉORÈME II. — *Pour que le glissement soit nul dans le mouvement de deux courbes assujetties à rester en contact, il faut et il suffit que le point de contact des deux courbes coïncide avec le centre instantané de la rotation relative.*

Le roulement est au contraire nul, et le mouvement est un glissement simple, dans deux cas distincts : selon que le point de contact est invariable sur la courbe mobile ou sur la courbe fixe. On peut remarquer les propriétés suivantes :

THÉORÈME III. — *Quand une courbe glisse sur une courbe fixe qu'elle touche toujours par le même point, la normale en ce point roule sur la développée de la courbe fixe.*

THÉORÈME IV. — *Quand une courbe se meut en touchant constamment une courbe fixe au même point, la développée de la courbe mobile roule sur la normale fixe du point de contact.*

Mouvement relatif de deux surfaces quelconques en contact par un point.

Le mouvement d'une surface quelconque par rapport à une autre surface à laquelle elle reste constamment tangente (c'est-à-dire par rapport à trois axes invariablement liés à celle-ci) peut s'effectuer de bien des manières différentes.

En nous bornant pour le moment à considérer les cas où le contact a lieu en un point seulement, c'est-à-dire où les surfaces n'ont de commun qu'un élément du second ordre, nous aurons à distinguer trois genres de mouvements simples :

1° On dit, à proprement parler, qu'une surface *glisse* sur

---

(1) L'expression $r\,d\varphi$ est remarquable, en ce qu'elle ne contient pas explicitement les courbures des deux figures en contact, mais seulement l'angle qui mesure la rotation instantanée relative.

une surface fixe, quand son mouvement est une translation parallèle au plan tangent commun : c'est le mouvement d'un traîneau sur un plan incliné. Poinsot avait proposé, pour désigner cette sorte de mouvement, le mot de *rasion*, qui n'a pas été adopté.

2° Une surface *pivote* sur une autre surface, quand elle tourne autour d'un axe perpendiculaire à l'élément commun : c'est le mouvement d'un pivot dans sa crapaudine. Comme on doit toujours considérer dans le contact de deux surfaces, non pas un simple point commun, mais bien un élément superficiel commun, on voit que, dans le genre de mouvement que nous étudions, il y a en définitive *glissement* de l'élément mobile sur l'élément fixe ; et, bien que les points dont il s'agit soient à une distance infiniment petite du centre de rotation, l'arc de glissement pourra avoir une valeur quelconque, selon la grandeur du déplacement angulaire relatif.

3° Enfin la surface mobile *roule* sur la surface fixe, quand son mouvement instantané est une rotation autour d'un axe situé dans le plan de contact, c'est-à-dire autour d'un des côtés de l'élément commun (1). De la sorte, l'élément suivant vient, en tournant autour de ce côté, s'appliquer exactement sur un élément égal, et ainsi de suite. La série des éléments, qui se sont trouvés successivement en contact, forme sur la surface fixe et sur la surface mobile deux zones qui, par l'effet du roulement, se développent l'une sur l'autre, et sont susceptibles de se recouvrir *sans déchirure ni duplicature*.

C'est ce qui se passe quand une sphère ou une zone cylindrique roule en ligne droite sur un plan ; une jante conique, au contraire, ne peut avoir sur un plan un mouvement rectiligne, ou une jante cylindrique un mouvement circulaire, sans que le roulement soit compliqué de pivotement (2).

(1) On confond assez souvent le roulement avec certains mouvements compliqués de pivotement (et par conséquent de glissement, si l'on tient à conserver aux mots leur signification précise). C'est ainsi que M. Delaunay, dans l'énoncé d'un célèbre théorème de Poinsot (*Mécanique rationnelle*, p. 491 ; 1856), se sert, à tort suivant moi, du mot de *roulement* pour désigner un mouvement qui se réduit, dans un cas, au pivotement simple d'une sphère sur un de ses plans tangents.

(2) On utilise cette propriété dans la construction des meules à broyer.

En résumé, les trois cas que nous avons définis répondent :

1° A une translation (laquelle ne peut évidemment avoir lieu que parallèlement à une ligne tracée dans le plan tangent) ;

2° A une rotation perpendiculaire au plan tangent commun ;

3° A une rotation contenue dans ce plan.

Nous verrons dans le Chapitre suivant qu'un mouvement quelconque est susceptible de se résoudre en ces trois éléments simples.

§ XI. — Mouvement le plus général d'un corps solide.

Nous avons démontré avec Euler que, relativement à des axes de direction invariable, assujettis à se croiser constamment en un point déterminé d'un solide en mouvement, le mouvement de ce solide, à un instant quelconque, est une rotation autour d'une droite dite *axe instantané*, fixe pendant un temps infiniment court.

Le mouvement le plus général d'un corps solide, pendant un temps infiniment petit, peut donc être considéré comme composé de cette rotation et du mouvement des trois axes, lequel est une translation dont la vitesse est égale à celle du point pris pour origine. Comme ce point a été choisi arbitrairement, on voit qu'il y a une infinité de manières de décomposer un mouvement donné en une translation et une rotation.

Théorème de Giulio Mozzi.

Parmi ces divers systèmes de décomposition, il en existe toujours un, plus simple que tous les autres, dans lequel la translation s'effectue parallèlement à l'axe de la rotation (1). Le

(1) Il résulte d'une Note de M. Chasles que ce beau théorème se trouve mentionné pour la première fois dans un ouvrage d'un géomètre florentin parfaitement inconnu, Giulio Mozzi, ouvrage intitulé : *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi* ; Naples, 1763.

« L'auteur, dit M. Chasles, après avoir démontré que tout corps en mouvement possède à chaque instant un mouvement de rotation autour d'un axe qui passe par le centre de gravité, et un mouvement rectiligne commun à toutes ses parties, ce qui était connu de d'Alembert et d'Euler, ajoute que ces deux mouvements se réduisent à deux autres, dont l'un, rectiligne, est mouvement qui résulte d'une pareille combinaison est analogue à celui d'une vis qui se meut en pénétrant à l'intérieur d'un écrou fixe.

Pour démontrer ce théorème, et donner en même temps un moyen de construire l'axe de la vis dont il s'agit, considérons dans notre solide trois points quelconques non en ligne droite, formant un système invariable.

Soient A, B, C les trois points choisis : menons par un point arbitraire O (*fig.* 102) des droites Oa, Ob, Oc, respectivement égales et parallèles aux vitesses des points A, B, C; abaissons du point O une perpendiculaire sur le plan du triangle abc, et joignons le pied P de cette perpendiculaire aux trois sommets de ce triangle. On peut regarder la vitesse Oa comme la résultante de deux vitesses représentées en grandeur et en direction par les droites OP, Pa; on peut de même remplacer Ob par OP et Pb, Oc par OP et Pc.

---

commun à toutes les parties du corps et parallèle à l'axe de rotation qui passe par le centre de gravité, et l'autre est une rotation autour d'un axe parallèle à celui-là : axe dont il détermine la position et qu'il appelle *axe spontané* de rotation.

« M. Cauchy a aussi considéré le mouvement infiniment petit d'une figure de forme invariable sur le plan et dans l'espace, dans un Mémoire intitulé : *Sur les mouvements que peut prendre un système invariable, libre, ou assujetti à certaines conditions* (*Exercices de Mathématiques*, t. II, année 1827, p. 70-90). C'est du principe des vitesses virtuelles qu'il conclut le centre instantané de rotation d'une figure plane qui glisse sur son plan, puis, après d'assez longs calculs, le théorème sur l'axe instantané de rotation d'un corps qui éprouve un déplacement infiniment petit dans l'espace : théorème qu'il énonce en ces termes :

» *Quelle que soit la nature du mouvement d'un corps solide, les relations existantes entre les différents points seront toujours celles qui auraient lieu si le corps était retenu de manière à pouvoir seulement tourner autour d'un axe fixe, et glisser le long de cet axe.*

» M. Cauchy s'arrête à ce résultat final, sans chercher aucune des propriétés qui peuvent se rapporter à cette belle question.... »

Parmi les propriétés du mouvement hélicoïdal, nous citerons seulement les suivantes, qui sont susceptibles de nombreuses applications géométriques.

Les plans normaux aux trajectoires des divers points d'un plan mobile passent tous par un même point du plan.

Ce point, ou foyer, a sa trajectoire normale au plan.

La caractéristique du plan, c'est-à-dire l'intersection de ce plan avec sa position infiniment voisine) *est le lieu des points dont les trajectoires sont contenues dans le plan lui-même; elle est parallèle à la projection de*

Cela posé, concevons des axes animés d'un mouvement de translation dont la vitesse soit égale et parallèle à OP. Relativement à ce système d'axes, les vitesses Pa, Pb, Pc des trois points A, B, C sont parallèles au plan abc; donc le mouvement relatif du triangle ABC, et par suite celui du solide lui-même, est une rotation autour d'un axe instantané : axe qu'on détermine par les règles relatives au mouvement d'un corps parallèlement à un plan. Cet axe est parallèle à OP, c'est-à-dire à la direction de la translation.

Tous les points de la ligne que nous venons d'apprendre à construire n'ont d'autre mouvement qu'une simple translation le long de l'axe lui-même; c'est-à-dire que cette droite, après un mouvement infiniment petit du solide, se retrouve dans la même position géométrique. Elle n'est pourtant pas restée immobile, mais elle n'a fait que glisser sur elle-même : nous lui donnerons le nom d'*axe instantané de rotation glissant*. On l'appelle également *axe central* (¹).

---

l'axe de l'hélicoïde sur le plan, et perpendiculaire à la ligne qui joint le foyer à la trace de l'axe sur ce même plan.

Soient h le pas de l'hélicoïde (ce pas est négatif pour un hélicoïde *dextrorsum*, d'après nos conventions sur la manière de fixer le signe d'une rotation), θ l'angle de la normale au plan avec l'axe, a et b les distances respectives du foyer et de la caractéristique à la projection de cet axe sur le plan : on a

$$a = -\frac{h}{2\pi}\,\mathrm{tang}\,\theta, \qquad b = \frac{h}{2\pi}\cot\theta.$$

Le produit de ces deux distances est indépendant de l'inclinaison du plan.

Le foyer d'un plan parallèle à l'axe est à l'infini. Il suit de là que les vitesses de tous les points d'un pareil plan sont parallèles à un autre plan, lequel est perpendiculaire au premier.

Réciproquement : si les vitesses des divers points d'un plan P sont parallèles à un même plan perpendiculaire à P, l'axe central est parallèle au plan P, et même à la caractéristique de ce plan.

Voici une conséquence curieuse de ces théorèmes. Considérons dans un solide en mouvement une figure quelconque, tracée dans un plan parallèle à l'axe instantané glissant : les vitesses de tous les points de cette figure seront parallèles à un même plan, sans que le mouvement de la figure soit réductible à une rotation perpendiculaire à ce plan. (Consulter diverses communications de M. Chasles à l'Académie des Sciences, t. XVI, LI, LII des *Comptes rendus*.)

(¹) Il existe une droite douée de propriétés analogues, pour un déplace-

La démonstration élémentaire par laquelle nous venons d'établir l'existence de l'axe central, ainsi que la construction de cet axe qui s'en déduit, est due au général Poncelet.

La construction suivante, que j'emprunte à M. Chasles, est un peu moins simple, mais elle offre une analogie complète avec la construction du centre instantané de rotation d'une figure mobile dans un plan : en ce sens qu'elle exige seulement qu'on connaisse les *directions* de trois vitesses AA', BB', CC'.

Soit λ l'intersection commune des plans normaux aux trajectoires des points A et B; la droite sur laquelle se mesure la plus courte distance des droites λ et AB rencontre l'axe central et lui est perpendiculaire.

Les deux points A et C donnent lieu de même à une autre droite qui rencontre l'axe instantané et lui est perpendiculaire. Ces deux droites déterminent l'axe cherché, qui n'est autre que la droite sur laquelle se mesure leur plus courte distance.

Scolie. — Si les points a, b, c sont en ligne droite, notre première construction est en défaut, car le plan abc n'est pas déterminé.

Il faudra donc, pour appliquer cette construction, prendre trois points A, B, C, dont les vitesses ne soient pas parallèles à un même plan (*).

Remarques sur le mouvement infiniment petit d'un corps solide.

I. Trois droites données quelconques Oa, Ob, Oc ne peuvent généralement pas être considérées comme les vitesses

ment fini quelconque d'un solide invariable; et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on considère un même corps solide dans deux positions différentes quelconques, il y a toujours dans ce solide une droite dont la position n'a pas changé, de sorte qu'on peut concevoir que le solide passe d'un lieu à l'autre par un mouvement hélicoïdal autour de cette droite comme axe.*

(Chasles.)

Cette droite s'appelle l'*axe central* des deux positions du solide, quelle que soit la grandeur du déplacement considéré.

(*) Quand il n'est pas possible de satisfaire à cette condition, c'est-à-dire *quand les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un même plan*, on sait que le mouvement se réduit à une rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.

de trois points pris arbitrairement, et constituant un système invariable.

Il existe certaines relations entre les grandeurs et les directions de ces vitesses, et les longueurs des côtés du triangle ABC, mais je ne puis insister davantage sur ce sujet.

II. Quels que soient les points du solide que l'on choisisse pour les employer à la détermination de l'axe instantané, la direction de cette ligne, ainsi que la grandeur de la vitesse de glissement, ne sauraient être altérées. Donc, *si par un point quelconque O on mène des lignes égales et parallèles aux vitesses des divers points d'un solide en mouvement, les extrémités de ces droites sont toutes situées dans un même plan, normal à l'axe instantané glissant.*

III. Menons du point O à ce plan une oblique quelconque OP_1, au lieu de la perpendiculaire OP; nous pourrons de même décomposer la vitesse d'un point quelconque en deux autres, dont l'une soit représentée par OP_1; les deuxièmes composantes seront toutes parallèles au plan abc.

Si donc nous considérons trois axes animés d'un mouvement de translation dont la vitesse soit égale et parallèle à OP_1, le mouvement relatif à ces axes sera encore une rotation perpendiculaire au plan abc; mais la translation ne sera plus parallèle à l'axe de cette rotation.

On voit que, dans les diverses manières de décomposer le mouvement d'un système invariable en une translation et une rotation, la direction de la translation est arbitraire, tandis que celle de la rotation est déterminée.

Mouvement fini d'un solide invariable.

Ce mouvement fini, si on le rapporte à trois axes de direction invariable, passant toujours par le même point du corps, est celui d'un cône mobile, roulant sans glisser sur un autre cône de même sommet, lequel est relativement fixe.

En se figurant ce dernier cône animé du mouvement de translation des axes, pendant que le cône lié au corps roule sur lui, on aura l'image du mouvement.

Mais il me semble que cette image n'est peut-être pas suffisamment nette; de plus, un même mouvement est susceptible d'une infinité de représentations de ce genre, selon qu'on prendra tel ou tel point du solide pour origine des axes mobiles. Au contraire, l'axe de rotation glissant est unique; et il est naturel de s'appuyer sur cette propriété pour chercher à se faire une idée simple du mouvement.

Pour cela, considérons, avec le général Poncelet [1], l'ensemble de toutes les positions successives de l'axe central, pour un mouvement fini quelconque. Ces droites forment une surface réglée dans le corps, et une autre dans l'espace. L'axe central actuel se trouve à la fois sur la surface mobile et sur la surface fixe; d'ailleurs toutes les génératrices de la première viennent l'une après l'autre s'appliquer sur celles de la seconde, pour jouer à leur tour le rôle d'axe instantané. Or, au moment où la rotation autour d'une génératrice commune amène les deux génératrices suivantes à coïncider, les surfaces dont nous parlons ont deux génératrices communes, et par conséquent elles sont tangentes dans toute l'étendue de l'élément gauche correspondant.

Il suit de là que le mouvement du corps est celui d'une surface réglée, liée à ce corps, sur une autre surface réglée fixe à laquelle elle est tangente suivant toute une génératrice, et sur laquelle elle roule en glissant le long de cette génératrice.

Le rapport du glissement à la rotation, c'est-à-dire le pas de la vis qui nous donne l'idée du mouvement élémentaire du corps, change en même temps que l'axe de cette vis.

Quelquefois ce pas est nul : et tout se réduit, à cet instant, à une simple rotation sur un axe immobile. Mais, en général, il n'y a dans le corps aucun point dont la vitesse soit nulle, bien qu'il y ait toujours une droite qui conserve, en tant que ligne géométrique, une position invariable pendant un temps très court.

Digression sur le raccordement des surfaces réglées.

Pour que deux surfaces gauches puissent se *raccorder* exactement tout le long d'une génératrice commune, il faut et il suffit que le paramètre de distribution des plans tangents, correspondant à cette génératrice, soit le même pour les deux surfaces : on sait que ce paramètre, que je désignerai par la lettre β, est le rapport de la plus courte distance de deux génératrices consécutives à l'angle infiniment petit formé par ces génératrices.

[1] *Voir les Additions aux Éléments de Mécanique* de M. Resal, p. 187.

Le plan tangent en un point situé à une distance x du point central est déterminé par son inclinaison θ sur le *plan central*. Or on a la formule

$$\tang\theta = \frac{x}{\beta};$$

de sorte que, quand on a fait coïncider les points centraux de deux génératrices appartenant à des surfaces différentes, ainsi que les plans tangents correspondants, ou *plans centraux*, tous les autres plans tangents des deux surfaces coïncident également, si les paramètres sont égaux.

Considérons deux surfaces, ainsi raccordées suivant la génératrice G (*fig.* 103). Les deux génératrices suivantes, G_1, g_1, se confondent, à un infiniment petit du second ordre près; et, si les paramètres de ces deux génératrices sont encore égaux, on amènera les deux surfaces à se raccorder suivant ces nouvelles génératrices, au moyen :

1° D'un glissement C_1c_1, égal à la distance qui sépare les deux nouveaux points centraux;

2° D'une rotation représentée par l'angle des plans centraux correspondants.

Le mouvement sera susceptible de se continuer indéfiniment ainsi : les paramètres étant supposés égaux pour toutes les génératrices qui viennent s'appliquer successivement l'une sur l'autre.

Le glissement est nul quand les lignes de striction des deux surfaces coupent les génératrices correspondantes sous des angles égaux. Il suffit alors d'une rotation autour de la génératrice commune pour transporter le raccordement sur la génératrice suivante : ce qui revient à dire que *les deux surfaces sont susceptibles d'être appliquées, ou développées l'une sur l'autre, sans déchirure ni duplicature,* absolument comme les cylindres ou les cônes sont développables sur le plan.

Supposons en effet que, pendant que la surface mobile tourne autour de g_1, pour amener g_2 sur G_2, l'élément (G, g_1) reste appliqué sur celui qu'il recouvre actuellement, et ainsi de suite. Par cette opération qui peut se faire sans déchirer la surface, simplement au moyen de plis effectués le long de ses génératrices, on l'appliquera exactement sur l'autre surface gauche, tout comme on développe sur un de leurs plans tangents les surfaces communément appelées *développables*.

Application à l'hyperboloïde de révolution. — Dans cette surface, le cercle de gorge est la ligne de striction. Pour trouver le paramètre β, lequel est évidemment constant, considérons deux génératrices infiniment voisines quelconques (*fig.* 104). Appelons i l'angle de ces génératrices avec l'axe, ou, ce qui est la même chose, l'angle de la ligne de striction avec la plus courte distance AP des génératrices : on a, pour la longueur de cette plus courte distance,

$$AP = AB \cos i = R\, d\alpha \cos i,$$

en appelant R le rayon du cercle de gorge.

D'un autre côté, si l'on considère le cône directeur de la surface, on voit que l'angle de deux génératrices voisines est égal à $d\alpha \sin i$; donc enfin,

$$\beta = \frac{R\, d\alpha \cos i}{d\alpha \sin i} = R \cot i.$$

Pour que deux hyperboloïdes de révolution puissent se raccorder, il faut que le produit $R \cot i$ soit le même pour les deux surfaces; ce produit n'est autre chose, comme on sait, que le demi-axe non transverse de l'hyperbole méridienne.

La *fig.* 105 représente deux hyperboloïdes tangents tout le long d'une génératrice commune GG′ [1] : nous verrons dans la deuxième section comment on utilise actuellement dans les machines les propriétés de deux solides de ce genre.

[1] Cette épure a été empruntée, avec l'autorisation de l'auteur, au *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie (1re Partie), ouvrage auquel je renverrai pour toutes les questions relatives aux surfaces gauches.

CHAPITRE IV.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS SIMPLES D'UN CORPS SOLIDE.

Nous avons étudié dans le Chapitre précédent les divers mouvements simples dont un corps solide est susceptible d'être animé : mouvements qui, pendant un temps infiniment petit, se réduisent nécessairement, ou à une translation, ou à une rotation, ou au mouvement d'une vis dans un écrou, lequel est une combinaison des deux premiers. Nous avons vu comment les données géométriques, qui définissent individuellement ces divers mouvements, varient, en général, dans la suite des temps, et comment on arrive à se faire une idée du mouvement fini qui résulte de la succession de ces mouvements élémentaires. Cherchons actuellement à *composer* plusieurs mouvements de ce genre.

Définissons d'abord ce que nous entendons par la *composition* de deux mouvements.

Supposons que nous possédions les lois du mouvement d'un solide, rapporté à trois axes quelconques, et que ces axes fassent partie d'un autre système solide, dont le mouvement nous soit également connu.

Ces données nous permettent de construire la vitesse relative d'un point quelconque de notre solide ainsi que la vitesse d'entraînement correspondante (c'est-à-dire la vitesse du point, considéré comme faisant partie du système emportant les axes mobiles) : la vitesse absolue du même point est la diagonale du parallélogramme fait sur les deux vitesses dont il est ici question. Mais, au lieu de construire ainsi séparément la vitesse de chaque point, il est plus simple de chercher à définir à la manière ordinaire le mouvement absolu du solide, mouvement en vertu duquel chacun des points qui nous occupent aurait précisément la vitesse que nous venons de trouver. L'objet de ce Chapitre est de donner les règles au moyen desquelles on effectue directement la composition de deux mouvements quelconques.

Si l'on cherchait le mouvement relatif, connaissant le mouvement réel et le mouvement d'entraînement, le problème serait absolument identique. En effet, la vitesse relative d'un point s'obtient en composant sa vitesse absolue avec la vitesse d'entraînement prise en sens contraire. On trouvera donc le mouvement apparent du solide en composant le mouvement absolu avec un mouvement égal et de sens contraire au mouvement d'entraînement.

Autre manière d'envisager le problème de la composition des mouvements. — Si l'on se reporte aux premiers éléments de la théorie du mouvement relatif d'un point, on reconnaîtra que le problème précédent ne diffère pas de celui qui consiste à chercher le mouvement unique, capable de remplacer deux déplacements successifs infiniment petits d'un même corps solide : de là une deuxième manière de définir la composition de deux mouvements.

Souvent, dans ce système, on considère les deux mouvements composants comme simultanés, ce qui ne veut rien dire, à proprement parler. Cette locution s'explique en ce sens, que des mouvements infiniment petits successifs peuvent sans inconvénient, *au point de vue de l'application du calcul,* être considérés comme s'effectuant simultanément.

On peut en effet, dans la détermination du déplacement infiniment petit d'un corps solide, supposer que le corps, au lieu de partir de la position donnée, parte d'une position infiniment voisine de celle-ci : les variations des coordonnées de chacun des points du corps, ainsi calculées, ne différeront pas de celles qu'on cherchait. Si donc on doit faire éprouver successivement à un corps un nombre quelconque de déplacements infiniment petits, on pourra supposer chacun d'eux effectué à partir de la position primitive du corps, comme si ces déplacements étaient en réalité simultanés; et la somme totale des variations des coordonnées de chaque point, calculée dans cette hypothèse, sera égale à celle qui résulterait des mouvements opérés les uns à la suite des autres, et dans un ordre quelconque.

§ XII. — Composition et décomposition des translations.

Si les deux mouvements qu'on demande de composer sont deux mouvements de translation, la vitesse relative OA (*fig.* 106) est constante à un instant donné en grandeur et en direction, quel que soit le point considéré; et il en est de même de la vitesse d'entraînement OB.

Donc la vitesse résultante OC est également constante, en grandeur et en direction, pour tous les points du système solide qui nous occupe; c'est-à-dire que *le mouvement composé de deux translations est lui-même un mouvement de translation dont la vitesse est la résultante des vitesses des deux mouvements composants.*

Ce théorème est vrai, quel que soit le nombre des translations à composer. On pourra donc, tout comme dans le cas où il s'agissait des vitesses d'un point unique, remplacer autant de translations qu'on le voudra par une seule. Inversement, on peut décomposer une translation donnée en trois autres, parallèles respectivement à trois axes rectangulaires ou obliques.

Les formules qui résolvent analytiquement les problèmes relatifs à la composition et à la décomposition des translations sont celles que nous avons données (p. 37), et qu'il est inutile de transcrire ici.

§ XIII. — Composition et décomposition des rotations.

Supposons maintenant que le mouvement relatif d'un solide se réduise à une rotation OQ [1], et que l'axe OQ, relati-

[1] Remarquons à cet égard que, pour définir une rotation relative, il ne suffit pas de donner la ligne autour de laquelle s'effectue cette rotation, ainsi que la vitesse angulaire et le sens du mouvement : il est indispensable d'indiquer le système des trois axes mobiles, par rapport auxquels le corps est animé de la rotation dont on veut parler. Supposons en effet qu'un de ces axes soit l'axe OQ de la rotation relative : si les deux axes, qui sont perpendiculaires à celui-ci, tournent eux-mêmes aussi vite que le corps et dans le même sens, il est clair que la rotation apparente sera nulle; et, en général, selon qu'on fera tourner ces axes autour de OQ plus ou moins rapidement que le corps mobile, la rotation apparente se trouvera positive ou négative.

Cette rotation est donc absolument indéterminée, tant que le système de comparaison n'est pas suffisamment défini.

vement immobile, fasse partie d'un système qui tourne lui-même autour d'un axe O'P (*fig.* 107), fixe d'une manière absolue.

Proposons-nous de composer ces deux mouvements, en commençant par le cas où l'axe de la rotation relative et celui de la rotation d'entraînement sont contenus dans un même plan.

Composition de deux rotations dont les axes se rencontrent.

Soit (*fig.* 108) un corps solide animé de deux rotations simultanées, autour des axes OP et OQ, qui se rencontrent en O. Les deux composantes de la vitesse du point d'intersection des deux axes sont nulles : par suite le mouvement composé est une rotation autour d'un axe qui passe par ce point O. Pour déterminer la direction de cet axe, il faut trouver un deuxième point dont la vitesse soit nulle.

Or, je dis d'abord que ce point doit être cherché dans le plan POQ.

En effet, les deux composantes de la vitesse d'un point situé hors de ce plan ne sont pas dirigées suivant une même droite : elles ne peuvent donc se détruire; et l'axe de la rotation composée ne saurait être en dehors du plan des deux rotations données.

Cela posé, soient m un point pris dans l'intérieur de l'angle des deux axes, x et y les distances du point m aux lignes OP et OQ : les deux composantes de la vitesse de ce point sont perpendiculaires au plan POQ; elles sont de sens contraire, comme on le voit aisément en se reportant à nos conventions relatives aux sens des rotations; enfin elles ont pour valeurs absolues respectivement px et qy, p et q étant les vitesses angulaires données. Il suit de là que le point m restera fixe, si l'on a la relation

$$px = qy.$$

Cette équation détermine la direction de l'axe cherché, laquelle est celle de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes OP et OQ, qui représentent à une échelle convenue les vitesses angulaires des deux rotations composantes.

Je dis de plus que la vitesse angulaire de la rotation composée est représentée à l'échelle de la figure par la diagonale OR elle-même; de sorte que cette ligne OR nous fait connaître à la fois la grandeur, la direction et le sens de la rotation qu'il s'agissait de déterminer.

Pour établir ce dernier point, nous remarquerons que le quotient de la vitesse d'un point quelconque du solide par sa distance à la ligne OR est nécessairement constant, puisqu'il a été démontré que le mouvement est une rotation autour de OR; c'est ce quotient qui est la vitesse angulaire cherchée. Désignons par r cette vitesse angulaire, et considérons un point Q situé sur l'axe OQ. L'une des composantes de la vitesse de ce point est nulle, l'autre a pour valeur

$$p \times \mathrm{QH};$$

d'après ce que nous venons de dire, l'expression de r est

$$r = \frac{p \times \mathrm{QH}}{\mathrm{QH'}}.$$

Or, les deux triangles OPR, OQR sont égaux; les produits $\mathrm{OP} \times \mathrm{QH}$ et $\mathrm{OR} \times \mathrm{QH'}$, qui représentent les doubles de leurs aires, sont donc égaux : c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\mathrm{QH}}{\mathrm{QH'}} = \frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OP}} = \frac{r}{p}.$$

Donc r est égal à OR, puisque OP a été pris égal à p.

Parallélogramme des rotations. — En réunissant les deux résultats qui précèdent, on dira simplement que *deux rotations simultanées, autour de deux axes concourants, se réduisent à une rotation unique, représentée par leur résultante géométrique*. Cette règle est identique à celle qui se rapporte à la composition de deux vitesses d'un point mobile.

On conclut de là que des rotations en nombre quelconque, s'effectuant autour d'axes qui passent tous par un même point, se réduisent à une seule représentée par la ligne qui ferme le polygone des rotations composantes (¹). On en conclut encore

(¹) Cette représentation lumineuse de la composition des rotations est due à Lagrange.

qu'une rotation quelconque, dont l'axe est donné, peut toujours être remplacée par trois rotations autour de trois axes rectangulaires ou obliques, qui se croisent en un point de l'axe donné.

Composition des rotations autour d'axes parallèles.

Considérons d'abord deux rotations de même sens, et soient AP, BQ (*fig.* 109) les axes de ces rotations : les deux composantes correspondantes de la vitesse d'un point sont dans un plan perpendiculaire à ces axes; donc tous les points du corps ont des vitesses parallèles à ce plan, et par conséquent le mouvement se réduit à une rotation autour d'un axe parallèle aux axes donnés.

Il est d'ailleurs évident que les points animés d'une vitesse nulle sont situés dans le plan des deux lignes AP, BQ; qu'ils se trouvent entre ces deux lignes, si, comme nous l'avons supposé, les deux rotations sont de même sens; enfin que les distances x et y de ces points aux deux axes doivent satisfaire à la relation

$$px = qy.$$

On conclut de là que les distances de l'axe de la rotation composée aux axes des rotations composantes sont inversement proportionnelles aux vitesses angulaires p, q.

Remarquons enfin que la vitesse d'un point de la ligne BQ s'exprime indifféremment par $p(x+y)$ et par ry, si l'on désigne par r la vitesse angulaire autour de l'axe CR que nous venons de déterminer; donc

$$p(x+y) = ry.$$

En remplaçant dans le premier membre de cette équation px par qy, on obtient

$$r = p + q.$$

Deux rotations p et q, parallèles et de même sens, se composent en une seule égale à leur somme p + q. L'axe de cette rotation est parallèle aux axes donnés, et divise leur distance dans la raison inverse des quantités p et q.

Si les deux rotations p et q étaient de sens contraires (*fig.* 110), on trouverait aisément :

1° Que le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe parallèle aux axes des rotations p et q, et situé dans le plan de ceux-ci;

2° Que cet axe est en dehors de la portion du plan comprise entre les axes AP, BQ, et du côté de l'axe qui correspond à la plus grande vitesse angulaire p;

3° Qu'en nommant toujours x et y les distances d'un point de cet axe aux lignes AP et BQ, on a la relation

$$px = qy;$$

4° Enfin, que la rotation résultante a lieu dans le sens de p, et que la vitesse angulaire de cette rotation est égale à la différence $p - q$.

Composition d'un nombre quelconque de rotations parallèles. — Lorsqu'un solide est animé d'un nombre quelconque de rotations dont les axes sont tous parallèles, on trouve le mouvement de ce solide en composant successivement, et dans un ordre quelconque, les rotations données.

On prendra par exemple deux rotations de même sens, et on en déterminera la résultante; on composera cette résultante avec une troisième rotation de même sens; puis, quand on aura épuisé toutes ces rotations, on traitera de la même manière celles dont les axes ont la direction inverse. On arrivera ainsi à remplacer toutes les rotations données par deux rotations seulement : ces deux rotations seront de sens opposé, et leur composition donnera la résultante définitive.

Soient p et q les deux résultantes partielles, D la distance des axes de ces deux rotations; on a, pour déterminer l'axe de leur résultante, la relation

$$px = qy = q(D + x);$$

d'où

$$x = D\frac{q}{p-q}, \qquad y = D\frac{p}{p-q}.$$

Cas singulier. — Si q et p sont très peu différents l'un de l'autre, la vitesse angulaire, $p - q$, de la rotation résultante se trouve très petite; et en même temps l'axe de cette rotation s'éloigne de plus en plus des deux axes donnés.

Vient-on à supposer p et q rigoureusement égaux, on trouve, en appliquant les règles précédentes, que ces deux rotations équivalent à une rotation nulle, s'effectuant autour d'un axe situé à l'infini. Ceci ne nous apprend absolument rien : sinon que, dans ce cas remarquable, il n'y a plus de points fixes dans le corps; par suite, le mouvement de celui-ci doit changer de nature, et il est facile de démontrer qu'il se réduit à une pure translation.

Soit M (*fig.* 111) la projection d'un point du corps sur un plan perpendiculaire aux deux axes; joignons MA', MB'. La vitesse du point M est la résultante des vitesses Ma, Nb respectivement perpendiculaires aux rayons MA', MB', et proportionnelles aux longueurs de ces rayons.

Construisons cette résultante Mc. Les triangles Mbc et MA'B' sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; on conclut de là : d'une part que la droite Mc est perpendiculaire à AB, et d'autre part que la longueur de cette droite est exprimée par le produit pD, D étant toujours la distance AB. Ces deux résultats sont indépendants de la position du point M.

Ceci prouve que, lorsqu'un solide est animé simultanément de deux rotations égales, contraires, mais non directement opposées, la vitesse est constante en grandeur et en direction pour tous les points de ce corps; et par conséquent le mouvement résultant des deux rotations que nous venons de définir est un pur mouvement de translation.

Des couples de rotations.

L'ensemble de deux rotations parallèles égales et de sens contraire, mais non directement opposées, forme ce qu'on appelle un *couple de rotations*, et jouit des propriétés suivantes :

1° Un couple de rotations équivaut à une translation perpendiculaire à son plan, translation dont la vitesse s'obtient en multipliant la vitesse angulaire commune des deux rotations qui constituent le couple par la distance des axes autour desquels ces deux rotations s'effectuent.

Le produit ainsi obtenu, pD, est le *moment* du couple.

2° Un couple de rotations peut être transporté d'une manière

quelconque dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra. En effet, tous les couples ainsi obtenus sont équivalents à une même translation : ils sont par conséquent équivalents entre eux.

3° On peut, par la même raison, disposer à volonté de la grandeur de la rotation p, ou de celle du *bras de levier* D [1], pourvu qu'on n'altère pas le *moment du couple*.

4° Inversement, une translation quelconque étant donnée, on a le droit de lui substituer un couple situé dans un plan perpendiculaire à la direction de la vitesse de la translation, plan passant d'ailleurs par tel point de l'espace que l'on voudra. De plus, on peut choisir arbitrairement dans ce plan la direction commune des deux rotations du couple, ainsi que l'un des deux éléments, p, D, en déterminant l'autre par la relation

$$pD = v.$$

Usage des couples de rotations. — L'idée d'un mouvement de translation est éminemment simple, et il ne peut être question de lui substituer l'image beaucoup moins nette fournie par deux rotations égales et contraires. L'introduction des couples dans la Cinématique doit être considérée comme un pur artifice de raisonnement, propre à simplifier la résolution de certains problèmes.

Transport d'une rotation parallèlement à elle-même. — On peut par exemple, grâce aux propriétés des couples, remplacer une rotation quelconque OP (*fig.* 112) par une rotation égale, dont l'axe passe par tel point de l'espace que l'on voudra, O', plus une translation perpendiculaire au plan OPO'.

Il suffit pour cela de prendre cette translation équivalente au couple (O'P'', OP), ce qui est toujours possible : on voit que la réunion de cette translation avec la rotation O'P' produit précisément la rotation OP.

Application. — Nous nous sommes représenté le mouvement le plus général d'un corps solide en attachant à un point quelconque O de ce corps trois axes animés d'un mouve-

[1] La longueur D s'appelle le *bras de levier* du couple : nous verrons plus tard l'origine de cette dénomination, empruntée au langage de la Statique.

ment de translation dont la vitesse est égale à la vitesse variable OA de ce point : le mouvement du solide, relativement à ces axes, est une rotation OP, dont l'axe passe par le point O.

Soit O′ un autre point quelconque du solide; ajoutons aux deux mouvements OA, OP deux rotations contraires dont les axes soient tous les deux dirigés suivant la parallèle à l'axe OP, menée par le point O′, et dont les vitesses angulaires soient égales en valeur absolue à OP. Il est clair que nous n'avons rien changé au mouvement du solide; seulement ce mouvement se présente maintenant comme composé de quatre mouvements simples, savoir : les trois rotations OP, O′P′, O′P″, et la translation OA, ou O′A′ (¹).

Mais OP et O′P″ forment un couple de rotations; ce couple équivaut à une translation O′B qu'on peut composer avec O′A′; et il ne nous reste plus, outre la translation résultante O′V, que la rotation O′P′, laquelle n'est autre chose que la rotation OP, *transportée* au point O′.

Le mouvement du solide peut être indifféremment considéré comme composé : soit de la translation OA et de la rotation OP, soit de la translation O′V et de la rotation O′P′.

Les diverses décompositions dont un même mouvement est ainsi susceptible donnent lieu aux remarques suivantes :

1° Quel que soit le point choisi pour origine des axes mobiles, on trouve toujours une même ligne pour représenter en grandeur et en direction l'axe de la rotation du corps. Cette ligne est évidemment parallèle à l'axe central.

2° La translation varie d'un point à un autre : cependant on trouve toujours la même valeur pour tous les points d'une même ligne telle que OP, parallèle à l'axe central.

3° La ligne qui, en un point donné, représente la translation, n'étant autre chose que la vitesse du point lui-même, on voit que la construction qui précède nous fait connaître d'une manière simple la vitesse d'un point quelconque d'un système solide, quand on se donne la translation et la rotation de ce système.

4° Enfin, pour déterminer l'axe central, il faut décomposer

(¹) Il est évident que la ligne qui représente une translation peut être indifféremment menée par un point quelconque de l'espace.

la translation OA parallèlement et perpendiculairement à l'axe de la rotation OP (*fig.* 113).

La composante OM revient à un couple de rotations situé dans un plan perpendiculaire à POM ou à POA. Arrangeons-nous de manière que l'une des rotations du couple détruise la rotation OP : le point O_1, où l'autre rotation devra être appliquée, est un des points de l'axe central. On trouvera la longueur OO_1 par l'équation

$$OM = OP \times OO_1.$$

Composition des mouvements quelconques.

Pour composer un nombre quelconque de mouvements élémentaires, lesquels se réduisent chacun en particulier à la combinaison d'une translation et d'une rotation, on prendra une origine arbitraire O, et on *transportera* en ce point toutes les rotations. Ces rotations se composeront toutes en une rotation unique, à laquelle il faudra joindre, pour avoir le mouvement réel, la résultante qu'on obtient en composant toutes les translations données, plus celles qui proviennent du transport des rotations au point O.

Concevons par le point O trois axes quelconques : ce qui précède donne le moyen de décomposer le mouvement d'un solide en trois translations, parallèles aux trois axes, et trois rotations s'effectuant autour de ces mêmes axes.

Enfin tout mouvement élémentaire peut encore être décomposé, et d'une infinité de manières, en deux rotations autour de deux droites non situées dans un même plan. L'une de ces droites peut être prise à volonté (¹); l'autre est la *conjuguée* de celle-ci, et réciproquement.

(¹) Il suit de là qu'une droite peut être amenée d'une position à une autre par l'effet d'une simple rotation autour de sa conjuguée. Il est à remarquer que cette conjuguée est unique, quel que soit le système solide dans lequel on insère la première droite.

Lorsqu'on considère une droite mobile, sans se préoccuper de fixer les trajectoires des divers points de cette droite, il y a une infinité de manières de la faire passer d'une position à la position voisine, au moyen d'une simple rotation. Le lieu des conjuguées qui répondent à ces divers mouvements, c'est-à-dire le lieu des axes des hyperboloïdes de révolution qui se raccor-

§ XIV. — Mouvement relatif de deux solides qui se déplacent chacun d'une manière quelconque.

Problème général. — *Deux corps sont animés de mouvements connus quelconques : trouver le mouvement relatif de l'un d'eux par rapport à l'autre, c'est-à-dire par rapport à trois axes rectangulaires invariablement liés à celui-ci.*

La solution de ce problème, dont on rencontre de nombreuses applications dans l'étude des machines, résulte immédiatement de la théorie de la composition des mouvements.

En effet, il est évident qu'on ne change pas le mouvement

dant avec la surface gauche décrite par la droite, n'est autre chose que le paraboloïde normal à cette surface le long de notre droite.

De la définition que nous avons donnée des droites conjuguées, considérées comme axes de rotation, découle immédiatement la propriété suivante qui définit ces mêmes droites au point de vue de la Géométrie pure :

Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'une droite mobile ont pour intersection commune la droite conjuguée.

Menons la perpendiculaire commune à l'axe central et à la droite donnée D ; le pied de cette perpendiculaire P sur la droite D est le point central de l'élément gauche décrit par cette droite dans son mouvement infiniment petit : nous l'appellerons le *point central* de la droite.

Cela posé, considérons le paraboloïde normal à la surface de vis à filets carrés décrite par la perpendiculaire P, on a le théorème suivant :

La conjuguée d'une droite est parallèle à la génératrice du paraboloïde normal qui passe par le point central de cette droite.

Cette propriété étant réciproque, la conjuguée se trouve aussi déterminée de position, puisqu'il suffit pour en avoir le point central de chercher sur la ligne P le point où la génératrice du paraboloïde est parallèle à la droite donnée.

Plaçons-nous sur l'axe central, supposé vertical, de manière à voir la rotation instantanée s'effectuer dans notre sens positif, et regardons toutes les droites dont le point central est sur la ligne P. Les portions de ces droites situées *au-dessus* du paraboloïde sont les axes des rotations conjuguées équivalentes au mouvement hélicoïdal qui nous occupe. Il n'est donc pas possible, au point de vue cinématique, pour toutes les droites qui descendent au-dessous du paraboloïde, d'assigner une direction conjuguée. Quant aux génératrices du paraboloïde et de tous les autres paraboloïdes de même nature, il n'existe aucune manière de les amener d'une position à la position voisine, au moyen d'une simple rotation.

Je ne développerai pas davantage les propriétés des droites conjuguées, lesquelles s'étendent au cas où l'on considère un déplacement fini d'une droite dans l'espace. (Consulter les nombreux Mémoires de M. Chasles, déjà cités.)

relatif cherché en imprimant à l'ensemble des deux corps un mouvement commun quelconque. Prenons ce mouvement commun égal et contraire au mouvement de l'un des deux solides : celui-ci se trouvera réduit au repos, et le mouvement absolu de l'autre sera précisément le mouvement relatif demandé. Ce mouvement s'obtient, comme on voit, en composant, par les règles établies dans le paragraphe précédent, le mouvement propre du solide avec un mouvement égal et contraire à celui des trois axes de comparaison.

Appliquons cette solution générale aux cas particuliers les plus intéressants.

Problème I. — *Deux corps tournent en sens inverse autour de deux axes fixes et parallèles C, C', avec les vitesses angulaires respectives (ω), ($-\omega'$) : trouver le mouvement relatif du solide (C) par rapport au solide (C').*

Solution. — Composer la rotation ω, dont l'axe est projeté en C (*fig.* 114), avec une rotation ω' égale et contraire à la rotation C'. Les deux rotations à composer sont de même sens, puisque les rotations données ont été supposées de sens contraire : la résultante est égale à la somme $\omega + \omega'$; et l'axe de cette rotation résultante, axe instantané de la rotation relative, s'obtient en divisant la distance CC', dans le rapport inverse des quantités ω et ω'.

Le mouvement de (C') par rapport à (C) est une rotation égale et contraire à celle que nous venons de trouver : elle s'effectue autour du même axe A.

Corollaire. — Si le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ est constant, l'axe déterminé en vertu de la règle précédente occupe une position fixe dans l'espace (¹).

Problème II. — *Deux corps assujettis à tourner autour de deux axes fixes et parallèles C, C' sont en contact par deux cames de forme quelconque (cylindrique) : trouver le rapport des vitesses angulaires de ces deux corps autour de leurs axes respectifs.*

(¹) Il n'en mérite pas moins le nom d'*axe instantané*, car il n'est axe de rotation que dans le mouvement relatif, et il n'est pas relativement fixe.

Solution. — D'après ce que nous venons de voir, le mouvement du corps (C′) par rapport au corps (C) est une rotation autour d'un centre instantané A (*fig.* 115), situé sur la ligne CC′.

D'autre part, nous savons que la normale commune à deux courbes qui sont assujetties à rester constamment en contact passe au centre instantané de la rotation relative; donc ce centre n'est autre que le point où la normale MN vient rencontrer la ligne des centres.

Une fois le point A déterminé, nous savons, par le problème précédent, que le rapport des vitesses angulaires est l'inverse de celui des segments CA, C′A.

De là ce théorème déjà établi précédemment, d'une manière indirecte :

Les vitesses angulaires de deux courbes planes qui s'appuient l'une sur l'autre sont en raison inverse des segments déterminés par la normale commune sur la ligne qui joint les centres autour desquels tournent ces deux courbes.

Corollaire. — Pour que le rapport des vitesses angulaires soit constant, il faut et il suffit que la normale commune aux deux cames vienne couper la ligne des centres en un point fixe.

PROBLÈME III. — *Les choses étant comme dans le problème précédent, trouver l'étendue du glissement relatif.*

Soit M le point de contact (*fig.* 116) : au bout d'un temps infiniment petit dt, le contact se fait en un autre point M_1, et les points primitivement réunis en M se trouvent transportés en n et n'. La distance nn' est, d'après notre définition, l'arc de glissement : arc dont la direction limite est celle de la perpendiculaire à la normale commune.

Considérons le triangle infiniment petit Mnn', dont les côtés ont pour valeurs

$$\begin{aligned} Mn &= ds = \omega\, dt \times CM,\\ Mn' &= ds' = \omega' dt \times C'M,\\ nn' &= dS = v_g dt : \end{aligned}$$

les rapports de ces côtés sont égaux aux rapports des sinus des angles opposés. Mais, les trois côtés du triangle Mnn' étant perpendiculaires respectivement aux droites MA, MC, MC′, on

peut remplacer les angles de ce triangle par les angles égaux formés autour du point M, et poser la proportion

$$dS : ds : ds' :: \sin \overline{MC, MC'} : \sin \overline{MC', MA} : \sin \overline{MC, MA}.$$

On conclut de là le rapport de la vitesse de glissement à l'une ou à l'autre des vitesses angulaires.

Corollaire. — Pour que le glissement élémentaire soit nul, il faut qu'on ait

$$\sin \overline{MC, MC'} = 0,$$

c'est-à-dire que le point de contact des deux courbes soit sur la ligne des centres.

PROBLÈME IV. — *Déterminer les deux courbes de manière que la transmission du mouvement s'effectue sans glissement et que le rapport des vitesses angulaires soit constant.*

Solution. — Pour que le glissement soit nul, il faut que le point de contact des profils cherchés soit sur la ligne des centres de rotation. Si de plus on veut que le rapport des vitesses soit constant, ce point doit être un point fixe M de la ligne CC′.

Il suit de là que les longueurs CM, C′M sont constantes, et que par conséquent les courbes décrites par le point M, relativement aux centres respectifs C et C′, sont deux circonférences de cercle (*fig.* 117). Les rayons de ces circonférences sont déterminés par leur somme, égale à la longueur CC′, et par leur rapport, qui est l'inverse du rapport de vitesses donné.

Scolie. — Si l'on supprime la restriction, *sans glissement*, le point de contact des deux courbes peut être n'importe où ; le rapport des vitesses ne cessera pas d'être constant et conservera la même valeur que précédemment, pourvu que la normale commune vienne passer au point de contact M des circonférences dont nous venons de parler; de sorte que, géométriquement, le problème admet une infinité de solutions : nous savons qu'on peut se donner arbitrairement l'une des deux courbes, et que l'autre est l'enveloppe des positions relatives de celle-ci.

Nous verrons plus tard, parmi ces solutions en nombre infini, quelles sont celles que la pratique a adoptées.

PROBLÈME V. — *Étant donnée la courbe* (C′) (*fig.* 118), *déterminer la courbe* (C) *de manière que le glissement soit nul; trouver dans cette hypothèse le rapport variable des vitesses simultanées des deux cames.*

Solution. — Posons

$$CC' = a, \qquad CM = r, \qquad C'M = r',$$

et soient θ et θ' les angles des rayons vecteurs r et r' avec deux axes CP, C′P′, fixés respectivement aux centres C et C′.

La courbe (r, θ) devant être tangente au point M à la courbe (r', θ'), on a les relations suivantes :

$$(1) \qquad r + r' = a,$$

$$(2) \qquad r\frac{d\theta}{dr} = r'\frac{d\theta'}{dr'}.$$

Comme on tire de l'équation (1)

$$(3) \qquad dr = -dr',$$

on voit que l'équation (2) se réduit à

$$(4) \qquad r\,d\theta = -r'\,d\theta' \text{ [1]}:$$

c'est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Une fois que l'on connaît r en fonction de r', on a pour le rapport des vitesses

$$(5) \qquad m = \frac{r}{r'}.$$

PROBLÈME VI. — *Réciproquement, le rapport variable des vitesses étant donné, trouver les deux courbes* (C) *et* (C′), *le glissement devant toujours être nul.*

La solution analytique de ce problème inverse est fournie

[1] On vérifie que le mouvement est bien un roulement simple; en effet :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{dr'^2 + r'^2 d\theta'^2} = ds'.$$

Il résulte de cette équation que les arcs parcourus simultanément par le point de contact sur les deux courbes sont égaux.

par les équations qui résolvent le problème précédent; à savoir (1), (4) et (5).

Généralement, le mouvement d'un des arbres est uniforme, et l'on se donne la loi du mouvement qu'on veut imprimer à l'autre : on connaît alors m en fonction du temps, ou de l'angle θ qui varie proportionnellement au temps.

Scolie. — Quand on a trouvé deux courbes convenables, on peut, sans cesser de satisfaire à la question, déformer ces deux courbes de la manière suivante.

On réduira tous les angles θ et θ' dans un rapport constant quelconque, rapport qui doit être le même pour les deux courbes conjuguées; puis, sur chacun des rayons correspondant aux angles réduits, on portera des longueurs égales à celles des rayons vecteurs primitifs : les courbes ainsi obtenues répondront à toutes les conditions du problème.

PROBLÈME VII. — *Un corps tourne autour d'un axe* C′ (*fig.* 119) : *trouver son mouvement par rapport à un autre corps animé d'un mouvement de translation dans le sens de la flèche* (*f*).

Solution. — On passe des problèmes précédents à celui-ci en supposant que le centre C s'éloigne à l'infini, sur la perpendiculaire à la direction de la translation.

Pour résoudre le même problème directement, il faut composer la rotation (C′) avec une translation contraire à la translation donnée. Remplaçons cette translation par un couple de rotations et prenons l'une des rotations du couple égale et contraire à la rotation (C′), ce qui est toujours possible : le mouvement composé se trouvera simplement représenté par l'autre rotation du couple, laquelle est égale et parallèle à la rotation (C′), et dirigée dans le même sens.

La position A de l'axe de cette rotation est déterminée par l'équation

$$\omega' \times C'A = v,$$

v étant la vitesse de la translation donnée [1].

[1] Le point A n'est autre chose que le point du corps tournant, dont la vitesse est précisément égale à la vitesse v, et dirigée dans le même sens; par suite la vitesse relative de ce point est nulle.

On obtient donc le mouvement relatif en transportant la rotation (C′) parallèlement à elle-même, en un certain point de la perpendiculaire abaissée du centre C′ sur la direction de la vitesse de la translation.

Problème VIII. — *Deux corps tournent uniformément autour de deux axes non situés dans le même plan : trouver le mouvement relatif.*

Solution. — Soient (*fig.* 120) Pp, Qq les axes des deux rotations données. Menons la plus courte distance PQ de ces deux droites, et soit h la longueur de cette plus courte distance.

Pour avoir le mouvement relatif du deuxième corps, il faut composer sa rotation Qq avec une rotation Pp_1, égale et contraire à la rotation de l'autre solide.

Introduisons deux rotations contraires Qp_2, Qp_3, égales à p en valeur absolue : nous n'aurons rien changé au mouvement relatif cherché. Or les rotations q et p_2 se composent en une seule r; et l'on a en outre le couple (p_1, p_3), lequel équivaut à une translation QA perpendiculaire au plan PQp_2.

Le mouvement relatif se compose de la rotation Qr et de la translation QA, dont la vitesse est représentée par le produit ph.

Problème IX. — *Les choses étant comme dans le problème précédent, déterminer l'axe de rotation glissant du mouvement relatif.*

Solution. — Décomposer la translation QA (*fig.* 121) en deux, dont l'une QB soit dirigée suivant l'axe de la rotation résultante, l'autre QC étant perpendiculaire à cet axe : on a

$$QB = ph\sin\overline{p,r},$$
$$QC = ph\cos\overline{p,r}.$$

Remplaçons QC par un couple dont l'une des rotations soit égale et contraire à r : l'autre s'effectuera autour d'un axe contenu dans le plan PQr. Soit OR ce nouvel axe, et z le bras de levier du couple, c'est-à-dire la distance QO, on aura

$$rz = ph\cos\overline{p,r}.$$

La ligne ainsi déterminée n'est autre chose que l'axe de rotation glissant.

On déduit de l'équation précédente

$$z = \frac{ph\cos\overline{p,r}}{r}, \qquad h - z = \frac{qh\cos\overline{q,r}}{r},$$

en ayant égard à la relation évidente

$$r = p\cos\overline{p,r} + q\cos\overline{q,r}.$$

Donc

$$\frac{z}{h-z} = \frac{p\cos\overline{p,r}}{q\cos\overline{q,r}} = \frac{\cot\overline{p,r}}{\cot\overline{q,r}},$$

car

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin\overline{q,r}}{\sin\overline{p,r}}.$$

Pour construire z, inscrivons dans la projection horizontale de l'angle des axes donnés, et perpendiculairement à l'axe de la rotation résultante, une longueur $P_1Q_1 = PQ = h$; cette ligne est divisée au point I dans le rapport demandé. En effet, on a

$$QI = Q_1I\cot\overline{q,r} = IP_1\cot\overline{p,r},$$

d'où

$$\frac{Q_1I}{IP_1} = \frac{z}{h-z}.$$

Scolie. — Quand les axes sont rectangulaires, les angles désignés par $\overline{p,r}$ et $\overline{q,r}$ sont complémentaires; donc

$$\frac{p}{q} = \cot\overline{p,r} = \frac{1}{\cot\overline{q,r}}, \qquad \frac{z}{h-z} = \frac{p^2}{q^2}.$$

Théorème. — *L'axe de rotation glissant divise la plus courte distance des deux axes, supposés rectangulaires, dans le rapport inverse du carré des vitesses p et q.*

Autrement : les vitesses angulaires des deux arbres sont entre elles inversement comme les *racines carrées* des distances des axes à l'axe instantané [1].

---

[1] Et non comme ces distances elles-mêmes, ainsi que l'ont écrit plusieurs auteurs.

PROBLÈME X. — *Déterminer les deux surfaces réglées que décrit l'axe instantané dans l'intérieur de chacun des deux corps.*

Considérons seulement le cas où le rapport $\frac{p}{q}$ est constant : l'axe instantané est fixe dans l'espace, mais il ne l'est pas dans les deux corps; et ses positions successives tracent respectivement deux hyperboloïdes de révolution qui, dans le mouvement, se touchent constamment tout le long de la génératrice commune.

Scolie. — Il est facile de vérifier *a posteriori* que ces deux surfaces satisfont à la condition nécessaire et suffisante pour le raccordement des hyperboloïdes de révolution.

En effet, les rayons R et R_1 des cercles de gorge de ces hyperboloïdes sont respectivement égaux à z et $h - z$; les inclinaisons i et i_1 de la génératrice sur chaque axe sont les angles que nous avons désignés par $\overline{q, r}$ et $\overline{p, r}$. Donc l'équation

$$z \cot \overline{q, r} = (h - z) \cot \overline{p, r}$$

revient à la relation que nous connaissons :

$$R \cot i = R_1 \cot i_1.$$

§ XV. — Théorie analytique de la rotation autour d'un point.

Après avoir établi géométriquement les théorèmes relatifs à l'existence et aux propriétés de l'axe instantané de rotation dans le mouvement d'un corps autour d'un point fixe, ainsi que ceux qui se rapportent à la composition des rotations, il ne sera pas inutile de montrer comment l'analyse s'applique à ce genre de questions. Il importe en même temps de calculer, une fois pour toutes, les formules de Géométrie analytique dont nous aurons plus tard à faire un usage continuel, dans l'importante théorie de la rotation des corps.

Nous nous bornerons d'ailleurs au cas où il y a un point fixe dans le système, et nous démontrerons analytiquement :

1° Que dans le mouvement d'un corps autour d'un point fixe, il y a toujours dans ce corps une infinité de points situés

sur une même ligne droite, points animés à un instant donné d'une vitesse nulle;

2° Que les vitesses de tous les autres points du solide sont les mêmes que si le corps tournait effectivement autour de cette droite dont la vitesse est nulle, droite qui porte le nom d'*axe instantané* ou *spontané* de rotation;

3° Enfin que ces vitesses sont encore les mêmes que si le corps tournait simultanément autour de trois axes rectangulaires quelconques (menés par le point fixe), avec des vitesses angulaires représentées par les projections sur ces trois axes de la vitesse angulaire autour de l'axe instantané.

Il suffit, pour établir ces propositions, de différentier les formules ordinaires de la transformation des coordonnées, en appliquant ces formules au passage d'un système d'axes liés au corps à un système fixe dans l'espace. Nous supposerons ces deux systèmes rectangulaires.

Prenons pour origine le point fixe; soient OX_1, OY_1, OZ_1 (*fig.* 122) trois axes rectangulaires immobiles par rapport au corps, et OX, OY, OZ trois autres axes fixes dans l'espace.

Un point du solide est déterminé à un instant quelconque par ses coordonnées x_1, y_1, z_1, prises par rapport aux axes mobiles, et par les positions de ces axes au même instant : positions qu'on définit en donnant les neuf cosinus des angles formés par les axes mobiles avec les axes fixes.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{array}{lll} a = \cos \overline{X_1, X}, & a' = \overline{Y_1, X}, & a'' = \cos \overline{Z_1, X}, \\ b = \cos \overline{X_1, Y}, & b' = \overline{Y_1, Y}, & b'' = \cos \overline{Z_1, Y}, \\ c = \cos \overline{X_1, Z}, & c' = \overline{Y_1, Z}, & c'' = \cos \overline{Z_1, Z} \text{ (}^1\text{)}, \end{array}$$

on a les expressions suivantes pour les coordonnées du point (x_1, y_1, z_1), considérées par rapport aux axes OX, OY, OZ :

$$\begin{aligned} x &= a x_1 + a' y_1 + a'' z_1, \\ y &= b x_1 + b' y_1 + b'' z_1, \\ z &= c x_1 + c' y_1 + c'' z_1. \end{aligned}$$

---

(1) Ces neuf cosinus sont les mêmes à chaque instant pour tous les points du corps; mais ils varient pendant le mouvement. Ce sont donc des fonctions du temps, et du temps seulement.

Ces cosinus satisfont aux relations que l'on connaît.

Différentions ces équations, en considérant x_1, y_1, z_1 comme des constantes; nous obtiendrons les composantes de la vitesse du même point, projetée sur les trois axes fixes :

$$\frac{dx}{dt} = v_x = x_1 \frac{da}{dt} + y_1 \frac{da'}{dt} + z_1 \frac{da''}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y = x_1 \frac{db}{dt} + y_1 \frac{db'}{dt} + z_1 \frac{db''}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt} = v_z = x_1 \frac{dc}{dt} + y_1 \frac{dc'}{dt} + z_1 \frac{dc''}{dt}.$$

Cela posé, je dis en premier lieu que le mouvement du corps est une rotation autour d'un axe que nous allons déterminer.

Cherchons les projections $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}$ de la vitesse de notre point sur les axes mobiles.

On obtient v_{x_1} en multipliant respectivement v_x, v_y, v_z par a, b, c, et ajoutant; l'expression à laquelle on arrive présente ceci de remarquable : qu'elle ne contient pas de terme en x_1. On a en effet

$$a \frac{da}{dt} + b \frac{db}{dt} + c \frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2),$$

quantité identiquement nulle, puisque la somme $a^2 + b^2 + c^2$ est égale à l'unité.

Il suit de là que l'expression de v_{x_1} se compose uniquement de termes multipliés par y_1 ou par z_1 : nous la mettrons sous la forme

$$q z_1 - r y_1,$$

les coefficients q et r satisfaisant aux relations

$$q = a \frac{da''}{dt} + b \frac{db''}{dt} + c \frac{dc''}{dt},$$
$$-r = a \frac{da'}{dt} + b \frac{db'}{dt} + c \frac{dc'}{dt}.$$

Si on calcule v_{y_1} par le même procédé, on trouve naturellement zéro pour le coefficient de y_1; de plus, il arrive que le coefficient de x_1

$$a' \frac{da}{dt} + b' \frac{db}{dt} + c' \frac{dc}{dt}$$

est égal et de signe contraire à celui de y_1 dans l'expression de v_{x_1}.

C'est ce qu'on voit tout de suite en ayant égard à l'équation

$$\frac{d}{dt}(aa' + bb' + cc') = 0,$$

de laquelle on déduit

$$a' \frac{da}{dt} + b' \frac{db}{dt} + c' \frac{dc}{dt} = -\left(a \frac{da'}{dt} + b \frac{db'}{dt} + c \frac{dc'}{dt}\right) = r.$$

On a donc en définitive

$$v_{y_1} = r x_1 - p z_1,$$

en faisant

$$-p = a' \frac{da''}{dt} + b' \frac{db''}{dt} + c' \frac{dc''}{dt};$$

on trouverait de même

$$v_{z_1} = p y_1 - q x_1,$$

les coefficients p et q étant les mêmes que ceux qui figurent dans les expressions de v_{x_1} et v_{y_1}.

Nous verrons tout à l'heure la signification des quantités p, q, r [1], qui jouent le principal rôle dans cette théorie, et qui jusqu'ici représentent simplement, pour abréger l'écriture, certaines fonctions des neuf cosinus et de leurs dérivées.

Axe instantané de rotation. — Considérons les expressions que nous venons de trouver, pour les vitesses projetées sur les axes mobiles,

$$v_{x_1} = q z_1 - r y_1,$$
$$v_{y_1} = r x_1 - p z_1,$$
$$v_{z_1} = p y_1 - q x_1;$$

---

[1] On peut dès à présent remarquer, avec M. Duhamel, que les produits $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$, représentent respectivement les angles formés par chacun des axes mobiles avec sa position infiniment voisine. Si l'on prend pour axes fixes les positions initiales des axes mobiles, on trouve, pour déterminer la position de ces axes au bout du temps dt, les cosinus suivants :

$$\begin{array}{lll} \alpha = 1, & \alpha' = -r\,dt, & \alpha'' = q\,dt, \\ \beta = r\,dt, & \beta' = 1, & \beta'' = -p\,dt, \\ \gamma = -q\,dt, & \gamma' = p\,dt, & \gamma'' = 1. \end{array}$$

on annule à la fois ces trois quantités, en posant

$$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}.$$

Or, ces équations sont celles d'une ligne droite, dont tous les points ont à l'instant considéré une vitesse nulle : ainsi se trouve démontrée la première partie de ce que nous nous proposions d'établir.

La droite immobile passe par l'origine; elle fait avec les axes mobiles des angles dont les cosinus ont pour expressions :

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{r}{\omega},$$

en prenant

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Cela posé, faisons la somme $v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2$ des carrés des trois composantes de la vitesse d'un point du système, il vient, en vertu d'une formule algébrique bien connue,

$$v^2 = (p^2 + q^2 + r^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (px_1 + qy_1 + rz_1)^2.$$

Désignons par ρ la distance du point (x_1, y_1, z_1) à l'origine, par Ω l'angle de ce rayon vecteur avec la droite (p, q, r); c'est-à-dire faisons

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \rho^2,$$

$$\frac{px_1 + qy_1 + rz_1}{\rho\omega} = \cos\Omega,$$

il vient

$$v^2 = \omega^2\rho^2 \sin^2\Omega,$$

ou, en désignant par h la distance du point considéré à la droite immobile,

$$v = \omega h.$$

La vitesse v est donc proportionnelle à la distance h. De plus, cette même vitesse est perpendiculaire au plan de la droite (p, q, r) et du rayon vecteur : c'est ce qui résulte des équations

$$x_1 v_{x_1} + y_1 v_{y_1} + z_1 v_{z_1} = 0,$$
$$p\, v_{x_1} + q\, v_{y_1} + r\, v_{z_1} = 0;$$

donc les vitesses de tous les points du corps sont bien les mêmes que si ce corps tournait effectivement autour de la droite dont la vitesse est nulle, cette rotation s'effectuant avec une vitesse angulaire égale à ω, c'est-à-dire à $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$.

Les formules précédentes déterminent à la fois la direction de l'*axe instantané de rotation*, et la vitesse angulaire du mouvement correspondant.

Décomposition de la rotation instantanée. — Cela posé, il est facile de voir qu'on arriverait pour les vitesses composantes à des expressions parfaitement identiques à celles qui précèdent, si l'on supposait le corps animé de trois rotations *simultanées*, p, q, r, s'effectuant autour des lignes OX_1, OY_1, OZ_1 (c'est-à-dire si l'on prenait pour v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1} les sommes des valeurs qu'on obtiendrait séparément si chacune des trois rotations p, q, r existait seule).

En effet, la rotation p (*fig.* 123) donne lieu à une vitesse HI, perpendiculaire à l'axe OX_1; cette vitesse a pour expression $p\sqrt{y_1^2 + z_1^2}$, et ses projections sur les trois axes sont égales respectivement à

$$0, \qquad -pz_1, \qquad py_1.$$

De même, les rotations q et r fournissent

$$\begin{array}{ccc} qz_1, & 0, & -qx_1, \\ -ry_1, & rx_1, & 0. \end{array}$$

En faisant la somme de ce qui se rapporte à chacun des trois axes respectivement, on trouve pour les composantes v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1} des expressions qui ne diffèrent pas de celles qui ont été écrites plus haut.

Des quantités p, q, r. — Il suit de là que les fonctions que nous avons désignées par les lettres p, q, r sont les composantes de la rotation instantanée suivant les axes mobiles OX_1, OY_1, OZ_1. Nous venons de voir comment ces fonctions se trouvent déterminées, quand on connaît les neuf cosinus en fonction du temps : on a

$$p = a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt},$$

$$q = a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt},$$

$$r = a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}.$$

Mais on sait que les neuf cosinus, qui nous ont servi à passer d'un système d'axes coordonnés rectangulaires à un système du même genre, ne sont pas absolument arbitraires, et qu'ils s'expriment au moyen de trois quantités seulement.

Les variables qu'on emploie ordinairement, d'après Euler, pour déterminer les axes mobiles, sont :

1° L'angle Z_1OZ (*fig.* 124), que l'on désigne par θ;

2° L'angle ψ formé avec OX par la trace OA du plan X_1OY_1 sur YOX;

3° Enfin l'angle φ de cette même trace avec OX_1.

Les expressions des coefficients $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ sont alors les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\ a' &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,\\ a'' &= \sin\psi\sin\theta, \end{aligned}\right\} \text{OX};$$

$$\left.\begin{aligned} b &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,\\ b' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,\\ b'' &= -\cos\psi\sin\theta, \end{aligned}\right\} \text{OY};$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \sin\varphi\sin\theta,\\ c' &= \cos\varphi\sin\theta,\\ c'' &= \cos\theta. \end{aligned}\right\} \text{OZ}.$$

En remplaçant ces quantités et leurs dérivées par leurs valeurs dans les expressions de p, q, r, on trouve

$$p = \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt},$$

$$q = \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}.$$

Ces équations nous serviront dans le cours de deuxième année, quand nous étudierons les relations qui existent entre le mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, et les forces qui agissent sur les divers points de ce corps solide.

§ XVI. — Théorie analytique des mouvements relatifs.

Soient, comme précédemment (p. 83), ξ, η, ζ les coordonnées d'un point mobile M, par rapport à trois axes fixes; ξ', η', ζ' les coordonnées, prises par rapport aux mêmes axes, d'une origine mobile O.

Soient enfin x, y, z les coordonnées de notre mobile par rapport à trois axes passant par cette origine O. Nous avons fait

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} a &= \cos\overline{x,\xi}, & a' &= \cos\overline{y,\xi}, & a'' &= \cos\overline{z,\xi},\\ b &= \cos\overline{x,\eta}, & b' &= \cos\overline{y,\eta}, & b'' &= \cos\overline{z,\eta},\\ c &= \cos\overline{x,\zeta}, & c' &= \cos\overline{y,\zeta}, & c'' &= \cos\overline{z,\zeta}, \end{aligned}\right.$$

et cela posé nous avons écrit les formules qui lient les coordonnées apparentes aux coordonnées absolues sous la forme suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi' + ax + a'y + a''z,\\ \eta &= \eta' + bx + b'y + b''z,\\ \zeta &= \zeta' + cx + c'y + c''z. \end{aligned}\right.$$

Désignons par V la *vitesse absolue* du point mobile, par V_r sa *vitesse relative*, par V_e la *vitesse d'entraînement*.

Cette dernière est la vitesse absolue d'un point qui aurait à l'instant considéré les mêmes coordonnées que le point M, mais qui resterait en repos relatif : on a donc, pour ce point idéal,

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \qquad \frac{dz}{dt} = 0;$$

et par conséquent on trouvera les composantes de sa vitesse en différentiant par rapport au temps les équations (2), sans faire varier les coordonnées apparentes x, y, z :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} V_{e(\xi)} &= \frac{d\xi'}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{da'}{dt} + z\frac{da''}{dt},\\ V_{e(\eta)} &= \frac{d\eta'}{dt} + x\frac{db}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{db''}{dt},\\ V_{e(\zeta)} &= \frac{d\zeta'}{dt} + x\frac{dc}{dt} + y\frac{dc'}{dt} + z\frac{dc''}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Les mêmes équations (2), si on les différentie en tenant compte du mouvement apparent du mobile, fournissent les projections de la vitesse absolue sur les axes fixes; on a, en ayant égard aux relations (3) :

$$(4)\qquad \begin{cases} V_\xi = V_{e(\xi)} + a\dfrac{dx}{dt} + a'\dfrac{dy}{dt} + a''\dfrac{dz}{dt}, \\ V_\eta = V_{e(\eta)} + b\dfrac{dx}{dt} + b'\dfrac{dy}{dt} + b''\dfrac{dz}{dt}, \\ V_\zeta = V_{e(\zeta)} + c\dfrac{dx}{dt} + c'\dfrac{dy}{dt} + c''\dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Or les dérivées $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sont les projections de la vitesse relative sur les axes mobiles; et l'on a, en se reportant à la signification des coefficients $a, b, c, a', \ldots,$

$$(5)\qquad \begin{cases} a\dfrac{dx}{dt} + a'\dfrac{dy}{dt} + a''\dfrac{dz}{dt} = V_{r(\xi)}, \\ b\dfrac{dx}{dt} + b'\dfrac{dy}{dt} + b''\dfrac{dz}{dt} = V_{r(\eta)}, \\ c\dfrac{dx}{dt} + c'\dfrac{dy}{dt} + c''\dfrac{dz}{dt} = V_{r(\zeta)}. \end{cases}$$

Ces relations permettent de mettre les équations (4) sous la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} V_\xi = V_{e(\xi)} + V_{r(\xi)}, \\ V_\eta = V_{e(\eta)} + V_{r(\eta)}, \\ V_\zeta = V_{e(\zeta)} + V_{r(\zeta)}. \end{cases}$$

Donc :

Théorème I. — *La vitesse absolue est la résultante de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative;*

ou bien

La vitesse relative est la résultante de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement prise en sens contraire.

Pour avoir les relations qui existent entre les accélérations, il faut différentier une seconde fois les équations (2). Les pre-

miers membres des équations qu'on obtient par cette opération sont les composantes de l'accélération absolue du point M, projetée sur les trois axes fixes; quant aux deuxièmes membres des mêmes équations, on peut en grouper tous les termes sous les trois divisions suivantes :

1° Ceux qui ne contiennent pas les dérivées des coordonnées apparentes : termes dont la somme fournit les composantes de *l'accélération d'entraînement;*

2° Ceux qui contiennent les dérivées secondes de ces mêmes coordonnées apparentes. On reconnaît comme précédemment que ceux-ci représentent les projections de *l'accélération relative* sur les axes fixes;

3° Enfin les termes qui restent en dehors des deux premières catégories, c'est-à-dire ceux qui sont fonction des composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ de la vitesse relative.

En ayant égard à ces remarques et faisant usage de nos notations habituelles, nous écrirons les équations dont il s'agit sous la forme suivante :

$$(7)\qquad \begin{cases} J_\xi = J_{e(\xi)} + J_{r(\xi)} + 2\left(\dfrac{da}{dt}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{da'}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{da''}{dt}\dfrac{dz}{dt}\right), \\ J_\eta = J_{e(\eta)} + J_{r(\eta)} + 2\left(\dfrac{db}{dt}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{db'}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{db''}{dt}\dfrac{dz}{dt}\right), \\ J_\zeta = J_{e(\zeta)} + J_{r(\zeta)} + 2\left(\dfrac{dc}{dt}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dc'}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dc''}{dt}\dfrac{dz}{dt}\right). \end{cases}$$

Il faut maintenant projeter toutes les lignes dont nous nous occupons sur les axes mobiles [1] : pour cela ajoutons les trois équations (7) multipliées respectivement, d'abord par a, b, c, puis par a', b', c', enfin par a'', b'', c''.

Remarquons, avant de faire le calcul, que les cosinus qui figurent dans les équations précédentes définissent le mouvement du système solide de comparaison (système que nous réduisons pour plus de clarté aux seules lignes Ox, Oy, Oz),

[1] Il ne faut pas oublier que les axes mobiles sont nos véritables axes coordonnés; les axes fixes sont de simples lignes auxiliaires, dont il ne restera plus de traces à la fin des opérations.

relativement à trois axes menés par l'origine mobile O, parallèlement à $C\xi$, $C\eta$, $C\zeta$.

Nous savons que ce mouvement, sur lequel nous n'avons fait aucune hypothèse, est une rotation instantanée autour d'un axe passant au point O (¹); et nous avons trouvé dans le paragraphe précédent les expressions des projections de cette rotation sur les axes mobiles :

$$(8)\quad \begin{cases} p = a''\dfrac{da'}{dt} + b''\dfrac{db'}{dt} + c''\dfrac{dc'}{dt}, \\ q = a\dfrac{da''}{dt} + b\dfrac{db''}{dt} + c\dfrac{dc''}{dt}, \\ r = a'\dfrac{da}{dt} + b'\dfrac{db}{dt} + c'\dfrac{dc}{dt}. \end{cases}$$

Or il est très remarquable que ces quantités, qui restent les mêmes quels que soient les axes fixes, soient précisément les seules fonctions des neuf cosinus qui subsistent dans les résultats auxquels nous voulons arriver.

En effet, si nous effectuons les opérations indiquées plus haut, et que nous résolvions les relations obtenues par rapport aux composantes de l'accélération relative, il vient

$$(9)\quad \begin{cases} J_{r(x)} = J_x - J_{e(x)} + 2\left(r\dfrac{dy}{dt} - q\dfrac{dz}{dt}\right), \\ J_{r(y)} = J_y - J_{e(y)} + 2\left(p\dfrac{dz}{dt} - r\dfrac{dx}{dt}\right), \\ J_{r(z)} = J_z - J_{e(z)} + 2\left(q\dfrac{dx}{dt} - p\dfrac{dy}{dt}\right). \end{cases}$$

Théorème II. — *L'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, et d'une accélération complémentaire qu'on appelle accélération centrifuge composée.*

Il résulte des formules (9) que les composantes de cette

(¹) Cette rotation reste la même, en grandeur et en direction, quel que soit le point du système auquel on place l'origine O (p. 150).

dernière accélération ont les valeurs suivantes :

$$(10)\quad \begin{cases} X = 2\left(r\dfrac{dy}{dt} - q\dfrac{dz}{dt}\right), \\ Y = 2\left(p\dfrac{dz}{dt} - r\dfrac{dx}{dt}\right), \\ Z = 2\left(q\dfrac{dx}{dt} - p\dfrac{dy}{dt}\right). \end{cases}$$

On conclut facilement de ces relations que l'accélération centrifuge composée est perpendiculaire à la vitesse relative et à l'axe instantané de la rotation d'entraînement, enfin qu'elle a pour expression

$$2\omega V_r \sin \widehat{\omega, V_r}.$$

Mouvements relatifs terrestres.

Occupons-nous spécialement des mouvements rapportés à des repères choisis sur le globe terrestre, et voyons ce que les formules précédentes deviennent dans ce cas particulier.

Prenons pour axe des z la verticale du lieu d'où l'on observe (*fig.* 125), pour axe des x la tangente au méridien de ce lieu, dirigée vers le nord, enfin pour axe des y la tangente au parallèle dans le sens du mouvement diurne : nous aurons pour les projections de la rotation terrestre sur ces trois axes

$$p = -n\sin\lambda,$$
$$q = 0,$$
$$r = -n\cos\lambda,$$

λ étant le complément de la latitude du lieu, et n la valeur absolue de la rotation diurne, soit 0,000073.

Les composantes de l'accélération centrifuge composée sont

$$(11)\quad \begin{cases} X = -2n\cos\lambda\dfrac{dy}{dt}, \\ Y = n\left(\cos\lambda\dfrac{dx}{dt} - \sin\lambda\dfrac{dz}{dt}\right), \\ Z = n\sin\lambda\dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Considérons un corps tombant librement dans le vide : l'expérience nous apprend que ce corps suit à peu près dans sa chute la verticale de son point de départ, de sorte qu'on peut, dans une première approximation, négliger les deux composantes horizontales de la vitesse du mobile, devant la composante verticale.

Quant à cette composante verticale, $\frac{dz}{dt}$, elle est négative, puisque notre axe des z est dirigé de bas en haut; donc l'accélération Y est positive, et par suite le corps considéré doit s'écarter de la verticale, du côté de l'orient.

Veut-on pousser l'approximation plus loin; on conclut du fait de la déviation orientale que la vitesse $\frac{dy}{dt}$ est positive; donc l'accélération X est négative, ce qui indique une nouvelle déviation dirigée vers le sud. Celle-ci est du deuxième ordre de petitesse, la déviation orientale étant considérée comme du premier.

DEUXIÈME SECTION.

THÉORIE DES MÉCANISMES OU ÉLÉMENTS DE MACHINES.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES, ET SUR LES TRANSMISSIONS OU TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT.

Toute machine est destinée à accomplir certaines opérations mécaniques, et suppose l'existence de deux choses, indépendamment de la machine elle-même. Ces deux choses sont : 1° une puissance motrice ; 2° un ouvrage à faire. La machine est un intermédiaire qui donne au moteur la facilité d'exécuter l'ouvrage proposé.

Une machine se compose de trois parties principales :

I. Le *récepteur*, qui reçoit directement l'effort du moteur; cet appareil est variable selon la nature de la force disponible : ce sera, par exemple, une manivelle, si l'on emploie la force de l'homme, une roue, s'il s'agit d'utiliser un cours d'eau, un piston pour la tension de la vapeur, etc. La théorie des récepteurs dépend de la combinaison des lois de la Dynamique avec les principes physiques qui sont relatifs aux divers agents capables de servir comme moteurs.

II. L'*outil* ou *opérateur*, qui se trouve en contact immédiat avec la matière à travailler. C'est une lime, un marteau, une pompe, un soufflet, etc. La connaissance pratique des outils est un des objets des études spéciales à chaque profession. La théorie de ces appareils est d'ailleurs fondée, comme celle des récepteurs, sur les principes généraux de la Dynamique rationnelle.

III. Enfin, la *transmission de mouvement*, c'est-à-dire les pièces ou mécanismes interposés entre le récepteur et l'outil, pour que le mouvement du premier détermine sur le second le mouvement qui correspond à l'ouvrage à effectuer.

Notre deuxième Section est consacrée à l'étude géométrique des transmissions. Cette étude, exclusivement basée sur les considérations développées dans la Section précédente, fait partie de la Cinématique, telle que nous l'avons définie d'après l'illustre auteur de l'*Essai sur la Philosophie des Sciences* (¹) : on pourrait l'intituler *Cinématique appliquée*, par opposition à la *Cinématique pure*. De toutes les branches de la Mécanique, il n'en existe pas dont la connaissance approfondie soit plus indispensable aux praticiens.

Elle ne suffit pourtant pas : et nous avons eu déjà occasion de dire qu'on se tromperait grandement si l'on croyait pouvoir inventer et exécuter des combinaisons d'organes, sans se préoccuper des efforts qui doivent s'exercer par l'intermédiaire de ces organes. Mais d'un autre côté les rapports des vitesses de tous les points d'une machine sont du domaine de la Géométrie : *ces rapports ne dépendent en aucune façon des causes appelées à faire naître ou à entretenir le mouvement de la machine*. Il est donc possible de soumettre les mécanismes de transmission à une première étude purement géométrique, dans laquelle il ne sera question, ni de la force motrice, ni de la résistance à vaincre ; mais il est bien entendu que la mécanique des forces pourra toujours opposer son *veto* à la marche, surtout à la marche fructueuse, de tout engin créé sans sa participation.

L'introduction de la théorie des mécanismes dans l'enseignement de l'École Polytechnique date de la première organisation donnée par Monge à l'instruction de cette école.

« On entend, dit Monge (¹), par *éléments des machines*, » les moyens par lesquels on change la direction des mouve- » ments, ceux par lesquels on peut faire naître les uns des » autres, le mouvement progressif en ligne directe, le mou- » vement de rotation, le mouvement alternatif de *va-et-vient*. » On sent que les machines les plus compliquées ne sont que » les résultats des combinaisons de quelques-uns de ces » moyens individuels, dont il faudra faire en sorte que l'énu- » mération soit complète. »

Cette énumération, commencée par Hachette, fut exécutée par Lanz et Bétancour (²) dont le travail, adopté par le conseil de l'École, est bien longtemps demeuré classique. Dans l'exposé que nous allons faire, nous prendrons de préférence pour guide le traité plus récent de M. Robert Willis (³), lequel est certainement l'ouvrage le plus parfait qui ait été publié sur les applications de la Cinématique aux machines. Le livre de M. Willis est également remarquable par la netteté avec laquelle le sujet est circonscrit et traité, par la justesse des idées, et par l'habileté avec laquelle la théorie et la pratique y sont combinées.

On peut aussi consulter avec beaucoup de fruit l'ouvrage de M. Laboulaye, et enfin, au point de vue spécial de notre programme, le *Traité de Cinématique* de M. Belanger. La partie de cet ouvrage qui est relative aux organes de machines est entièrement conforme aux nouveaux programmes rédigés en 1850 par le général Poncelet, et en usage depuis cette époque à l'École Polytechnique.

(¹) « La Cinématique, dit Ampère (p. 51), doit étudier les différents in- » struments à l'aide desquels on peut changer un mouvement en un autre : » en sorte qu'en comprenant, comme c'est l'usage, ces instruments sous le » nom de *machines*, il faudra définir une *machine*, non pas comme on fait » ordinairement, *un instrument à l'aide duquel on peut changer la di- » rection et l'intensité d'une force donnée*, mais bien *un instrument à » l'aide duquel on peut changer la direction et la vitesse d'un mouve- » ment donné*. On rend ainsi cette définition indépendante de la considé- » ration des forces qui agissent sur la machine ; considération qui ne peut » servir qu'à distraire l'attention de celui qui cherche à en comprendre le » mécanisme. Pour se faire une idée nette, par exemple, de l'engrenage à » l'aide duquel l'aiguille des minutes d'une montre fait douze tours, tandis » que l'aiguille des heures n'en fait qu'un, est-ce qu'on a besoin de s'occu- » per de la force qui met la montre en mouvement ? »

(¹) Rapport lu à la Convention nationale, le 3 vendémiaire an III.

(²) *Essai sur la Composition des Machines*, 1808.

(³) *Principles of Mechanism*, 1841.

§ I. — Classification des machines élémentaires, d'après Robert Willis.

Lanz et Bétancour commencent par distinguer les mouvements qu'on emploie dans les arts en trois classes, suivant que ces mouvements sont ou rectilignes, ou circulaires, ou déterminés, d'après des courbes données. Chacun d'eux est d'ailleurs continu ou alternatif (de va-et-vient); et on peut, par conséquent, les combiner deux à deux de quinze manières différentes, ou de vingt et une, si l'on combine chacun de ces mouvements avec lui-même. Toute machine a pour but de changer ou de communiquer un ou plusieurs de ces vingt et un mouvements.

Ce système célèbre a été généralement adopté : il est commode de s'y conformer, quand on se propose seulement de dresser un catalogue, de faire une énumération complète, ainsi que le demandait Monge. Mais, au point de vue d'une étude méthodique, on peut faire à la classification de Lanz et Bétancour les reproches suivants :

I. Le caractère distinctif principal est pris dans la nature du mouvement des pièces en action, mouvement qui est rectiligne ou circulaire, continu ou alternatif : on n'a pas oublié qu'Ampère définit une machine comme servant à modifier *un mouvement donné*.

Mais si l'on se reporte à la théorie géométrique des mouvements simultanés, on reconnaîtra bien vite que les relations établies par un mode de liaison quelconque entre les vitesses des diverses pièces qu'il met en rapport ne dépendent en aucune façon de la nature du mouvement qui anime ces corps. Les engins qui servent à lier deux mouvements continus fonctionnent identiquement de la même manière dans le cas de deux mouvements alternatifs (au moins tant qu'on reste dans le domaine de la Géométrie pure), de sorte qu'il serait assez peu philosophique de les faire figurer deux fois dans une classification.

Il convient donc de changer la définition d'Ampère; et, au lieu de considérer une machine comme ayant pour effet de modifier un mouvement donné, nous dirons :

Une machine, au point de vue cinématique, est un instrument destiné à établir, entre les mouvements simultanés de deux corps, une relation géométrique donnée.

C'est ainsi que la minuterie d'une horloge a pour effet d'obliger les deux aiguilles à tourner dans le même sens l'une que l'autre, avec des vitesses angulaires dans le rapport de douze à un. Et il est clair que cette loi n'est aucunement influencée par la nature du mouvement, lequel peut indifféremment être lent ou rapide, continu ou alternatif.

II. Il y a lieu également de faire assez bon marché de la distinction entre le mouvement circulaire et le mouvement rectiligne : les engins qui se rapportent à ces deux mouvements sont fondés sur les mêmes principes, et se déduisent trop facilement les uns des autres pour qu'il soit convenable et même possible de les étudier séparément (¹). Toutes les différences se réduisent à quelques détails de construction dont l'importance, à notre point de vue, est très minime.

III. Mais une distinction qu'il importe au contraire de bien établir, c'est celle des mouvements susceptibles d'une étendue indéfinie, et des mouvements, rectilignes ou circulaires, dont l'amplitude est géométriquement limitée (²).

La bielle d'un rouet, par exemple, met en relation deux points assujettis chacun à tourner autour d'un axe fixe; mais les mouvements de ces deux points jouissent de propriétés toutes différentes : en effet, les dimensions et les positions relatives des diverses pièces sont telles, que rien n'empêche la roue de faire son tour complet, tandis que l'excursion de la pédale est forcément limitée.

Il suit de là que, la roue étant animée d'un mouvement de rotation continu, le mouvement de l'autre extrémité de la bielle devra changer périodiquement de sens, chaque fois que la pédale atteindra le point le plus haut ou le point le

(¹) A plus forte raison ne consacrerons-nous pas une classe spéciale aux mouvements qui s'effectuent suivant des courbes autres que la ligne droite et le cercle.

(²) Un mouvement rectiligne quelconque aura nécessairement dans la pratique une étendue limitée : nous rangeons dans notre première catégorie tous ceux de ces mouvements dans lesquels la limitation ne résulte pas d'une impossibilité géométrique.

plus bas de sa course. On ne pourra donc pas, dans ce mécanisme, assigner une relation constante entre les sens des mouvements des deux pièces en rapport, comme nous l'avons fait dans le cas des aiguilles d'une horloge.

IV. Ayant adopté pour premier élément de notre classification des organes de machines la permanence ou la périodicité de la liaison entre les *directions* des vitesses, nous nous occuperons en second lieu des relations de *grandeur* de ces mêmes vitesses : c'est-à-dire que nous séparerons les mécanismes dans lesquels le rapport des vitesses est constant, des combinaisons à rapport variable. Nous obtiendrons ainsi les trois classes suivantes :

MOUVEMENTS pouvant continuer indéfiniment dans le même sens.		MOUVEMENTS dont l'étendue est limitée, et tels que le sens de la vitesse d'une des pièces au moins doive changer périodiquement.
CLASSE A.	CLASSE B.	CLASSE C.
Rapport des vitesses constant.	Rapport des vitesses variable.	Rapport des vitesses constant ou variable (¹).

V. Enfin, pour subdiviser nos classes, nous aurons égard à la nature de l'agent qui établit la transmission du mouvement; cette considération nous conduit à constituer trois genres, qui se retrouvent dans chacune des trois classes :

PREMIER GENRE : *Communication du mouvement par contact immédiat;*

DEUXIÈME GENRE : *Communication par l'intermédiaire d'un lien rigide;*

TROISIÈME GENRE : *Communication par le moyen d'un lien flexible.*

Voici le résumé de notre classification, laquelle n'est autre chose que celle de Willis, un peu simplifiée :

(¹) Il n'y a pas lieu de séparer en deux classes les mécanismes à mouvement d'étendue limitée : ceux de ces mécanismes où le rapport des vitesses est constant sont trop rares pour qu'on puisse en former une classe distincte.

TABLEAU SYNOPTIQUE

DES

ORGANES ÉLÉMENTAIRES DE TRANSFORMATION DE MOUVEMENT.

	SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT.		SENS DE LA TRANSMISSION PÉRIODIQUEMENT VARIABLE.
	CLASSE A. Rapport des vitesses *constant.*	CLASSE B. Rapport des vitesses *variable.*	CLASSE C. Rapport des vitesses *constant ou variable.*
Iᵉʳ GENRE. *Pièces en contact immédiat.*	Cylindres et cônes de friction. Hyperboloïdes. Joint universel sphérique. Engrenages divers. Crémaillères. Cames et pilons. Vis et écrous. Vis sans fin.	Cames, excentriques et courbes diverses. Vis variables. Mouvements intermittents. Roues de Rœmer et de Huygens.	Roues à double denture tronquée. Crémaillères doubles oscillantes. Échappements divers. Cames, excentriques, etc.
IIᵉ GENRE. *Emploi d'un lien rigide.*	Accouplements de roues. Renvois de sonnettes. Tiges et varlets.	Systèmes articulés à mouvement continu. Joint de Cardan ou joint universel.	Cliquets, roues à rochet, déclics. Bielles et manivelles. Parallélogramme de Watt.
IIIᵉ GENRE. *Emploi d'un lien flexible.*	Poulies et tambours pour cordes, chaînes et courroies. Treuils et cabestans. Poulies de renvoi, de tension. Moufles et palans.	Poulies et tambours à section non circulaire. Bobines pour câbles plats. Fusées des montres et chronomètres.	Poulies spéciales avec tendeur oscillant.

Avant de commencer la description des mécanismes indiqués dans ce Tableau, disons quelques mots des pièces accessoires qui servent à assujettir les organes mobiles aux supports fixes, de manière à assurer la direction du mouvement de ces organes.

§ II. — Organes propres a assurer la direction du mouvement circulaire ou rectiligne de certaines pièces.

1° Guides du mouvement circulaire.

Les pièces qui doivent être animées d'un mouvement de rotation sont ordinairement montées sur un *arbre*, qui se termine à ses extrémités par des parties cylindriques tournant dans des appuis fixes.

Tourillons et paliers. — Dans le cas où l'axe de rotation est horizontal, les extrémités cylindriques de l'arbre se nomment *tourillons*, et les supports fixes des tourillons prennent le nom de *paliers*.

Les tourillons sont des cylindres exactement tournés, dont le diamètre est généralement plus petit que celui de l'arbre proprement dit. Quelquefois ces tourillons font corps avec l'arbre; ils peuvent aussi être rapportés; l'un d'eux porte un *épaulement* ou renflement destiné à empêcher les déplacements du corps tournant, dans le sens de la longueur de l'axe. L'épaulement se raccorde par un *congé* avec la surface du tourillon.

La partie principale d'un palier (*fig.* 126 et 127) est le *coussinet*, qui se trouve en contact immédiat avec le tourillon. Le coussinet est formé de deux *coquilles*, laissant entre elles un léger intervalle quand elles sont en place, afin que l'usure de la surface intérieure ne détruise pas le contact de celle-ci avec le tourillon. Un intervalle semblable est ménagé entre le corps du palier, et le *chapeau* qui s'applique sur la coquille supérieure. Des boulons établissent un serrage convenable.

La mise en place du palier doit être faite avec une grande précision, afin de ne pas fausser l'arbre, surtout quand celui-ci a une grande longueur. Dans le but de faciliter l'ajustage, on fait porter le palier proprement dit sur une pièce intermédiaire appelée *semelle* ou *patin* (*fig.* 126), solidement reliée par de longs boulons à un fort massif de maçonnerie. Le palier est à son tour boulonné sur la semelle; mais les trous de ces derniers boulons sont ovales, ce qui permet de rectifier la position du palier, en cas de petits mouvements dans les maçonneries.

Nous n'avons encore rien dit de la question du graissage: il n'en est pourtant pas qui mérite à un plus haut degré l'attention du constructeur chargé d'installer les supports d'un arbre tournant. Dans les paliers ordinaires (*fig.* 126), le chapeau porte un godet qu'on maintient constamment plein de graisse. Cette graisse fond en partie par suite de l'échauffement du coussinet, traverse la coquille supérieure par un trou ménagé à cet effet, et se répand de là par des rainures hélicoïdes sur toute la surface intérieure de la coquille.

Ce système est assez imparfait: la graisse ne vient rafraîchir les surfaces que lorsqu'il s'est produit un léger grippement, ce qui est toujours fâcheux; et il est infiniment préférable d'entretenir les contacts constamment lubrifiés par un courant d'huile continu, qui s'oppose à tout échauffement.

Dans le palier graisseur Decoster (*fig.* 127), l'huile contenue dans un réservoir inférieur est puisée par un disque d'acier fixé au tourillon; elle retombe dans le réservoir après avoir rempli son office. Le tout est parfaitement fermé, de sorte que l'huile ne s'altère pas et n'a pas besoin d'être renouvelée, sinon à de très longs intervalles.

Dans certains cas exceptionnels, les tourillons reposent sur des galets ou roulettes, dont nous verrons l'utilité dans la théorie du frottement (quatrième Section). On peut citer dans ce genre la suspension de la grosse cloche de la cathédrale de Metz; les galets sont réduits à de simples secteurs, qui correspondent à l'amplitude des oscillations de la cloche.

Dans d'autres cas, au contraire, on simplifie les dispositions habituelles. C'est ainsi qu'on termine les arbres des tours, en guise de tourillons, par deux pointes en fer, lesquelles pénètrent dans des trous coniques pratiqués dans des plaques de fer fixes.

Les poulies sont percées d'un trou cylindrique nommé *œil*, que traverse à frottement doux un essieu fixe [1]. Les roues des voitures ordinaires présentent la même disposition [2]. Si le trou cylindrique est un peu long relativement à l'épaisseur de la roue ou de la poulie, l'espèce de moyeu où il est pratiqué s'appelle *manchon* ou *canon*. L'arbre porte des épaulements qui empêchent le manchon de glisser parallèlement à l'axe.

Crapaudines et pivots. — Les arbres verticaux se terminent à leur partie inférieure par une sorte de tourillon appelé *pivot* (*fig.* 128), qui tourne dans une pièce fixe nommée *crapaudine*.

La crapaudine la plus simple se compose d'un collet en bronze, qui maintient le pivot dans le sens horizontal, et d'un *grain* d'acier qui supporte tout le système. Divers agencements permettent de soulever le grain au fur et à mesure de l'usure, afin de maintenir l'arbre au même niveau.

Outre la crapaudine, il y a généralement, à une certaine hauteur, un *collier* destiné à assurer la verticalité de l'arbre : le collier fait ainsi fonction de deuxième palier. L'arbre est, en ce point, parfaitement arrondi. Quand la pression qui s'exerce entre l'arbre et le collier est considérable, comme dans certaines espèces de grues, on interpose entre l'arbre et son appui fixe un système de galets, dont les axes sont fixés à une couronne mobile (*fig.* 129) : ces galets roulent à la fois sur la circonférence de l'arbre (A), et sur le collier fixe (B).

Rendons-nous compte du mouvement de ces galets, considéré, soit au point de vue absolu, soit relativement à l'arbre (A). Désignons par R et Ω le rayon et la vitesse angulaire de l'arbre, par r le rayon d'un galet : le mouvement absolu de ce galet est une rotation autour du centre instantané B, rotation dont je représenterai la vitesse angulaire par ω.

Pour déterminer ω, on s'appuie sur ce que le galet est

[1] Souvent l'essieu d'une poulie porte d'autres roues : il tourne alors d'un mouvement tout à fait indépendant de celui de la poulie. Nous verrons plus loin des exemples de pareils agencements.

[2] On dit dans ce cas que la roue ou la poulie est *folle* sur son arbre; une roue est *calée* sur son arbre, quand elle ne peut pas tourner indépendamment de celui-ci.

supposé rouler sur l'arbre mobile, en A, d'où il suit qu'en ce point les deux solides en contact sont animés de vitesses égales : on doit donc avoir

$$2r\omega = R\Omega, \qquad \omega = \frac{R\Omega}{2r}.$$

Ω étant donnée, cette équation fait connaître la vitesse instantanée ω.

La couronne qui porte les axes des galets n'est pas fixe [1] : elle a besoin d'être soutenue inférieurement d'une manière qui ne gêne pas le mouvement qu'elle est obligée de prendre autour de son centre. On dispose à cet effet une surface plane reliée au bâti de la machine, et, pour éviter le frottement de la face inférieure de la chape contre cette surface, on emploie un système d'autres galets à axes horizontaux, sur lesquels s'appuie tout cet appareil.

Plaques tournantes. — Les plaques tournantes des gares de chemins de fer sont supportées par un pivot central qui tourne dans une crapaudine fixe. Il n'y a pas de collier supérieur, vu le peu de longueur de l'arbre; mais dans la crainte de voir la fonte se briser sous la charge qu'elle est destinée à supporter, on soutient la plaque, près de sa circonférence extérieure, au moyen de galets dont les axes sont réunis par une couronne mobile, comme dans le cas précédent.

Si l'on faisait ces galets cylindriques, on n'atteindrait pas complètement le but qu'on se propose, à savoir : la suppression du glissement. En effet, les diverses sections droites des galets, qui sont toutes égales dans l'hypothèse d'une forme cylindrique, devraient en vertu du mouvement circulaire se développer sur des circonférences inégales de la plaque mo-

[1] En effet, il résulte de ce qui précède que la vitesse du centre C d'une roulette est égale à ωr; cette quantité, divisée par le rayon de la couronne, donne la vitesse angulaire, Ω', de celle-ci :

$$\Omega' = \frac{r\omega}{R+r} = \frac{R\Omega}{2(R+r)}.$$

La vitesse angulaire de la couronne est à peu près la moitié de la vitesse de l'arbre, car le rayon de celui-ci est toujours assez grand relativement au rayon des galets.

bile et de l'appui fixe : il y aurait donc nécessairement glissement à la fois en haut et en bas. Pour éviter cet inconvénient, on emploie des galets coniques (*fig.* 130) ayant leur sommet sur l'axe de rotation : ces galets roulent, d'une part, sur un cône fixe dont le sommet est au même point de l'axe, et d'autre part sur la partie inférieure de la plaque, à laquelle on donne aussi la forme conique ([1]) avec le même sommet.

On trouve le rapport de la vitesse des galets à celle de la plaque, en exprimant que la vitesse du point B, considéré comme appartenant au galet, est égale à la vitesse du point correspondant de la plaque : on a

$$R\Omega = 2r\omega,$$

en conservant les notations du calcul précédent. Dans le cas actuel, la vitesse angulaire de la chape mobile est exactement

$$\Omega' = \frac{\Omega}{2}.$$

La couronne des galets fait un demi-tour pendant que la plaque fait un tour complet.

On met sous les grandes plaques pour machine et tender deux et jusqu'à trois couronnes, pareilles à celles dont nous venons d'indiquer le principe.

Au contraire, depuis quelque temps, en Angleterre et en Belgique, on supprime, précisément pour les grandes plaques, tout l'attirail des galets-supports. On ne peut alors conserver les plaques de fonte, qui n'offriraient pas assez de garanties, et l'on fait porter les rails sur des longerons en fer d'une grande rigidité. La plaque au repos est calée. Quand elle doit servir, on place la machine autant que possible en équilibre sur le pivot, on décale, et la plaque oscillant librement sous la charge oppose une résistance beaucoup moindre que celle des plaques à galets.

([1]) Dans l'application de ce système au grand pont tournant de la Penfeld, à Brest, la face inférieure de la plaque mobile est plane. Cette disposition est un cas particulier de la précédente : rien n'empêche en effet de placer le sommet commun aux trois cônes, sommet dont la position est arbitraire, de manière à transformer le cône supérieur ou le cône inférieur en un plan.

Articulations mobiles à charnière. — Il arrive fréquemment que deux corps réunis par une articulation, ou charnière, sont tous les deux en mouvement : la liaison des deux pièces s'effectue, tout comme si l'une d'elles était fixe, au moyen d'un tourillon qui tourne entre deux coquilles soigneusement polies et graissées. Quant aux pièces boulonnées dont la fonction est de maintenir le coussinet, dans les appareils fixes, elles sont remplacées par diverses dispositions plus ou moins analogues à la suivante, qui se rapporte à la bielle d'une machine de Watt.

Le coussinet mobile est fixé à la tête de bielle par une *chape* (*fig.* 131 et 132), qui embrasse les deux coquilles et les tient appliquées sur l'embase terminale de la bielle; on produit le serrage au moyen de deux coins inverses nommés *clef* et *contre-clef à talon*, les talons de la contre-clef empêchant les branches de la chape de s'écarter ([1]).

Quand la bielle est en bois, la clef doit être renfermée entre deux contre-clavettes; on empêche ainsi qu'elle ne déchire le bois pendant le serrage.

2° Guides du mouvement rectiligne.

Il existe un grand nombre de systèmes ayant pour effet d'obliger un point d'une pièce mobile à suivre une trajectoire rectiligne. Nous nous bornerons à énumérer brièvement les dispositions les plus employées :

1° *Œilletons, douilles ou patins, glissant le long de tiges fixes* (*fig.* 133, 134 et 135).

La *fig.* 135 est le plan d'un puits guidé, servant à l'extraction de la houille.

On s'est longtemps contenté, pour amener au jour les produits d'une exploitation souterraine, du procédé primitif qui sert à tirer de l'eau d'un puits : c'est-à-dire qu'on plaçait simplement le charbon ou les minerais dans un seau suspendu à une corde. Ce procédé ne comportait pas de grandes vitesses; de plus, il était assez dangereux, appliqué au transport des

([1]) On distingue deux variétés de têtes de bielles, l'une *à chape mobile* (*fig.* 131), l'autre *à chape fixe* (*fig.* 132) : la figure en fait suffisamment comprendre les différences.

hommes. Aujourd'hui les bennes, chariots ou wagons pleins de charbon sont reçus dans des cages guidées par des longrines en bois, régnant dans toute la longueur du puits. On peut imprimer à ces cages la vitesse que l'on veut sans avoir d'accidents à redouter. Les guides se font aussi en fil de fer.

La *fig.* 133 représente le châssis d'une scierie à lames verticales.

Citons enfin, comme application du même principe, le guidage du piston d'une machine à vapeur horizontale. La tige du piston est terminée par une pièce appelée *coquille*, sur laquelle vient s'articuler la bielle (*Pl. XV, fig.* 136). Deux *glissières* sont disposées de part et d'autre de la tige mobile, qui s'appuie sur elles par les deux larges patins de la coquille; un godet de graissage complète le système. La bielle est faite en forme de fourche quand les glissières sont dans le plan vertical de la tige, ainsi que le suppose la figure.

2° *Galets à gorges roulant entre deux guides arrondis* (*Pl. XIV, fig.* 138). Dans les machines verticales de Maudslay, on emploie une disposition analogue à la précédente; mais la coquille à patins est remplacée par un galet, dans le but d'éviter le glissement. Le galet roule alternativement sur l'un ou l'autre des deux guides, selon que la tige qu'il doit diriger tend à s'écarter à droite ou à gauche.

L'inconvénient de ce système, c'est qu'au moment où le changement de sens va se produire, il y a presque toujours glissement; la moindre irrégularité dans les galets aggrave cet effet, et on obtient rapidement des méplats qui ne tardent pas à s'opposer complètement au roulement. Cette disposition n'est donc point à recommander; et, puisqu'il est pour ainsi dire impossible d'éviter le glissement, mieux vaut adopter de larges patins bien graissés et fonctionnant régulièrement que les galets à mouvement indécis.

Au contraire, on emploie avantageusement, pour supporter les meubles, des galets cylindriques mobiles dans des rainures fixes (*fig.* 139).

3° *Tiges mobiles dans des douilles fixes.* — Exemples : Tige du piston d'une pompe à incendie (*fig.* 137); prisons des bocards (*Pl. XVII, fig.* 170), etc.

4° *Rainures et languettes* (*fig.* 140).

5° *Roues coniques roulant sur des rails à champignons* (*fig.* 141). Dans le matériel ordinaire de nos chemins de fer, les deux roues d'une même paire sont calées sur leur essieu commun, et sont par conséquent solidaires l'une de l'autre [1]. Les jantes ont la forme d'un tronc de cône dont le sommet est en dehors de la voie; et les rails sont inclinés vers l'intérieur de celle-ci, de manière à présenter une surface de roulement tangente à la surface de la roue.

Voici maintenant comment ce matériel fonctionne.

Quand un wagon parcourt régulièrement une portion de voie en alignement droit, ce qui est le cas normal, les roues sont symétriquement placées par rapport à l'axe de la voie, et le roulement s'effectue de part et d'autre sur des circonférences égales. L'une des roues, par l'effet d'une circonstance quelconque, présente-t-elle une tendance à sortir des rails : dès qu'elle commence à se porter vers l'extérieur, sa circonférence de roulement devient plus grande que celle de la roue solidaire. Or, comme la vitesse angulaire des deux roues calées sur un essieu est la même, la roue extérieure prend de l'avance et ce mouvement la ramène du côté de l'intérieur de la voie.

Dans une courbe, au contraire, le wagon s'écartera légèrement de l'axe de la voie, et les deux circonférences roulantes seront inégales, de manière à racheter le plus grand développement du rail extérieur. On voit que l'angle du cône des jantes est intimement lié à la grandeur du rayon des courbes : la conicité est de $\frac{1}{20}$ sur nos chemins ordinaires à grandes courbes; elle est de $\frac{1}{5}$ sur les chemins américains qui admettent des courbes de petit rayon.

Le chemin de fer de Sceaux admet également de fortes courbes; mais comme le matériel articulé, en usage sur cette

[1] Les essieux des roues tournent dans des boîtes à graisse ou à huile, qui remplacent les paliers des arbres ordinaires. La liaison de ces sortes de paliers au corps du wagon n'est pas rigide; elle a lieu par l'intermédiaire des ressorts de suspension, qui sont fixés aux boîtes à graisse, et sur lesquels repose le châssis. Ce même châssis porte des plaques de tôle verticales, dites *plaques de garde*, dans lesquelles sont découpées des entailles dont la fonction est de maintenir les boîtes à graisse dans le sens horizontal, de manière à assurer la perpendicularité des essieux à la voie; elles laissent un petit jeu pour le passage des courbes.

ligne, comporte un système de guidage spécial, les roues sont indépendantes et cylindriques, ce qui présente un certain avantage au point de vue de l'usure des bandages.

J'ai omis à dessein de parler jusqu'ici du rebord intérieur ou *mentonnet* des roues, lequel ne joue, comme on l'a vu, aucun rôle dans le guidage normal, et n'intervient que dans les cas exceptionnels. Dans la position moyenne du wagon, et pour que la conicité puisse produire son effet, il existe un centimètre de jeu entre le mentonnet et le boudin du rail.

6° *Chariots des mull-jenny* (*Pl. XIV, fig.* 142). — Dans les métiers à filer dits *mull-jenny*, le chariot qui porte les fuseaux, et dont la longueur est de 6^m à 9^m, doit avoir sur son chemin de fer un mouvement parfaitement rectiligne, ce qui nécessite un système de guidage susceptible d'une grande précision. « Après avoir épuisé les moyens les plus coûteux et les plus compliqués », est-il dit dans l'*Essai sur la composition des machines*, « les Anglais ont enfin résolu le problème d'une manière très simple, et avec une exactitude qui surpasse tout ce qu'on pouvait attendre ». Deux cordes tendues dans une direction parallèle à celle du mouvement sont enroulées autour de deux poulies fixées au chariot, de manière à décrire chacune un Z : la tension modérée des cordes croîtrait rapidement par la moindre obliquité, et la direction rectiligne du mouvement est parfaitement assurée.

7° *Parallélogramme articulé de Watt* (*fig.* 143). — L'illustre inventeur auquel l'industrie est redevable de la machine à vapeur sous sa forme actuelle a également résolu d'une manière éminemment pratique le problème du guidage en ligne droite de la tige du piston de sa machine.

Il est juste de dire que le parallélogramme articulé de Watt, dont nous verrons plus tard la théorie géométrique, ne donne pas à l'extrémité de la tige un mouvement rigoureusement rectiligne; mais il rachète cet inconvénient par de précieux avantages, et d'ailleurs la déviation est tout à fait insignifiante, quand on emploie des dispositions convenables.

CHAPITRE II.

ORGANES DE MACHINES.

CLASSE A. — SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT. — RAPPORT DES VITESSES CONSTANT.

La classe à laquelle est consacré ce Chapitre comprend les organes de transmission qui sont de beaucoup les plus usuels (¹), ceux dont il est facile, en général, de faire dériver presque tous les mécanismes employés dans les arts et dans l'industrie.

Ainsi que nous l'avons dit, nous considérerons plus spécialement les cas où l'on a affaire à deux corps assujettis à tourner chacun autour d'un axe fixe; et nous examinerons successivement les trois modes de liaison, qui ont servi de base à notre division en trois genres.

§ III. — Premier genre. — Transmission du mouvement par contact.

Pour mettre un peu d'ordre dans l'étude des engins qui se rapportent à ce paragraphe, il convient de distinguer trois cas : selon que les axes des deux solides en contact sont *parallèles*, *concourants*, ou enfin *non situés dans un même plan*.

(¹) Nous verrons que les mouvements continus doivent toujours être, autant que possible, uniformes; les organes de la classe A sont donc ceux qu'il y a lieu de préférer, pour relier l'un à l'autre deux mouvements continus. L'uniformité du mouvement serait au contraire très nuisible dans le cas des mouvements alternatifs, où les organes à recommander sont ceux dans lesquels la vitesse diminue régulièrement jusqu'au moment du changement de sens. On évite ainsi les à-coups et les chocs que causerait inévitablement ce changement, si les corps étaient à ce moment animés d'une vitesse un peu considérable.

1° Axes parallèles. — Engrenages cylindriques.

La Géométrie nous enseigne qu'il y a une infinité de manières d'établir un rapport de vitesses constant entre deux axes fixes et parallèles, au moyen de deux cames liées à ces axes, et maintenues d'ailleurs appuyées l'une sur l'autre.

Cylindres de friction. — Le problème devient déterminé, si l'on s'impose la condition que le mouvement relatif soit un roulement simple. Nous avons démontré que les surfaces qui répondent à la question ainsi particularisée sont des cylindres circulaires centrés sur les axes fixes (p. 155). Les rayons des bases de ces cylindres satisfont à la relation

$$\omega R = \omega_1 R_1,$$

laquelle établit l'égalité entre les vitesses des deux solides, mesurées à la circonférence de contact. On voit que :

Dans la transmission par cylindres de friction, les vitesses angulaires sont en raison inverse des rayons des cylindres.

Examinons la solution précédente au point de vue pratique. Cette solution présente ceci de particulier, que chacune des surfaces n'est pas nécessairement, géométriquement obligée de chasser l'autre devant elle pour se faire place : rien n'empêche d'une manière absolue le cylindre moteur de glisser sur le deuxième sans le mettre en mouvement.

Ce qui s'oppose à cet effet, c'est le frottement qui se développerait aux points de contact de la surface mobile avec celle qui resterait fixe. Quand ce frottement est plus considérable que la résistance appliquée à l'arbre correspondant, l'*adhérence* des deux corps détermine la transmission du mouvement : un accroissement de résistance la ferait instantanément cesser (¹).

On emploie divers artifices pour s'opposer au glissement. Souvent la surface de l'un des cylindres est recouverte d'un cuir rugueux, dont l'élasticité maintient la pression malgré les

(¹) On utilise cette propriété dans le cas où la résistance peut accidentellement devenir énorme, ce qui occasionnerait la rupture de quelque pièce si la transmission était obligatoire. L'inconvénient est beaucoup moindre quand les corps ont la faculté de glisser l'un sur l'autre.

inégalités inévitables dans la forme des surfaces de contact. D'autres fois, l'un des arbres n'est pas absolument fixe (*fig.* 144), et il est appuyé sur l'autre par un ressort ou par un poids (¹).

Quoi qu'il en soit, l'emploi des cylindres de friction est limité à un petit nombre de cas tout à fait spéciaux. Il est impossible, avec ce système, de compter sur l'exactitude du rapport des vitesses, à cause des glissements qui peuvent se produire à chaque instant, sans que le mécanicien en soit averti. De plus, lorsque l'appareil doit supporter de grands efforts, il faudrait une pression considérable pour déterminer une adhérence suffisante; et les frottements qui se produiraient sur les tourillons des arbres compenseraient et au delà l'avantage que l'on tire de la suppression du frottement au point de contact.

Principe des engrenages. — On obvie à cet inconvénient en armant chacun des deux cylindres de saillies ou *dents*, qui pénètrent dans des creux ménagés à cet effet. Il est à remarquer qu'avec cette disposition le mouvement relatif ne peut plus être un roulement simple : en effet, les surfaces en contact sont maintenant celles qui sont formées par la suite des saillies et des creux, sous lesquels ont disparu les cylindres primitifs. Mais en altérant ainsi les lois géométriques de la transmission du mouvement, il importe du moins de maintenir rigoureusement constant le rapport des vitesses angulaires des deux arbres.

Pour cela, on s'impose d'abord la condition que les dents soient égales et également espacées sur les deux roues, de manière que deux arcs égaux contiennent le même nombre de dents. On cherche un arc qui soit contenu un nombre exact de fois dans chacune des circonférences en contact : cet arc est ce qu'on appelle le *pas;* le pas est ensuite divisé en

(¹) Dans les tire-sacs des moulins à blé (*fig.* 145), le cylindre B est maintenu à une petite distance du cylindre A, lequel est mû par la machine et tourne d'une manière continue. Au moyen d'un effort convenable exercé en E, on appuie le cylindre B contre la poulie motrice : le mouvement se transmet jusqu'au moment où, le sac étant arrivé à la hauteur voulue, on lâche la corde qui établissait la pression.

deux parties, égales ou inégales, correspondant, l'une à la saillie de la dent, l'autre au creux qui doit donner passage à la dent opposée. Quant aux circonférences qui servent pour ainsi dire de base à la denture, il n'en reste pas de traces matérielles, une fois l'engrenage taillé; elles jouent néanmoins le principal rôle dans la théorie des roues dentées : on les désigne sous le nom de *circonférences primitives*.

Pour que deux roues engrènent régulièrement, il est tout à fait indispensable que les deux dentures aient le même pas. Sous cette condition, et quelle que soit la forme des dents, la transmission sera périodiquement uniforme, puisque, chaque fois que le point de contact aura parcouru sur chacune des circonférences primitives un espace égal au pas commun, les deux roues se retrouveront dans la même position relative.

Mais on ne se contente pas de cette régularité périodique; et l'on a soin de déterminer la forme de chaque paire de dents en conformité avec les règles établies dans la Cinématique pure, de manière que, pendant toute la durée de l'action individuelle de la paire, le rapport des vitesses reste égal à l'inverse du rapport des rayons des circonférences primitives. On emploie d'ailleurs presque toujours, pour limiter les dents des engrenages à axes parallèles, des surfaces cylindriques, dont les génératrices sont parallèles aux axes de rotation : de là la dénomination d'*engrenages cylindriques*.

La première chose à faire pour établir un engrenage entre deux axes parallèles C, C_1 (*fig.* 146), c'est de déterminer les circonférences primitives : les rayons de ces circonférences sont en raison inverse des vitesses qu'on veut obtenir.

Or le problème de Géométrie consistant à partager la longueur CC_1 en deux segments qui soient dans un rapport donné comporte deux solutions ; l'une donne le point A situé entre les deux centres, l'autre le point A' situé au dehors.

Si l'on adopte le point A comme point de contact des circonférences primitives, ces circonférences sont extérieures et leurs rotations sont de sens contraire; si l'on choisit le point A', l'une des circonférences est intérieure à l'autre et les rotations sont de même signe. C'est là ce qui distingue les *engrenages extérieurs* des *engrenages intérieurs* : on emploie les uns ou les autres, selon le sens du mouvement à produire.

(*a*). *Engrenages cylindriques extérieurs.*

Une fois les circonférences primitives déterminées, il faut s'occuper de chercher, pour les surfaces des dents, des profils qui satisfassent à la fois aux convenances pratiques et aux conditions géométriques du problème. Les solutions adoptées par les constructeurs se rapportent à cinq types, dont nous allons faire connaître les propriétés les plus essentielles.

Première solution pratique. — *Engrenage à fuseaux et lanterne.* — Soit AB (*fig.* 147) une portion d'épicycloïde décrite par un point de la circonférence (C_1), roulant sur la circonférence (C). Concevons en A un fuseau, ou cylindre de diamètre très petit, perpendiculaire au plan des deux cercles primitifs, et fixé à une pièce qui tourne autour de C_1. Fixons de même la courbe AB au point C, et donnons-lui un mouvement de rotation autour de ce point comme centre ; le fuseau, qui fait obstacle à ce mouvement, sera contraint de se déplacer pour laisser passer la dent AB. D'ailleurs, en vertu de sa liaison au centre C_1, le fuseau cédera en décrivant une circonférence; et il est facile de voir que la vitesse angulaire de son mouvement sera dans un rapport constant avec la vitesse de la roue (C).

En effet, faisons tourner cette roue d'un angle ACA', l'épicycloïde AB se trouvera transportée en A'B'; et le fuseau qui doit, sans s'écarter du centre C_1, rester appuyé sur l'épicycloïde, occupera la position A_1. Or, d'après la définition des épicycloïdes, les arcs AA_1, AA' sont égaux.

Donc le mouvement produit par l'action de la courbe sur le fuseau est exactement celui qu'on obtiendrait en considérant les cylindres primitifs comme deux cylindres de friction, les sections droites de ces cylindres se développant sans glissement l'une sur l'autre. On vérifie d'ailleurs que la normale commune aux surfaces de la dent et du fuseau ne cesse pas, pendant le mouvement, de passer par le point A, ce qui est, comme nous le savons, la condition de l'invariabilité du rapport des vitesses.

Quand l'arc parcouru sur chacune des circonférences primitives est égal à ce que nous avons appelé le *pas*, on arrête la courbe conductrice, et on place comme précédemment, sur la ligne des centres, une nouvelle épicycloïde, ainsi qu'un deuxième fuseau : on pourvoit de la sorte à la continuation du mouvement pendant un temps qui correspond encore au parcours d'un pas, et ainsi de suite. Comme le pas de l'engrenage est une partie aliquote de l'une et de l'autre des circonférences primitives, on finira par revenir au point de départ, et l'épure sera terminée. La face postérieure de chaque dent peut être taillée suivant un profil quelconque : il est en général convenable d'employer une courbe symétrique de la première (*fig.* 148), afin que la roue (C) puisse conduire la roue (C_1) indifféremment dans les deux sens.

Le fuseau de diamètre nul que nous avons supposé pour notre explication n'est évidemment pas admissible dans la pratique : en réalité, ce fuseau est un cylindre de petit rayon, tel que $A_1 a$ (*fig.* 149). Quant à la courbe conductrice, elle est parallèle à l'épicycloïde qui correspondait au fuseau réduit à son axe, et se construit en portant sur les normales à cette courbe une longueur égale au rayon du fuseau : le lieu géométrique des points ainsi obtenus est l'enveloppe des positions du petit cercle ($A_1 a$), dont le centre parcourt l'épicycloïde A'B (¹).

On complète le tracé de la roue (C), en disposant entre deux dents consécutives une entaille suffisante pour loger le fuseau quand son centre atteint la circonférence primitive, et en ménageant entre les dents et les fuseaux un *jeu*, qui sera d'autant plus petit que le mécanisme devra être exécuté avec une plus grande précision (²).

C'est ordinairement la plus petite des deux roues qui porte les fuseaux : elle est connue sous le nom de *lanterne*, et se compose simplement de deux tourteaux montés sur un axe carré, dans lesquels viennent s'engager les fuseaux en fonte. Ceux-ci sont souvent rendus mobiles autour de leurs axes,

(¹) La portion de cette enveloppe qui correspond au saillant B affecte la forme représentée *fig.* 150. Pratiquement, la dent est limitée à l'arête *b*, qu'on a même soin d'arrondir légèrement ; il suit de là que la courbe conductrice cesse d'être en contact avec le fuseau, un peu avant que le centre de celui-ci soit parvenu au point B.

(²) Le diamètre du fuseau est généralement égal à la largeur de la dent, et le jeu est le dixième du pas.

afin de régulariser l'usure; seulement alors ils acquièrent du jeu à la longue, ce qui occasionne des secousses. Les dents ou *alluchons* sont en bois dur et s'assemblent à clavettes dans la jante de la grande roue. Les engrenages à lanterne, fort employés dans l'ancienne mécanique, sont à peu près abandonnés aujourd'hui.

Continuons à étudier les propriétés géométriques de ce système.

Quand on réduit, comme premier aperçu, la section droite du fuseau à un point, le contact avec l'épicycloïde conductrice (*fig.* 147) commence à l'instant du passage du fuseau sur la ligne des centres, et a lieu exclusivement après. Si la lanterne conduisait la roue, le contact, au contraire, aurait lieu exclusivement avant le passage sur la ligne des centres.

La trajectoire relative complète du fuseau, c'est-à-dire l'épicycloïde engendrée par le point A, comprend, à dire vrai, deux branches symétriques (*fig.* 151), raccordées par un rebroussement situé sur la circonférence (C). Géométriquement, la courbe BAB' serait propre à conduire le fuseau de part et d'autre de la ligne des centres; mais il est évident que cette disposition n'est pas réalisable : le profil d'une dent ne saurait présenter un rebroussement, et la partie concave de ce profil doit être rejetée. L'engrenage n'aura donc jamais lieu que d'un côté de la ligne des centres : *après*, si la lanterne est conduite; *avant*, si elle conduit.

Or le raisonnement et l'expérience prouvent que les frottements qui se développent entre deux surfaces tournant autour de deux axes fixes sont beaucoup moins durs, lorsque la ligne des centres est franchie, qu'avant l'instant où le point de tangence atteint cette ligne : on se gardera donc bien de faire jamais conduire une roue par une lanterne, en raison de la propriété que nous venons de signaler. En d'autres termes, l'engrenage à fuseaux n'est pas *réciproque*.

Il y a quelques modifications à faire à l'analyse précédente, quand on rétablit le fuseau de dimensions finies; mais il est facile de voir que notre conclusion subsiste.

En effet, la courbe $B_1A_1B'_1$ (*fig.* 152), qu'on substitue à l'épicycloïde, se compose comme celle-ci de deux branches à rebroussement, dont une seule, A_1B_1, est utile.

Les points de rebroussement des deux courbes ne correspondent pas à une même position du fuseau, et au moment où le centre A de celui-ci est sur la ligne des centres, le contact a encore lieu sur la branche parasite, en a. Prenons à partir du point A, sur la développée de l'épicycloïde BAB' (laquelle est aussi la développée de la courbe $B_1A_1B'_1$), un arc égal au rayon Aa du fuseau, nous obtiendrons le point A_1, où commence le contact effectif : la position correspondante du centre du fuseau est en a_1, et celle du point de tangence des circonférences primitives, en α, sur la normale de contact A_1a_1.

Cette construction montre que l'instant où la dent et le fuseau entrent en prise, instant déterminé par le passage du point α sur la ligne des centres, précède un peu l'arrivée du point de contact des surfaces sur cette même ligne. Quoi qu'il en soit, l'engrenage a toujours lieu principalement après la ligne des centres, et la seule disposition admissible est celle dans laquelle la roue commande la lanterne.

DEUXIÈME SOLUTION PRATIQUE. — *Engrenage à flancs rectilignes.* — Les engrenages à flancs sont ceux qu'on emploie le plus fréquemment aujourd'hui; ils jouissent de la propriété d'être réciproques, et leur tracé résulte des considérations suivantes.

Décrivons une circonférence sur le rayon AC_1 comme diamètre (*fig.* 153); faisons rouler cette circonférence sur le cercle (C), et prenons l'épicycloïde AB pour profil conducteur.

Dans ce système, la plus petite des deux roues prend le nom de *pignon*; elle a la forme d'un plateau circulaire, entaillé de manière à présenter une surface plane C_1A qui s'appuie sur l'épicycloïde AB. La dent conduite affecte ainsi un profil rectiligne, au lieu du profil circulaire caractéristique du tracé précédent; et nous allons montrer que le rayon ou *flanc* C_1A, combiné avec la *face* AB, fournit, comme la combinaison des fuseaux et des alluchons, une solution du problème des engrenages cylindriques.

Considérons, en effet, l'épicycloïde transportée en A'B', et soit C_1A_1 la position correspondante du flanc, laquelle s'obtient en menant par le point C_1 une tangente à la courbe A'B'.

Le point de contact de cette tangente est en a, sur la circonférence génératrice de l'épicycloïde A'B', et l'on a

$$\text{arc } AA_1 = \text{arc } Aa = \text{arc } AA',$$

d'où il suit que les arcs décrits simultanément sur les deux circonférences primitives sont égaux. On peut donc adopter ces deux profils pour faire conduire la roue (C_1) par la roue (C), au delà de la ligne des centres [1].

Pour faire en sorte que chaque roue puisse être indifféremment conductrice ou conduite, ou, ce qui est la même chose, que le contact de deux dents ait lieu de part et d'autre de la ligne des centres, il n'y a qu'à prolonger la courbe AB à l'intérieur du cercle (C), suivant le profil rectiligne AC, et à décrire tangentiellement à la droite AC une épicycloïde déterminée par les mêmes principes que l'arc AB. De la sorte, chaque dent se compose d'une face curviligne et d'un flanc rectiligne : l'engrenage est réciproque, et la conduite commence avant la ligne des centres pour finir après.

On fait les dents symétriques, comme dans le tracé précédent, pour que le mouvement soit possible dans les deux sens (*fig.* 154); puis, après avoir fixé [2] la saillie qu'on veut

(1) Il est d'ailleurs évident sur la figure que la normale commune aux surfaces en contact passe constamment par le point A.

(2) La saillie et le creux se déterminent par certaines règles empiriques sur lesquelles nous reviendrons plus tard (*voir* p. 222). Voici, d'après Willis, les proportions adoptées dans la meunerie (*fig.* 155) :

Saillie en dehors de la circonférence primitive............	$de = \frac{3}{10}a,$
Profondeur du creux, en dedans de la même circonférence.	$eg = \frac{4}{10}a,$
Jeu à fond de creux......................................	$\frac{1}{10}a,$
Largeur du plein de la dent..............................	$\frac{5}{11}a,$
Largeur du vide de la dent...............................	$\frac{6}{11}a,$
Jeu dans le sens de la circonférence primitive...........	$\frac{1}{11}a.$

Ces proportions sont des fonctions du pas a seulement; il ne faut pourtant pas croire que la courbure des circonférences primitives ne doive pas entrer en ligne de compte : en effet, plus cette courbure est considérable, donner à la dent en dehors de la circonférence primitive, ainsi que la profondeur du creux, on termine le plein et le vide par deux arcs de cercle concentriques, et on arrondit soigneusement toutes les arêtes saillantes ou rentrantes des deux profils.

Les engrenages à flancs droits ont un inconvénient grave : c'est que, pour tracer le patron de la dent d'une roue, il est nécessaire de connaître le diamètre de l'autre circonférence primitive, de sorte qu'une roue donnée ne peut engrener régulièrement qu'avec des roues d'un diamètre parfaitement déterminé; les lanternes présentent la même particularité.

Or, d'une part, nous verrons qu'on a quelquefois besoin de faire engrener une même roue avec deux ou plusieurs pignons dont les dimensions diffèrent; d'autre part, comme aujourd'hui presque toutes les roues dentées s'exécutent en fonte ou en laiton, il est très important, pour ne pas multiplier les modèles, d'avoir un tracé tel, que toutes les roues du même pas puissent être à peu près indifféremment combinées deux à deux, pour constituer un engrenage régulier.

Il est facile, en mettant à profit l'indétermination laissée par la théorie dans la solution générale du problème des engrenages, de satisfaire à la nouvelle et importante condition que nous venons d'énoncer.

Troisième solution pratique. — *Engrenage à flancs épicycloïdaux.* — Décrivons dans l'intérieur de (C_1) un cercle de diamètre quelconque AD (*fig.* 156), et prenons pour la face de la roue (C) l'épicycloïde A'B' engendrée par un point de cette circonférence auxiliaire, roulant extérieurement sur la circonférence primitive (C) : il est facile de voir que le flanc correspondant sera précisément l'hypocycloïde A_1B_1 [1] décrite

---

plus les dents se refusent vite au contact. Cette considération conduit à augmenter un peu la saillie des petites roues : on peut d'ailleurs toujours déterminer géométriquement les limites des parties utiles des dents, ainsi que la forme théorique du creux, laquelle est l'enveloppe des positions relatives de la dent opposée.

[1] Dans le système des flancs droits, cette hypocycloïde était une ligne droite; et cette particularité est la seule qui distingue géométriquement le tracé actuel du précédent.

En général, deux profils conjugués quelconques peuvent toujours être considérés comme engendrés par un même point d'une certaine courbe, roulant sur chacune des circonférences primitives respectivement.

par un point de la même circonférence, roulant dans l'intérieur de (C_1). En effet, on démontrerait comme tout à l'heure que les arcs AA', AA_1, égaux chacun à Aa, sont égaux entre eux, et que la normale de contact passe constamment au point A.

Le cercle générateur AD est tout à fait arbitraire, et sans relation avec l'un ou l'autre des rayons primitifs : il doit seulement être le même pour toute la série des roues destinées à engrener ensemble. De plus, il est nécessaire que le diamètre de ce cercle soit inférieur ou, au plus, égal au plus petit des rayons des cercles primitifs, afin que le flanc ne se trouve jamais convexe. Dans ce cas, en effet, les dents auraient à la racine une épaisseur moindre que sur la circonférence primitive, ce qui serait très vicieux au point de vue de la solidité.

Les règles relatives à la saillie et au jeu sont les mêmes que dans le cas des engrenages à flancs droits.

Quatrième solution pratique. — *Engrenage à développantes de cercle.* — Dans les engrenages à développantes la normale commune, qui est toujours assujettie à passer constamment par le point de contact des circonférences primitives, satisfait de plus à la condition d'avoir une inclinaison fixe sur la ligne des centres. Voici le tracé de cette nouvelle espèce de denture.

Soit TT_1 une ligne menée par le point A sous une inclinaison convenable (*fig.* 157); des centres C et C_1 décrivons des circonférences tangentes à la droite TT_1 : les rayons de ces circonférences sont proportionnels à ceux des circonférences primitives. Cela posé, enroulons les portions TA, T_1A de la droite TT_1, chacune sur la circonférence correspondante : le point A décrira dans chacun de ces mouvements une développante de cercle; et je dis qu'en prenant pour profils des dents ces développantes AB, AB_1, nous aurons la solution cherchée.

En effet, faisons tourner les deux roues autour de C et C_1 respectivement : la courbe AB dans toutes ses positions, telles que A'B', admettra toujours la ligne fixe TT_1 pour normale, et il en sera de même de l'autre courbe AB_1. Donc, si l'on conçoit que les deux profils passent à chaque instant par un même point de la ligne TT_1, ils seront tangents en ce point; et la normale commune satisfera à la double condition imposée.

Les arcs BB', $B_1B'_1$ sont tous deux égaux à la longueur AA', interceptée sur la normale commune par les deux positions considérées des développantes; et comme les rayons des bases des développantes sont proportionnels à ceux des circonférences primitives, les arcs décrits simultanément par le point de contact sur les circonférences primitives sont aussi égaux, ce qui est une vérification de la proposition fondamentale de la théorie des engrenages.

L'engrenage à développantes est réciproque, et chaque dent est formée d'une seule courbe. De plus : 1° l'épaisseur de la dent croît de l'extrémité à la racine; 2° une même roue peut engrener avec une autre roue de rayon quelconque; 3° la distance des centres peut varier sans que la régularité de l'engrenage soit altérée. Cette dernière propriété permet de ne pas s'occuper du jeu dans la construction des roues, et c'est en ajustant l'appareil qu'on dispose par tâtonnements les arbres à la distance convenable pour que le mouvement s'exécute sans trop de liberté et sans trop de gêne (¹).

A côté de ces avantages, on peut signaler l'inconvénient que voici : l'action des dents l'une sur l'autre, dirigée suivant la normale commune, est oblique par rapport à la ligne des centres, ce qui est mauvais au point de vue dynamique. Dans les autres engrenages, la normale commune est d'abord perpendiculaire à la ligne des centres : peu à peu elle devient oblique; mais dès qu'elle a atteint une obliquité un peu notable, une autre paire de dents entre en prise, et l'inconvénient dont nous parlons est beaucoup amoindri.

Cinquième solution pratique. — *Tracé des dents par arcs de cercles.* — La portion utile des courbes qui forment le profil d'une dent est en général assez petite pour qu'il n'y ait aucun inconvénient à substituer à la courbe exacte, en vue de la commodité du tracé, un ou plusieurs arcs de cercle convenablement déterminés; on peut même dire que, dans les ateliers, les dents ne sont jamais exécutées différemment (¹). Mais il importe d'avoir de bonnes règles pratiques pour la détermination des centres et des rayons des arcs à employer.

(¹) La même propriété est utilisée dans certains mécanismes, tels que les cylindres broyeurs des minerais métalliques. Une même paire de cylindres doit servir à broyer le minerai, tantôt gros, tantôt fin. Il faut pour cela qu'on puisse disposer les cylindres à des distances variables l'un de l'autre. Ce changement de positions relatives sera sans influence sur la régularité de la transmission, si l'engrenage est à développantes.

Je veux bien qu'il soit assez ridicule d'exiger que les dents d'une roue (surtout d'une petite roue) aient exactement la forme d'une épicycloïde ou celle d'une développante; mais il n'en est pas moins vrai qu'on voit se révéler de graves inconvénients quand cette forme s'écarte par trop de celle qui convient à l'uniformité du mouvement. L'action des machines devient irrégulière : il se produit des chocs, des vibrations, dont l'effet sur la solidité des diverses pièces est extrêmement fâcheux, circonstances qui se manifestent d'une manière non équivoque par un bruit assourdissant, indice certain d'une construction défectueuse.

L'idée qui se présente tout naturellement, quand on cherche à tracer une ligne circulaire qui se rapproche le plus possible d'un arc de courbe, c'est de substituer à cet arc le cercle de courbure de l'un des points intermédiaires; on prendra deux cercles au lieu d'un seul, si l'on veut avoir une plus grande exactitude. Ce procédé est assez pénible; heureusement, dans le cas qui nous préoccupe, il n'est pas nécessaire de commencer par tracer les courbes exactes, et l'on peut obtenir directement les profils circulaires qui répondent au degré d'approximation dont on se contente.

Considérons en effet la normale commune dans une position quelconque (*Pl. X, fig.* 96), et soit (c) un arc de cercle représentant le profil de la dent (C_1) : le profil conjugué est l'enveloppe des positions relatives de la courbe (c). Déterminant le centre de courbure X de cette enveloppe, et décrivant du point X un arc de cercle tangent au premier, nous aurons le profil de la dent de la roue (C).

Les centres X et Y se trouvent sur les droites qui joignent les points C et C_1 à un point quelconque de la perpendiculaire à la normale commune, menée par le point de contact des cir-

(¹) La meilleure pratique consiste à tracer le patron exact de la dent, et à chercher ensuite par tâtonnements le centre et le rayon de l'arc de cercle, qui s'écarte le moins de la courbe théorique.

conférences primitives; et l'on obtient des courbes qui satisfont approximativement au problème des engrenages en décrivant des points X et Y deux arcs tangents en un point quelconque de la ligne XY [1].

Ce principe général étant posé, voici quels sont les deux tracés qui ont été indiqués par M. Willis.

Tracé de la dent par un seul arc de cercle. — Par le point de contact des circonférences primitives (*fig.* 158), on mène une droite TAT_1, dont la direction est arbitraire. Ordinairement, cette droite fait un angle de 75° avec la ligne des centres. Du centre C on abaisse une perpendiculaire CT sur cette droite (ce qui revient à envoyer à l'infini le point de la perpendiculaire à la normale qu'il faut joindre aux deux centres de rotation) : T est le centre et AT le rayon de la dent dont on arme la roue (C); le centre de l'enveloppe des positions de l'arc ainsi déterminé s'obtient en abaissant de C_1 sur la même droite la perpendiculaire C_1T_1 : cette enveloppe est le profil de la dent de la deuxième roue.

Ce tracé offre une certaine analogie avec celui de l'engrenage à développantes : il en a les avantages et les inconvénients; seulement, chaque profil étant composé d'un arc unique, le rapport des vitesses angulaires n'est pas rigoureusement constant, dès que le point de contact des dents s'écarte un peu de la ligne des centres.

Tracé de la dent par deux arcs de cercle. — On arrive à un degré d'exactitude qui satisfait amplement aux besoins de la pratique, en employant pour chaque dent deux arcs de cercle situés de part et d'autre de la circonférence primitive, de manière à représenter respectivement ce que nous avons appelé le flanc et la face du profil. On devra s'arranger de manière que le point d'action exact de l'une des courbes soit situé un peu en deçà de la ligne des centres, et l'autre au delà, à la même distance du point A; cette distance sera, si l'on veut, égale à la moitié du pas.

[1] Euler avait indiqué l'application aux engrenages des arcs de cercle qu'on obtient en se conformant aux indications précédentes; mais on a longtemps négligé de mettre à profit ces considérations théoriques, jusqu'à ce que M. Willis les ait présentées sous une forme immédiatement pratique.

Soit (C) la roue dont on demande de tracer la denture (*fig.* 159); les données sont toujours le pas et le nombre de dents de la roue; on en déduit la circonférence primitive CA, dont le développement est égal à la longueur du pas multipliée par le nombre des dents.

Connaissant ainsi la circonférence primitive de la roue (C), considérons, mais seulement pour l'explication des constructions [1], la deuxième circonférence primitive (C_1); et proposons-nous d'abord de déterminer l'arc de cercle qui forme le contour de la partie extérieure de la face d'une dent de la roue qui nous occupe. Pour cela, nous choisirons l'instant où cette dent se trouve en m, à un demi-pas au delà de la ligne des centres; et nous tirerons par le point A une ligne arbitraire NN', représentant la normale commune qui correspond à cette position. D'après M. Willis, cette ligne doit faire un angle de 75° avec la ligne des centres.

Menons AK perpendiculaire à NN', joignons les centres C et C_1 à un point quelconque K, pris sur cette perpendiculaire, et soient P, P_1 les points de rencontre des lignes CK, C_1K avec la normale NN' : la face que nous cherchons s'obtient en décrivant un arc de cercle du point P comme centre, avec Pm pour rayon. Le flanc correspondant serait un arc décrit du centre P_1, tangentiellement au précédent et dans l'intérieur de la circonférence (C_1).

On détermine les flancs de la roue (C) sur la même épure, en considérant la dent qui se trouve en n, à un demi-pas en arrière de la ligne des centres. Il suffit pour cela de joindre les centres C et C_1 à un point k pris sur le prolongement de AK : p est le centre des flancs de la roue (C), p_1 le centre des faces de la roue (C_1). En résumé, le profil de la partie utile d'une dent se composera de deux arcs de cercle : l'un décrit du centre P avec le rayon Pm, en dehors de la circonférence primitive, l'autre décrit du centre p avec le rayon pn, en dedans de la même circonférence primitive.

Une fois cette épure préliminaire effectuée, on procède au tracé de la manière suivante : du point C comme centre, avec

[1] Nous verrons que le tracé est, comme il convient, indépendant du rayon de (C_1).

CP, C*p* pour rayons, on décrit deux circonférences qui sont les lieux géométriques des centres des faces et des flancs (*fig.* 160). Puis, ayant marqué les points des dents situés sur la circonférence primitive, en tenant compte du jeu, on prend une ouverture de compas égale à P*m*, et on transporte successivement la pointe traçante de son instrument en *a*, *b*, *c*, *d*, ..., en cherchant pour chacun de ces points la position correspondante de la pointe centrale, laquelle doit être sur la circonférence FF′. Quand on a ainsi décrit toutes les faces, on change l'ouverture de son compas, et on décrit les flancs de la même manière. Il importe de remarquer que la position des points P, *p*, qui déterminent la forme des dents de la roue (C), est tout à fait indépendante du rayon de la roue (C_1).

La limite supérieure de la longueur AK correspond à C_1K parallèle à NN′, un flanc ne pouvant jamais être convexe; cette limite est donc une fonction du rayon de la plus petite des roues.

Pour la commodité des constructeurs, M. Willis a calculé une Table qui dispense de faire l'épure préliminaire, en fournissant immédiatement [1] les longueurs AP, A*p*, en fonction du pas et du nombre de dents de la roue.

Voici un extrait de cette Table, réduite en mesures françaises. Le pas est donné en centimètres, les autres nombres du Tableau expriment des millimètres. Rien n'est d'ailleurs plus facile que de continuer la Table ou de l'interpoler; seulement on ne devra pas s'en servir pour une roue destinée à engrener avec un pignon de moins de 12 dents : on sera alors obligé de recourir à la construction directe.

[1] Dans le calcul de cette Table, l'angle NAC a été pris constamment égal à 75°; quant à la longueur AK, elle est liée, ainsi que nous l'avons dit, au rayon du plus petit cercle primitif : soit R_1 ce rayon, on a

$$AK = R_1 \sin 75°.$$

M. Willis a pris pour la plus petite des roues d'un pas donné celle de 12 dents; alors, en désignant par a le pas, on a

$$2\pi R_1 = 12a,$$

d'où

$$AK = \frac{6.\sin 75°}{\pi} a.$$

NOMBRE de DENTS.	PAS EN CENTIMÈTRES.										
	1	1¼	1½	1¾	2	2¼	2½	3	4	5	6
	Centres des flancs.										
13	64	80	96	112	129	144	160	193	257	321	380
14	34	43	52	60	69	78	87	104	139	173	208
15	24	31	37	43	49	55	62	74	99	123	148
16	20	25	29	34	40	44	50	59	79	99	119
17	17	21	25	29	34	37	42	50	67	84	101
18	15	18	22	26	30	33	37	45	59	74	89
20	12	15	18	21	24	28	31	37	49	61	74
22	11	13	16	19	22	24	27	33	43	54	65
24	10	12	15	17	20	22	25	30	40	49	59
26	9	11	13	16	18	20	23	27	37	46	55
30	8	10	12	14	17	18	21	25	33	41	49
40	7	9	11	12	15	16	18	21	28	35	42
60	6	8	10	11	13	14	15	19	25	31	37
80	6	7	9	10	12	13	14	17	23	29	35
100	5	7	8	10	11	12	14	17	22	28	34
150	5	6	8	9	10	12	13	16	21	27	32
Crémaillère	5	6	7	8	10	11	12	15	20	25	30
	Centres des faces.										
12	2,5	3	3,5	4,5	5	5,5	6	7	10	12	15
15	"	3,5	4	5	5,5	6	7	8	11	14	17
20	3	4	4,5	5,5	6	7	8	9	12	15	18
30	3,5	4,5	5	6	7	8	9	10	14	18	21
40	4	"	5,5	6,5	8	8,5	9,5	11	15	19	23
60	"	5	6	7	8,5	9	10	12	16	20	25
80	4,5	5,5	6,5	7,5	9	9,5	11	13	17	21	26
100	"	"	"	"	"	10	"	13,5	18	22	27
150	"	"	7	8	9,5	10,5	11,5	14	19	23	28
Crémaillère	5	6	7,5	8,5	10	11	12	15	20	25	30

Odontographe. — Enfin la méthode de Willis est rendue tout à fait pratique par l'emploi d'un petit rapporteur de corne ou de carton (*fig.* 161), qu'on nomme *odontographe*.

Pour se servir de l'odontographe, on le place sur l'épure de manière que la ligne AB soit dirigée suivant le rayon qui vient aboutir sur la circonférence primitive, à un demi-pas en avant ou en arrière de l'origine d'une dent. Le côté NN', qui fait avec AB un angle de 75 degrés, porte deux échelles divisées, dont le zéro commun est en A, servant l'une pour les faces, l'autre pour les flancs; et la Table précédente, qui peut être gravée sur le carton, fait connaître les positions des centres sur ces deux échelles. Il faut remarquer que, dans chaque position, l'échelle qu'on doit employer est celle qui, par rapport au point A, est opposée au point *m*. Ainsi, c'est la position I de l'odontographe qui donne le centre du flanc, et la position II qui fait connaître le centre de la face. Une fois tous les arcs de cercle décrits, on achève le tracé comme à l'ordinaire : c'est-à-dire en arrêtant les faces et les flancs à deux arcs de cercle concentriques à la roue, et échanfrinant toutes les arêtes.

(*b*). *Engrenages cylindriques intérieurs.*

Le tracé des engrenages intérieurs est fondé sur les mêmes principes que celui des engrenages extérieurs, et les cinq systèmes employés pour les premiers sont également applicables à ceux-ci.

Engrenages intérieurs à lanterne. — Quand la petite roue est menée par la grande, on peut lui donner la forme d'une lanterne (*fig.* 162) : le profil correspondant des dents de la grande roue est une courbe parallèle à l'hypocycloïde décrite par un point de la circonférence primitive du pignon, roulant dans la circonférence extérieure.

On peut au contraire armer la grande roue de fuseaux : le pignon est alors moteur et porte les dents (*fig.* 163).

Engrenages intérieurs à flancs. — Dans le cas des engrenages intérieurs, on voit immédiatement qu'il n'est pas possible de donner à la fois à la grande roue un flanc et une face, car la face se trouverait à l'intérieur de la circonférence primitive, et se raccorderait avec le flanc par un rebroussement. Les flancs droits sont même tout à fait inadmissibles [1] : et la grande roue, dont la forme générale est celle d'une couronne placée en porte à faux à l'extrémité de son arbre, présente intérieurement une denture à face hypocycloïdale, tandis que les flancs sont disposés au dedans de la circonférence primitive du pignon (*fig.* 164). Le mouvement ayant lieu dans le sens indiqué par les flèches, les flancs poussent les hypocycloïdes jusqu'à la ligne des centres. Au delà, le flanc reste en arrière de la face.

On peut faire que le contact des deux roues se continue au delà de la ligne des centres en prolongeant les profils précédents par deux épicycloïdes engendrées par un point d'une circonférence arbitraire, roulant *extérieurement* sur les deux circonférences primitives.

Engrenages intérieurs à développantes. — Le principe des engrenages à développantes (*fig.* 165) conduit à faire le profil des dents de la grande roue concave : on atténue cet inconvénient, ainsi que celui qui provient de l'obliquité de l'action mutuelle, en multipliant suffisamment les dents.

Le contact a lieu à une petite distance de part et d'autre de la ligne des centres.

Des roues parasites. — Il est toujours facile d'éviter les engrenages intérieurs. En effet, soient C, C_1 (*fig.* 166) les projections de deux axes entre lesquels on demande d'établir un rapport de vitesses donné, avec la condition que les deux rotations soient de même sens.

On obtient ce double résultat en fixant sur les arbres deux roues ordinaires dont les circonférences primitives ne se touchent pas, les rayons de ces circonférences étant d'ailleurs dans le rapport voulu. Puis on installe quelque part une roue (C') qui engrène avec chacune des roues (C), (C_1) : de cette manière les rotations des deux arbres donnés seront évidemment de même sens.

Je dis de plus que le rapport des vitesses angulaires sera l'inverse du rapport des rayons R et R_1, quel que soit le rayon

[1] Voir BELANGER, *Traité de Cinématique*, p. 151.

de la roue auxiliaire. Soient en effet ω, ω', ω_1 les vitesses respectives des trois roues, on a

$$\frac{\omega}{\omega'} = -\frac{R'}{R}, \qquad \frac{\omega'}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R'};$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{R_1}{R}.$$

Le rapport des vitesses angulaires des arbres extrêmes ne dépend ainsi que du rapport des rayons des roues correspondantes, la roue intermédiaire ayant pour effet unique de changer le sens du mouvement transmis. En général, si l'on dispose les unes à la suite des autres une série de roues dentées, le rapport des vitesses angulaires de deux roues quelconques ne dépend que du rapport des rayons de ces roues. Nous donnerons aux roues intermédiaires le nom de *roues parasites*, parce que les dimensions de ces roues sont sans influence sur le mouvement transmis.

(c). *Engrenage d'une roue et d'une crémaillère.*

La théorie des engrenages cylindriques s'étend tout naturellement au cas où le rayon d'une des circonférences primitives est infini. La roue correspondante se trouve représentée par une sorte de barre droite cannelée, nommée *crémaillère*, qui doit être guidée de manière à pouvoir seulement prendre un mouvement de translation dans sa propre direction; et il s'agit de déterminer les profils des dents des deux pièces, de manière que la vitesse du mouvement de translation de la crémaillère soit dans un rapport constant avec la vitesse angulaire du pignon.

La solution de ce problème, simple cas particulier de ceux que nous venons de traiter, ne nécessite pas de nouveau tracé : aussi nous contenterons-nous de passer rapidement en revue les diverses espèces de crémaillères à rapport de vitesses constant.

Crémaillère ou pignon à fuseaux. — Signalons seulement pour mémoire les crémaillères à fuseaux cylindriques, ou celles qui conduisent une lanterne : les unes et les autres se rencontrent très rarement aujourd'hui, et leur denture ne présente rien qui mérite d'être signalé.

Crémaillère à flancs droits ou courbes. — Quand la commande entre le pignon et la crémaillère doit être réciproque, on a recours au principe des engrenages à flancs. Si l'on adopte pour le pignon des flancs rectilignes (*fig.* 167), la face de la dent de la crémaillère est un arc de cycloïde dont le cercle générateur a pour diamètre C_1A.

La face du pignon est une développante de cercle ; et il est à remarquer que la crémaillère n'a pas, à proprement parler, de flanc. En effet, la développante AD, dans la rotation de la roue autour de l'axe C_1, ne cesse pas de couper à angle droit la ligne TT'; et par conséquent elle agit constamment sur le point A du flanc AB, A'B', ...

Il résulte de là que la dent de la crémaillère s'use rapidement dans la région voisine de ce point d'action unique : ceci est un inconvénient qu'on évite en faisant décrire la face du pignon et le flanc de la crémaillère par un même cercle de rayon quelconque, ou mieux en employant les Tables de Willis. Les crémaillères ainsi construites engrènent avec tous les pignons de même pas.

Crémaillère à flancs obliques dérivant des engrenages à développantes de cercle. — Soit NN' (*fig.* 168) la normale constante : le profil de la dent du pignon est la développante de la circonférence C_1T_1; quant à l'autre développante, elle est remplacée par une droite perpendiculaire à NN'. Si l'on veut que la transmission du mouvement soit possible dans les deux sens, chaque profil doit être symétrique : les dents de la crémaillère prennent ainsi la forme trapézoïdale (*fig.* 169). La distance de la crémaillère à la roue peut varier, sans que la régularité de la transmission soit altérée.

Cames soulevant un pilon.

Un pilon mécanique ou *bocard* (*fig.* 170) se compose d'un sabot de fonte, fixé à l'extrémité d'une flèche en bois.

Perpendiculairement à la flèche, et dans une entaille pratiquée à cet effet, on assemble un mentonnet sur lequel vient agir une came. Le pilon soulevé, et d'ailleurs convenablement guidé dans son mouvement, retombe par son poids quand la dent ou came l'a quitté : une autre came vient bientôt le saisir, et le mouvement de rotation continu de l'arbre à cames se trouve *transformé* en un mouvement rectiligne alternatif du pilon.

Ce mécanisme doit être rapporté au Chapitre actuel, car, géométriquement, le mouvement du pilon pourrait être continu. Le changement de sens résulte seulement de la destruction de la liaison des deux corps, et la flèche avec son mentonnet représente une crémaillère, dont la denture se réduit à un seul flanc droit. Le profil de la came est une développante de cercle, dont tous les points viennent successivement en contact avec un même point du mentonnet.

2° Axes concourants. — Engrenages coniques.

Occupons-nous maintenant des appareils qui servent à établir un rapport de vitesses constant, entre deux corps mobiles autour de deux axes concourants.

Cônes de friction. — Considérons deux cônes de même sommet (*fig.* 171), tangents tout le long de la génératrice OC. Si l'adhérence des surfaces est suffisante pour que l'un de ces cônes ne puisse pas tourner sur son axe sans entraîner l'autre, il est clair que le rapport des vitesses angulaires des deux mouvements de rotation sera constant : tel est le principe des transmissions de mouvement par cônes de friction, lesquelles présentent les mêmes avantages et les mêmes inconvénients que les cylindres de friction précédemment étudiés.

Soient ω et ω_1 les vitesses des deux arbres; on a

$$\omega.\mathrm{CP} = \omega_1.\mathrm{CQ}$$

ou

$$\omega \sin\alpha = \omega_1 \sin\alpha_1.$$

Dans la transmission par cônes de friction, le rapport des vitesses angulaires des deux cônes est inverse du rapport des sinus des demi-angles au sommet de ceux-ci [1].

Cette règle permet de déterminer les deux cônes, connaissant les axes et le rapport des vitesses.

Pour cela, par un point quelconque B de l'axe OQ, menons

[1] On remarquera que, si la droite OB représente la vitesse ω_1, ω sera représenté par la droite OA.

une parallèle à l'axe OP; prenons sur cette parallèle et dans un sens convenable une longueur BK qui soit à OB dans le rapport direct des vitesses angulaires des deux arbres : le point K est un point de la génératrice de contact des cônes de friction. On obtient donc ces deux surfaces en faisant tourner la ligne OK autour de chacun des axes donnés [1].

Engrenages coniques. — Si l'adhérence entre les deux cônes n'est pas assez forte pour assurer la transmission du mouvement, on arme les surfaces en contact de saillies ou dents, entre lesquelles sont ménagés des creux. On constitue ainsi les *engrenages coniques* ou *roues d'angle*. Les surfaces qui limitent les dents doivent être telles que la transmission du mouvement reste uniforme, et s'effectue absolument de la même manière que lorsqu'on avait simplement les deux cônes primitifs roulant sans glisser l'un sur l'autre.

On satisferait à cette condition par l'emploi d'une lanterne à fuseaux coniques, combinée avec une roue pour le tracé de laquelle je renverrai au *Traité des Machines* de Hachette; mais les seuls engrenages coniques usités aujourd'hui sont fondés sur les mêmes principes que les engrenages cylindriques à profils épicycloïdaux, avec lesquels ils présentent les analogies habituelles de la Géométrie de la sphère avec la Géométrie plane.

Épicycloïdes sphériques. — Observons d'abord que, les dents étant toujours limitées par des surfaces coniques (surfaces coniques à base quelconque) de même sommet que les deux cônes primitifs, une seule directrice suffit à les déterminer.

Pour trouver cette directrice, coupons les deux cônes par une sphère décrite de leur sommet commun comme centre; et soient (B) et (B_1) les cercles ainsi déterminés, que nous appellerons les bases des deux cônes (*fig.* 172). Considérons un troisième cône, tangent aux deux premiers suivant leur génératrice commune, et soit (b) la base de ce cône auxiliaire sur notre sphère.

Cela posé, faisons tourner simultanément les trois cônes autour de leurs axes avec les mêmes vitesses relatives que

[1] Dans la pratique, on n'emploie jamais que deux troncs de cône de faible épaisseur.

celles qui résulteraient du roulement de leurs surfaces l'une sur l'autre : un point a de la base du cône auxiliaire décrira une épicycloïde sphérique $A'a$ par rapport au cône (B), et une autre épicycloïde sphérique par rapport au cône (B_1). Ces courbes sont précisément les directrices demandées.

Cette solution rigoureuse, parfaitement analogue comme principe à celle que nous avons donnée pour le problème des engrenages cylindriques, n'est pas employée dans la pratique, vu les difficultés que présente le tracé des courbes sphériques. En définitive, on a plus de garanties pour l'exactitude matérielle, si l'on s'arrête à une solution simplement approchée en théorie, mais plus commode à réaliser. Aussi a-t-on universellement adopté, pour déterminer les directrices des dents des roues d'angle, la méthode approximative que nous allons exposer. Cette méthode, imaginée par Tredgold [1], repose sur les considérations suivantes.

En pratique, la portion de surface sphérique occupée par les arcs utiles des épicycloïdes constitue seulement une zone assez étroite, autour de la base de chaque cône primitif; et l'on peut admettre que, dans l'étendue d'une pareille zone, la surface de la sphère se confond sensiblement avec celle de son cône circonscrit. En se contentant de l'approximation fournie par cette hypothèse, c'est sur la surface des cônes circonscrits à la sphère, le long des bases de chacun des cônes primitifs respectivement, qu'on se proposera de déterminer les directrices des dents : on substituera ainsi aux lignes sphériques des courbes tracées sur des cônes; or les constructions relatives à ces dernières courbes n'offrent aucune difficulté, par suite de la propriété dont jouissent les surfaces coniques d'être développables sur un plan.

On va plus loin encore : les cônes circonscrits S et S' (*fig.* 173) ont chacun un élément angulaire infiniment petit compris dans le plan tangent à la sphère au point C; et l'on admet comme deuxième simplification, le pas n'étant jamais bien considérable, que ce plan tangent commun à la sphère et aux cônes contient la portion occupée sur chacune des zones par le plein et le creux de deux dents en prise.

[1] *Buchanan's Essays on mill-work*, by Tredgold, p. 103 ; 1823.

Or, on n'a pas besoin de suivre le mouvement des deux roues pendant un temps excédant celui qui correspond au passage d'une paire de dents, puisqu'il y a identité parfaite entre toutes les paires qui viennent successivement au contact; donc, en définitive, on n'a à se préoccuper que du mouvement relatif des deux secteurs SCc, S'Cc', lequel est un simple mouvement plan.

Ces bases préliminaires acceptées, soient (*fig.* 174) SOC, S'OC les deux cônes primitifs. Tirons SS' perpendiculaire à la génératrice de contact OC : SC et S'C sont les génératrices des cônes circonscrits à la sphère, qui contiennent les zones dont nous avons besoin. Ces deux cônes, ou plutôt les deux troncs de cônes CD, CD', étant exécutés sur le tour, les procédés les plus élémentaires de la Géométrie descriptive vont nous permettre de déterminer, par une épure identique aux épures d'engrenages plans, les patrons ou panneaux des directrices des surfaces des dents.

En effet, développons les deux cônes sur leur plan tangent commun : pour cela, des points S et S', comme centres, décrivons des circonférences tangentes au point C, et prenons sur ces circonférences des arcs égaux au développement des bases (B) et (B_1). D'après ce que nous avons admis, le mouvement relatif des facettes coniques élémentaires, qui viennent successivement se placer dans le plan sur lequel s'effectue notre développement, est identique au roulement de deux secteurs circulaires, correspondant à des arcs infiniment petits égaux des circonférences (SC), (S'C).

Considérons donc ces deux circonférences comme les circonférences primitives d'un engrenage cylindrique, et déterminons les profils des dents de cet engrenage par l'un des tracés que nous connaissons : il suffira ensuite de découper suivant chacun de ces profils un carton flexible, et d'appliquer ce patron sur la surface du tronc de cône correspondant. On taillera les dents suivant la surface engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur la directrice ainsi déterminée, et à passer constamment par le point O.

Comme on n'a généralement, pour l'exécution de la denture, qu'une portion de cône qui ne se prolonge pas jusqu'au sommet O, on remplace celui-ci par une deuxième directrice tracée, pour chaque roue, sur une deuxième surface conique auxiliaire, parallèle à la surface qui contient la première directrice. Chacune des deux couronnes à tailler se trouve ainsi limitée par quatre surfaces coniques droites, de manière à présenter la section trapézoïdale qu'indique la *fig.* 174.

L'horlogerie emploie, sous le nom de *roues de champ*, d'autres espèces de roues d'angle destinées seulement à résister à de minimes efforts. Je ne m'arrêterai pas à décrire ces mécanismes peu importants, ni à définir les conditions d'invariabilité du rapport des vitesses angulaires.

Joint universel sphérique.

C'est ici le lieu de dire quelques mots du dispositif fort ingénieux imaginé par M. Porro, pour communiquer à une grande lunette un mouvement uniforme de rotation autour de son axe de figure. Cet axe, maintenu par deux collets dans une position inclinée (*Pl. XXIII, fig.* 221), se termine à sa partie inférieure par une sphère pleine qui repose sur une sorte de coupe ou calotte creuse, mobile autour d'un axe vertical. Le rayon de la calotte est un peu plus petit que celui de la sphère pleine, de manière que le contact a lieu seulement sur la circonférence extrême de la première. Cela posé, il est évident :

1° Que le mouvement de rotation se transmettra, en vertu de l'adhérence résultant de la pression exercée par la lunette, à l'arbre de celle-ci, pourvu que la résistance appliquée à cet arbre ne soit pas trop forte;

2° Que le rapport des vitesses angulaires des deux solides autour de leurs axes respectifs sera constant, puisqu'il y a identité parfaite entre toutes les positions relatives occupées par ces deux corps;

3° Enfin (propriété caractéristique du mécanisme que nous décrivons), que l'angle des deux arbres pourra varier, sans que la régularité et l'uniformité du mouvement soient altérées.

Le rapport des vitesses angulaires des deux arbres dépend du rayon de la sphère et de celui de la circonférence de contact, ainsi que de l'inclinaison de la lunette; de plus, circonstance qui ne se rencontre dans aucun autre organe de ma-

chines, ce rapport varie avec la nature physique des corps en contact; c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de le calculer par les seules ressources de la Mécanique géométrique.

3° Axes non situés dans un même plan. — Engrenages hyperboloïdes. — Vis sans fin.

On peut résoudre sans nouveau tracé le problème de la transmission uniforme du mouvement de rotation, dans le cas où les deux axes qu'il s'agit de relier ne sont pas situés dans un même plan.

Il suffit pour cela de prendre un axe intermédiaire, qui coupe chacun des deux axes donnés : on rentre ainsi dans le cas précédent.

Engrenages hyperboloïdes.

Une disposition récemment imaginée, et basée sur l'emploi de deux hyperboloïdes gauches dentés (¹), permet d'effectuer directement la transmission.

Considérons deux hyperboloïdes de révolution, dont les axes coïncident avec les axes donnés, et disposés de manière à se toucher tout le long d'une génératrice. Il n'est pas possible ici de compter sur l'adhérence des surfaces, pour obtenir la transmission du mouvement : car deux hyperboloïdes, à moins d'être tout à fait identiques, ne sont pas susceptibles de se développer l'un sur l'autre par une succession de roulements simples, et il y a nécessairement glissement dans le sens de la génératrice commune. Mais on peut, en cannelant les surfaces gauches suivant les directions de leurs génératrices respectives, rendre les rotations des deux roues solidaires, tout en permettant le glissement relatif dont nous venons de parler : le mouvement est alors celui que nous avons étudié (p. 158).

En désignant par A l'angle des axes, par R et R_1 les rayons

(¹) Les premiers engrenages construits dans ce système dérivaient, sans règles bien précises, des engrenages coniques. Il y avait des frottements considérables; mais par le temps et l'usure les roues s'appropriaient peu à peu à leur usage.

On obtient un engrenage régulier, en se conformant aux indications suivantes, qui sont extraites d'une Note publiée par M. Belanger, sous le titre de : *Théorie de l'engrenage hyperboloïde;* décembre 1860.

des cercles de gorge, l'équation qui lie le rapport de ces rayons au rapport des vitesses angulaires est

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega} - \cos A}{\frac{\omega}{\omega_1} - \cos A}.$$

Cette équation détermine les rayons des cercles de gorge des hyperboloïdes à employer, pour produire un rapport de vitesses donné; quant à la direction de la droite qui doit, en tournant autour de chacun des axes respectivement, engendrer les deux hyperboloïdes, on la trouve par la relation

$$R \cot i = R_1 \cot i_1,$$

i et i_1 étant les inclinaisons de la génératrice sur les deux axes.

Quand ces axes sont rectangulaires, on a

$$\cos A = 0,$$

par suite

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \sqrt{\frac{R}{R_1}}.$$

Nous ne nous occuperons pas de rechercher la forme rigoureuse qu'il faudrait donner aux dents destinées à assurer la solidarité des deux hyperboloïdes. Disons seulement que les roues employées se réduisent à deux troncs d'hyperboloïdes tangents, limités à des plans menés perpendiculairement à leurs axes respectifs. Les surfaces de ces espèces de troncs de cône sont couvertes de stries rectilignes, fines et suffisamment rapprochées, représentant la série des couples de génératrices qui doivent arriver successivement en contact.

Ces stries ou cannelures doivent être en nombres réciproques aux vitesses angulaires des roues, et par conséquent elles ne sont pas espacées de quantités égales sur deux circonférences qui passent par un même point de la génératrice de contact. En d'autres termes, les dentures des deux roues ont des pas différents, propriété qui distingue essentiellement les engrenages actuels des engrenages cylindriques ou coniques.

Vis sans fin.

Dans le cas où les arbres qui ne se rencontrent pas sont rectangulaires, on peut employer une solution depuis longtemps connue, qui paraît même avoir été décrite par Pappus (¹) : c'est la vis sans fin.

Vis et écrous. — Aucun organe ne se rencontre aussi fréquemment dans les machines que les vis de toute nature, aucun ne se prête à des applications plus variées. Toutes ces applications reposent sur ce que le mouvement de la vis, par rapport à son écrou considéré comme fixe, se compose d'une translation dans la direction de l'axe et d'une rotation autour de cet axe : ces deux mouvements étant réglés de telle façon que pour un tour entier la vis avance d'un pas. Par suite, le mouvement de l'un des deux corps étant donné, l'autre se trouve déterminé.

Par exemple, quand l'écrou est fixe et qu'on oblige la vis à tourner sur son axe, celle-ci s'enfonce en même temps d'une fraction de pas égale à la fraction de tour qu'on lui fait faire : tel est le principe des vis de pression, de certaines vis micrométriques, de celles qui servent à assembler deux objets. Inversement, quand la vis est maintenue fixe, l'écrou possède à la fois un mouvement de translation et un mouvement de rotation, dont les vitesses sont dans le rapport indiqué.

Le mécanisme employé pour donner ou retirer l'eau à certaines roues hydrauliques se compose d'une vanne, mobile dans une feuillure verticale, et fixée à une grosse vis en bois dont l'écrou repose sur un appui fixe : la vis, qui fait corps avec la vanne, peut seulement, comme celle-ci, monter ou descendre parallèlement à elle-même.

Quand on veut lever la vanne, on tourne l'écrou au moyen d'une barre analogue à celle d'un cabestan, le poids du système maintient l'écrou appuyé sur son support, et lui permet seulement de prendre un mouvement de rotation sur son axe : la translation est alors le partage de la vis, qui s'élève ou s'abaisse d'un pas pour chaque tour de barre.

(¹) *Voir* Pappus, l. VIII, prop. 24.

La combinaison opposée se rencontre aussi très fréquemment, par exemple dans les *vis de rappel*. La vis tourne dans des collets fixes, et l'écrou, convenablement guidé, prend un mouvement de translation dans le sens de son axe [1].

Il n'est en aucune façon nécessaire que l'écrou affecte la forme ordinaire d'un anneau enveloppant la vis de toutes parts. Réduisons cet écrou à un simple onglet, compris entre deux plans conduits par l'axe et faisant entre eux un angle aussi petit qu'on le voudra ; nous aurons une sorte de crémaillère, ou *peigne*, à laquelle une vis de deux ou trois spires, dont les collets sont fixes, communiquera un mouvement de translation. Cette disposition est peu usitée, mais elle nous conduit tout naturellement à la vis sans fin, qui l'est beaucoup.

Vis sans fin. — Concevons qu'on enroule le peigne dont nous venons de parler sur une jante cylindrique MN (*Pl. XVIII, fig.* 175), tournant autour du centre C. Nous n'aurons rien changé à l'élément d'écrou sur lequel s'exerce l'action de la vis, et cette action aura toujours pour effet de communiquer au point qui touche le filet une vitesse parallèle à l'axe de la vis.

Seulement, le point animé de cette vitesse étant invariablement lié à l'axe C, il résultera de là une rotation continue de la roue MN autour de l'axe C, perpendiculaire à l'axe de la vis : tel est le principe de la *vis sans fin*.

Pour étudier d'un peu plus près ce mécanisme, réduisons la roue à une lame sans épaisseur, et considérons la série des sections axiales de la vis : sections qui, par l'effet de la rotation, arrivent l'une après l'autre dans le plan de la roue. Ces sections sont toutes superposables : elles se présentent à la roue comme les positions successives d'un profil animé d'un mouvement de translation parallèle à l'axe de la vis ; c'est-à-dire que la vis sans fin joue précisément, par rapport à la roue, le rôle d'une crémaillère indéfinie. Si donc la vis est à

[1] Enfin, nous verrons plus loin que dans les mouvements qu'on appelle *différentiels*, on s'arrange de telle sorte que la vis, indépendamment de la rotation, possède une certaine portion de la translation : l'écrou est alors animé de la fraction complémentaire (positive ou négative) de la translation. Cette fraction est aussi petite qu'on le veut.

filets carrés, ce qui est le cas le plus habituel, la forme des dents de la roue, supposée toujours infiniment mince, devra être la même que si cette roue était destinée à engrener avec une crémaillère à flancs droits.

Rétablissons l'épaisseur de la roue : il résulte de l'inclinaison des filets de la vis que si l'on taillait, suivant le profil en développante déterminé par les considérations précédentes, une dent cylindrique à génératrices perpendiculaires au plan de la roue, celle-ci ne pourrait pénétrer dans les creux de la vis ; il faut donc rendre la dent oblique, et lui donner l'inclinaison de l'hélice moyenne, avec un jeu suffisant. La forme de la roue se trouve ainsi complètement déterminée.

La loi du rapport des vitesses angulaires est telle que, pour un tour de la vis, il passe une dent de la roue, de sorte que la vis, à ce point de vue, doit être assimilée à un pignon d'une seule dent.

L'engrenage est ou n'est pas réciproque, suivant la grandeur de l'inclinaison du filet de la vis sur son axe. Si, comme dans la plupart des cas, cet angle est voisin de 90°, la roue ne saurait communiquer le mouvement à la vis, quelque force qu'on fasse agir sur elle : on utilise cette propriété dans plusieurs machines.

A partir d'une certaine obliquité du filet, il y a réciprocité, et l'on trouve dans les anciens tournebroches une vis conduite par une roue : mais cette disposition est très peu usitée.

Vis multiples. — Dans le cas d'une forte obliquité de l'hélice, le pas de la vis occupe une grande longueur, et il serait impossible, en conservant la même disposition que précédemment, d'avoir toujours un filet en prise. On dispose alors deux ou trois filets sur un même noyau : chacun d'eux conduit pendant un demi-tour ou un tiers de tour. En général, si n est le nombre des filets, il passe n dents pour chaque tour de la vis ; c'est-à-dire que celle-ci se comporte comme un pignon à n dents.

Vient-on à multiplier de plus en plus le nombre des filets, la longueur de la vis n'est plus qu'une fraction restreinte du pas. La vis finit même par devenir semblable à la roue portée par l'autre axe : l'engrenage est alors parfaitement symétrique.

Mais ce mécanisme est détestable en pratique (sauf quelques cas spéciaux) : il donne lieu à des frottements considérables, et on doit conseiller de le remplacer par l'engrenage hyperboloïde.

Vis tangente. — La vis tangente est une modification de la vis sans fin, dans laquelle la denture du pignon, au lieu d'être limitée à un cylindre de révolution concentrique au cylindre primitif, se termine par une gorge en forme de tore embrassant la vis sans fin. On l'emploie quelquefois dans les machines à diviser, où la vis tangente a l'avantage de donner aux deux pièces un contact très intime qui empêche le plus petit recul. Ces vis sont ordinairement à plusieurs filets suffisamment fins.

L'épure de la vis tangente est assez compliquée. En effet, chaque section faite dans la vis par un plan perpendiculaire à l'axe de la roue agit comme une crémaillère sur la section correspondante de la roue. Or les courbes qu'on obtient en coupant une vis par une série de plans parallèles à son axe sont toutes différentes, et comme l'avantage de l'engrenage à vis tangente consiste en partie dans l'intimité du contact, il faudrait déterminer avec soin la série des sections perpendiculaires à l'axe de la roue, en rapport avec les profils connus fournis par la vis. Une pièce aussi compliquée serait certes extrêmement pénible à réaliser.

On évite la difficulté d'exécution par l'emploi d'une *vis tailleuse* en acier, de même forme que la vis définitive; on la creuse de cannelures pour la rendre tranchante, puis on la trempe convenablement. On exécute ensuite un disque à gorge en cuivre; on installe ce disque et la vis sur un tour, et on fait tailler le disque peu à peu par la vis, en rapprochant celle-ci à mesure qu'elle entaille la roue, jusqu'à ce que la gorge vienne affleurer le noyau (1).

(1) *Compteur de Wollaston.* — On peut citer parmi les usages de la vis tangente l'application qu'en a faite Wollaston pour l'établissement d'un compteur destiné à enregistrer le nombre des tours faits par un arbre à mouvement très rapide.

La vis tangente A est fixée sur l'arbre dont on veut mesurer la vitesse (*fig.* 176); elle engrène avec deux roues ou demi-roues C, D, l'une de 100, l'autre de 101 dents, symétriquement placées par rapport au plan médian de la vis sur un arbre auxiliaire B, perpendiculaire au premier. La roue C est calée sur l'arbre B, la roue D est folle sur le même arbre et porte un cadran devant lequel se trouve une aiguille c, solidaire avec la roue C.

D'après les lois du rapport des vitesses dans l'engrenage à vis sans fin, le cadran fait un tour pour 101 révolutions de la vis; or pendant ce temps l'aiguille a fait $\frac{101}{100}$ de tour : elle est donc en avance par rapport au cadran du centième de la circonférence de celui-ci, et elle ne reviendra à son point de départ que lorsque l'arbre A aura fait 10100 tours.

4° Détails généraux sur les engrenages.

La forme ordinaire d'une roue dentée est celle d'une couronne cylindrique ou conique, portant sur tout son contour des dents égales et également espacées. Ces dents sont elles-mêmes limitées par des surfaces réglées, disposées de telle manière, que le contact de deux dents en prise s'effectue tout le long d'une génératrice commune, afin que la pression se trouve convenablement répartie.

Il y a deux éléments importants à considérer dans une roue dentée : ce sont le pas, a, et le nombre des dents, N; le rayon de la circonférence primitive est lié à ces deux quantités par la relation

$$2\pi R = Na.$$

Nous avons dit que le pas est essentiellement le même pour deux roues qui engrènent l'une avec l'autre; donc :

Les rayons des circonférences primitives d'un engrenage sont proportionnels aux nombres de dents des roues;

Et par suite,

Les vitesses angulaires des deux arbres sont dans le rapport inverse des nombres de dents des roues.

Il résulte de cette règle que, pour qu'on puisse établir un engrenage dans un rapport donné, il est indispensable que ce rapport soit exprimé par le quotient $\frac{N}{n}$ de deux nombres entiers. Il faut même que ces nombres entiers ne soient ni trop grands ni trop petits pour être admissibles (à peu près de

8 à 120) : aussi verrons-nous la théorie des nombres jouer un certain rôle dans l'étude des rouages.

Si les nombres N et n sont premiers entre eux, chaque dent de l'une des roues vient successivement en prise avec toutes les dents de l'autre roue : on recherche en général, dans la pratique, cette disposition qui rend l'usure plus égale. Les horlogers, au contraire, s'efforcent de prendre N et n ayant des facteurs communs, afin qu'une dent déterminée revienne toujours aux mêmes dents de l'autre roue, ce qui laisse moins de chances à l'irrégularité.

Amplitude de prise. — Un engrenage ne pourrait pas fonctionner s'il n'y avait toujours au moins une couple de dents en contact; et encore, s'il n'y avait jamais que deux dents en prise, on aurait presque toujours un choc au moment où, l'un des couples se quittant et l'autre étant sur le point d'entrer en prise, la transmission se trouverait pendant un temps très court interrompue. Quelquefois on s'arrange de façon qu'il y ait constamment contact de deux couples, mais cela n'est pas nécessaire : il suffit que l'amplitude de prise ait une étendue supérieure à un pas.

Cela posé, nous verrons dans la IVe Section que le frottement est d'autant plus dur que le point de contact des dents s'éloigne davantage de la ligne des centres, surtout avant le passage de cette ligne. On conclut de là la convenance de répartir la durée de l'action de part et d'autre de la ligne des centres, mais de la répartir inégalement, de manière que l'*arc d'approche* soit toujours inférieur ou au plus égal à l'*arc de retraite*. On pourra, par exemple, faire le premier de ces arcs égal à un demi-pas, et le deuxième à trois quarts de pas.

Une fois qu'on a fixé la valeur de ces deux arcs, il est facile de limiter graphiquement la saillie des dents, dans chacun des systèmes usités en pratique. Indépendamment de la méthode rigoureuse, il existe plusieurs règles empiriques pour déterminer cet élément important.

La règle que nous avons donnée (p. 197) suppose une saillie égale pour chacune des deux dentures (comme cela doit nécessairement avoir lieu quand le sens de la commande n'est pas déterminé); elle peut être employée en toute sécurité quand les nombres de dents des roues surpassent 15.

Désignons par S et s les rayons extrêmes de la roue et du pignon [1], N et n étant toujours les nombres de dents : la règle dont nous parlons s'exprime à peu près par l'équation

$$\frac{S}{s} = \frac{N+2}{n+2}. \tag{1}$$

Reid, auteur d'un Traité d'horlogerie estimé, indique

$$\frac{S}{s} = \frac{N+2,5}{n+1,5}. \tag{2}$$

Enfin M. Willis, après avoir analysé la question d'une manière complète, démontre aisément qu'il n'est pas possible d'avoir une relation de la forme (1) ou (2), avec laquelle on soit assuré de maintenir toujours l'arc d'action dans des limites convenables. Les formules précédentes donneront d'ailleurs des résultats assez satisfaisants, dans le cas où le pignon mène la roue; dans le cas contraire, il faudra prendre

$$\frac{S}{s} = \frac{N-3}{n+1}. \tag{3}$$

Dans la construction d'un engrenage, il faut se préoccuper, non seulement des conditions géométriques et mécaniques du problème, mais encore de la résistance des dents à la rupture, résistance qui est à peu près proportionnelle à leur largeur et au carré de leur épaisseur [2]. Mais, en augmentant l'épaisseur des dents, on augmente le pas, et par suite l'étendue du contact de chaque couple, ce qui est mauvais au point de vue du frottement; d'un autre côté, on se trouve bien vite limité dans le sens de la largeur de la roue, car si les surfaces en contact sont très étendues, il y a nécessairement des parties qui portent à faux, et on ne profite pas d'un trop grand accroissement de largeur.

[1] On appelle *pignon* la plus petite de deux roues qui engrènent ensemble; les dents des pignons portent le nom d'*ailes*.

Dans l'horlogerie ordinaire, les pignons sont toujours conduits par les roues.

[2] Quand les deux roues sont de même nature, on donne aux dents des épaisseurs égales, mesurées sur la circonférence primitive. Dans les engrenages à développantes, il serait plus rationnel de s'arranger de manière que l'égalité d'épaisseur eût lieu à la racine, plutôt qu'à la circonférence primitive.

Engrenages échelonnés. — L'artifice suivant permet de donner à chaque dent une épaisseur aussi grande que l'on veut, sans augmenter le pas dans la même proportion.

Pour cela, dès qu'une dent a décrit un espace égal, par exemple, au tiers du pas, elle cesse d'être en prise et se trouve remplacée, non par la dent suivante, mais par la dent d'une roue latérale qui se trouve d'un tiers de pas en arrière. Une troisième paire de roues vient de même succéder à la deuxième, après quoi le contact a lieu derechef entre deux dents de la première paire, et ainsi de suite.

On a ainsi (*Pl. XIV, fig.* 186) trois ou un plus grand nombre de dentures [1] disposées en échelons sur une même couronne (la figure représente le développement d'une portion de la surface du cylindre primitif); et plus on multiplie le nombre de ces roues accolées, plus on réduit la fraction de pas qui correspond à l'action de chacune d'elles.

Or, rien n'empêche de supposer que le nombre des dentures croisse indéfiniment, l'épaisseur (ou plutôt la largeur) diminuant dans la même proportion : chaque série de dents constitue à la limite une surface continue (*fig.* 186 *bis*), sorte de dent hélicoïde dont les diverses tranches agissent successivement sur les tranches correspondantes d'une dent de même forme. L'action de chaque tranche se fait sentir seulement pendant un espace de temps infiniment court, de manière que le contact des surfaces ait toujours lieu en un point du plan des axes.

Les deux dispositions précédentes ont été imaginées par Hooke, et communiquées par lui à la Société Royale de Londres en 1666. L'engrenage à dents hélicoïdes est assez généralement connu sous le nom d'*engrenage de White*, et on lui attribue fréquemment la propriété de fonctionner sans frottement.

Nous avons en effet démontré que, *dans le mouvement de deux cylindres qui se touchent suivant une génératrice*, le

(1) Dans la machine à planer de M. Collier, de Manchester, il y a jusqu'à huit dentures accolées. On obtient ainsi un mouvement très doux; et, si l'on fait usage de roues ordinaires juxtaposées, il n'y a aucune difficulté d'exécution.

glissement élémentaire est nul quand le point de contact des deux sections droites est sur la ligne des centres de rotation; mais il n'y a aucune assimilation possible entre les hélicoïdes de l'engrenage de White et les cylindres pour lesquels le théorème que nous rappelons a été établi. Le cas actuel nécessite une analyse spéciale; et il est aisé de reconnaître que le mouvement relatif des deux dents hélicoïdes n'est pas un roulement simple, car l'axe instantané de rotation est oblique au plan tangent commun.

Ce mouvement relatif se décompose en une rotation autour d'un axe situé dans le plan tangent, et un *pivotement* [1] autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Or nous avons vu que si, dans le pivotement, le point de contact géométrique n'a aucun mouvement de glissement sur le plan tangent commun, on n'en doit pas moins considérer l'élément mobile comme glissant effectivement sur ce plan tangent : tout ce qu'on peut dire, c'est que l'arc de glissement s'abaisse du premier ordre infinitésimal au second. Mais le frottement est en

(1) Le pivotement que nous signalons ici est de la même nature que celui qu'on réalise dans les meules à broyer employées dans diverses industries, entre autres dans celle de la fabrication de la poudre. Ces meules troncôniques (*fig.* 187) sont traversées par un essieu sur lequel elles ont la faculté de tourner, pendant que cet essieu est lui-même entraîné dans la rotation d'un arbre vertical AB. Le mouvement réel de la meule se compose de la rotation d'entraînement Ip, et d'une certaine rotation relative Iq.

Si l'axe de rotation AB passait par le sommet géométrique S, comme dans les galets des plaques tournantes, le mouvement de la meule serait un roulement simple et le poids seul de cette meule agirait pour écraser les substances. Avec la disposition employée, l'axe instantané Ir vient rencontrer le fond de l'auge en un point situé quelque part entre la circonférence intérieure et la circonférence extérieure de la meule; et on peut décomposer la rotation absolue en un roulement simple, autour de la génératrice de contact OS, plus un pivotement autour de l'axe OP perpendiculaire au plan tangent commun. L'effet du pivotement est d'étirer, de broyer les matières, comme cela se passe entre les deux meules ordinaires d'un moulin à blé.

Le rapport de la rotation relative à la rotation d'entraînement varie dans le cours d'une même opération, suivant le degré de consistance des matières sur lesquelles passe la meule. L'expérience a prouvé que, lorsque le mélange à broyer vient d'être chargé et se trouve à l'état pulvérulent, ce rapport est tel, que l'axe instantané passe toujours par un point de la grande base de la meule. Le point de rencontre de cet axe avec le fond de l'auge se rapproche de la petite base, à mesure que la piste se durcit.

raison directe de la pression : et celle-ci, qui se répartit dans le système actuel sur un élément infiniment petit dans tous les sens, s'accroît de son côté dans une proportion du même ordre, de sorte que le frottement ne se trouve nullement supprimé.

Les dents d'une roue construite dans le système de Hooke sont limitées par des surfaces hélicoïdales dont la forme est à peu près indifférente, dans les parties situées de part et d'autre de l'élément qui correspond à l'hélice d'intersection avec le cylindre primitif. Il suffit d'éviter les arcs-boutements. Pour cela, après avoir tracé le patron épicycloïdal fourni par les règles ordinaires, on se contente de tailler la dent circulairement, en restant à l'intérieur de la forme théorique.

L'engrenage hélicoïde a l'inconvénient d'exercer sur les axes une action longitudinale, à cause de l'obliquité des surfaces; il fonctionne d'ailleurs avec une grande douceur, et a été avantageusement appliqué par M. Bréguet à des organes délicats, devant atteindre des vitesses exceptionnelles.

§ IV. — Deuxième genre. — Transmission par l'intermédiaire d'un lien rigide.

L'emploi d'un lien rigide, réuni aux corps qui doivent se transmettre le mouvement par une double articulation, est très fréquent dans les machines; mais ce mode de liaison offre assez peu de ressources, appliqué à deux points qui doivent être animés de vitesses en rapport constant.

Nous avons étudié (p. 117) les propriétés géométriques d'un système de deux corps qui tournent respectivement autour des axes parallèles C et C' (*Pl. IX, fig.* 86), et qui sont réunis par une barre articulée en M et en M'. Pour que le rapport des vitesses soit constant, il faut que le point T, intersection du lien (prolongé s'il est nécessaire) avec la ligne des centres CC', soit invariable; or le point T ne peut être fixe qu'à la condition d'être constamment à l'infini, ce qui exige que les rayons CM, C'M' soient pris égaux et parallèles, et par conséquent que le lien MM' ait précisément pour longueur la distance CC'.

Dans ces conditions, les vitesses angulaires des arbres (C) et (C') seront évidemment égales et de même sens. C'est le seul cas où il soit possible d'obtenir un rapport constant de vitesses par l'emploi d'un lien rigide.

Accouplement des roues de locomotives. — Une locomotive ordinaire repose sur trois paires de roues, entre lesquelles son poids se trouve inégalement réparti. L'un des essieux, qui porte le nom d'*essieu moteur*, est mis directement en mouvement par la machine; et l'adhérence des roues correspondantes sur les rails, par un effet analogue à ce qui se produit dans la transmission par cylindres de friction, détermine le mouvement de progression du corps de la machine et du train qui s'y trouve attelé.

Seulement, quand la résistance du train est trop considérable, la locomotive *patine*, c'est-à-dire que ses roues tournent sur place, malgré le frottement de la jante sur le rail. Du moment que cet effet se produit, il ne servirait à rien d'augmenter la puissance de la machine motrice; de sorte qu'il y a, quelle que soit cette puissance, une limite à la résistance qu'une locomotive donnée est capable de vaincre. Cette limite est le produit de la pression qui s'exerce sur l'essieu moteur par un coefficient qui dépend de l'état des surfaces de la roue et du rail, ainsi que des circonstances atmosphériques.

Pour donner à la locomotive la puissance d'entraîner un train plus considérable, on réunit une ou deux paires de roues portantes avec les roues motrices, au moyen de bielles d'accouplement disposées comme nous l'avons indiqué tout à l'heure. L'effet de ces bielles est d'obliger toutes les roues couplées à tourner en même temps que les roues motrices, de sorte que la machine ne peut plus patiner sans vaincre le frottement qui se développe à la jante de toutes les roues solidaires, et que la limite dont nous avons parlé se trouve reculée.

Des points morts. — Considérons deux manivelles égales, CM, C_1M_1 (*Pl. XVIII, fig.* 177), reliées par la bielle d'accouplement MM_1. Pour chaque position CM du premier rayon, l'extrémité opposée du lien peut occuper sur la circonférence (C_1) deux positions différentes, M_1, M'; en sorte qu'on peut disposer les trois tiges données de deux manières bien distinctes : la figure CMM_1C_1 répond à deux vitesses angulaires égales et de même sens, et l'autre arrangement à des vitesses opposées, dont le rapport est variable.

Les points M_1 et M' coïncident quand le point M est en A ou en B. Les deux rayons sont alors couchés sur la ligne des centres, et il se présente une circonstance remarquable : c'est que si l'on considère, par exemple, le rayon CA marchant dans la direction de CM, il y a indécision au point de vue géométrique sur le mouvement que prendra le deuxième rayon C_1A_1 : rien ne l'oblige à se diriger vers C_1M_1 plutôt que vers C_1M'. Une fois d'ailleurs que le premier pas est fait dans un sens ou dans l'autre, le mouvement persiste nécessairement, pendant un demi-tour de chacune des deux roues; après quoi la même incertitude se reproduit, et ainsi de suite.

Si l'on veut que la régularité de la marche d'un mécanisme de ce genre ne soit pas compromise périodiquement chaque fois que les extrémités des rayons se trouveront sur la ligne des centres, il est indispensable d'employer un artifice particulier pour le passage de ce qu'on appelle les *points morts*. Dans les locomotives, il y a une bielle d'accouplement de chaque côté de la voie; les articulations des deux bielles sont, pour un même essieu, disposées sur deux rayons rectangulaires CM, C*m*, de sorte que, quand l'une d'elles est au point mort, l'autre a nécessairement dépassé ce point.

Tiges et varlets. — Le système d'une suite de tiges et de bras en bois (*Pl. XVII, fig.* 178) a été longtemps employé dans l'art des mines pour transmettre à une grande distance le mouvement produit par une chute d'eau [1]. Quand le terrain est ondulé, la transmission se compose de plusieurs tiges rigides successives, soutenues par des varlets A, B articulés d'autre part dans des supports fixes. Enfin des leviers coudés C, D, E servent à changer la direction du mouvement. Ces appareils, qui ferraillent beaucoup, développent des frottements considérables.

Renvois de sonnettes. — On peut encore rattacher à ce paragraphe le petit mécanisme des sonnettes d'appartement; les bielles sont remplacées par des fils de fer, lesquels doivent toujours être tirés.

[1] L'ancienne machine de Marly, établie en 1682, faisait ainsi marcher des pompes situées à une distance de 631m. Nous verrons dans le paragraphe suivant la véritable solution du problème de la transmission du mouvement à de grandes distances.

§ V. — Troisième genre. — Transmission par l'intermédiaire d'un lien flexible.

Les cordes, chaînes ou courroies, qu'on emploie dans l'industrie pour réaliser avec plus ou moins d'approximation la fiction géométrique d'un fil parfaitement flexible et inextensible, établissent une liaison entre deux corps dont les mouvements ont des directions tout à fait arbitraires.

C'est ainsi que, s'il s'agit d'imprimer à des corps pesants une vitesse verticale ascendante, comme pour tirer de l'eau d'un puits ou pour élever des matériaux à la partie supérieure d'un mur en construction, il serait peu commode pour un homme, et tout à fait impossible pour un cheval, d'exercer directement son action motrice dans la direction obligée de la vitesse que doit prendre le fardeau à élever. En suspendant celui-ci à l'extrémité d'une corde, on peut, au moyen d'appuis fixes convenablement disposés, amener l'autre bout de la corde dans la direction que l'on voudra; par exemple : l'homme s'arrangera de manière à tirer à peu près verticalement de haut en bas, le cheval sera attelé à des traits sensiblement horizontaux; et chaque agent se trouvera dans les conditions qu'une expérience bien des fois séculaire a fait adopter universellement comme les plus favorables au développement de sa puissance motrice.

Poulies. — Pour changer la direction d'une corde tirée par une de ses extrémités, on fait usage d'une poulie [1] dont la chape est accrochée à un point fixe (*Pl. XIX, fig.* 179) : on diminue ainsi considérablement le frottement qui se développerait si la corde était obligée de glisser sur une surface immobile [2]. Une pareille poulie, qui tourne autour d'un axe

[1] Une seule poulie suffit quand les directions des deux brins de la corde convergent en un point. Quand ces deux lignes ne se rencontrent pas, ou que le point de concours est trop éloigné, on trace une ligne arbitraire qui coupe les premières en deux points convenables, et on place une poulie près de chaque point d'intersection. (Poncelet, *Mécanique industrielle.*)

[2] Nous verrons dans la IVe Section qu'il se développe un frottement énorme quand une corde ou une courroie glisse sur une surface cylindrique fixe, ou, inversement, quand une jante cylindrique tourne sous l'étreinte d'un lien flexible immobile. On utilise cette propriété dans la construction du frein des grues, etc.

invariable, s'appelle *poulie fixe*. En vertu de l'inextensibilité de la corde (ce qui veut dire pratiquement : *dans les limites où cette inextensibilité pourra être admise*), la vitesse du point auquel est appliquée la puissance est égale à la vitesse du poids qu'on élève; la poulie fixe n'a donc pas pour effet de changer la grandeur de la vitesse d'un point, mais seulement la direction de cette vitesse : c'est ce qu'indique la dénomination de *poulie de renvoi*. Cette loi est vraie quels que soient le nombre et la disposition des poulies fixes.

Poulie mobile. — Une poulie est dite *mobile*, quand la chape qui porte son axe est elle-même en mouvement. Dans ce cas, le fardeau est accroché à la chape de la poulie (*Pl. XLV, fig.* 180); quant à la corde, arrêtée en un point situé verticalement au-dessus du puits, elle descend jusqu'à l'endroit où se trouve le poids à enlever, remonte après avoir embrassé la moitié de la circonférence de la poulie mobile, et s'infléchit, s'il y a lieu, une deuxième fois sur une poulie de renvoi, pour redescendre enfin aboutir dans la main du manœuvre qui remplit la fonction de moteur.

Pour avoir la loi des vitesses dans la poulie mobile, nous supposerons les trois brins verticaux : il est alors facile de voir que, pour une élévation donnée du poids, chacun des deux cordons qui le supportent a diminué d'une quantité égale, et que le brin qui reste libre s'est allongé de la somme de ces deux longueurs ou du double de l'une d'elles; donc la vitesse de l'extrémité courante est double de celle de l'axe de la poulie mobile. En multipliant le nombre des poulies mobiles, on arrive, comme nous le verrons, à réduire la vitesse du moteur dans une assez forte proportion.

Treuils et cabestans. — Souvent la corde destinée à tirer un corps, mobile dans une direction quelconque, s'enroule autour d'un cylindre monté sur deux tourillons; et le moteur, au lieu d'agir directement sur la corde, communique au cylindre un mouvement de rotation autour de son axe.

Cet axe est horizontal dans le *treuil*, vertical dans le *cabestan* : les deux appareils fonctionnent d'ailleurs identiquement de la même manière, comme organes de transmission de mouvement. En admettant toujours la parfaite inextensibilité

de la corde, la vitesse du corps auquel celle-ci est attachée est égale à la vitesse à la circonférence du treuil. La corde s'enroule par spires contiguës; et, si le treuil est cylindrique, le rapport de la vitesse d'un point de la partie rectiligne de la corde à la vitesse angulaire du treuil est constant [1].

Courroies sans fin.

Mais c'est principalement sous la forme de cordes ou courroies sans fin que l'industrie fait un grand usage des corps flexibles, pour établir une liaison entre deux solides en mouvement. Considérons seulement le cas où il s'agit de deux solides assujettis à tourner chacun autour d'un axe fixe, et supposons d'abord que les deux axes de rotation soient parallèles. La courroie s'enroule sur deux surfaces convexes fixées respectivement aux deux arbres tournants; elle présente entre ces deux surfaces une portion rectiligne qui doit rester constamment tendue : condition indispensable au fonctionnement de ce mode de transmission.

Nous avons vu dans la Ire Section (p. 118) comment on détermine le rapport des vitesses angulaires de deux solides rattachés par un fil tendu. Quels que soient les profils d'enroulement, le rapport qui nous occupe peut être constant, pourvu que la tangente commune aux deux profils, tangente qui représente la partie rectiligne de la courroie ou son prolongement, vienne couper la ligne des centres en un point fixe. Mais, en pratique, on prend toujours pour les sections des poulies deux cercles centrés sur les axes : ces courbes satisfont évidemment à la condition nécessaire et suffisante pour la constance du rapport des vitesses angulaires, et il résulte de la théorie que ce rapport est l'inverse du rapport des rayons des poulies.

Il suit de là que, pour établir une transmission de mouvement par courroies, entre deux arbres parallèles donnés, il

[1] Ces appareils où le rapport de vitesse est constant ont un grave inconvénient dans le cas où, comme dans certaines mines de charbon, le fardeau à extraire est lourd et la profondeur du puits considérable; en effet, le poids du câble acquiert une importance relative très notable, de sorte que la charge à élever varie beaucoup. Il y a alors avantage à s'adresser aux appareils à rapport variable, qui feront l'objet du Chapitre suivant.

suffit d'installer sur ces arbres deux poulies circulaires, dont les rayons soient dans une raison inverse du rapport des vitesses angulaires qu'on veut obtenir : ces rayons n'ont aucune relation avec la distance qui sépare les axes.

La courroie, convenablement tendue, fait un demi-tour environ sur chaque jante; elle forme, comme on dit, *courroie sans fin*, passant d'une poulie sur l'autre, et revenant sur la première se raccorder à son point de départ au moyen d'une boucle ou d'une suture. La courroie peut être droite ou croisée : c'est-à-dire que ses parties rectilignes peuvent être dirigées suivant les tangentes communes extérieures ou intérieures des deux cercles (¹); dans le premier cas, les deux mouvements ont lieu dans le même sens; dans le second, ils s'effectuent en sens inverse.

Poulies folles. — En général, dans une manufacture, la machine motrice communique directement le mouvement à un *arbre de couche* qui règne dans toute l'étendue du bâtiment, soit au plafond, soit sous terre, et qui transmet à son tour le mouvement, par un grand nombre de courroies, aux diverses machines-outils de l'atelier. Chacun de ces outils est confié à un ouvrier spécial, qui doit pouvoir le faire marcher ou l'arrêter à sa volonté (²), sans se préoccuper de ce qui se passe dans le reste de l'usine.

Pour cela, l'arbre de l'outil porte, outre la roue calée sur laquelle passe la courroie qui lui donne le mouvement, une

(¹) Il y a deux manières de croiser les courroies : l'une de ces manières laisse le plan de la courroie toujours parallèle aux axes de rotation, de sorte qu'au point où les deux brins se rencontrent, ils se présentent la tranche et tendent à se couper. L'autre manière consiste à retourner chaque brin, de façon que ce soit la même face de la courroie qui touche les deux poulies. Les deux brins se rencontrent comme précédemment ; seulement, à l'endroit de cette rencontre, tous deux sont perpendiculaires aux axes de rotation, et par conséquent ils ne se présentent pas la tranche, mais la face, et ne tendent nullement à se couper. Comme une courroie a toujours une face lisse et une face rugueuse, cette manière de croiser présente encore un autre avantage, en ce qu'elle permet que ce soit toujours la face rugueuse qui porte sur les poulies.

(²) L'action par laquelle une machine se trouve tout à coup mise en relation avec le moteur s'appelle *embrayage*, l'opération inverse se nomme *débrayage* ou *désembrayage*.

seconde poulie, dite *poulie folle*, de même diamètre que la poulie motrice, mais pouvant tourner indépendamment de l'arbre. Quand l'ouvrier veut arrêter sa machine, il fait passer la courroie sur la poulie folle au moyen d'une fourchette (¹). L'arbre, qui ne reçoit plus de force motrice, ne tarde pas à s'arrêter; mais la courroie continue son mouvement, et il suffit, par un mouvement inverse de la fourchette, de la faire repasser sur la poulie motrice, pour remettre immédiatement la machine en activité.

Une pareille transmission fonctionne avec une grande douceur, sans bruit, sans vibrations, et s'installe avec beaucoup plus de facilité qu'un engrenage : aussi les courroies sont-elles fort employées par l'industrie. Seulement, comme elles sont sujettes à glisser sur les poulies, quand la résistance est trop grande, elles ne peuvent convenir aux cas où la condition principale de la transmission est une relation constante bien exacte entre les mouvements des deux arbres.

D'ailleurs, pour peu qu'une courroie soit tendue, il faut, comme nous l'avons déjà dit, une force énorme pour vaincre son frottement sur un cylindre fixe, de sorte que le danger du glissement sera en général peu important, excepté pour les mécanismes qui exigent une grande précision. Il y a plus : la seule possibilité de ce glissement, maintenu dans des limites convenables par une tension modérée, est une propriété très précieuse du mode de liaison que nous étudions, quand la résistance est sujette à éprouver brusquement des variations importantes : le glissement qui se produit alors est une garantie contre des accidents plus graves.

Des appareils nommés *tendeurs* servent à régler la tension et à lui donner une valeur suffisante pour empêcher le glissement, sans toutefois la rendre assez forte pour fatiguer les arbres et leurs supports. On emploie assez généralement une poulie, dite *poulie de tension*, dont la chape est fixée à l'une des branches d'un levier de forme quelconque, tournant autour d'un axe fixe. L'autre branche du levier est chargée de

(¹) Il faut remarquer que la fourchette doit toujours agir sur le brin qui arrive sur la poulie et non sur celui qui la quitte; nous verrons l'explication de ce fait.

poids qui pressent la poulie contre la courroie. Il est facile de régler la tension en faisant varier la distance de la charge au point d'appui du levier.

Forme des poulies pour courroies. — On pourrait donner aux poulies qui portent des courroies la forme cylindrique : on s'opposerait au déplacement latéral en terminant la poulie de chaque côté par une joue de plus grand rayon que la jante proprement dite.

Il vaut mieux former la poulie de deux troncs de cône accolés par leurs grandes bases, ou, en général, prendre pour la génératrice de la surface de la jante un profil convexe. Pour justifier cette forme, considérons une courroie placée sur une poulie conique (*Pl. XVIII, fig.* 181). Le côté le plus rapproché du sommet tourne moins vite que l'autre; par suite, la courroie tend à se placer obliquement, et le brin qui s'enroule cherche à se rapprocher de la base du cône; par conséquent, avec la forme biconique, la courroie se maintiendra d'elle-même au milieu de la poulie. Sur une poulie plate munie de deux rebords, on aurait, au contraire, des mouvements irréguliers de la courroie contre ces rebords.

Cordes et chaînes.

C'est presque toujours aux courroies qu'on a recours comme organe flexible de transmission de mouvement. Les cordes ne se rencontrent guère que dans certains mécanismes grossiers : les poulies sont alors anguleuses et pourvues de deux rebords. Quant aux poulies de renvoi, pour lesquelles il n'y a pas lieu de se préoccuper du glissement, leur section est en forme de gorge proprement dite, ou demi-circulaire.

Les câbles en chanvre ou en aloès sont au contraire d'un usage très fréquent dans la marine et dans l'art des mines. Un câble d'extraction est généralement plat comme une courroie; il est formé de quatre, cinq ou six aussières cousues ensemble, et s'enroule sur une bobine, de manière que les spires se recouvrent successivement.

Les chaînes en fer sont assez peu usitées, sauf dans quelques circonstances spéciales.

L'industrie emploie la chaîne ordinaire : la *chaîne à la Vaucanson* et la *chaîne de Galle*. Les poulies qui reçoivent ces diverses chaînes sont dentées (*fig.* 182), car on ne saurait compter sur l'adhérence des surfaces pour prévenir le glissement; en conséquence, l'un des brins de la chaîne seulement est tendu; l'autre pend librement au-dessous des poulies. L'inconvénient de toutes les chaînes, c'est que, par suite de la tension, les anneaux s'allongent, et la chaîne ne cadre plus avec la poulie : on entend alors une succession de chocs, chaque fois qu'un anneau est saisi par une des saillies de la roue.

Câbles en fer. — Les câbles en fer s'emploient aujourd'hui très avantageusement, sous forme de câbles sans fin, pour transmettre le mouvement à de grandes distances : c'est-à-dire à des distances pouvant varier de 100 à 1500^m, et même au delà. Ces câbles sont formés de fils de fer enroulés en hélice, et renferment généralement une âme en chanvre.

Tous les 150^m environ, il faut soutenir les deux brins du câble au moyen de poulies en bois ou en fonte (*fig.* 183). La gorge de ces poulies-supports est plate, et recouverte d'une courroie dont les extrémités viennent s'arrêter dans l'intérieur de la poulie, au moyen d'une ou deux entailles. Mais la courroie, laminée par la pression du câble, est exposée à se détendre, par suite à s'user rapidement; et il est préférable, d'après M. Hirn, l'inventeur de ces nouvelles transmissions, de garnir la gorge de la poulie par de la gutta-percha matée dans une entaille en queue d'aronde (*fig.* 183 *bis*). Le câble se promène librement d'une joue à l'autre de la poulie, sur laquelle il est maintenu par deux rebords.

Il semble que la roideur du câble dépende plutôt du diamètre du fil de fer que de celui du câble lui-même : aussi a-t-on adopté comme règle pratique que le diamètre des poulies doit être 2000 fois le diamètre du fil de fer employé pour la fabrication du câble.

La tension du câble est produite par la partie qui forme librement chaînette au-dessous des poulies (*fig.* 184). Cette portion n'est qu'une fraction du brin inférieur du câble, quand les deux poulies extrêmes ne sont pas au même niveau : on doit tenir compte de cette circonstance dans le calcul de la longueur à donner au câble.

Liaison de deux poulies dont les plans ne coïncident pas.

Quand on veut relier au moyen d'une courroie deux arbres tournants qui ne sont pas dans le même plan, il faut en général, outre les poulies de transmission calées sur chacun des deux arbres, employer deux poulies fixes de renvoi (*fig.* 185).

Soient A et B les poulies calées sur les arbres donnés, C l'intersection des plans de ces poulies supposées sans épaisseur : il faut, pour que la courroie ne soit pas sollicitée à se détacher des deux jantes, qu'un brin rectiligne quelconque soit dans le plan de chacune des deux poulies qu'il réunit. On atteint ce but en installant deux poulies de renvoi D, E, auprès de l'intersection C, de façon que le brin AD soit dans le plan de la poulie A, que celui qui va de D en B soit dans le plan de la poulie B, enfin que D soit dans le plan des deux lignes AD et DB. De même pour la poulie E. De cette manière, chaque poulie est dans le plan des deux brins de courroie qui la touchent, et la transmission fonctionne indifféremment dans les deux sens.

Quand cette dernière condition n'est pas imposée, on peut supprimer les poulies de renvoi, en ayant égard aux considérations suivantes. L'observation prouve que le brin qui arrive sur une poulie doit nécessairement être dans le plan de cette poulie, tandis que le brin qui quitte la poulie peut sans inconvénient sortir de ce plan [1]. Partant de là, soient A et B les deux axes donnés (*Pl. XIX, fig.* 185 *bis*), MN la perpendiculaire commune à ces axes; prenons *mp*, *nq* perpendiculaires à A, B, et respectivement égaux aux rayons des deux poulies, de manière que la ligne *mn*, parallèle à la perpendiculaire commune, soit tangente à la fois aux deux cylindres décrits autour des axes avec les rayons respectifs des poulies; enfin plaçons la courroie comme l'indique la figure : nous aurons une disposition dans laquelle le mouvement ne peut avoir lieu que dans le sens indiqué par les flèches. Dans l'autre sens, la courroie tomberait immédiatement.

(1) C'est pour cela qu'on n'obtiendrait aucun résultat si, contrairement à la règle que nous avons donnée, on faisait agir une fourchette d'embrayage sur le deuxième brin et non sur le premier.

Influence de l'allongement des courroies sur le rapport des vitesses [1].

On comprend facilement que, dans une transmission par courroie, le brin conduisant possède une tension T, supérieure à la tension t de l'autre brin. Or la matière de la courroie est élastique et s'allonge proportionnellement à la tension qu'elle supporte. Soit l la longueur de courroie qui s'enroule dans un temps θ sous la tension t sur la poulie conduite : la même quantité, lorsqu'elle se déroule sous la tension T, est représentée par une longueur plus grande L; le rapport de L à l est donné par la relation

$$\frac{L}{l} = \frac{1+\alpha T}{1+\alpha t},$$

α étant le coefficient d'allongement de la courroie [2].

Or, il faut, pour qu'il n'y ait pas accumulation de la matière de la courroie d'un certain côté, que la même quantité de cette matière passe dans le même temps sur les deux poulies; donc les longueurs qui se développent simultanément de la poulie motrice et de la poulie conduite sont dans le rapport de L à l; et l'on a, au lieu de la relation admise

$$\omega R = \omega' R',$$

l'équation

$$\frac{\omega R}{\omega' R'} = \frac{L}{l} = \frac{1+\alpha T}{1+\alpha t},$$

R, ω étant le rayon et la vitesse angulaire de la poulie motrice, R′, ω' les quantités analogues pour la poulie conduite.

Le rapport des vitesses angulaires n'est donc pas tout à fait réciproque du rapport des rayons. En calculant le diamètre des

(1) Note de M. Kretz, ingénieur des tabacs (*Annales des Mines*, 6e série, t. I, p. 73).

(2) Si S est la section de la courroie en millimètres carrés, on a, suivant que la courroie est neuve ou qu'elle a déjà servi quelque temps,

$$\alpha = \frac{0^m,01}{S} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{0^m,16}{S}.$$

poulies par la règle ordinaire, on aurait, après plusieurs transmissions de mouvement, une vitesse notablement inférieure à la vitesse calculée. L'expérience a montré qu'il faut, pour tenir compte de la circonstance signalée par M. Kretz, augmenter d'un cinquantième le diamètre des poulies motrices, ou réduire dans la même proportion le diamètre des poulies conduites.

Appendice. — Transmission par l'intermédiaire d'un liquide.

C'est au paragraphe actuel qu'il convient de rattacher les machines dans lesquelles la communication du mouvement s'effectue par l'interposition d'un corps liquide.

Presse hydraulique. — La presse hydraulique, dont l'invention est due à Pascal et dont les applications prennent un développement de jour en jour plus considérable, se compose de deux corps de pompe cylindriques réunis par un tuyau : un piston se meut dans chacun des deux cylindres. Quand l'un des pistons s'enfonce, il refoule une certaine masse d'eau qui passe dans le deuxième corps de pompe, au moyen du tuyau de communication : par suite, le piston correspondant se soulève. Or, en vertu de l'incompressibilité du liquide, le volume contenu dans le premier cylindre a diminué d'une quantité précisément égale à l'augmentation de volume du second; si donc S et S' sont les sections des deux cylindres, v et v' les vitesses des deux pistons, on a

$$vS = v'S'.$$

Balancier hydraulique. — Quand les deux corps de pompe ont même diamètre, les vitesses des deux pistons sont les mêmes : l'appareil a simplement pour effet d'obliger ces deux pistons à prendre simultanément des vitesses égales, et généralement de sens contraire. Il porte alors le nom de *balancier hydraulique*.

CHAPITRE III.

COMBINAISONS DES ORGANES A RAPPORT DE VITESSES CONSTANT : ROUES, TAMBOURS ET POULIES.

§ VI. — Trains ou équipages ordinaires de roues dentées et de poulies.

Il arrive rarement qu'on puisse, dans une machine, établir une liaison directe entre le récepteur et l'outil, par le moyen d'un des organes simples dont nous avons exposé la théorie dans le Chapitre précédent. Le plus souvent on est obligé de combiner plusieurs engins convenablement choisis, et c'est ainsi seulement qu'on parvient à résoudre les divers problèmes relatifs à la transmission uniforme du mouvement, dans les conditions les plus variées.

Exposons brièvement les principes généraux qui servent de guides aux mécaniciens dans l'étude du projet d'une machine complexe [1].

Équipages de roues dentées. — Les plus petits pignons employés dans l'horlogerie sont des pignons de 6 ailes (il est même préférable de ne pas descendre au-dessous de 8); quant aux roues, on leur donne rarement plus de 120 à 150 dents.

Le rapport des vitesses de deux arbres liés par un engrenage simple se trouve donc pratiquement renfermé dans des limites assez étroites [2]. Pour obtenir un rapport de vitesses quelconque, il faut procéder de la manière suivante.

Le premier arbre (*Pl. XLV, fig.* 189) porte un pignon a, lequel engrène avec la roue A, fixée sur un arbre intermé-

[1] Cette partie du Cours n'est qu'un extrait abrégé du Chapitre VII des *Principles of Mechanism.*

[2] On ne gagnerait rien, comme nous l'avons vu, sous le rapport de la vitesse, à interposer entre ces deux arbres une ou plusieurs roues du genre de celles que nous avons appelées *parasites*, roues dont l'effet est seulement de changer le sens du mouvement transmis.

diaire; sur ce même arbre intermédiaire se trouve un deuxième pignon b, qui transmet à son tour le mouvement à l'arbre de la roue B : cette roue sera, si l'on veut, la roue extrême du train que nous considérons.

Adoptons l'usage de représenter le nombre des dents d'une roue par la lettre même qui nous sert à désigner cette roue : le rapport de la vitesse de l'arbre intermédiaire à celle du premier arbre sera, en tenant compte du changement de sens,

$$-\frac{a}{A};$$

on aura de même, du dernier arbre à l'arbre intermédiaire, le rapport

$$-\frac{b}{B}.$$

Donc le rapport des vitesses des arbres extrêmes est égal à la fraction

$$\frac{ab}{AB}.$$

S'il y avait un plus grand nombre d'arbres, on arriverait à réduire la vitesse dans une proportion plus considérable, le rapport des vitesses extrêmes étant toujours déterminé de la même manière.

Canons. — Les arbres (a) et (B) sont quelquefois concentriques : c'est le cas qui se présente dans la minuterie des horloges; l'un de ces arbres est creux, et prend le nom de *canon*. Il tourne sur l'autre à frottement doux.

On peut aussi relier deux roues dont les arbres sont concentriques, en n'employant qu'une seule roue d'angle (*fig.* 190) : l'arbre intérieur et le canon tournent alors en sens inverse, tandis qu'avec le dispositif de la *fig.* 189 les deux rotations sont de même sens [1].

[1] Il faut remarquer que la roue (α) de la *fig.* 190 est une roue parasite, de sorte que le rapport des vitesses des deux roues a et A dépend uniquement du rapport $\frac{a}{A}$. Rien n'empêche d'ailleurs d'avoir sur l'arbre intermédiaire, au lieu de la roue unique α, une roue B et un pignon b; le rapport des vitesses serait alors $-\frac{ab}{AB}$.

On appelle *raison d'un système de rouages* le quotient ε de la vitesse du dernier arbre par celle du premier : soit

$$\varepsilon = \frac{a.b.c\ldots}{A.B.C\ldots};$$

c'est le rapport du produit des nombres de dents des pignons au produit des nombres de dents des roues, quel que soit l'ordre dans lequel ces divers éléments se trouvent disposés. Quand le train comprend une vis sans fin, celle-ci compte pour un pignon à une seule dent (à n dents si la vis est à n filets).

On représente un train de roues dentées sans figures, en indiquant seulement les axes géométriques des rouages, et inscrivant sur ces axes les nombres de dents correspondants : on a soin de placer l'un au-dessous de l'autre les nombres qui se rapportent à deux roues engrenant ensemble.

Le diagramme suivant représente une horloge à secondes :

Roue d'échappement.	30 — 6 ———					Aig. des sec.
Roue moyenne	45 — 6					
Roue motrice		48 — 25 — 6				
			25 — —			Aig. des min.
				72 —		Aig. des h.

Le mouvement est communiqué de la roue motrice à la roue d'échappement par le moyen de deux pignons de 6 dents, et de deux roues comptant l'une 45, l'autre 48 dents.

La roue d'échappement est réglée à raison d'un tour par minute, et c'est sur l'arbre de cette roue qu'est fixée l'aiguille des secondes. Il résulte du Tableau que la roue motrice fait un tour par heure, car le rapport de sa vitesse à celle de la roue d'échappement est donné par la fraction

$$\varepsilon = \frac{6 \times 6}{45 \times 48} = \frac{1}{60}.$$

Enfin cette même roue motrice transmet encore le mouvement, d'une part à l'aiguille des minutes au moyen de deux roues de 25 dents, d'autre part à l'aiguille des heures au moyen d'un pignon de 6 dents et d'une roue de 72.

Il ne suffit pas d'avoir la valeur absolue du rapport des rotations des arbres extrêmes d'un train : il faut encore connaître la relation qui existe entre les sens des mouvements de ces arbres ([1]). La règle est extrêmement simple, toutes les fois qu'on a seulement affaire à des engrenages cylindriques extérieurs ou intérieurs; mais chaque paire de roues coniques, et chaque vis sans fin, nécessite un examen spécial. Dans tous les cas, avec un peu d'attention, on trouvera sans peine les lois de la transmission du mouvement de rotation, dans un équipage de roues dont tous les axes sont fixes.

Notions sur le calcul des rouages. — Quand on se propose au contraire d'établir un train, propre à réaliser un rapport de vitesses donné, le problème qui consiste à déterminer le nombre des arbres intermédiaires et les proportions des diverses roues présente dans la plupart des cas de très grandes difficultés, et ne peut être résolu que par une série de tâtonnements souvent longs et pénibles.

Voici quelques exemples de calculs de ce genre.

Horloge à secondes. — Pour relier, dans une horloge, l'aiguille des secondes à celle des minutes, il est indispensable de recourir à un arbre intermédiaire, afin d'éviter à la fois l'emploi d'une roue à dents trop nombreuses, et l'engrenage intérieur qui serait nécessaire si l'on voulait, conformément à l'usage, faire tourner les deux aiguilles dans le même sens.

Nous avons indiqué tout à l'heure le train

$$\boxed{\begin{array}{lcr} 6 & & \\ 45 & \text{———} & 6 \\ & & 48 \end{array}}$$

qui fournit une première solution du problème.

([1]) Quand ces deux arbres sont parallèles, il est commode d'affecter ε du signe + ou du signe −, selon que les deux rotations sont de même sens ou de sens contraires.

Mais, les pignons de 6 ailes étant assez défectueux, il est préférable de ne pas descendre au-dessous de 8 ailes, et d'employer, par exemple, l'un des deux trains :

$$\boxed{\begin{array}{lcr} 8 & & \\ 60 & \text{———} & 8 \\ & & 64 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{lcr} 12 & & \\ 96 & \text{———} & 14 \\ & & 105 \end{array}}$$

dont la raison est aussi égale à $+\frac{1}{60}$.

Pour établir un système de rouages, il est indispensable d'avoir le rapport ε sous la forme d'une fraction rationnelle

$$\frac{a.b.c\ldots}{A.B.C\ldots},$$

dont les deux termes soient décomposés en facteurs compris entre les limites que nous avons indiquées; et par conséquent, si l'un des termes de ε possède un facteur premier considérable, on est obligé de se contenter d'une approximation.

Horloge lunaire. — Considérons deux aiguilles, l'une marquant les heures sur un cadran ordinaire, l'autre faisant un tour complet dans la durée d'une lunaison : soit $29^{j}\,12^{h}\,44^{m}$. On a

$$\varepsilon = \frac{720}{42524} = \frac{180}{10631},$$

et 10631 est un nombre premier.

Le rapport

$$\varepsilon' = \frac{720}{42524+1} = \frac{8\times 8}{54\times 70}$$

correspond à un train facile à exécuter, lequel est en erreur d'une minute par lunaison.

Méthode des fractions continues. — Quand les deux termes du rapport ε sont de très grands nombres, on développe ce rapport en fraction continue; et on cherche, parmi les réduites successives, une fraction fournissant à la fois une décomposition convenable et une approximation suffisante. Cette méthode, indiquée pour la première fois par Huygens, est basée sur la propriété qu'ont les réduites d'exprimer une approximation donnée avec les plus petits entiers possibles.

Application. — Supposons qu'on veuille construire une horloge donnant à la fois le temps sidéral et le temps moyen.

L'un des procédés pour arriver à ce résultat consiste à placer derrière l'aiguille des heures un cadran mobile plus petit que le cadran ordinaire, et concentrique avec lui. L'aiguille fait sa révolution en 24 heures solaires, et marque le temps moyen sur le cadran fixe; elle indiquera en même temps l'heure sidérale sur le cadran mobile, si l'on s'arrange de manière à donner à celui-ci un mouvement rétrograde de $3^m 56^s,555 = 236^s,555$ par jour moyen.

Comme le cadran contient 86400 secondes, le rapport de la vitesse de l'aiguille à celle du cadran est

$$\frac{86400000}{236555} = 60 \times \frac{288000}{47311}.$$

La fraction $\frac{288000}{47311}$, réduite en fraction continue, donne les résultats suivants :

Quotients...	6,	11,	2,	3,	1,	152,	...
Réduites....	$\frac{6}{1}$,	$\frac{67}{11}$,	$\frac{140}{23}$,	$\frac{487}{80}$,	$\frac{627}{103}$,	....,	...

La réduite

$$\frac{627}{103} = \frac{3 \times 11 \times 19}{103} = \frac{66 \times 76}{103 \times 8}$$

fournit une grande approximation.

L'important n'est pas précisément d'avoir de petits nombres pour les deux termes de la fraction qui exprime la raison d'un rouage à établir: il faut surtout que ces nombres soient décomposables en facteurs. Aussi, quand on ne trouve pas de fraction satisfaisante parmi les réduites, faut-il avoir recours à des fractions moins simples, parmi lesquelles il s'en rencontrera souvent de plus avantageuses pour l'objet qui nous occupe.

Soient $\frac{p}{q}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ deux réduites consécutives (lesquelles comprennent, comme on sait, la valeur exacte de la fraction continue); la différence de ces deux réduites s'exprime par une fraction qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le produit des dénominateurs q, q_1. C'est uniquement à cette circonstance que les réduites des fractions continues doivent leur propriété arithmétique fondamentale; et du moment que deux fractions quelconques $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ satisfont à la relation

$$(1) \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \pm \frac{1}{bd},$$

toute fraction comprise entre celles-ci aura nécessairement des termes plus considérables. La réciproque de cette proposition est vraie.

Cela posé, quel que soit le procédé par lequel on soit arrivé à la découverte des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, il est facile de reconnaître que la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ jouit, par rapport à chacune de celles-ci, de la propriété qu'exprime l'équation (1) : donc elle est la plus simple des fractions intermédiaires, capables de représenter le rapport donné. M. Brocot [1] a fondé sur cette remarque une méthode élémentaire pour le calcul des rouages.

Cette méthode, qui n'exige pas la réduction préalable de la raison ε en fraction continue, est basée sur l'emploi d'une Table dans laquelle figurent toutes les fractions dont les deux termes sont inférieurs à 100, réduites en décimales et classées par ordre de grandeurs. Un rapport quelconque tombe nécessairement entre deux fractions contenues dans la Table, et ces deux fractions sont évidemment les fractions ordinaires les plus simples, entre lesquelles le rapport donné se trouve compris. En ajoutant ces premières fractions terme à terme, on aura une expression moins simple, mais plus approchée,

---

[1] *Calcul des rouages par approximation.* Nouvelle méthode par Achille Brocot, horloger. Paris et Londres, 1862.

du même rapport ; et on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu une fraction satisfaisante.

Enfin, quand l'exactitude rigoureuse est indispensable, on est obligé de renoncer aux équipages de roues tournant sur des axes fixes ; il faut alors introduire dans le train des roues à mouvement épicycloïdal plan ou sphérique, combinaisons auxquelles nous arrivons dans un instant.

Équipages de poulies.

Quand on ne peut pas transmettre directement par une courroie sans fin le mouvement pris sur l'arbre de couche à l'arbre d'un outil, on a recours à un ou plusieurs arbres intermédiaires. Soient r et R les rayons des poulies calées sur les deux premiers arbres ; on a, pour le rapport des vitesses angulaires de ces poulies, la quantité

$$\frac{r}{R},$$

affectée du signe + ou du signe —, suivant que la courroie est droite ou croisée.

Le deuxième arbre porte une seconde poulie (r_1), reliée par une nouvelle courroie à une poulie (R_1) calée sur le troisième arbre, et ainsi de suite. La raison du train est donnée par une formule

$$\varepsilon = \frac{r.r_1.r_2\ldots}{R.R_1.R_2\ldots},$$

tout à fait analogue à la formule des roues dentées. Seulement, les rayons des poulies pouvant être dans des rapports quelconques, on n'aura jamais de difficultés arithmétiques du genre de celles que nous avons rencontrées dans le calcul des rouages. Les poulies de renvoi, semblables aux roues parasites, n'ont aucune influence sur les rapports de vitesses des arbres entre lesquels elles sont installées.

Des moufles et palans.

Les *moufles* ou *palans*, appareils fort usités, principalement dans la marine, se composent d'un certain nombre de poulies

dont les axes sont portés par deux chapes, l'une fixe et l'autre mobile. Ces chapes affectent diverses dispositions (*fig.* 188) ; mais les propriétés essentielles de l'organe sont les mêmes dans tous les cas.

Le fardeau qu'il s'agit de soulever est attaché à la moufle mobile : un cordon, fixé en un point de l'une des deux moufles, circule de l'une à l'autre en passant alternativement sur une poulie fixe et sur une poulie mobile, jusqu'à ce que l'extrémité libre se détache de la dernière poulie fixe pour aboutir, sous le nom de *garant*, dans la main du manœuvre qui cherche à soulever le poids.

Pour avoir le rapport des vitesses, il suffit de compter combien il y a de cordons réunissant deux poulies. En effet, quand la moufle mobile s'est élevée d'une certaine quantité, chacun des cordons qui la supportent s'est raccourci d'autant, et le garant s'est allongé de la somme de tous ces raccourcissements. Si donc on désigne par V la vitesse d'un point du garant, par v celle de la chape mobile, on a la relation

$$V = nv, \tag{1}$$

n étant le nombre des cordons qui vont d'une chape à l'autre :

Dans un palan, le rapport de la vitesse du point auquel est appliquée la résistance à la vitesse du point où s'exerce l'effort du moteur est égal à l'unité divisée par le nombre des cordons.

Équipages de moufles. — Considérons deux palans, donnant lieu chacun à une équation de la forme (1),

$$V = nv,$$
$$V' = n'v' ;$$

on pourra, en combinant convenablement ces deux palans, obtenir les rapports nn' ou $\frac{n}{n'}$, selon qu'on fera $v = V'$, ou $v = v'$, c'est-à-dire selon qu'on attachera la deuxième chape mobile au premier garant ou à la première chape mobile. On voit que l'une de ces dispositions donne naissance à des rapports fractionnaires.

§ VII. — Mouvements différentiels.

Les équipages ordinaires de roues dentées, vis et poulies, n'offrent que des ressources insuffisantes, quand on veut que le rapport des vitesses ait une valeur extrêmement faible. Il faut alors avoir recours à des artifices particuliers, dont le principe est d'avoir deux engins en quelque sorte opposés, dont l'un défasse à peu de chose près ce que l'autre a fait; le résultat définitif est la différence des effets dus à chacun des deux organes agissant séparément, et il est facile de rendre cette différence aussi petite que l'on voudra.

Les combinaisons de ce genre sont connues sous le nom de *mouvements différentiels :* en voici quelques exemples.

Treuil chinois (*fig.* 191). — Le corps du treuil se compose de deux cylindres de même axe, et de rayons R, r, placés à la suite l'un de l'autre et liés d'une manière invariable. Le poids à élever est accroché à la chape d'une poulie mobile, et les deux cordons qui supportent cette poulie mobile viennent s'enrouler en sens inverse sur les deux parties du treuil.

Si l'on tourne la manivelle de telle sorte que la corde s'enroule sur le plus gros des deux arbres et se déroule du plus petit, chaque révolution raccourcit l'un des brins rectilignes d'une quantité égale à $2\pi R$, et allonge l'autre de $2\pi r$. On gagne ainsi $2\pi(R-r)$, ce qui correspond pour le fardeau à une élévation représentée par

$$2\pi\frac{R-r}{2},$$

absolument comme si l'on avait un treuil ordinaire, de rayon égal à la demi-différence des rayons du treuil chinois.

Seulement, quand on emploie le dernier système, on peut aisément rendre $R-r$ aussi petit qu'on le veut, tandis qu'on ne saurait diminuer par trop le rayon d'un treuil, de crainte de l'affaiblir outre mesure. Malgré cet avantage, le treuil chinois n'est jamais employé, à cause de la quantité de corde qu'il exige pour produire une élévation donnée.

Palan différentiel. — Cet inconvénient est évité dans le

palan différentiel de Wilson (*Pl. XLX, fig.* 188 *bis*). Imaginons une sorte de treuil chinois, dans lequel les deux cylindres sont remplacés par deux poulies légèrement inégales, réunies dans une même chape qui figure la moufle fixe d'un palan.

Les deux bouts de la corde (qu'il n'est plus possible d'arrêter à la manière ordinaire) viennent se réunir pour former une deuxième boucle, qui pend librement au-dessous du crochet de la poulie mobile, dont la disposition n'a pas changé. Le frottement suffit pour empêcher le glissement sur les poulies.

Vis différentielle de Prony. — Considérons un cylindre servant de noyau à deux vis de pas différents. Les écrous de ces deux vis étant maintenus par des guides dans une direction invariable, leur écartement varie évidemment, pour chaque tour, d'une quantité égale à la différence ou à la somme des deux pas, selon que les deux vis sont de même sens ou de sens contraire.

Dans la disposition imaginée par M. de Prony (*fig.* 192), l'un des écrous est formé de deux pièces fixes E, E; l'autre, E', est animé d'un mouvement aussi lent qu'on le veut.

Les deux vis sont inverses dans le tendeur d'attelage des wagons : elles équivalent géométriquement à une vis unique de pas double, tout en offrant plus de sécurité au point de vue des ébranlements qui pourraient desserrer un pas trop allongé.

Machine à aléser (*fig.* 193). — Le cylindre qu'on se propose d'aléser est fixe, et l'outil doit en parcourir lentement toute la surface intérieure. Il reçoit à cet effet un mouvement de rotation, qu'il s'agit de combiner avec un déplacement longitudinal très lent. Or l'arbre de cet outil présente une partie filetée K, laquelle pénètre dans un écrou E; et, si cet écrou était fixe, la rotation de l'outil ferait avancer celui-ci pour chaque tour d'une quantité égale au pas de la vis.

Au lieu de cela, l'écrou tourne lui-même dans le même sens que la vis, mais un peu moins vite. De cette façon, pour une rotation absolue de la vis égale à un tour, la rotation relative n'est qu'une fraction de tour, déterminée par la différence des vitesses angulaires de la vis et de l'écrou : à cette différence correspond une avance du burin, représentée par la même fraction du pas.

Voici le Tableau du rouage différentiel qui transmet le mouvement de la vis à l'écrou :

Vis —— 36.		40 ═══ Écrou,	
	37 —— 36		

L'arbre auxiliaire est carré : ce qui permet à la roue A' de tourner solidairement avec lui, tout en glissant longitudinalement à mesure que la roue A s'avance par l'effet du mouvement de progression de la vis.

C'est par un artifice analogue que l'arbre de l'outil reçoit son mouvement de rotation de l'engrenage fixe $\boxed{\frac{m}{M}}$.

Compteur de Wollaston. — Il faut encore citer, parmi les mécanismes à mouvements différentiels, le compteur de Wollaston, que nous avons décrit (p. 220). Enfin, on rattache assez souvent à cette catégorie les rouages à mouvement épicycloïdal, auxquels nous consacrons le paragraphe suivant.

§ VIII. — Théorie des trains épicycloïdaux.

On appelle *train épicycloïdal* un système de rouages dont les axes sont portés par un châssis, mobile autour d'un centre fixe [1]. Les deux exemples suivants sont choisis parmi les plus simples.

Premier exemple (*fig.* 194). — Le mécanisme complet se compose de deux roues concentriques et d'une troisième roue dont l'axe A est porté par le levier OL, mobile autour du point O. La roue A, qui constitue le train épicycloïdal proprement dit, engrène extérieurement avec la roue C, et intérieurement avec la grande roue B.

Si l'une des roues B et C est immobile, et qu'on fasse tour-

(1) Graham (1715) est le premier qui ait cité quelques dispositifs de ce genre, sans donner d'ailleurs aucune indication générale sur leur théorie et leurs principales propriétés (Willis, p. 261).

ner le levier OL, la roue A prend un mouvement épicycloïdal sur la roue fixe, en entraînant avec elle la roue mobile. Les colliers à roulettes des arbres de grues (p. 182) représentent, à la denture près, un système de ce genre : la roue extérieure est fixe, l'arbre tient la place de la roue centrale C, et son mouvement détermine celui des galets ainsi que la rotation de la couronne ou châssis qui porte leurs arbres (ce châssis se trouve représenté dans la figure actuelle par le levier OL).

Si la roue B n'était pas fixe, le mouvement du châssis dépendrait à la fois des rotations des deux roues extrêmes, conformément aux lois générales que nous allons exposer tout à l'heure.

Deuxième exemple (*fig.* 195). — Deux roues coniques égales, A, B, tournant autour de deux arbres concentriques, engrènent avec un pignon C, monté sur le levier mobile OM. Le mouvement épicycloïdal sphérique du pignon jouit des mêmes propriétés que le mouvement épicycloïdal plan précédemment considéré ; et la combinaison très simple des trois roues A, B, C est susceptible, comme nous le verrons, d'un grand nombre d'applications intéressantes.

Nous avons déjà rencontré cette disposition dans les supports des plaques tournantes. La roue B étant fixe, si l'on imprime un mouvement de rotation à la roue A [1], on oblige le pignon C à tourner autour de l'essieu OM, qui se déplace lui-même avec une vitesse égale à la moitié de la vitesse de la roue.

Comme dans notre premier exemple, on pourrait n'avoir aucune roue fixe.

Quand un train épicycloïdal se compose de plusieurs roues, les rapports des vitesses de celles-ci sont les mêmes que si leurs axes étaient fixes. Les rouages intermédiaires ont pour unique objet de relier les roues situées aux deux extrémités du système mobile [2] ; et nous allons montrer que, quelle

(1) Pour les grandes plaques, on agit de préférence sur l'un des galets C, au moyen d'une manivelle, folle sur l'arbre M.

(2) L'une de ces roues au moins doit être centrée sur le point fixe du châssis (nous verrons tout à l'heure pourquoi).

que soit la disposition du train, il existe une relation linéaire entre les rotations absolues de ces roues extrêmes et la rotation propre du châssis.

Théorie générale des trains épicycloïdaux. — Soit OA (*fig.* 196) le châssis tournant, dont la forme est absolument indifférente. L'une des roues extrêmes a son centre au point O, sur l'axe de rotation du châssis. L'autre peut être également concentrique au châssis, comme dans les deux exemples précédents : en général, elle aura son axe fixé en un point mobile A. Désignons par m la vitesse angulaire absolue de la roue O autour de son axe, par n la vitesse de la roue A, par rapport à son axe et à deux autres axes coordonnés Ax, Ay, situés dans son plan et conservant des directions invariables [1].

Pour nous rendre compte de l'action des rouages mobiles, interposés entre notre première et notre dernière roue, supposons le châssis fixe et calculons par les règles ordinaires la *raison* ε du train lié à ce châssis (c'est-à-dire le quotient, pris avec un signe convenable, de la vitesse relative de la dernière roue par la vitesse relative de la première). Pour fixer les idées, nous supposerons les rotations positives; mais notre équation subsistera, par suite de la généralité propre aux formules algébriques, quels que soient les signes des quantités qui y figurent.

Soit a la vitesse angulaire du châssis OA autour du point O : la rotation de la roue O par rapport à ce châssis est $m-a$, celle de la roue A est $n-a$. On a donc, d'après la définition même de ε,

$$\varepsilon=\frac{n-a}{m-a}. \tag{1}$$

Cette formule renferme toute la théorie des trains épicycloï-

[1] Je crois devoir appeler l'attention sur la manière dont la signification de n est déterminée, parce qu'on oublie quelquefois la nécessité de rapporter toute rotation autour d'un axe mobile à un système bien défini d'axes coordonnés, par rapport auxquels on compte les angles de rotation. D'ailleurs, nous aurons ici à considérer également la rotation de la roue A par rapport à un système d'axes mobiles tout différent de xAy, système qui se composera de l'axe de la roue, de la droite OA et d'une perpendiculaire à cette droite.

daux : c'est à R. Willis qu'on doit d'avoir ramené cette théorie à un tel degré de simplicité.

Discussion de la formule générale. — Considérons d'abord les cas particuliers où l'une des roues extrêmes est fixe.

1° La roue O est fixe : en faisant dans l'équation générale (1)

$$m=0,$$

il vient

$$\varepsilon=-\frac{n-a}{a},$$

d'où

$$a=\frac{n}{1-\varepsilon},\qquad n=a(1-\varepsilon). \tag{2}$$

Ces relations font connaître la rotation du châssis, quand celle de la dernière roue est donnée, ou réciproquement [1].

2° La roue A est fixe, ou du moins n'a pas de rotation par rapport aux axes xAy :

$$n=0,\qquad \varepsilon=\frac{-a}{m-a},$$

d'où

$$a=\frac{m\varepsilon}{\varepsilon-1},\qquad m=a\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{3}$$

3° *Cas général.* — Les deux roues extrêmes sont mobiles :

$$\varepsilon=\frac{n-a}{m-a},\qquad a=\frac{m\varepsilon-n}{\varepsilon-1},$$

d'où enfin

$$\left\{\begin{aligned} a&=\frac{m\varepsilon}{\varepsilon-1}+\frac{n}{1-\varepsilon},\\ m&=a+\frac{n-a}{\varepsilon},\\ n&=a+(m-a)\varepsilon.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

La valeur générale de a est la somme des valeurs qui correspondent aux cas où chacune des rotations des roues extrêmes

[1] La raison ε est dans tous les cas une donnée de la question : elle dépend uniquement de la composition géométrique du train mobile.

existe seule : l'effet du train est donc de composer, pour ainsi dire, en une seule, ces deux rotations indépendantes.

Différentes manières de transmettre au train l'action d'un moteur. — En général, dans un système de rouages, tous les mouvements sont pris sur un arbre moteur, dont nous représenterons la vitesse angulaire par p. Si l'on donne le rapport à la rotation p de deux des quantités m, n, a, le troisième rapport est déterminé par les relations (4).

Le mouvement peut d'ailleurs être communiqué au train de deux manières différentes :

1° On peut transmettre le mouvement de l'arbre moteur aux deux roues extrêmes (ce qui comprend le cas où l'une de ces roues est immobile). On connaît alors les rapports de m et n à la rotation motrice p, et on calcule a par la formule (4). Pour cela il est indispensable que les roues extrêmes aient leurs axes fixes, c'est-à-dire qu'elles soient concentriques avec le châssis, afin qu'on puisse leur donner le mouvement par les procédés ordinaires.

2° On peut, au contraire, communiquer le mouvement au châssis et à l'une des roues, laquelle est nécessairement concentrique au châssis [1].

Dans le premier cas, si l'on a

$$m = \mu p, \qquad n = \nu p,$$

les formules (4) donnent

$$(5) \qquad \frac{a}{p} = \frac{\mu\varepsilon - \nu}{\varepsilon - 1} = \frac{\mu\varepsilon}{\varepsilon - 1} + \frac{\nu}{1 - \varepsilon}.$$

Dans le second cas, si

$$m = \mu p, \qquad a = \alpha p,$$

on trouve, par les mêmes formules (4),

$$(6) \qquad \frac{n}{p} = \alpha(1 - \varepsilon) + \mu\varepsilon = \alpha + \varepsilon(\mu - \alpha).$$

[1] On voit que, dans toutes les dispositions, il y a toujours au moins une des roues extrêmes dont l'axe coïncide avec l'axe du train mobile.

Ces équations ne présentent aucune difficulté pour l'application. Tout se réduit, dans chaque cas particulier, à calculer ε. Or, pour ce calcul, le châssis doit être supposé en repos, ce qui transforme le train épicycloïdal en un système pur et simple de roues dentées dont les axes sont fixes [1] ; la seule précaution à prendre, c'est de bien faire attention au signe de la raison ε, et au sens dans lequel cette quantité doit être prise.

Usages des trains épicycloïdaux.

Les trains épicycloïdaux s'emploient pour quatre objets principaux :

I. Lorsque le mouvement épicycloïdal est une partie de l'effet à produire, comme dans la *plume géométrique de Suardi* pour le tracé des épicycloïdes, la *mouche de Watt*, certains *planétaires*, les corderies des mines et de la marine, etc. ;

II. Pour établir entre deux axes fixes un rapport de vitesses déterminé avec une grande précision, lorsque ce rapport est composé de termes où figurent des nombres premiers considérables, et qu'une approximation n'est pas admissible ;

III. Pour produire un mouvement différentiel ;

IV. Enfin, pour concentrer sur une même roue l'action de plusieurs moteurs indépendants.

Donnons des exemples d'applications qui se rapportent à chacune de ces quatre catégories.

I. *Mouche ou roue planétaire de Watt* (*fig.* 197). — Dans cet appareil, imaginé par Watt pour transmettre le mouvement du balancier de sa machine à l'arbre du volant, le train épicycloïdal se compose de deux roues, A, B, dont les centres sont maintenus à une distance invariable l'un de l'autre, par le moyen de la tige AB.

La roue A est calée sur l'arbre du volant, et la tige AB est folle sur le même arbre [2]. Quant à la roue B, elle est soli-

[1] Il est d'ailleurs évident que la théorie s'applique sans modifications aux cas où le train comporterait d'autres organes que des roues dentées.

[2] En supposant la tige calée sur l'arbre A, on pourrait supprimer les deux roues dentées, et l'on obtiendrait avec plus de simplicité la transmission voulue. C'est ce que Watt lui-même s'est empressé de faire dès que le système, alors breveté, de *bielle et manivelle*, est tombé dans le domaine public.

daire de la bielle BC; et, comme celle-ci reste sensiblement parallèle à elle-même, on peut admettre que le mouvement de la roue B est un pur mouvement de translation.

Si donc on considère cette roue B comme la dernière roue du train porté par le rayon AB, on a

$$n = 0,$$

par suite

$$\frac{m}{a} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}.$$

Or la raison du train mobile est égale à $-\frac{A}{B}$; donc

$$\frac{m}{a} = 1 + \frac{B}{A}.$$

En faisant, avec Watt, les deux roues égales, on a

$$m = 2a;$$

c'est-à-dire que le volant tournera deux fois plus vite que la manivelle. On obtiendrait un rapport de vitesses quelconque, en multipliant les roues intermédiaires.

Paradoxe de Fergusson. — On connaît sous ce nom un petit mécanisme assez ingénieux, destiné à mettre en lumière les propriétés des rouages épicycloïdaux.

Le châssis du train mobile se réduit à la manivelle horizontale OM (*fig.* 198), qui tourne librement autour de l'essieu fixe OI. La première roue A est invariablement liée à cet essieu fixe; elle engrène avec une roue parasite B, à la suite de laquelle se trouvent trois roues indépendantes C, D, E, dont les axes géométriques coïncident.

La roue A ayant, par exemple, 20 dents, les nombres respectifs des roues C, D, E (qui doivent être considérées chacune comme la dernière roue d'un train particulier) sont

$$C = 19, \qquad D = 20, \qquad E = 21.$$

Quant au nombre de dents de B, il est indifférent.

Cela posé, comme la première roue, commune à nos trois trains, est fixe, la formule à employer est

$$n = a(1 - \varepsilon);$$

et l'on doit faire dans cette formule, suivant que l'on considère les roues C, D ou E,

$$\varepsilon = \frac{20}{19}, \qquad \varepsilon = 1, \qquad \varepsilon = \frac{20}{21}.$$

La substitution de la première valeur de ε donne $n < 0$, la deuxième $n = 0$, et la troisième $n > 0$. Il suit de là que, si l'on fait tourner à la main le levier OM, les roues C et E prendront des mouvements de rotation de sens contraires, tandis que la roue D se transportera parallèlement à elle-même.

Appareil automatique de Fulton et Cutting pour la fabrication des aussières. — Cette machine, employée depuis 1799 dans les corderies de la marine et des mines, pour le commettage des torons [1], se compose d'une grande roue dentée fixe, et de quatre ou cinq pignons égaux, dont les axes sont portés par un fort anneau ou volant concentrique à la roue (*fig.* 199). Aux pignons P, P, ... correspondent un pareil nombre de châssis à bobines horizontales, chargées chacune d'un toron, qui participent au mouvement épicycloïdal déterminé par la rotation de l'anneau autour de l'axe de la roue fixe.

Ces divers torons, en sortant de leurs bobines, s'élèvent verticalement jusqu'au niveau d'autant de poulies de renvoi, liées invariablement à l'arbre moteur; puis ils viennent converger au sommet de cet arbre, et sont reçus dans un entonnoir où, en se resserrant les uns contre les autres, ils reçoivent la torsion nécessaire, par l'effet de la rotation relative de leurs châssis. En même temps, la rotation de l'anneau produit l'enroulement des torons en hélice, lequel s'effectue souvent autour d'une mèche centrale ou âme.

II. Quand on veut établir entre deux arbres un rapport

(1) Pour constituer un câble, on forme, en tordant des fils de caret, une première corde nommée *toron*, laquelle est l'élément de tous les câbles. Plusieurs torons tordus ensemble forment une *aussière*. Enfin le commettage de plusieurs aussières produit ce que les marins appellent un *grelin*. Pour l'usage des mines, on coud ensemble plusieurs aussières placées l'une à côté de l'autre, de façon à obtenir un câble plat.

de vitesses exprimé par une fraction $\frac{P}{Q}$, dont l'un des termes au moins renferme des nombres premiers considérables, et qu'une approximation n'est pas admissible, les équipages ordinaires de roues tournant sur des axes fixes deviennent insuffisants; et l'on est obligé d'introduire dans le train une ou plusieurs roues à mouvement épicycloïdal.

Supposons d'abord que le dénominateur de la raison donnée soit le produit de facteurs convenables, et qu'on ait, par exemple,

$$Q = fgh.$$

Posons

$$\frac{P}{f.g.h} = \frac{x}{gh} + \frac{y}{fh} = \frac{fx}{fgh} + \frac{gy}{fgh},$$

en introduisant deux indéterminées x et y.

On n'a entre ces deux indéterminées qu'une relation unique

$$fx + gy = P,$$

laquelle admet, comme on sait, une infinité de solutions en nombres entiers (positifs ou négatifs), sous la condition toujours facile à remplir que les coefficients f et g n'aient pas de facteurs communs, P étant un nombre premier.

Une fois qu'on a trouvé des valeurs convenables pour x et pour y, il est facile d'identifier l'équation

$$\frac{P}{Q} = \frac{x}{gh} + \frac{y}{fh}$$

avec l'équation générale des trains épicycloïdaux,

$$\frac{a}{p} = \mu\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} + \nu\frac{1}{1 - \varepsilon},$$

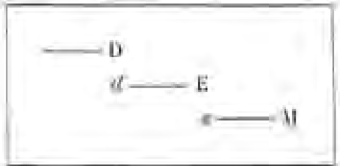
dans laquelle on peut disposer des quantités μ, ν, ε.

Pour réaliser cette conception, nous remarquerons que, le train proprement dit étant ici purement accessoire, la composition de ce train importe fort peu. Il convient de le réduire à deux roues d'angle, indépendantes et égales, reliées par

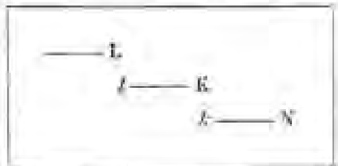
une troisième roue d'angle à mouvement épicycloïdal sphérique (*fig.* 195). Cette combinaison donne

$$\varepsilon = -1, \qquad \frac{a}{p} = \frac{1}{2}(\mu + \nu).$$

Cela posé, soient O (*fig.* 200) l'arbre moteur, A un arbre faisant corps avec l'essieu de la roue épicycloïdale, arbre dont la vitesse angulaire est a; enfin soient M et N les deux roues d'angle, fixées à des canons concentriques à l'arbre A. La figure montre que l'arbre moteur O transmet le mouvement : d'une part à la roue M au moyen du train



d'autre part à la roue N au moyen du train



On a donc

$$\mu = \frac{DE}{de}, \qquad \nu = \frac{LK}{lk};$$

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{DE}{de} + \frac{LK}{lk}\right).$$

Telle est la formule qui donne le rapport des vitesses des arbres A et O [1].

[1] *Application numérique.* — Proposons-nous de calculer un train pour relier l'aiguille des heures d'une horloge ordinaire avec une aiguille faisant un tour de cadran dans une lunaison.

Une lunaison moyenne..... $29^j\,12^h\,44^m\,3^s = 2551443^s$
12 heures comprennent.......................... 43200^s;

Quand les deux termes de la fraction $\frac{P}{Q}$ ne sont ni l'un ni l'autre décomposables en facteurs, on prend un dénominateur arbitraire fgh, et l'on pose

$$\frac{P}{Q}=\frac{\frac{P}{fgh}}{\frac{Q}{fgh}}.$$

Puis, considérant séparément les fractions

$$\frac{P}{fgh}, \quad \frac{Q}{fgh},$$

on calcule par la méthode précédente deux trains dont les raisons respectives soient

$$\frac{\alpha}{p}=\frac{P}{fgh}, \quad \frac{\alpha'}{p}=\frac{Q}{fgh}.$$

En installant ces deux trains à droite et à gauche de l'arbre O, dont nous représentons toujours la vitesse par p, on communiquera à l'axe A la vitesse α, à l'axe A' la vitesse α'; et on aura pour le rapport des vitesses des deux derniers arbres

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{P}{Q}.$$

Horloge lunaire de Pecqueur (*fig.* 201). — Voici une autre disposition d'horloge lunaire, fondée toujours sur les mêmes principes.

L'arbre moteur O, dont la vitesse angulaire est p, donne le mouvement à la roue folle L, qui joue le rôle de châssis mo-

---

le rapport de ces deux nombres est

$$\frac{2551443}{43200}=\frac{850481}{14400},$$

et 850481 est un nombre premier.

Les méthodes de l'analyse indéterminée fournissent la décomposition

$$\frac{850481}{14400}=\frac{40\times30}{6\times6}+\frac{71\times79}{50\times32},$$

d'où

$$\frac{\alpha}{p}=\frac{1}{2}(\mu+\nu)=\frac{1}{2}\left(\frac{80\times30}{6\times6}+\frac{71\times79}{35\times33}\right).$$

bile. Quant au train épicycloïdal, il comprend les quatre roues b, B, c, C. La roue b est fixe, les autres sont disposées conformément au diagramme suivant :

Roue fixe.		Dern. roue.
b	– – – –	C ———
B	———	c

D'après la composition de ce train, en considérant la roue fixe comme la première, on a

$$\varepsilon=\frac{bc}{BC}.$$

D'autre part, la raison de l'engrenage qui produit le mouvement d'entraînement est

$$\alpha=-\frac{l}{L}.$$

On conclut de ces valeurs, ainsi que de la condition $m=0$,

$$\frac{n}{p}=\alpha(1-\varepsilon)=\frac{l}{L}\,\frac{cb-CB}{CB}.$$

Voici les nombres qui se rapportent à l'horloge de Pecqueur :

$$l=31, \quad b=62, \quad c=33,$$
$$L=54, \quad B=85, \quad C=41$$

$$\frac{n}{p}=-\frac{44609}{188190}.$$

La fraction $\frac{44609}{188190}$ représente à peu de chose près le rapport de la semaine au mois lunaire de $29^{j},530588$.

III. Les trains épicycloïdaux se prêtent aisément, avec un faible nombre de roues, à la réalisation de rapports très petits : il suffit de faire en sorte que les deux termes du second membre de l'équation (5) (p. 254) aient des signes contraires.

en même temps que des valeurs numériques peu différentes. On construit ainsi des compteurs d'une grande simplicité.

Imaginons un train formé d'une roue fixe A (*fig.* 202), d'une roue C de même axe et de même diamètre, enfin d'un long pignon parasite B, dont l'axe est porté par la manivelle OL. La roue A compte une dent de moins que la roue C, et l'on a

$$\varepsilon = \frac{A}{B}\frac{B}{C} = \frac{C-1}{C} = 1 - \frac{1}{C},$$

d'où, comme $m = 0$,

$$\frac{n}{a} = 1 - \varepsilon = \frac{1}{C}.$$

Si l'on prend $C = 100$, le rapport des vitesses est de $\frac{1}{100}$: on obtiendrait une réduction plus considérable en introduisant dans le train quelques rouages intermédiaires.

Mais un mécanisme qui présente dans ce genre des ressources pour ainsi dire illimitées, c'est celui que représente la *fig.* 203.

Le train proprement dit comprend quatre roues d'angle, savoir : deux roues animées d'un mouvement épicycloïdal sphérique autour du centre O, et deux roues extrêmes tournant sur des canons concentriques. La composition de ce train est la suivante :

Dernière roue.	B	
Axe mobile ..	b ——	A
Première roue		a

On en conclut

$$\varepsilon = -\frac{ab}{AB}.$$

L'arbre moteur PQ donne le mouvement à l'arbre de la première roue par l'engrenage $\boxed{\frac{c}{C}}$, et à l'arbre de la dernière

par l'engrenage placé symétriquement $\boxed{\frac{d}{D}}$; on a

$$\mu = \frac{c}{C}, \quad \nu = -\frac{d}{D},$$

d'où, en appliquant la formule (5) (p. 254),

$$\frac{a}{p} = \frac{abcD - ABCd}{(ab + AB)CD}.$$

La combinaison de ces huit roues permet de réaliser presque tous les rapports de vitesses imaginables. En faisant

$$\begin{array}{llll} a = 83, & b = 83, & c = 83, & d = 82, \\ A = 84, & B = 65, & C = 106, & D = 83, \end{array}$$

on trouve

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{108.646.502}.$$

IV. Enfin, rien n'empêche de supposer les moteurs qui donnent le mouvement à la première et à la dernière roue d'un train absolument indépendants l'un de l'autre. Le mouvement transmis au châssis dépend alors des lois spéciales qui régissent l'action de ces deux moteurs [1].

On a imaginé dans le siècle dernier un grand nombre de mécanismes de ce genre, à l'effet d'obtenir une horloge marquant le temps vrai. On décomposait le mouvement du Soleil en deux mouvements élémentaires : l'un uniforme, correspondant au temps moyen, et l'autre varié, représentant la quantité à laquelle, en Astronomie, on donne le nom d'*équation du temps*. Le premier de ces deux mouvements s'obtenait au moyen d'une horloge ordinaire, formant l'une des extrémités d'un train épicycloïdal. En communiquant, d'autre part, au levier du même train un mouvement lent représentant l'équation du temps, le mouvement de la dernière roue se trouvait identique au mouvement du Soleil vrai.

---

[1] Cette combinaison offre surtout de l'intérêt quand le mouvement communiqué à l'une des extrémités du train est variable, car autrement il serait inutile d'employer deux moteurs distincts.

Mais voici l'application la plus intéressante de ce principe.

On sait que, dans les filatures de coton, la mèche, après avoir été soumise à une série d'étirages, sans torsion, doit subir dans les bancs à broches un nouvel étirage accompagné d'une faible torsion : on obtient ainsi un rudiment de fil, qu'on peut renvider sur une bobine, et filer ensuite dans les mull-jenny. Pour cela, au sortir d'une dernière paire de laminoirs étireurs, la mèche passe sur une ailette qui tourne très rapidement, puis sur une bobine. Mais l'enroulement serait trop rapide et le fil se briserait, si la bobine était immobile : aussi a-t-on soin d'imprimer à celle-ci un mouvement de rotation de même sens que celui de l'ailette, de manière que l'enroulement s'opère en raison de la différence des vitesses. Il y a plus : si l'on veut que la longueur envidée soit constante dans un temps donné, il faut que la bobine s'accélère à mesure qu'elle grossit, afin que le produit du rayon d'enroulement par la différence de vitesse angulaire reste invariable.

La manière la plus ingénieuse de produire cette accélération est la suivante, inventée par Houldsworth (1826).

Concevons deux roues d'angle A, B (*fig.* 204), égales et concentriques, reliées par un pignon E à mouvement épicycloïdal sphérique. L'axe de ce pignon est supporté par une saillie ou mentonnet, logé dans l'intérieur d'une grande roue D, laquelle représente le châssis du train : cette roue, par une denture extérieure, reçoit du pignon C un mouvement accéléré.

Avec ces données, on a

$$\varepsilon = -1,$$

$$n = -(m - 2\alpha).$$

La rotation m de la roue A étant uniforme, et la vitesse du pignon C variant suivant une loi convenable, la formule qui précède fait connaître la loi du mouvement de l'arbre de la roue B, lequel est l'arbre de la bobine.

CHAPITRE IV.

ORGANES DE MACHINES.

CLASSE B. — SENS DE LA TRANSMISSION CONSTANT. — RAPPORT DES VITESSES VARIABLE.

Nous avons condamné en principe les mécanismes dans lesquels la transformation d'un mouvement continu en un autre de même nature s'effectue avec un rapport de vitesses variable.

Parmi ces mécanismes, il y en a beaucoup dans lesquels la variation du rapport des vitesses est un inconvénient qu'on subit, pour une raison de simplicité ou pour tout autre motif. Au contraire, dans un grand nombre de cas, l'irrégularité du mouvement transmis par certains organes est un moyen de compenser des irrégularités d'une autre espèce, lesquelles proviennent soit du moteur, soit de la résistance, soit même d'une autre partie de la transmission : à ce point de vue, l'étude des mécanismes à rapport variable présente un véritable intérêt.

Géométriquement, les organes compris dans la classe B dérivent pour la plupart des appareils analogues qui répondent au cas d'un rapport constant : c'est ce qui en simplifiera beaucoup la description.

§ IX. — Premier genre. — Transmission du mouvement par contact.

On trouve dans la première section (p. 152) la solution générale des problèmes auxquels donne lieu le mouvement de deux solides, assujettis à rester en contact. Nous n'avons donc pas à revenir ici sur la partie théorique des questions qui font l'objet de ce paragraphe : nous nous bornerons à donner quelques exemples des mécanismes les plus usités, en commençant par ceux dans lesquels le mouvement des pièces en rapport est un roulement simple.

Premier exemple. — *Ellipses et courbes dérivées.* — Considérons deux ellipses égales, placées bout à bout comme le représente la *fig.* 205, et mobiles autour de leurs foyers respectifs C et C_1. A partir du point de contact, prenons sur les deux courbes des arcs égaux AM, AM_1; en vertu de la symétrie, CM est égale à D_1M_1. Les rayons vecteurs CM, C_1M_1 forment donc une somme égale au grand axe de l'ellipse, c'est-à-dire à la longueur CC_1; par suite, on peut amener les points M et M_1 à coïncider sur la ligne des centres; et cela fait, comme la tangente à l'ellipse est également inclinée sur les deux rayons vecteurs, les deux courbes dans leurs nouvelles positions seront encore tangentes.

Si donc on s'arrange de manière à obliger les deux ellipses à se toucher constamment, on aura pour leur mouvement relatif un roulement simple [1]. Le rapport variable des vitesses angulaires correspondantes est donné, dans chaque phase du mouvement, par la relation

$$\frac{\omega}{\omega_1} = -\frac{r_1}{r};$$

les valeurs extrêmes de ce rapport sont

$$-\frac{a-c}{a+c} \quad \text{et} \quad -\frac{a+c}{a-c}.$$

Courbes dérivées de l'ellipse. — Si l'on voulait que le rapport des vitesses angulaires atteignît plusieurs maxima dans une

[1] Deux cames, taillées suivant les profils de la *fig.* 205, établiront une transmission de mouvement sans frottement entre les deux arbres parallèles (C) et (C_1); et il est à remarquer que, (C) étant moteur et tournant dans le sens indiqué par la flèche, la transmission du mouvement sera géométriquement obligatoire pour les positions telles que CD, CD', sans qu'il soit besoin de faire intervenir l'adhérence des surfaces.

Les choses sont ainsi jusqu'à ce que les cames soient arrivées en *cd*, cd_1. Mais, à partir de ce moment, le mouvement de l'ellipse conductrice continuant toujours dans le même sens, il n'en résultera plus de pression sur la courbe conduite; et les deux surfaces se sépareraient, si l'on n'avait soin d'employer un artifice particulier. On pourra, par exemple, denter les portions des cames qui correspondent à la deuxième période du mouvement.

seule révolution, ou bien si les deux courbes devaient faire des nombres de tours différents dans le même temps, le système des deux ellipses deviendrait insuffisant. On emploie dans ce cas des courbes qui présentent un certain nombre de lobes égaux, chacun de ces lobes correspondant à un maximum et à un minimum du rapport $\frac{\omega}{\omega_1}$.

Ces courbes dérivent de l'ellipse suivant le mode indiqué (p. 157). Pour construire, par exemple, une courbe bilobée, nous mènerons par le foyer d'une ellipse (*fig.* 206) une série de rayons vecteurs faisant entre eux des angles égaux à une partie aliquote quelconque de la demi-circonférence. Puis, ayant tracé quelque part un angle droit *afb*, nous diviserons cet angle en un nombre égal de parties, et nous porterons sur les lignes de division les longueurs des rayons vecteurs FA, FA_1, ... de l'ellipse. Les points obtenus forment un certain arc de courbe. En construisant trois arcs symétriques dans les trois autres angles droits contigus, on achève le profil demandé [1].

On construirait une courbe à trois saillies, en prenant un angle de 60° $a'f'b'$ pour correspondre à deux angles droits (*fig.* 207).

Les courbes fournies par les tracés précédents ne sont autre chose que les transformées qu'on obtient en plaçant l'ellipse AA_1B sur un cône de révolution, et développant ce cône sur un plan. On peut combiner deux à deux toutes les courbes qui proviennent d'une même ellipse, placée sur un cône arbitraire : pour que le mouvement soit continu, ces cônes doivent être choisis de manière que la transformée occupe une partie aliquote de la circonférence.

L'équation de la courbe à n lobes est

$$r = \frac{n^2 b^2}{\sqrt{n^2 b^2 + c^2} + c \cos n\theta} \quad (^2),$$

n étant un entier quelconque.

[1] Selon la valeur de l'excentricité de l'ellipse, la courbe affectera l'une ou l'autre des deux formes indiquées par la figure.

[2] Les courbes qui nous occupent présentent fréquemment des points

Les transformées d'ellipse, combinées avec des arcs de cercle, répondent à des mouvements dans lesquels le rapport des vitesses est alternativement constant ou variable.

DEUXIÈME EXEMPLE. — *Emploi de la spirale logarithmique.* — Considérons deux spirales logarithmiques, égales et inversement placées (*fig.* 208), tangentes en un point quelconque, A, de la ligne qui réunit leurs pôles C, C_1.

Soient AM, AM_1 deux arcs infiniment petits égaux. En vertu de la définition de la spirale logarithmique, les angles CMA, M_1AC_1 sont égaux : donc les triangles infinitésimaux ANM, AN_1M_1 sont aussi égaux, et l'on a $NM = AN_1$.

Il est donc possible d'amener sans glissement les points M et M_1 à coïncider sur la ligne des centres, en N_1 ; les deux spirales seront tangentes en ce point, et jouiront des mêmes propriétés que les ellipses que nous venons d'étudier.

Pour appliquer ces considérations géométriques, on exécute deux cames en prenant pour profils des polygones réguliers égaux, et remplaçant chacun des côtés rectilignes de ces polygones par deux arcs de spirale. Dans la machine à imprimer de Bacon et Donkin (*fig.* 209), on trouve deux carrés tournant respectivement autour de leurs centres, et portant chacun huit arcs de spirale [1].

Le rapport des vitesses angulaires varie de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

---

d'inflexion. Ces points sont déterminés par l'équation

$$\cos n\theta = \frac{1}{(n^2-1)e};$$

leur existence dépend donc de l'inégalité

$$e > \frac{1}{n^2-1},$$

ou

$$\frac{b}{a} < \frac{n}{n^2-1}\sqrt{n^2-2}.$$

(1) L'équation générale de la spirale logarithmique étant

$$r = ae^{m\theta},$$

TROISIÈME EXEMPLE. — *Presses Normand.* — On a remarqué, à l'Exposition universelle de 1862, un système nouveau de presses mécaniques destinées à imprimer une feuille des deux côtés à la fois.

Le papier est placé entre une table de marbre mobile et un rouleau qui porte la composition. Il importe que les mouvements de la table et du rouleau soient parfaitement synchrones, sans quoi le papier se déchire, les caractères s'usent et se déforment : en un mot, l'impression est mauvaise. Avec les presses ordinaires, ce résultat est facile à obtenir; mais dans les presses à impression simultanée des deux côtés, on emploie, pour transmettre le mouvement du rouleau à la table, un joint universel, c'est-à-dire un appareil à rapport de vitesses variable, dont nous allons voir la théorie dans un instant.

Les choses étant ainsi disposées, si l'on veut rétablir le synchronisme des mouvements de la table et du rouleau, il suffit d'intercaler, entre celui-ci et le joint universel, un nouveau mécanisme à rapport variable, lequel annule l'effet nuisible du premier. Ce mécanisme, dans la presse de M. Normand, consiste simplement en un pignon ovale, conduisant une crémaillère ondulée : les profils sont déterminés de ma-

---

il est facile de déterminer les valeurs des constantes a et m, de manière à obtenir un arc de spirale passant par les points A et B.

En premier lieu, le paramètre a n'est autre chose que le rayon vecteur qui correspond à $\theta = 0$: c'est donc le demi-côté du carré donné.

Ensuite, on doit avoir simultanément

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad r = a\sqrt{2}.$$

Donc

$$\sqrt{2} = e^{m\frac{\pi}{4}},$$

d'où

$$l\sqrt{2} = m\frac{\pi}{4}, \qquad m = \frac{4\,l\sqrt{2}}{\pi} = 0,44138.$$

En calculant, au moyen de cette valeur, l'angle que fait la tangente à la spirale avec le rayon vecteur, on trouve

$$66°11'.$$

nière que le mouvement varié du pignon produise l'uniformité du mouvement de la crémaillère. Le problème ainsi posé ne présente pas la moindre difficulté. En effet, nous savons trouver le centre instantané de la rotation relative du pignon, quand nous connaissons le rapport qui doit exister entre la vitesse angulaire de celui-ci et la vitesse de translation de la crémaillère. Le lieu de ces centres, considéré, soit par rapport au pignon, soit par rapport à la crémaillère, détermine à la fois la courbe ovale et le profil ondulé dont nous avons besoin.

Quatrième exemple. — *Système de deux roues dentées dont l'une est excentrée* (*fig.* 210). — Cette combinaison, où n'entrent que des roues dentées ordinaires, est une des plus simples qu'on puisse imaginer pour établir un rapport variable entre les rotations de deux arbres fixes parallèles.

C et C_1 sont les projections des axes de rotation. Le centre de la roue B ne coïncide pas avec le point C_1; et pour obtenir la transmission du mouvement malgré cette excentricité, on fait usage d'une roue parasite P, maintenue en contact avec les roues extrêmes au moyen des barres CC', C'O.

Soient R et R_1 les rayons des roues A et B, e l'excentricité C_1O : le rapport des vitesses varie de

$$\frac{R}{R_1+e} \quad \text{à} \quad \frac{R}{R_1-e}.$$

Cinquième exemple. — *Roues d'Olaüs Rœmer* (*fig.* 211). — Ce sont deux roues tronc-coniques inversement placées. L'une de ces roues est dentée à la manière ordinaire, et l'autre porte une série de pointes dont on détermine les positions, suivant la loi de mouvement qu'on veut obtenir. En appelant R, r les rayons extrêmes de la première roue, R', r' ceux de la deuxième, le rapport des vitesses varie de

$$\frac{R'}{r} \quad \text{à} \quad \frac{r'}{R}.$$

Sixième exemple. — *Roue de champ excentrique d'Huygens* (*Pl. XXIII, fig.* 212). — Ce système, facile à comprendre, répond au cas de deux axes concourants rectangulaires : il a

été employé, comme le précédent, pour figurer le mouvement des planètes.

Septième période. — *Vis à pas variable.* — Enfin, l'engrenage de la vis sans fin peut également se transformer de manière à procurer une transmission non uniforme : il suffit pour cela de faire varier le pas de la vis, c'est-à-dire de remplacer, pour la génération de la surface hélicoïdale, l'hélice ordinaire par une courbe déterminée en vue de l'effet qu'on veut obtenir.

Systèmes dans lesquels le rapport des vitesses varie brusquement.

En composant deux roues par la réunion de plusieurs secteurs dentés (*fig.* 213), dont les rayons sont différents, on obtient des organes où le rapport des vitesses change brusquement de valeur.

Enfin les mécanismes représentés par les *fig.* 214 et 215 servent à produire un mouvement intermittent. On voit que, dans ces systèmes, l'une des roues (la roue conductrice) a une partie de sa denture enlevée : pendant que cette partie est en présence de l'autre roue, la transmission cesse d'avoir lieu.

§ X. — Deuxième genre. — Systèmes articulés à rapport de vitesses variable.

Considérons deux corps animés de mouvements circulaires continus [1] autour de deux axes fixes; et distinguons, comme dans la classe précédente, le cas où les axes des deux rotations sont parallèles, et celui où ces deux axes concourent en un point.

1° Axes parallèles.

Deux manivelles, OA, EB (*fig.* 216), mobiles autour des axes fixes et parallèles O et E, sont reliées à leurs extrémités par

(1) Les cas où le mouvement de l'un des corps n'est pas susceptible de se continuer indéfiniment dans le même sens seront traités dans le Chapitre suivant.

une barre rigide AB. Soient R et r les rayons des circonférences décrites par les deux points d'articulation, a la longueur AB, enfin e l'excentricité OE. Cherchons d'abord sous quelles conditions le mouvement pourra être continu.

Si les deux circonférences étaient concentriques, la seule condition serait que la longueur du lien fût comprise entre $R - r$ et $R + r$: le rapport des vitesses serait constant, et les mouvements des points A et B différeraient seulement en ce sens, qu'il n'y aurait pas synchronisme entre leurs phases.

Introduisons une certaine excentricité e : les limites de la longueur a deviennent $R - r + e$ et $R + r - e$; c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$a > R - r + e,$$
$$a < R + r - e.$$

Or, ces deux inégalités ne sont compatibles que si r est plus grand que e. Donc :

Pour que les mouvements de deux manivelles réunies par une barre rigide articulée soient susceptibles de se continuer indéfiniment dans le même sens, il faut :

1° *Que le point fixe de la grande manivelle soit dans l'intérieur du cercle décrit par le bouton de la petite* (¹);

2° *Que la longueur du lien soit comprise entre les deux segments déterminés, sur le diamètre de la circonférence qui correspond à la grande manivelle, par le point de la deuxième circonférence dont la distance à la première est un maximum.*

(¹) Notre analyse laisse en dehors le cas isolé dans lequel on a à la fois $R = r$ et $a = e$. Avec ces hypothèses particulières, le mouvement continu est possible de deux manières différentes: soit que la bielle se tienne constamment parallèle à la ligne des centres, auquel cas les vitesses des deux manivelles sont nécessairement égales, soit que la bielle, au contraire, vienne couper la ligne des centres dans l'intervalle des points fixes des deux manivelles, ce qui établit un rapport variable entre les deux rotations.

Dans ce dernier cas, quand les manivelles sont plus petites que la distance des arbres, la relation de mouvement de ceux-ci est la même que celle qu'on réalise au moyen des deux ellipses de la *fig.* 205. Quand les manivelles sont plus grandes que la distance des centres fixes, le mouvement est celui de deux hyperboles disposées d'une façon analogue.

Pour l'analyse complète des propriétés du système géométrique qui nous occupe, je renverrai à l'Ouvrage de M. Girault, intitulé : *Géométrie appliquée à la transformation des mouvements.*

Dans ces conditions, le mouvement du point B étant supposé uniforme, la vitesse du point A varie comme le rapport des deux segments DO et DE (¹). La bielle n'est jamais en ligne droite avec aucune des deux manivelles, de sorte qu'il n'y a pas de *points morts.*

Projetons les mouvements des points A et B sur le diamètre commun aux deux circonférences.

La rotation du point B étant uniforme, la projection de ce point est animée d'un mouvement oscillatoire parfaitement symétrique, dont les lois sont représentées par les courbes de la *fig.* 46.

Le mouvement de la projection du point A est également un mouvement de va-et-vient; mais il n'y a plus symétrie entre les deux demi-oscillations. En effet, les points extrêmes, A_0 et A_1, de la course de cette projection répondent aux positions B_0 et B_1 de la pièce animée d'un mouvement uniforme : donc le rapport entre le temps de la descente et celui de la montée est égal au rapport des deux portions de la circonférence (E), déterminées par les points B_0 et B_1.

Cette irrégularité est avantageuse dans certaines machines, telles que les étaux limeurs : l'outil descend lentement, tandis qu'il a de la résistance à vaincre; le retour à vide s'effectue

(¹) Pour peindre graphiquement la loi de ces variations, nous considérerons le point C, centre instantané de la rotation de la bielle AB, et nous écrirons la proportion

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{AC}{BC}.$$

Prenant donc une longueur BH égale à la vitesse constante V_b, et menant par le point H une parallèle à AB, nous aurons

$$AK = V_a.$$

La *fig.* 216 *bis* représente le lieu géométrique du point K, pour une révolution entière du système.

au contraire rapidement, de manière à perdre le moins de temps possible [1].

Manivelle à coulisse (*fig.* 218). — Cette combinaison est l'une des plus simples qu'on puisse employer pour relier

---

[1] *Ventilateur Lemielle.* — Les propriétés géométriques du mouvement d'une droite de longueur constante, dont les extrémités parcourent deux circonférences fixes, donnent lieu en Mécanique aux applications les plus variées. Un exemple des plus intéressants, relatif au cas du mouvement continu, nous sera fourni par le ventilateur Lemielle, employé dans l'aérage des mines importantes, dont l'assainissement exige un volume d'air considérable.

Cet appareil se compose d'un tambour hexagonal (*fig.* 217), tournant à frottement doux sur un essieu coudé immobile. A chacun des six pans correspond un volet, ou sorte d'aile articulée qui se rattache d'une part au prisme par le moyen de la charnière A, tandis que son extrémité libre est retenue par une bielle dont le point fixe est en E.

Considérons spécialement une des palettes AB, et suivons son mouvement pendant une rotation complète du tambour.

La section droite du ventilateur présente les mêmes éléments géométriques que la *fig.* 216. La longueur a du lien est égale à celle du côté de l'hexagone, ou au rayon r du cercle circonscrit; de plus on a

$$R = r + e.$$

Il résulte de cette dernière relation que les deux circonférences sont tangentes, et que le volet, dans une de ses positions, se trouve exactement appliqué sur le côté correspondant. A partir de cette position, la rotation ayant lieu dans le sens de la flèche, le volet se développe, et atteint son écart maximum quand la bielle est dirigée dans le prolongement de la ligne OE. Ce point une fois franchi (ce qui n'est possible que si l'on a $R + e < 2r$, ou $r > 2e$), le volet se replie et finit par se retrouver appliqué sur le tambour.

Considérons la circonférence (EB), et construisons un coursier dont la section droite comprenne deux arcs de cette circonférence, de part et d'autre d'un espace libre inférieur qui débouche dans le puits d'aérage, la partie supérieure communiquant librement avec l'atmosphère.

La longueur des deux portions du coursier doit être calculée de telle manière qu'il y ait toujours une aile dont l'extrémité se trouve sur l'arc MN, et une autre sur l'arc M'N', afin que la communication soit interceptée entre l'air de la mine et l'air extérieur, sauf le jeu qu'on a été obligé de ménager sur tout le pourtour du ventilateur.

Les choses étant ainsi disposées, au moment où l'une des palettes arrive au point N', celle qui la précède immédiatement n'a pas encore atteint le point M' : de sorte qu'un certain volume d'air, compris entre les deux ailes, le coursier et l'hexagone, se trouve isolé de la mine, pour être un instant après rejeté dans l'atmosphère. On voit que, par chaque tour, l'appareil expulse six fois ce volume.

deux rotations continues, s'effectuant autour de deux arbres parallèles. Le même système se prête à la production d'un mouvement alternatif, quand l'excentricité est supérieure à la longueur de la manivelle pleine.

2° Axes concourants.

Joint universel [1]. — Considérons deux arbres dont les prolongements géométriques se rencontrent (*fig.* 219), et qui forment un angle voisin de 180°. Chacun de ces arbres est terminé par une fourche, et les deux fourches sont elles-mêmes réunies par un croisillon invariable, qui s'assemble avec elles au moyen de quatre points d'articulation.

Le mouvement de l'un des deux arbres se communique à l'autre par l'intermédiaire du croisillon, mais la transmission n'est pas uniforme. Le rapport des vitesses varie, comme nous allons le voir, d'autant plus que l'angle des deux axes est plus considérable : aussi le joint universel ne peut-il s'employer avec quelque avantage que dans le cas où cet angle est assez faible. On y a recours, par exemple, pour relier les deux tronçons d'un arbre trop long pour être fait d'une seule pièce : l'interposition du joint universel dispense de la nécessité d'ajuster les paliers avec précision. De plus, l'angle des deux axes peut varier, sans qu'il résulte de cette circonstance des efforts anormaux sur les pièces du mécanisme. Seulement, ces effets n'étant obtenus qu'aux dépens de la régularité [2], on doit se garder de faire servir le joint universel à la transmission d'efforts un peu considérables.

Soient OA, OB les deux axes de rotation ; les bras du croisillon sont représentés par les droites CC', DD', perpendiculaires : la première à l'axe OA, la seconde à l'axe OB.

La droite DD', assujettie à rester perpendiculaire à l'axe OB, décrit un plan dont la trace sur une sphère ayant son centre en O est le grand cercle E, tandis que les extrémités de la

---

[1] Le joint universel est aussi connu sous le nom de *joint de Cardan* ou *joint hollandais*. M. Willis en attribue l'invention à Hooke (1674).

[2] Rappelons à cette occasion que M. Porro a imaginé une sorte de joint universel à rapport constant (p. 214), qui jouit des mêmes propriétés que le joint de Cardan.

droite CC' décrivent le grand cercle F, perpendiculaire à l'axe OA. Comme de plus les droites OC, OD sont perpendiculaires entre elles, l'arc CD est constamment égal à un quart de grand cercle; et la position de l'un des points C, D sur sa trajectoire est connue, lorsqu'on a la position de l'autre point sur la sienne.

On peut donc chercher la loi de la transmission du mouvement par le joint universel, en étudiant les lois du mouvement sphérique des extrémités d'un arc de grand cercle égal à un quadrant, qui se meut entre deux grands cercles dont l'angle est égal au supplément de l'angle des axes (*fig.* 220).

Partons de l'instant où le croisillon est dans le plan perpendiculaire à l'axe A. Représentons par C_1, D_1 deux positions simultanées des points d'articulation C, D; et désignons par x et y les arcs CC_1, DD_1, décrits par ces points à partir de leurs positions initiales.

Le déplacement x du point C, extrémité d'une perpendiculaire à l'axe A, mesure la rotation de l'arbre correspondant; de même, l'arc y mesure la rotation autour de l'axe B.

Or on a dans le triangle DD_1C_1 :

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin y\cos D,$$

ou

$$\sin x\cos y = \cos x\sin y\cos D,$$

ce qui donne

$$\tan x = \tan y\cos D\ (^1).$$

En différentiant cette équation, on trouve le rapport des vitesses angulaires simultanées, lequel est égal à $\frac{dy}{dx}$. On obtient également ce rapport en appliquant les principes de la composition des rotations : en effet, les trajectoires des points C_1, D_1 étant connues, le pôle instantané de la rotation du croisillon est en I, intersection des arcs normaux à DD_1 et CC_1.

Cela posé, on a

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin ID_1}{\sin IC_1} = \frac{\sin IC_1D_1}{\sin ID_1C_1} = \frac{\cos CC_1D_1}{\cos DD_1C_1}.$$

(1) Dans ces équations, D est l'angle aigu des deux axes de rotation.

En remplaçant les deux cosinus par leurs valeurs, il vient

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos D}{1 - \sin^2 D\cos^2 x}.$$

Il résulte de cette relation que le rapport des vitesses angulaires des deux arbres est variable : il atteint son maximum, $\frac{1}{\cos D}$, pour $x = 0$, et son minimum, $\cos D$, pour $x = \frac{\pi}{2}$. L'écart entre ces deux valeurs est d'autant plus grand que l'angle D est lui-même plus grand.

§ XI. — Troisième genre. — Poulies et tambours a rapport de vitesses variable.

Fusées des montres. — Une fusée n'est autre chose qu'un treuil dont l'arbre, au lieu d'être cylindrique, présente la forme d'une surface de révolution quelconque. La destination des appareils de ce genre est de compenser une irrégularité inhérente à la nature d'une machine donnée; on détermine la section méridienne de la fusée d'après les lois du mouvement qu'on se propose de régulariser.

Dans les montres et chronomètres, l'effort moteur est appliqué au barillet B (*Pl. XXII, fig.* 222); le mouvement est transmis à l'arbre FF par l'intermédiaire d'une chaîne articulée, qui fait un certain nombre de tours sur une fusée conique. La conicité de la fusée ne permet pas de disposer la chaîne comme une corde sans fin : on attache donc les extrémités de cette chaîne, d'une part au barillet, d'autre part à la fusée, et la transmission dure jusqu'à ce que la chaîne soit entièrement déroulée; après quoi il faut remonter la montre, pour replacer les choses dans la position première.

On trouve dans les mull-jenny une fusée qui diffère des fusées de montre en ce qu'elle est renflée au milieu, et amincie aux deux bouts. En communiquant à l'arbre de cette fusée une rotation uniforme, on fait prendre au chariot tiré par la corde un mouvement d'abord accéléré, puis retardé.

Tambours et bobines d'extraction. — Nous avons déjà signalé l'inconvénient des treuils cylindriques d'extraction, pour le cas d'un puits d'une grande profondeur. En donnant au corps du treuil la forme conique, on peut s'arranger de manière que la vitesse ascensionnelle soit d'autant moindre, que le poids total à enlever est plus considérable.

Il est d'ailleurs difficile, avec ce système, de faire varier le rayon d'enroulement dans des limites assez étendues. On n'obtient une compensation suffisante qu'en remplaçant les tambours cylindriques ou coniques par des *bobines*, et substituant aux câbles ronds, à tours juxtaposés, des câbles plats, dont les spires, en se recouvrant mutuellement, procurent un diamètre variable suivant une loi convenable.

Le noyau de la bobine (*fig.* 223) n'est autre chose qu'un tambour en fonte, dont la largeur est très peu supérieure à celle du câble plat que la bobine doit recevoir : un certain nombre de bras latéraux en bois maintiennent les spires à droite et à gauche. La distance de l'axe à la partie rectiligne du câble augmente, pour chaque tour, de deux fois l'épaisseur de celui-ci, soit de 6 à 8 centimètres.

L'extrémité du câble, opposée à celle qui soutient la benne, est fixée à demeure sur le noyau, de sorte qu'il faut une deuxième bobine, calée sur le même arbre que la première, pour le service de l'autre benne. Les deux câbles sont d'ailleurs enroulés en sens inverse l'un de l'autre, afin que l'une des bennes descende quand l'autre monte.

Câbles sans fin. — Les câbles sans fin s'appliquent difficilement à la production d'un rapport de vitesses variable. Cependant on peut imaginer (*fig.* 224) un mécanisme composé de deux poulies dont l'une soit elliptique, la courroie étant maintenue constamment tendue par un poids [1].

Ce système n'est pas employé.

[1] La rotation de l'arbre A étant uniforme, l'arbre B est animé d'un mouvement continu varié (*voir* p. 118), et le poids P, d'un mouvement alternatif. Ainsi, la combinaison (A, B) se rapporte à notre deuxième classe, et la combinaison (A, P), ou (B, P), à la troisième.

CHAPITRE V.

ORGANES DE MACHINES.

CLASSE C. — SENS DE LA TRANSMISSION VARIANT PÉRIODIQUEMENT. RAPPORT DES VITESSES CONSTANT OU VARIABLE.

Du mouvement alternatif. — Il existe un grand nombre d'organes de machines, dans lesquels le sens du mouvement transmis est sujet à des variations périodiques. En d'autres termes, tandis que l'un des éléments du mécanisme se meut constamment dans le même sens, l'autre pièce est limitée dans l'amplitude de son excursion, *par la nature géométrique de la liaison employée*. Par suite, cette pièce peut seulement prendre un mouvement de va-et-vient, dont la direction change à des intervalles de temps réguliers. La pédale du rémouleur peut être présentée comme le type des machines de cette catégorie.

Dans ces machines, au rebours de ce que nous avons conseillé jusqu'ici, il est avantageux que le rapport des vitesses soit variable. On doit en effet s'arranger de telle manière que, l'uniformité étant toujours le partage de celui des deux mouvements qui est continu, l'organe à mouvement oscillatoire soit animé d'une vitesse qui décroisse régulièrement, depuis le milieu de sa course jusqu'aux époques des changements de sens. Il faut éviter avec le plus grand soin toute disposition dans laquelle une masse un peu considérable passerait brusquement d'une vitesse finie dans un sens à une vitesse finie de sens contraire.

En général, la pièce oscillante est la pièce conduite, comme dans les marteaux, les cisailles, les scies à mouvement alternatif, etc. Le contraire se rencontre pourtant quelquefois. Ainsi, dans le rouet, le tour, la plupart des machines à vapeur, c'est l'organe moteur qui possède un mouvement de va-et-vient, et qui communique, au moyen de dispositions convenables, un mouvement continu à peu près uniforme à un arbre tournant.

§ XII. — Premier genre. — Transmission du mouvement par contact.

1° Engrenages à mouvement alternatif.

Les engrenages intérieurs répondent à deux rotations de même sens, les engrenages extérieurs à deux rotations de sens contraires. Si donc on fait en sorte que l'engrenage d'une roue et d'un pignon soit alternativement extérieur et intérieur, le mouvement continu du pignon fera prendre à la roue un mouvement *circulaire alternatif*.

Roues tronquées à double denture. — La *fig.* 225 indique un certain nombre de dispositions propres à réaliser cette idée.

La roue A est une lanterne ordinaire, dont la denture présente quelque part une lacune, suffisante pour permettre au pignon de passer d'un côté à l'autre de l'enceinte des fuseaux. L'extrémité de l'arbre de ce pignon est engagée dans une rainure, pratiquée dans un plateau qui tourne avec la lanterne; et le tracé de la rainure est combiné de manière à obliger le pignon à passer périodiquement de l'intérieur à l'extérieur de la lanterne, et *vice versâ*.

La grande longueur de l'arbre fait qu'un petit déplacement horizontal du pignon peut s'effectuer sans fausser sensiblement cet arbre.

La denture extérieure et la denture intérieure ayant même circonférence primitive, le rapport des vitesses des deux arbres est le même, quel que soit le sens de la transmission.

Cet avantage n'existe pas dans la roue B, qui présente la forme d'une couronne circulaire échancrée, munie d'une double denture sur son contour extérieur et intérieur. Le rapport des vitesses est constant tant que le mouvement ne change pas de sens, mais ce rapport change avec le sens de la transmission. Dans la roue C, dans la roue D, où chacune des dentures est excentrée, le rapport des vitesses varie pendant chaque demi-oscillation [1].

On peut aisément disposer ces roues de manière à satisfaire

[1] On trouve de pareilles roues dans le métier automate de Smith.

aux conditions les plus variées. Dans tous les cas, les courbes de raccordement permettent le changement graduel de la vitesse, conformément à ce que nous venons de recommander.

Crémaillère double oscillante. — Un système parfaitement analogue, dans lequel une crémaillère est substituée à la roue tronquée (*fig.* 226), sert à transformer le mouvement circulaire continu en mouvement rectiligne alternatif [1]. Dans le cas de la disposition F, la vitesse varie brusquement, et l'effet est généralement moins bon.

Roue à demi-denture avec double pignon (*fig.* 227). — Dans ce mécanisme, qui produit également un changement brusque dans le sens de la rotation d'un arbre AB, l'arbre moteur est terminé par une roue de champ, dentée sur la moitié de son contour. Cette roue engrène alternativement, pendant un demi-tour avec le pignon A, pendant le demi-tour suivant avec le pignon B; et le sens de la transmission change deux fois pour chaque tour de la roue.

2° Cames. — Excentriques.

On donne le nom de *cames* ou d'*excentriques* à des pièces de formes plus ou moins compliquées, qui tournent autour d'un centre fixe, en poussant devant elles d'autres pièces convenablement guidées. Il est facile de déterminer le profil d'une came, de manière à obliger la pièce conduite à prendre le mouvement que l'on veut.

Marteaux de forge. — Nous avons déjà indiqué l'usage des cames en développante, pour le soulèvement d'un pilon; les marteaux de forge présentent une disposition analogue (*fig.* 228). Dans les appareils de ce genre, la came a seulement pour fonction de soulever le marteau : la chute de celui-ci est déterminée par l'action de la pesanteur, aidée, s'il y a lieu, par celle d'un ressort ou rabat.

Cisailles. — Une cisaille ordinaire se compose d'une mâchoire fixe, et d'une mâchoire mobile autour d'un point fixe

[1] Il est possible avec la disposition E, en donnant à la crémaillère la liberté de prendre un petit mouvement transversal, de ne pas fausser du tout l'arbre du pignon.

Cette dernière se prolonge de l'autre côté du point fixe, sous la forme d'une longue queue qui porte sur un excentrique. Le poids de tout cet appareil maintient la pièce mobile appliquée sur la came, de sorte qu'il n'y a pas de choc comme dans les marteaux.

Excentriques.

Les excentriques proprement dits sont combinés de manière à guider une pièce à mouvement alternatif, dans toute l'étendue de sa double excursion : ils peuvent se ranger dans deux catégories principales.

1° *Excentriques agissant sur des galets.* — Soit

$$r = f(\theta)$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires. Faisons tourner cette courbe autour du pôle, avec une vitesse angulaire constante n : les rayons vecteurs qui viendront à l'époque t se placer dans une direction fixe déterminée, prise pour origine des angles θ, s'obtiennent en faisant dans l'équation de la courbe

$$\theta = nt.$$

On conclut de là

$$r = f(nt).$$

Imaginons maintenant, suivant la droite ($\theta = 0$), une tige guidée de manière à pouvoir seulement se mouvoir dans sa propre direction, et assujettie à s'appuyer sur la courbe mobile : il est clair que la loi du mouvement rectiligne d'un point de cette tige sera donnée par l'équation

$$x = f(nt).$$

Réciproquement, connaissant la loi du mouvement qui doit animer la tige, ainsi que la vitesse angulaire n, on déterminerait le profil de l'excentrique.

Généralement, l'excentrique agit sur la tige par l'intermédiaire d'un galet, dont l'axe est fixé à celle-ci : par suite, quand on a arrêté le tracé de la courbe conductrice, sans se préoccuper du galet, il faut raccourcir la courbe, suivant toutes ses normales, d'une quantité égale au rayon de ce galet.

Si l'on veut que l'excentrique produise lui-même le mouvement de retour, sans qu'il soit besoin d'une disposition spéciale pour maintenir la tige appuyée sur sa surface, on place un deuxième galet de l'autre côté du centre de rotation, de manière à embrasser l'excentrique. Dans ce cas, la longueur d'un diamètre quelconque, mené par le centre de rotation, doit être constante, et il suffit de connaître la moitié du profil pour pouvoir tracer l'autre moitié.

Au lieu d'employer deux galets, on peut terminer la tige par un bouton qui s'engage dans une rainure découpée dans un plateau tournant : le tracé de la rainure s'effectue comme précédemment.

Enfin, si l'axe de la rotation était parallèle à la direction de la translation, l'excentrique aurait la forme d'une couronne comprise entre deux cylindres concentriques, et découpée suivant une courbe convenablement calculée; la tige se terminerait par un galet, ou par un bouton mobile dans une rainure.

2° *Excentriques agissant sur un cadre.* — Un autre système consiste à souder à la tige guidée un cadre rectangulaire (*Pl. XXV, fig.* 233), dans l'intérieur duquel se meut l'excentrique. Celui-ci pousse alternativement les deux côtés du cadre, qui sont perpendiculaires à la direction de la tige; quant à la loi du mouvement de cette tige, elle n'est plus en relation simple avec la grandeur du rayon vecteur de la courbe conductrice, mais bien avec la distance du pôle à ses tangentes, ou, ce qui revient au même, avec le rayon vecteur de la podaire correspondante. La distance de deux tangentes parallèles quelconques doit être constante.

Ces principes généraux étant posés, entrons dans le détail des divers tracés usités.

Mouvement uniforme. — Quand on veut que la tige guidée soit animée d'un mouvement uniforme, la courbe $r = f(\theta)$ est une spirale d'Archimède (ou une développante de cercle, si le prolongement de la tige mobile ne passe pas par le centre de rotation de la came).

Soit L l'amplitude de l'oscillation; on détermine le paramètre de la spirale de telle sorte que, pour une rotation de

180°, l'accroissement du rayon vecteur soit égal à L. Cette condition donne pour l'équation de la courbe

$$r = r_0 + L\frac{\theta}{\pi},$$

r_0 étant arbitraire.

On construit cette équation en divisant la demi-circonférence en un certain nombre de parties égales, et portant sur les rayons vecteurs des longueurs qui croissent en progression arithmétique, de r_0 à $r_0 + L$.

Un arc symétrique complète le tracé de l'excentrique [1], dont l'ensemble présente une forme qui lui a fait donner le nom de *came en cœur*.

Afin de comparer facilement les divers excentriques, construisons, pour chacun d'eux, les courbes figuratives des lois du mouvement d'un point de la tige.

Dans le cas de l'excentrique en cœur, la courbe des espaces se compose de deux portions de droites, limitées à leur intersection commune ; la courbe des vitesses est formée de deux droites parallèles à l'axe des temps, et symétriquement placées par rapport à cet axe (*fig.* 229 *bis*). On voit que la vitesse de la tige change brusquement de sens à chacune des extrémités de la course : c'est là un grave inconvénient de l'excentrique en cœur.

Excentrique Morin. — On évite cet inconvénient en choisissant, avec M. Morin, la courbe directrice de telle sorte que le mouvement s'accélère uniformément jusqu'au milieu de la course de la tige, et se retarde ensuite de même : la vitesse se trouvant nulle au moment des changements de sens.

Pour tracer un excentrique satisfaisant à cette condition,

---

[1] On doit, conformément à nos indications générales, remplacer la courbe que nous venons de déterminer par un profil parallèle (*fig.* 229) : ce qui donne lieu aux particularités géométriques suivantes. D'une part, dans le voisinage du point A, les deux branches du profil laissent entre elles un vide, qu'on remplit en décrivant du point A comme centre un arc de cercle de même rayon que le galet. Au contraire, de l'autre côté, les parties utiles des courbes se croisent. On est obligé, en cet endroit, de supprimer les deux petits arcs qui dépassent la pointe b, et même d'arrondir un peu cette pointe : de sorte que, pendant une petite fraction de la course, le guidage est supprimé.

nous prendrons comme point de départ la courbe des espaces du point guidé. Cette courbe est composée de trois arcs de parabole (*fig.* 230 *bis*), qui se raccordent tangentiellement aux points m_2 et m_6. On en déduit le profil de l'excentrique en décrivant un cercle quelconque, divisant la circonférence de ce cercle en huit parties égales (*fig.* 230), et prolongeant les rayons aboutissant aux points de division de longueurs égales aux ordonnées de mêmes numéros, mesurées sur la courbe des espaces. La longueur d'un diamètre passant par l'axe est encore constante : on peut donc, comme dans le cas précédent, employer deux galets pour guider la tige. Avec ce système, la courbe des espaces présente une continuité apparente, mais la discontinuité géométrique se manifeste sur la courbe des vitesses, et surtout sur la courbe des accélérations.

Excentrique circulaire. — Enfin nous avons dit que l'oscillation devient tout à fait régulière, quand un des points de la tige guidée peut être considéré comme la projection d'un point qui se meut uniformément sur un cercle (*fig.* 231). C'est ce qu'on obtient à peu près par le moyen d'une manivelle réunie à la tige par une longue bielle, système que nous étudierons dans le paragraphe suivant. On peut arriver au même résultat par l'emploi d'un excentrique ; c'est l'*excentrique circulaire* (*fig.* 232), lequel est géométriquement équivalent à la combinaison d'une bielle et d'une manivelle.

Supposons en effet que le bouton placé au point d'articulation de la bielle et de la manivelle grandisse de manière à embrasser l'axe de rotation : nous obtiendrons une sorte de poulie, traversée par un arbre excentré, et connue sous le nom d'excentrique circulaire. La *poulie d'excentrique* est entourée d'une bague composée de deux moitiés d'anneau boulonnées ; c'est le *collier d'excentrique* ; enfin, à l'un des segments qui constituent cette bague est assemblée une longue bielle, ou *barre d'excentrique*, dont l'extrémité vient s'articuler sur la tige à conduire.

Les courbes représentatives du mouvement diffèrent très peu de celles que nous avons discutées (p. 64), à cause de la grande longueur de la barre d'excentrique, comparée à l'amplitude de l'excursion.

Excentrique triangulaire.

Comme exemple d'excentrique appartenant à la deuxième catégorie, citons l'excentrique triangulaire (*fig.* 233), dont l'objet est de communiquer au cadre qui lui est circonscrit, et à la tige fixée à ce cadre, un mouvement alternatif intermittent.

Soient C un centre fixe, et BB_1C un triangle équilatéral dont les côtés sont remplacés par des arcs de cercle décrits des sommets opposés comme centres. Considérons cette figure comme le profil d'un excentrique tournant autour du point C dans le sens de la flèche *f*, et analysons les diverses circonstances du mouvement du cadre rectangulaire PP'QQ', assujetti à se mouvoir parallèlement à la direction *Cy*.

Première période. — Le côté QQ', tangent à l'arc CB_1, est poussé par cet arc jusqu'à ce que le point de contact se soit transporté de C en B_1; l'excentrique occupe alors la position CB_1B_2, et le cadre a marché d'une quantité égale à la moitié du rayon CB.

Deuxième période. — La rotation continuant dans le même sens, le cadre poursuit sa marche en avant, conduit par l'arête vive B_2. Il atteint ainsi la position QQ'TT', limite extrême de son excursion [1].

Troisième période. Station. — A partir de cet instant, la came tourne sans exercer aucune pression sur le cadre; et celui-ci reste stationnaire jusqu'à ce que l'excentrique soit arrivé en CB_2B_1, position exactement symétrique de la première.

La poussée de la came a lieu dans cette position sur le côté opposé du cadre, et détermine le retour de la tige en arrière : l'oscillation inverse s'exécute d'ailleurs suivant des lois identiques à celles de l'oscillation directe; elle se termine comme celle-ci par un temps d'arrêt, correspondant au passage de CB_2B à CBB_1.

[1] On voit que l'amplitude de cette excursion est égale, non plus au diamètre, mais seulement au rayon du cercle décrit par le point de l'excentrique le plus éloigné de l'axe de rotation.

Construisons les courbes représentatives du mouvement d'un point du cadre. Dans la première période, le point *b* est la projection de B, et les courbes sont identiques à celles de la *fig.* 231. Pendant la deuxième période, il y a également un point *c* du cadre, lequel est la projection d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme, de sorte que les courbes figuratives du mouvement du cadre pendant la seconde période sont encore des arcs de sinusoïdes, qui se trouvent construits (*fig.* 231). Il faut seulement remarquer qu'il n'y a pas concordance entre les phases des mouvements de *c* et de *b*, de sorte que les arcs qui répondent aux deux périodes que nous avons distinguées ne se raccordent pas, et les courbes présentent une discontinuité dont on se rend parfaitement compte, à l'inspection de la *fig.* 233 [1].

Excentrique à ondes. — Dans le profil d'un excentrique, un arc de cercle décrit du centre de rotation répond évidemment à une station du cadre ou de la tige conduite. La courbe ondulée de la *fig.* 234 se compose de trois arcs de cercle concentriques dont les rayons sont différents. Il suit de là que, pendant la durée d'une révolution complète de l'excentrique, le galet occupe successivement trois positions qui correspondent : celle du milieu à la fermeture de l'orifice A, et les deux extrêmes à la mise en communication de cet orifice avec l'espace qui se trouve à droite ou à gauche de l'obturateur.

Les angles au centre des trois arcs de cercle sont proportionnels aux durées respectives des trois stations, le mouvement de l'arbre étant toujours supposé uniforme. Ces arcs sont raccordés par des courbes qui doivent présenter une courbure suffisamment continue. Le tout est disposé de telle sorte qu'un diamètre quelconque ait une longueur constante, afin qu'on puisse embrasser l'excentrique dans son mouvement par deux galets.

La *fig.* 234 *bis* représente la loi des espaces parcourus par l'un des galets.

[1] Pour déduire les courbes (233) des courbes (231), il faut supprimer de ces dernières les deux parties hachées, et intercaler en deux endroits des lignes droites représentant les temps d'arrêt.

§ XIII. — Deuxième genre. — Transmission par l'intermédiaire de pièces rigides.

1° Bielle et manivelle.

Les excentriques offrent toutes les ressources qu'on peut désirer, géométriquement parlant, pour réaliser un mouvement oscillatoire quelconque. Seulement ces appareils donnent lieu à des frottements très notables, dès que les efforts mis en jeu sont un peu grands : de sorte que, sous ce rapport, les combinaisons de tiges assemblées à charnière sont préférables. L'organe principal est toujours une bielle, articulée en un point d'une manivelle qui tourne d'une manière continue. L'extrémité de la bielle, opposée au bouton de la manivelle, doit être guidée suivant une trajectoire déterminée ; elle accomplit sur cette trajectoire, quelle qu'en soit la nature, des oscillations dont les lois ne diffèrent pas sensiblement des lois de la projection du mouvement circulaire uniforme, pourvu que la bielle ait une longueur suffisante.

Le système le plus simple est celui qui se rencontre dans la pédale du rémouleur, dans le rouet à filer, et aussi dans les puissantes machines à vapeur à balancier (*Pl. XXVII, fig.* 235). L'extrémité libre de la bielle vient s'articuler à un balancier, lequel oscille autour d'un point fixe. Le point d'articulation se trouve ainsi assujetti à rester sur une circonférence de cercle : il parcourt d'un mouvement alternatif un certain arc B_0B_1 de cette circonférence (si les proportions des divers éléments sont convenables), tandis que la manivelle tourne d'une manière continue [1].

Mouvement rectiligne alternatif. — Dans les machines à vapeur horizontales, l'extrémité de la bielle décrit une ligne

(1) La bielle tourne à chaque instant autour du point C, intersection de la manivelle et du balancier prolongés. On se fait une idée géométrique du mouvement continu de la bielle en construisant (*fig.* 235) le double lieu décrit par le centre instantané, soit dans l'espace absolu, soit relativement à la bielle. La *fig.* 236 répond au cas où le mouvement de l'extrémité oscillante de la bielle est rectiligne.

droite (*fig.* 236). En supposant la rotation de la manivelle uniforme, les propriétés du centre instantané de rotation font connaître les lois du mouvement du point B. On construit les courbes représentatives de ce mouvement (*fig.* 237), en portant sur un axe horizontal B_1P des longueurs proportionnelles aux arcs décrits par le point A (arcs qui sont eux-mêmes proportionnels aux temps), et élevant en chacun des points ainsi déterminés, tels que p, des ordonnées égales respectivement aux espaces parcourus, aux vitesses et aux accélérations [1].

Ces courbes donnent lieu aux remarques suivantes :

1° La courbe des espaces ne présente plus la symétrie des sinusoïdes de la *fig.* 231, qui répondent au mouvement oscillatoire le plus parfait. Cependant la différence entre les deux formes n'est peut-être pas très appréciable ; et à ce point de vue les inconvénients résultant du peu de longueur de la bielle ne seraient pas de nature à frapper vivement les regards.

2° En examinant la courbe des vitesses, on reconnaît que la vitesse maxima ne coïncide plus avec le milieu de la course, de sorte que la demi-oscillation CB_1 s'effectue plus vite que CB_0. Le rapport des temps qui correspondent à ces deux parcours est marqué par le rapport des lignes IK et CI [2].

(1) Pour avoir les ordonnées de la courbe des vitesses, nous déterminerons par la construction indiquée (p. 273) la vitesse BQ, qui correspond à la position B de l'extrémité de la tige du piston ; et nous porterons cette longueur dans un sens convenable sur l'ordonnée du point p. Quant à ce qui concerne l'accélération, nous remarquerons que le lieu du point Q est une courbe qui donne la vitesse en fonction de l'espace parcouru. Or on a

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds};$$

donc l'accélération n'est autre chose que la sous-normale $v\frac{dv}{ds}$ de la courbe B_0QB_1.

(2) *Métier Taylor.* — Cette propriété a été mise à profit dans la construction d'un métier à tisser destiné à fonctionner avec une grande vitesse. Le battant reçoit son mouvement d'une bielle, qui possède à peine une fois et demie la longueur de la manivelle. La portion de l'excursion correspondant au coup de battant s'effectue plus rapidement que l'autre, le passage reste donc plus longtemps ouvert pour une même excursion totale : ce qui revient à dire que, pour un temps donné nécessaire au passage de la navette, on peut battre plus de coups par minute.

3° Enfin, avec les données que nous avons choisies,

$$AB = \tfrac{1}{2}\, OA,$$

la courbe des accélérations présente trois lobes au lieu de deux; et l'une des ordonnées maxima est de beaucoup supérieure à celle qui correspondrait à l'hypothèse d'une bielle infinie. Nous verrons, en Dynamique, quelle est la signification de ce résultat.

Proportions des bielles. — Toutes ces remarques n'ont pas une grande importance lorsque, conformément à la pratique de Watt, on donne à la bielle au moins cinq fois la longueur de la manivelle. On descend aujourd'hui beaucoup au-dessous de cette limite : soit quand on ne dispose pas d'une place suffisante, soit quand on a en vue quelque résultat spécial, comme dans la machine que nous avons signalée en note.

Transformation du mouvement alternatif en mouvement continu.

Lorsque, dans les appareils que nous venons de décrire, l'organe moteur est celui qui est animé du mouvement alternatif, il semble qu'aux deux points morts A_0 et A_1 (*fig.* 235) le balancier se trouve dans l'impossibilité de communiquer le mouvement à la manivelle. Cependant tout le monde a vu ou fait fonctionner des appareils de ce genre; et chacun sait que, sauf quelques précautions au moment du *démarrage* (¹), le mouvement continu est facile à produire et à entretenir. Nous donnerons en Dynamique les conditions nécessaires et suffisantes pour arriver à ce résultat.

2° Encliquetages.

Roue à rochet. — On connaît sous le nom de *rochet* une roue dont les dents sont généralement dissymétriques (*Pl. XXIII, fig.* 224 *bis*). L'accessoire obligé de cette sorte de

(¹) Dans les locomotives, il est tout à fait indispensable d'avoir, pour donner le mouvement à l'arbre de la roue motrice, deux machines distinctes dont les points morts ne coïncident pas, afin d'être à même de démarrer en toute position.

roue est un *cliquet*, qui s'engage dans l'intervalle de deux dents, et qui est maintenu dans cette position par un ressort.

On voit que le cliquet, organe purement passif, empêche l'arbre de la roue à rochet de tourner dans le sens de la flèche *f*. Quant au mouvement dans le sens opposé, il s'effectue à peu près comme si le cliquet n'existait pas.

Les *encliquetages* sont des engins dont la destination est diverse, mais dont l'organe principal est toujours une roue plus ou moins analogue au rochet que nous venons de décrire. Quand le cliquet, au lieu d'être articulé en un point fixe, est, comme C, attaché à une pièce mobile (*fig.* 225 *bis*), le mouvement descendant de cette pièce détermine une rotation de l'arbre du rochet, tandis qu'un mouvement inverse laissera cet arbre immobile. De la sorte, on peut communiquer un mouvement continu (ou tout au moins progressif) à un treuil O, en imprimant au levier L un mouvement alternatif (¹). Il faut avoir soin d'installer quelque part un cliquet réteneur C_1, afin d'empêcher le cylindre de revenir en arrière, pendant qu'il ne reçoit pas d'effort moteur.

La facilité avec laquelle un manœuvre peut développer un effort considérable en agissant à l'extrémité du levier, pour lui imprimer un mouvement de va-et-vient, rend cet organe précieux pour appliquer la force de l'homme. Un treuil à encliquetage remplace avantageusement le treuil à manivelle, pour élever les matériaux à la partie supérieure d'une maçonnerie. L'ouvrier abaisse et relève alternativement le levier, dont chaque oscillation fait passer une dent de la roue : le mouvement se communique ainsi à l'arbre du treuil, et produit l'enroulement de la corde, qui passe sur une poulie de renvoi, et vient enfin s'attacher au fardeau qu'il s'agit d'enlever. Un contrepoids fait que le manœuvre exerce seulement son action de haut en bas.

Levier de la Garousse. — Le levier de la Garousse (*fig.* 226 *bis*), connu depuis le dernier siècle, porte un double cliquet moteur, de manière qu'il y a effort exercé sur le rochet, pour

(¹) L'emploi des encliquetages fournit le seul moyen connu, qui permette de fonder uniquement sur des combinaisons géométriques la transformation d'un mouvement oscillatoire en mouvement progressif.

chaque oscillation simple : on diminue ainsi les intermittences du mouvement.

Pied-de-biche des scieries. — On trouve également un cliquet moteur, ou pied-de-biche, dans les scieries mécaniques à mouvement alternatif, pour commander la crémaillère qui fait avancer la pièce de bois à chaque coup de scie.

Inconvénients des encliquetages ordinaires.

Ces inconvénients sont : d'une part, les chocs bruyants du cliquet sur la roue, et de la roue sur le cliquet, d'autre part les temps perdus qui résultent de ce que le cliquet n'est jamais exactement en prise, à la position du repos.

On évite le bruit par l'emploi de l'*encliquetage muet* (*fig.* 227 *bis*), dans lequel le cliquet, au lieu d'être chassé par un ressort, est mû par un levier qui le met en place au moment convenable.

Mais les encliquetages les plus parfaits, au point de vue de la suppression complète du bruit, des chocs et des temps perdus, sont les encliquetages à frottement, dont nous exposerons plus tard la théorie, et dont nous allons dès à présent citer un exemple.

Encliquetage Dobo (*fig.* 228 *bis*). — Le rochet denté est remplacé par une roue folle A, qui reçoit directement le mouvement et doit le transmettre à l'arbre O. Celui-ci porte quatre ailes a, a, ..., articulées près du centre, et maintenues par des ressorts de façon que l'extrémité de leur courbe extérieure touche la circonférence de la roue.

Ceci posé, il est facile de comprendre le jeu de l'appareil. Quand la roue tourne dans le sens de la flèche, sa circonférence intérieure frotte contre la courbe extérieure des leviers, oblige les petits ressorts à fléchir, et n'entraîne pas l'arbre dans son mouvement, parce que chaque aile cède sous l'action du frottement.

Quand la rotation a lieu en sens inverse, le frottement tend également à faire tourner les leviers autour de leurs axes; mais, comme la longueur de la ligne menée de l'angle I à l'axe E est telle que cette extrémité peut s'éloigner du point O à une distance plus grande que le rayon intérieur de la jante, il

se produit un arc-boutement des leviers contre la roue, ce qui les rend, ainsi que l'arbre, solidaires avec celle-ci.

Les ressorts étant disposés de manière à tenir constamment l'angle extérieur des ailes appliqué contre la surface interne de la roue, l'action de cet encliquetage se produit dès que le mouvement commence en sens contraire de la flèche [1].

3° Combinaisons de pièces articulées.

En combinant un certain nombre de balanciers, bielles, liens, et en général de pièces rigides réunies par des articulations, on obtient assez simplement des mouvements oscillatoires d'une grande complication.

Nous n'insisterons pas sur ces mécanismes, dont l'usage est naturellement restreint à un petit nombre de cas spéciaux; mais nous devons décrire avec détails l'application curieuse des propriétés des systèmes articulés à la production d'un mouvement à peu près rectiligne.

Parallélogramme de Watt.

Dans les machines à vapeur à balancier, la tige du piston, après avoir traversé dans une boîte à étoupes, ou *stuffing box*, le couvercle supérieur du cylindre, vient s'articuler à un lien dont l'autre extrémité est fixée au balancier. On transforme ainsi le mouvement oscillatoire rectiligne du piston et de sa tige en un mouvement oscillatoire circulaire [2]; mais il im-

---

[1] M. Clair a construit de petits appareils fort ingénieux, fondés sur les propriétés de l'encliquetage Dobo, pour transformer directement en circulaire continu un mouvement, rectiligne ou circulaire, dont le sens change à des intervalles irréguliers. L'un de ces appareils a été appliqué à l'indicateur de Watt, que nous étudierons plus tard.

[2] *Sur la machine à vapeur, considérée au point de vue de la transmission du mouvement.*

Avant Watt, le balancier de la machine à vapeur se terminait par un secteur circulaire, au sommet duquel venait s'attacher une chaîne, fixée d'autre part à la tige du piston. Celui-ci n'avait ainsi d'action sur le balancier que pendant son mouvement descendant : le retour s'effectuait au moyen d'un contrepoids. Ce système était à la rigueur suffisant, pour des machines servant exclusivement à l'épuisement des mines.

Le parallélogramme de Watt rendit possible la machine de rotation, c'est-porte d'empêcher que l'extrémité supérieure de la tige du piston ne se trouve soumise à des efforts obliques de la part du lien, ce qui amènerait promptement des fuites de vapeur par la boîte à étoupes. Le *parallélogramme de Watt* résout le problème du guidage de la tige en ligne droite, seulement d'une manière approximative, mais avec une exactitude suffisante pour la pratique.

On facilite la théorie géométrique de cet appareil, en considérant d'abord la combinaison plus claire qui constitue le *balancier à bride* ou *parallélogramme simple*.

Soient OA (*fig.* 238) le balancier, M l'extrémité de la tige du piston, qui doit parcourir la verticale TT'. Prolongeons le lien AM d'une certaine quantité MB, et relions le point B à

à-dire une machine dans laquelle le mouvement alternatif du piston détermine la rotation continue d'un arbre de couche, par l'intermédiaire du parallélogramme, du balancier, de la bielle et de la manivelle. Seulement les machines de Watt ont le grave inconvénient d'occuper avec leurs accessoires une place considérable, et l'on est conduit à supprimer tout cet attirail dans un grand nombre de cas. Voici quelques-unes des dispositions actuellement en usage pour transformer plus simplement le mouvement oscillatoire du piston en un mouvement de rotation continu.

Machines à connexion directe. — Maudslay articule directement la tige du piston sur la bielle qui conduit la manivelle (*Pl. XXVIII, fig.* 244); l'extrémité de la tige est guidée par deux montants verticaux, entre lesquels se meut un galet qui doit rouler successivement sur l'un et sur l'autre. Nous avons déjà dit qu'il est préférable de remplacer le galet par des glissières à larges surfaces, qui permettent de graisser convenablement les contacts.

Aujourd'hui, dans toutes les machines horizontales, la tige du piston se termine par une *coquille*, munie de deux larges patins embrassant des guides fixés au couvercle du cylindre (*Pl. XV, fig.* 136). En composant ces guides de deux flasques jumelles situées de part et d'autre de la tige, tout l'espace intermédiaire reste libre pour le passage de la bielle. On place aussi les guides dans le plan vertical de la tige : alors la partie de la bielle qui vient s'articuler sur la coquille a la forme d'une fourche. Ce dernier système paraît être de moins en moins employé.

Machines oscillantes. — Dans les machines de M. Cavé (*fig.* 245), le cylindre est mobile sur deux tourillons qui lui permettent de s'incliner de part et d'autre de sa position moyenne. La tige remplit alors la fonction de bielle, et commande directement la manivelle.

Machines à fourreau. — Enfin, dans certaines machines de bateau à hélice, où la place est excessivement restreinte, la tige du piston est creuse : elle forme une sorte de fourreau, dans l'intérieur duquel joue librement la bielle, articulée sur le piston lui-même. Ces machines sont fort répandues dans la marine anglaise.

un deuxième centre fixe E, au moyen d'une bride ou contre-balancier BE. Nous retrouvons ici trois droites articulées de longueur constante; seulement les mouvements des points A et B sont actuellement réduits à de simples oscillations, qui s'effectuent suivant des arcs de cercle à courbures inverses.

Un point tel que M, situé vers le milieu du lien, décrit une courbe connue sous le nom de *courbe à longue inflexion*. Cette courbe, considérée dans son ensemble, présente à peu près la forme d'un 8; elle s'infléchit trois fois en des points très rapprochés l'un de l'autre, I, I', I'' : dans la région voisine de ces trois points d'inflexion, on peut trouver un arc assez long qui s'écarte fort peu d'une ligne droite. Or, il est facile, en choisissant convenablement les nombreux paramètres dont on dispose, de s'arranger de manière à faire coïncider cette portion de la trajectoire du point M avec la verticale suivant laquelle se meut l'extrémité de la tige du piston : c'est ainsi qu'on arrive à guider celle-ci, sans faire intervenir le frottement direct.

Règles données par Watt. — Ces préliminaires géométriques étant établis, voici comment Watt a réalisé sa conception. Considérant les deux positions limites du balancier, A_1, A_2 (*fig.* 239), Watt commence par placer la corde de l'arc A_1A_2 verticalement; puis, menant l'horizontale OA, bissectrice de l'angle décrit par le balancier, il fait coïncider le milieu P de la flèche correspondante avec la verticale qu'il s'agit de faire décrire au point M. Enfin ce point M est pris exactement au milieu du lien, et l'on donne à la bride une longueur égale à celle du balancier.

Cela fait, on s'impose la condition que la tige soit rigoureusement verticale au commencement, au milieu et à la fin de sa course. Comme on connaît la longueur constante AM, il est facile, en prenant successivement les trois points A, A_1, A_2 pour centres, avec une ouverture de compas égale à cette longueur, ou à la demi-longueur du lien, de marquer sur la verticale TT' trois points M, M_1, M_2 de la courbe à longue inflexion. Si l'on prolonge les lignes AM, A_1M_1, A_2M_2, de longueurs égales au deuxième segment du lien (ce que nous n'avons pas indiqué sur la figure pour ne pas introduire de confusion), on obtient trois positions de l'extrémité B de la bride : en faisant passer une circonférence par ces trois positions, on détermine le point fixe E de celle-ci.

D'après les proportions adoptées, il est évident : 1° que la longueur de la bride est égale à celle du balancier; 2° que l'arc décrit par l'extrémité de cette bride est en tout symétrique de l'arc A_1, A_2, par rapport à la ligne TT'.

On établit tout aussi facilement les conséquences suivantes :

1° La corde A_1A_2 est égale à la course du piston, et le milieu de cette course répond au milieu de l'oscillation du balancier;

2° Les angles du lien avec la tige ont leurs valeurs maxima égales dans les deux sens, ce qui réduit autant que possible la grandeur absolue de ces maxima;

3° La position moyenne M est un des trois points d'inflexion de la courbe, et la tangente en ce point coïncide avec la direction normale du mouvement.

Soient R le rayon du balancier, C la course du piston (égale à la corde A_1A_2), f la flèche, et θ la demi-amplitude de l'oscillation circulaire; on a

$OP = R -$

$$OP = \frac{1}{2} R (1 + \cos\theta).$$

En prenant, toujours avec Watt, la longueur OP triple de la demi-course, ou du sinus de l'arc AA_1, on a

$$\frac{1}{2} R (1 + \cos\theta) = 3 R \sin\theta,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{6}, \qquad \theta = 18°53'28''.$$

Avec ces données, les quantités R, C, f sont entre elles comme les nombres entiers

$$37, \quad 24, \quad 2.$$

Quant à la longueur du lien, on la prend égale au plus à la corde C, et au moins à $\frac{4}{5}$ C.

Parallélogramme articulé. — Le parallélogramme articulé (*Pl. XIV, fig.* 143) est une modification du parallélogramme simple, imaginée dans le but de diminuer la place occupée par le contre-balancier. Les propriétés géométriques des deux organes sont d'ailleurs exactement les mêmes.

M étant toujours le point d'articulation de la tige du piston, au lieu de prolonger le lien AM, on construit sur la portion AA' du balancier (portion généralement égale à la moitié de la longueur totale OA) un parallélogramme articulé, dont le sommet B' est rattaché par une bride à un point fixe E.

Pour comprendre le jeu de ce mécanisme, tirons la ligne OM, et remarquons que cette droite coupe toujours au même point M' le côté A'B' du parallélogramme. Cette propriété résulte immédiatement du parallélisme des lignes AM et A'B'. Les triangles semblables qui démontrent ce lemme donnent également la proportion

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OA},$$

c'est-à-dire que M' décrit une courbe semblable au lieu du point M. Or, les trois tiges OA'B'E constituent un parallélogramme simple; donc la trajectoire du point M', et par suite celle du point M, est précisément la courbe à longue inflexion, que nous venons d'étudier (1). Seulement, par l'introduction du parallélogramme proprement dit, le point E se trouve beaucoup rapproché de l'ensemble de la machine (2).

(1) Dans les machines à vapeur ordinaires, on utilise la propriété du point M', qui décrit, comme nous venons de le voir, une trajectoire semblable à celle du point M, en fixant en ce point la tige de la pompe à air. Enfin, dans les machines à deux cylindres de Woolf, le point M' sert à articuler la tige d'un deuxième piston à vapeur; dans ce cas, pour placer la tige de la pompe à air, on construit un second parallélogramme sur A'M', et l'on obtient un point M'' qui décrit une courbe à longue inflexion semblable aux deux précédentes.

(2) *Parallélogramme des bateaux.* — Pour appliquer le parallélogramme de Watt aux machines de bateaux, il est nécessaire de restreindre encore l'espace occupé par toutes les pièces encombrantes. Aussi le balancier est-il placé au-dessous de la tige (*fig.* 240) : le point d'appui est pris sur le cylindre lui-même. On ramène facilement ce système, comme théorie géométrique, au parallélogramme simple.

Parallélogramme de Tchébychef. — Nous nous abstiendrons de mentionner diverses modifications du parallélogramme de Watt, conçues en vue de rendre la déviation rigoureusement nulle. Il n'est certes pas difficile d'obliger un point à suivre une trajectoire rectiligne; mais ce qui caractérise la belle invention de Watt, c'est que le parallélogramme articulé permet, sans notables inconvénients pratiques, de sacrifier la rigueur absolue du guidage à la suppression du glissement.

Seulement, ce principe étant admis et la disposition générale de Watt adoptée, si l'on discute les règles au moyen desquelles nous avons déterminé les nombreux éléments géométriques du parallélogramme, on reconnaît bien vite que ces règles ont été établies en vue d'avantages purement secondaires (quelques-uns même tout à fait hypothétiques), tandis que l'objet principal aurait dû être de diminuer le plus possible la déviation.

Il est juste de dire que la question ainsi posée est excessivement difficile à aborder, ce qui explique comment elle est restée tout à fait intacte jusqu'aux travaux récents de M. Tchébychef [1]. Indiquons brièvement les principaux résultats des savantes recherches de ce géomètre.

Et d'abord, il n'y a aucun avantage particulier à donner à la tige guidée la direction tout à fait exacte au commencement, au milieu et à la fin de la course; il est même facile de voir que cette disposition n'est pas la plus favorable, pour la précision du jeu de l'organe dans les autres points de l'excursion du piston.

En effet, soit A_1A_2 la droite de Watt (*fig.* 241), il est évident qu'il existe une droite plus rapprochée que celle-là de l'arc décrit par le point M; et en général, quand on veut atténuer les irrégularités d'une fonction quelconque, il convient toujours de faire en sorte que l'écart soit un maximum aux deux extrémités de l'intervalle considéré.

En deuxième lieu, nous n'avons fait appel à aucune raison de quelque valeur, pour déterminer la position la plus avantageuse de la tige du piston par rapport au balancier. Cette position,

[1] *Académie de Saint-Pétersbourg : Mémoires des Savants étrangers*, t. VII; 1854.

d'après M. Tchébychef, dépend essentiellement des dimensions du parallélogramme.

Si l'on suppose celui-ci construit sur la demi-longueur du balancier (comme Watt l'a fait lui-même, et comme on doit le faire si l'on est maître de disposer des dimensions du parallélogramme), on diminue notablement la limite de la déviation de la tige de sa direction normale en l'approchant du centre du balancier, plus qu'on ne devrait le faire d'après la règle que nous avons donnée un peu plus haut.

Quand on tient à rendre la tige tout à fait verticale, au commencement, au milieu et à la fin de la course, on doit prendre pour sa direction la ligne qui divise le sinus verse de l'arc décrit par l'extrémité du balancier, dans le rapport de 2 à 1; et si, obéissant à des idées plus rationnelles, on ne cherche pas l'exactitude absolue dans les deux positions extrêmes de la tige, il faut prendre pour cette direction la ligne qui divise le sinus verse dans le rapport de 5 à 3.

Dans ce dernier cas, la tige guide ne sera plus déterminée par les positions limites du balancier, mais par des positions qui précèdent celles-ci, d'un quarantième à peu près de l'amplitude de l'oscillation.

« On s'assure par l'analyse, dit M. Tchébychef, qu'avec ces modifications la limite de déviation de la tige par rapport à la ligne verticale diminue de plus de moitié. »

Cette limite a été plus tard singulièrement réduite par le même savant, qui, rompant de plus en plus avec la tradition de Watt, tout en restant fidèle à ses principes, propose [1] de remplacer le parallélogramme ordinaire par un dispositif fort analogue (*fig.* 242), dans lequel on remarquera l'existence d'un nombre précisément égal de tiges et d'articulations.

O et E sont les deux centres fixes, M est le point d'articulation de la tige du piston (dans la position moyenne, représentée par la *fig.* 243, les points M et E sont confondus). Enfin, AM et A'P sont deux liens, qui ne restent pas parallèles

[1] T. IV du *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, p. 433 (1861).

dans le mouvement, de sorte que l'appareil ne mérite plus, à proprement parler, le nom de parallélogramme.

Les dimensions des diverses tiges sont les suivantes :

$$OA = 1,$$

$$EQ = MQ = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$AA' = EP = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$PQ = \frac{1}{2}\,OA',$$

$$AM = A'P < \frac{1}{2}\ \text{course}.$$

M. de Prony a calculé qu'en suivant les indications de Watt, supposant l'amplitude de l'oscillation du balancier égale à $35°11'$, et prenant

$$OA = 2^{m},515,$$
$$AM = 0^{m},762,$$

on avait 2 millimètres de déviation. En appliquant tous les perfectionnements ci-dessus indiqués, on trouve seulement $0^{mm},05$, c'est-à-dire quarante fois moins.

« On est donc certain, conclut M. Tchébychef, qu'il n'y a aucune raison, pour les cas ordinaires de la pratique, de rechercher un mécanisme capable de donner le mouvement rectiligne avec une précision supérieure. »

CHAPITRE VI.

ORGANES SERVANT À ÉTABLIR, INTERROMPRE OU MODIFIER UNE LIAISON DE MOUVEMENT.

Quelle que soit la nature du moteur chargé de donner le mouvement à une usine un peu considérable, on s'arrange ordinairement de manière à transmettre tout d'abord l'action de ce moteur à un arbre tournant; de plus, par une série de dispositions dont nous verrons plus tard la théorie, on rend le mouvement de l'arbre de couche à peu près uniforme : c'est-à-dire qu'on maintient les variations de la vitesse entre des limites qui n'empêchent pas les différents outils commandés par cet arbre de fonctionner constamment dans les conditions les plus avantageuses.

Ce premier point une fois réalisé, comme on connaît, par les Chapitres précédents, les moyens à employer pour passer d'un mouvement circulaire uniforme à un mouvement quelconque, il n'y a rien de plus facile que de déterminer les éléments de la liaison à établir entre l'arbre de couche et chacun des outils de l'atelier.

Il faut avoir en outre, en un certain point de la transmission, un système d'embrayage qui permette d'ouvrir ou de fermer la communication entre le moteur et l'outil, soit automatiquement, soit à volonté; quelquefois même on veut se ménager la facilité de modifier la liaison des deux organes pendant le cours du mouvement. Il nous reste à étudier les engins qui répondent à cette double fonction.

§ XIV. — Organes de mise en mouvement et d'arrêt.

Embrayage des courroies. — Nous avons dit que, dans les transmissions par courroies sans fin, on produit l'embrayage en faisant passer la courroie de la poulie folle sur la poulie motrice. Pour arrêter la machine, on ramène la courroie sur la poulie folle; et ensuite, selon les cas, on laisse la machine s'arrêter d'elle-même ou bien on emploie un frein [1] pour éteindre plus vite son mouvement.

On arrive aux mêmes résultats en agissant sur la tension de la courroie : ce qui peut se faire, soit en manœuvrant convenablement une poulie de tension, soit en déplaçant d'une petite quantité un palier de l'un des arbres (*fig.* 246).

Cylindres et cônes de friction. — C'est également en établissant ou supprimant la pression qu'on opère l'embrayage ou le débrayage d'une paire de cylindres de friction. Nous avons indiqué l'application de ce principe aux monte-sacs.

On emploie quelquefois un procédé analogue pour élever et laisser retomber périodiquement un marteau vertical. La roue motrice et la tige du marteau (*Pl. XXIX, fig.* 246 *bis*) se trouvent à une très faible distance l'une de l'autre; et il suffit, pour faire soulever la tige, de l'appuyer contre la poulie au moyen d'un galet fixé à un levier coudé. Quand on lâche le levier, le marteau retombe. En faisant varier la hauteur de chute, on règle à volonté la force des coups de marteau.

Accouplement de deux arbres situés dans le prolongement l'un de l'autre. — Quand un arbre d'une certaine longueur doit être composé de deux pièces rapportées bout à bout, il faut, pour établir une solidarité parfaite entre les deux parties : 1° centrer bien exactement les deux arbres; 2° les empêcher de tourner indépendamment l'un de l'autre; 3° enfin, s'opposer à tout déplacement longitudinal. On atteint ce triple résultat en enveloppant les deux arbres d'un *manchon* calé sur chacun d'eux, au point où a lieu la solution de continuité. Ce manchon est maintenu dans une position fixe au moyen d'une vis qui le traverse, et qui s'engage dans le vide existant entre les abouts des deux pièces : une *languette à ergots*, ou tout autre système équivalent, empêche de son côté l'écartement des deux tronçons. Telle est la disposition en usage quand on veut constituer un assemblage invariable.

[1] Nous ne faisons pas figurer les freins parmi les organes d'arrêt, parce que nous étudions seulement ici les appareils qui opposent une impossibilité *géométrique* à la continuation d'un mouvement.

Dans la plupart des cas, on tient à se réserver la faculté de supprimer à volonté la solidarité entre les deux portions de l'arbre; alors, au lieu d'un manchon unique établissant une liaison invariable, on emploie un *manchon d'embrayage*, composé de deux parties, l'une fixe, l'autre mobile (*fig.* 249), qu'on approche ou qu'on éloigne au moyen d'une fourchette [1]. La partie fixe du manchon est calée sur l'arbre qui reçoit directement l'action du moteur, l'autre est munie d'une languette ou prisonnier qui l'oblige à tourner avec l'arbre conduit, en lui laissant la faculté de se mouvoir dans le sens de l'axe. La solidarité entre les deux moitiés est obtenue par le moyen de dents ou griffes [2], qui s'engagent les unes dans les autres quand on agit sur la fourchette d'embrayage.

Embrayage à cônes de friction. — On supprime quelquefois les dents, et l'on donne aux deux parties du manchon la forme de surfaces coniques égales, l'une concave, l'autre convexe (*fig.* 247). En appuyant légèrement ces cônes l'un contre l'autre au moyen de la fourchette, on détermine un frottement très dur, qui empêche les deux arbres de tourner l'un sans l'autre. Ce mode d'assemblage n'a pas la rigidité des assemblages ordinaires [3]; aussi, lorsqu'il survient une

[1] Si les manchons sont trop lourds pour être manœuvrés directement à la main, on fixe à la fourchette une bielle (*fig.* 250), dont l'extrémité s'articule à un levier rappelé par une vis. Les collets de la vis sont montés sur deux tourillons, et lui permettent de prendre une légère obliquité.

[2] Ces dents sont généralement dissymétriques (*fig.* 249) : elles sont limitées, d'un côté par des plans conduits par l'axe, de l'autre par des surfaces hélicoïdales à plan directeur. Il est alors indispensable que la rotation ait constamment lieu dans le sens de la flèche *f* : autrement, les deux parties du manchon glisseraient l'une sur l'autre, et le débrayage se produirait de lui-même.

On fait aussi des manchons à dents droites (*fig.* 250), qui permettent la transmission dans les deux sens. Avec cette disposition, il y a forcément choc au moment de l'embrayage et du désembrayage, tandis que, dans le cas précédent, avant l'instant où la liaison des deux manchons est parfaite, il se produit un glissement préparatoire des dents les unes sur les autres, ce qui ménage la transition du repos au mouvement.

[3] La disposition représentée (*fig.* 248), qui se rapporte à la liaison de deux arbres parallèles, offre de l'analogie avec celle qui nous occupe. Elle présente plus de sécurité que les galets de friction, tout en conservant comme réserve extrême la possibilité du glissement en cas d'accident.

résistance exceptionnelle, les cônes ont-ils la ressource de frotter sans se communiquer le mouvement, ce qui évite les chocs et les ruptures.

Désembrayage brusque d'une machine puissante. — Lorsqu'on a besoin de désembrayer brusquement une machine d'une grande puissance, il serait peu commode et peu sûr, en agissant sur une fourchette d'embrayage, d'exercer une pression qui suffit à dégager promptement le manchon mobile. Dans ce cas on ménage, entre les deux parties du manchon (*fig.* 251), une fente dont la largeur diminue progressivement jusqu'à devenir nulle en un point de la circonférence. On chasse dans cette fente, à l'instant où l'on veut désembrayer, une forte tige de fer, espèce de verrou maintenu solidement par des guides dans une position perpendiculaire à l'axe de rotation des arbres. Cette pièce une fois engagée fait effort contre les parois de la fente, par suite du mouvement même de l'arbre, et la rupture de la liaison des deux pièces se trouve produite automatiquement.

Embrayage d'un engrenage (*fig.* 252 et 253). — Les manchons d'embrayage servent aussi à caler à volonté une roue folle A (*fig.* 252). Les griffes sont disposées de manière à pénétrer dans les intervalles des bras de la roue, lorsque le manchon est suffisamment rapproché. La roue A se trouvant ainsi calée sur son arbre, celui-ci devient solidaire avec l'arbre de la roue B [1].

On peut encore établir ou supprimer la dépendance de deux arbres reliés par un engrenage, en donnant à l'un d'eux la faculté de glisser longitudinalement, d'une quantité suffisante pour que les dentures cessent d'être en regard.

L'arbre mobile porte deux gorges (*fig.* 253) : un *levier d'arrêt* T le maintient dans la position que l'on veut. Sur la figure, on voit les deux roues désembrayées; pour embrayer, on soulèverait le levier d'arrêt, on pousserait vers la gauche l'arbre rendu à la liberté, et l'on ferait retomber le levier d'arrêt dans la seconde gorge.

[1] On peut appliquer ce principe de deux manières différentes. Si le moteur agit sur l'arbre à manchon, cet arbre tourne continuellement : mais les deux roues dentées, ainsi que l'arbre de la roue B, restent immobiles quand le manchon n'est pas embrayé. Si au contraire l'action du moteur s'exerce sur le deuxième arbre, l'arbre de la roue A ne tourne que lorsque le manchon est embrayé.

Les deux axes peuvent n'être pas parallèles.

martin otel

Déclics.

Les déclics servent à produire un mouvement ou un arrêt brusque. On les applique surtout aux machines peu puissantes, ou aux organes accessoires des machines plus importantes.

La manœuvre de ces appareils est quelquefois automatique et confiée à la machine elle-même, comme dans l'exemple que voici.

La poulie K (*fig.* 254) est folle sur l'arbre O, animé d'un mouvement de rotation continu dans le sens de la flèche *f* : un doigt calé sur l'arbre, qui bute contre un taquet fixé à la poulie, oblige celle-ci à tourner solidairement avec l'arbre. Mais le taquet n'est pas lié à la poulie d'une manière invariable : il forme l'une des extrémités d'un levier dont le point fixe est en F; et, dans l'état ordinaire des choses, un ressort pèse sur le petit bras de ce levier, de manière à maintenir le taquet en prise.

A un certain instant du mouvement, la queue du levier rencontre un arrêt qui, en la faisant basculer, produit le déclenchement du taquet : alors la poulie, abandonnée à elle-même, tourne en sens contraire sous l'action du contrepoids P. Mais bientôt le doigt dégagé revient saisir le taquet et la rotation recommence dans le sens (*f*).

Sonnette à déclic. — Pour enfoncer les pilotis, on emploie un *mouton*, c'est-à-dire une masse pesante qu'on soulève par divers procédés à une certaine hauteur, et qu'on laisse ensuite retomber sur la tête du pieu (*fig.* 257). L'appareil qui sert à cette manœuvre, depuis un temps immémorial, est la *sonnette à tiraude*. Le mouton est maintenu par deux oreilles entre deux pièces de bois verticales; il est suspendu à une corde qui passe sur une poulie de renvoi, pour se diviser ensuite en plusieurs cordelles dont chacune est tirée par un homme. Ce système permet de graduer à volonté l'effort exercé : il est excellent pour commencer le battage. Mais, à mesure que l'opération avance, on rencontre une résistance plus grande, et il faut de toute nécessité augmenter la course du mouton ou son poids. Or, quel que soit le parti auquel on s'arrête, on arrive rapidement à une limite d'élévation et de poids qu'on ne saurait dépasser, vu la nature du moteur employé.

En effet, il est évident qu'on ne peut pas augmenter beaucoup la course. D'autre part, si l'on donne au mouton un poids considérable, il faudra avoir un grand nombre de manœuvres agissant sur des cordes très écartées : ces hommes se gêneront mutuellement, et ne pourront exercer efficacement leur action. Il convient, dans ces conditions, de remplacer la sonnette à tiraude par un treuil à engrenages, donnant le mouvement à un arbre sur lequel s'enroule la corde du mouton, après avoir passé sur une poulie de renvoi. Un déclic fait retomber le mouton parvenu à la hauteur voulue.

Voici à cet égard le procédé le plus simple : la corde, après avoir fait une ou deux fois le tour de l'arbre du treuil, vient aboutir dans la main d'un homme, qui la maintient suffisamment tendue. Pour supprimer la transmission et faire tomber le mouton, l'homme n'a qu'à lâcher la corde.

D'autres fois, entre le mouton et la corde qui sert à l'élever, on dispose une pièce intermédiaire, à laquelle le mouton proprement dit est accroché par un anneau engagé dans une pince articulée (*fig.* 258). Cette sorte de tenaille vient buter à une certaine hauteur contre un obstacle fixe, qui la force à s'ouvrir en lâchant le mouton.

La pince est conformée de manière à ressaisir l'anneau d'elle-même, quand on la laisse tomber à son tour.

Trépan à chute libre. — M. Kind a employé un système analogue pour le forage des trous de sonde. L'outil de percussion, ou *trépan*, est fixé à une série de tiges dont la longueur totale est égale à la profondeur du trou. Or, dès que cette profondeur devient un peu considérable, non seulement le poids des tiges tend à briser les parties inférieures, mais de plus, lorsqu'on vient à battre, c'est-à-dire à soulever la sonde et à la laisser retomber pour défoncer le sol, les tiges dégradent latéralement le forage par leur fouettement; et leurs vibrations provoquent des éboulements, par suite desquels le trépan peut se trouver engagé.

Ce double inconvénient est évité par l'emploi du trépan à chute libre de M. Kind (*Pl. XXV*, *fig.* 270).

Au moment où la sonde est abandonnée à elle-même, l'eau dont le trou est toujours rempli soulève le disque qu'on voit à la partie supérieure de la figure; les branches inférieures de la pince *pp* s'écartent et lâchent la tige T, à l'extrémité de laquelle se trouve le trépan. Celui-ci continue son mouvement accéléré, tandis que les tiges descendent lentement, par suite de la résistance que l'eau oppose au mouvement du disque-parachute. Le choc qui se produit sur la tête du trépan permet aux crochets de ressaisir l'outil, pour le soulever de nouveau.

Cataracte des machines de Cornouailles. — Dans les machines d'épuisement dites *de Cornouailles*, l'admission de la vapeur dans le cylindre a lieu en vertu d'un déclic manœuvré par un appareil spécial appelé *cataracte*.

Cet appareil communique à une tige AB (*fig.* 256) un mouvement ascensionnel très lent, en vertu duquel celle-ci vient au moment convenable soulever le levier T, et rendre la liberté au secteur S. L'arbre O, ne se trouvant plus retenu par l'action du cran sur le secteur, bascule sous l'influence d'un contrepoids qui l'entraîne dans le sens de la flèche; et ce mouvement ouvre la soupape d'admission de la vapeur.

Échappements.

Les mécanismes employés dans l'horlogerie sous le nom d'*échappements* se composent en général d'une roue à rochet, entre les dents de laquelle viennent s'interposer périodiquement deux arrêts fixés à une pièce oscillante.

Le moteur tend à imprimer un mouvement de rotation continu à l'arbre de la roue à rochet; l'interruption périodique a pour but de régulariser ce mouvement, en faisant intervenir un pendule ou un balancier à vibrations isochrones.

On profite en même temps du temps très court pendant lequel le régulateur est en relation avec le moteur, pour faire donner au pendule ou au balancier une légère impulsion, suffisante pour entretenir leur mouvement.

L'étude des échappements n'entre pas dans le programme de ce Cours.

§ XV. — Moyens de modifier une liaison de mouvement.

On a souvent à changer, pendant la marche d'une machine, la liaison géométrique existant entre deux parties de cette machine. La modification est, selon les cas, brusque ou graduelle : elle peut porter, soit sur le sens du mouvement transmis à la pièce conduite, soit sur le rapport des vitesses, soit même sur ces deux éléments à la fois.

Dans les machines à raboter, par exemple, l'outil reçoit de l'arbre moteur un mouvement de translation uniforme, par l'intermédiaire d'une crémaillère et d'un pignon.

Mais une fois que le rabot a parcouru toute la longueur de la crémaillère, la continuation du mouvement suivant les mêmes lois devient impossible : il faut modifier la liaison du moteur avec l'outil, et s'arranger de façon à mettre celui-ci à même de poursuivre son travail, en le ramenant dans sa position primitive, avec un léger déplacement latéral.

D'autres fois l'outil, arrivé au bout de sa course, se retourne de manière à raboter alternativement dans les deux sens. Enfin, dans un autre genre de machines, c'est l'outil qui est fixe, et l'objet qui reçoit un mouvement convenable. A cet égard, une simple visite dans les ateliers en apprend plus que toutes les descriptions.

Changement brusque de la vitesse.

Pour pouvoir à volonté faire varier la vitesse d'un arbre tournant (ou plutôt le rapport de la vitesse de cet arbre à celle de l'arbre moteur), on dispose sur les deux arbres deux ou plusieurs couples de roues dentées ou de poulies, qu'on embraye suivant les besoins. Souvent ces divers trains ne sont pas fixés à demeure sur les arbres : on a un certain nombre de roues de rechange, et l'on substitue une paire à une autre, ce qui ne peut se faire sans arrêter la machine. Quand on ne s'astreint pas à ce que les rayons de ces roues forment une somme égale à la distance des axes, on emploie comme intermédiaire une roue parasite (*fig.* 255), dont on fixe le centre dans une position convenable.

Il n'est d'ailleurs jamais indispensable d'arrêter complète-

ment l'organe dont on veut modifier la vitesse; et la substitution d'un engrenage à un autre peut s'effectuer aisément, pendant la marche de la machine, à l'aide des systèmes d'embrayage que nous avons décrits dans le paragraphe précédent.

Considérons deux arbres tels que P et Q (*fig.* 259 et 260), dont les axes de rotation sont dans un même plan; et soient $\boxed{\begin{matrix}A\\a\end{matrix}}$, $\boxed{\begin{matrix}B\\b\end{matrix}}$ les rouages correspondant à deux valeurs différentes du rapport des vitesses. Les deux roues qui appartiennent à l'un des arbres sont folles, et dans l'intervalle de ces roues joue un manchon d'embrayage double, c'est-à-dire armé de dents ou saillies sur ses deux bases opposées. Suivant que ce manchon est engagé à droite ou à gauche, l'un ou l'autre des deux engrenages fonctionne comme s'il existait seul.

Dans la disposition représentée *fig.* 259, le déplacement du manchon change seulement le rapport des vitesses angulaires, sans altérer le sens de la transmission; avec la combinaison de la *fig.* 260, on change à la fois la grandeur et le signe du rapport des vitesses. Enfin le système de la *fig.* 261 sert à renverser simplement le sens du mouvement de l'arbre conduit, sans altérer la grandeur absolue de sa vitesse.

S'agit-il d'une transmission par courroies, on dispose sur deux arbres parallèles plusieurs paires de poulies (*fig.* 267), dont les diamètres sont calculés de manière que la longueur totale de la courroie reste constante. Au moyen d'une fourchette, on transporte la courroie d'une paire sur l'autre.

On peut encore avoir une série de poulies égales et voisines les unes des autres (*fig.* 268), montées sur des arbres creux ou canons, qui s'emboîtent à frottement doux. Outre la poulie qui lui donne le mouvement, chacun des canons porte une roue dentée, de sorte qu'on aperçoit les unes à la suite des autres, sur le même axe géométrique :

1° Une poulie folle;

2° Une deuxième poulie, calée immédiatement sur l'arbre moteur;

3° Une troisième poulie, calée sur le premier canon;

4° Une quatrième poulie, calée sur le deuxième canon;

Puis :

5° La roue dentée du deuxième canon;

6° Une roue dentée plus petite, calée sur le premier canon;

7° Enfin une troisième roue dentée plus petite que la seconde, et calée sur l'arbre central.

Sur un second arbre parallèle au premier sont fixées à demeure trois nouvelles roues qui engrènent avec les trois précédentes, et dont les diamètres varient par conséquent en sens inverse : une courroie, mise en mouvement par un tambour non représenté dans la figure, est susceptible d'être embrayée tour à tour sur les quatre poulies. Il est facile de voir comment, en transportant la courroie d'une poulie à l'autre, on fait varier la vitesse de l'arbre conduit : la vitesse du tambour moteur et celle de la poulie directement embrayée restant constantes.

Dans la *fig.* 269, le déplacement de la courroie change à la fois la grandeur et le sens de la vitesse de l'arbre AB.

On rencontre dans les machines un grand nombre de dispositions spéciales, dont l'objet est de faire varier brusquement le sens ou la grandeur de la vitesse transmise à un engin déterminé. Nous allons en donner encore deux exemples.

Premier exemple. — Une corde sans fin s'enroule sur deux poulies dont les axes sont parallèles et horizontaux (*fig.* 262) : on veut pouvoir changer à volonté le sens du mouvement de cette corde. A cet effet, entre les arbres des poulies, on installe une vis sans fin verticale. Chacun des arbres porte une roue disposée de manière à pouvoir engrener avec la vis; seulement l'intervalle des deux roues est un peu trop grand pour que celle-ci engrène à la fois avec l'une et avec l'autre.

Cela posé, il est évident que, selon que l'engrenage aura lieu avec la roue de droite ou avec celle de gauche (la vis tournant toujours dans le même sens), le mouvement de la corde sans fin se produira dans un sens ou dans l'autre.

On obtient l'engrenage alternatif en faisant reposer le pivot de l'arbre de la vis sur un chariot, capable de prendre un petit mouvement latéral.

Deuxième exemple. — *Machine à forer* (*fig.* 263). — Le foret est fixé à l'extrémité inférieure d'un arbre vertical, auquel

l'engrenage $\boxed{\frac{A}{a}}$ communique un mouvement rapide de rotation. La roue *a* porte une languette qui fait saillie dans l'œil circulaire dont elle est percée; et cette languette est engagée dans une rainure creusée sur toute la longueur de l'arbre. La roue, maintenue par un support fixe, reste toujours à la même hauteur et ne cesse pas d'entraîner le foret dans son mouvement; mais on voit que celui-ci, tout en tournant avec une grande rapidité, peut descendre graduellement au fur et à mesure de la pénétration. Enfin, l'arbre vertical est fileté à sa partie inférieure, et de part et d'autre du filet de vis se trouvent deux roues folles, qui tournent librement sur leurs coussinets pendant que l'outil travaille.

Quand le forage est terminé, on cale les deux roues, qui font alors fonction d'écrou immobile. L'arbre continuant à tourner sur son axe, la vis remonte avec l'outil, dont le mouvement ascensionnel ne s'arrête que quand la vis est entièrement hors de l'écrou.

Changement graduel de la vitesse.

Cônes alternes. — Au lieu de deux rangées de poulies permettant d'établir entre deux arbres parallèles un certain nombre de rapports de vitesses formant une série discontinue, concevons deux troncs de cônes (*fig.* 264) posés de la même manière que les poulies. Une courroie dont la longueur est constante peut les embrasser et rester également tendue, quel que soit le plan perpendiculaire aux axes dans lequel on la place. Le rapport des vitesses varie avec cette disposition par degrés insensibles.

On fixe la courroie dans la position que l'on veut, au moyen d'un anneau traversé par la courroie et conduit par une tige guidée.

Un autre système consiste à donner à l'un des cônes la faculté de glisser le long de son arbre. L'autre cône peut alors être remplacé par un cylindre; et il est toujours indispensable d'avoir quelque part une poulie de tension, l'un des diamètres d'enroulement étant seul variable.

Citons comme exemple le mécanisme employé dans les anciens bancs à broches pour accélérer progressivement le mouvement de rotation des bobines, avant l'invention du rouage épicycloïdal dont nous avons parlé page 264.

Le tambour conique A (*fig.* 265) est monté à frottement doux sur un arbre carré, ou sur un arbre rond à languette. Dans la gorge s'engage une fourche d'embrayage au moyen de laquelle on pousse le tambour à gauche ou à droite, selon qu'on veut augmenter ou diminuer la vitesse de la courroie, et par conséquent celle du tambour cylindrique B [1].

Changement de vitesse par rouleau de friction (*fig.* 266). — L'arbre moteur est terminé par un plateau, contre lequel s'appuie une roulette fixée sur un arbre vertical. La transmission s'effectue en vertu de l'adhérence de la roulette sur le plateau. Le pivot de l'arbre vertical repose sur une crapaudine qu'on peut élever ou abaisser au moyen d'un levier coudé. Selon que la roulette s'approche ou s'éloigne du centre de rotation du plateau, le rapport de sa vitesse angulaire à celle de celui-ci diminue ou augmente.

Les applications de ce mécanisme sont nombreuses. On y a recours toutes les fois qu'on veut imprimer progressivement à un arbre tournant une vitesse considérable.

[1] Dans la disposition indiquée par la figure, les axes des deux tambours ne sont pas parallèles; aussi a-t-on employé deux poulies de renvoi, projetées en C, dont les arbres glissent dans des coulisses verticales : ces poulies font en même temps fonction de poulies de tension.

CHAPITRE VII.

MOYENS D'OBSERVATION ET APPAREILS PROPRES A DÉCOUVRIR EXPÉRIMENTALEMENT LA LOI D'UN MOUVEMENT.

Nous avons dit qu'on détermine expérimentalement la loi du mouvement d'un point en fixant, au moyen d'un système quelconque de coordonnées, un certain nombre de positions de ce point, et notant les temps écoulés entre deux observations consécutives.

On obtient ainsi directement la loi des espaces parcourus, sous la forme d'une table numérique ou d'un tableau graphique; et, cela fait, les règles que nous avons données font connaître toutes les quantités qu'on a besoin de considérer dans l'étude d'un mouvement.

Ce procédé, qui n'offre aucune difficulté quand le mouvement est suffisamment lent, a été employé par Coulomb pour déterminer les lois du mouvement d'un traîneau, glissant sur un plan horizontal. En un point de ce traîneau était fixé un index, mobile le long d'une règle divisée en pouces : un aide comptait les vibrations d'un pendule battant la demi-seconde, un autre annonçait par un cri le passage du traîneau à chaque division, tandis que Coulomb écrivait la correspondance des deux mesures.

Mesure de la vitesse.

Quand il s'agit d'un mouvement rapide, mais qui se prolonge à peu près uniformément, pendant un temps suffisamment long, il est facile d'en avoir la vitesse moyenne.

C'est ainsi qu'on calcule la vitesse d'un navire en jetant le loch, celle d'un train en mesurant le temps employé à parcourir un espace donné, la vitesse angulaire d'une roue en comptant le nombre de tours effectués pendant une demi-minute.

Enfin, pour constater la vitesse moyenne, pendant une longue durée, d'un mouvement de rotation ou d'un mouvement oscillatoire, on emploie les compteurs à chiffres, dont la disposition générale est la suivante.

L'arbre dont il s'agit d'enregistrer d'une manière continue les nombres de tours est armé d'une pièce saillante ou doigt qui, à chaque révolution, fait avancer d'une seule dent une roue fixée sur un second arbre. Celui-ci porte également un doigt qui, à chaque révolution de ce deuxième arbre, fait avancer d'une dent une roue fixée sur un troisième arbre, et ainsi de suite. En supposant le nombre des dents de toutes ces roues égal à 10, on voit qu'elles marqueront respectivement, par le passage d'une dent, les unités simples, les dizaines, les centaines, ... du nombre de tours effectué par l'arbre donné. Une disposition facile à imaginer fait apparaître ces divers chiffres sur une série de cadrans, de manière à permettre de lire immédiatement le résultat cherché.

Appareil de Mattei et Grosbert. — Cet appareil, destiné à mesurer la vitesse initiale d'une balle de fusil, n'est autre chose qu'un tambour à fonds de papier, qui tourne uniformément autour de son axe de figure, parallèle à celui du canon. La balle perce rapidement les deux fonds; et l'angle que forment les rayons menés par les deux trous à l'axe de rotation mesure le temps employé à parcourir la profondeur du tambour. Connaissant la vitesse angulaire de celui-ci, on a la vitesse de la balle.

Chronographe électrique. — Dans le chronographe du commandant Martin de Brettes [1], fondé sur le même principe que l'appareil précédent, la mesure du temps s'effectue avec une grande exactitude, grâce à l'idée d'utiliser les propriétés de l'électricité d'induction.

Le projectile traverse deux cibles séparées par une distance de 2^m, et formées d'un réseau de fils très fins de fer ou de cuivre, dont la rupture détermine l'interruption d'un courant. Le courant induit correspondant est transmis à un pendule portant une pointe : l'étincelle jaillit entre cette pointe et une plaque métallique parallèle au plan d'oscillation du pendule, en traversant une feuille de papier sur laquelle elle laisse un petit point rond très net et très visible. Enfin, un courant mis en jeu par la détente même du fusil indique par un premier point la position initiale de la tige du pendule.

(1) Académie des Sciences, 25 juin 1860.

On connaît, par la loi du mouvement de celui-ci, le temps écoulé entre les deux étincelles.

Observation de la loi des mouvements rapides.

Quand il s'agit, non plus seulement de mesurer une vitesse moyenne, mais bien de déterminer toutes les circonstances d'un mouvement rapide, on emploie un procédé automatique : c'est-à-dire qu'on s'arrange de manière à faire tracer une ligne par le mobile, sur une surface animée d'un mouvement connu.

Si cette surface était immobile, on obtiendrait seulement la trajectoire du mobile. En supposant cette même surface en mouvement, la courbe tracée par le mobile nous fera connaître la loi des espaces parcourus, comme nous allons le montrer par quelques exemples.

Appareil d'Eytelwein. — Pour étudier le mouvement oscillatoire vertical d'une soupape, Eytelwein fixait à un point de la tige de cette soupape un crayon mobile, devant lequel une bande de papier se déroulait horizontalement (*fig.* 272), avec une vitesse uniforme [1]. Les abscisses de la courbe tracée par le crayon sont proportionnelles aux temps, tandis que les ordonnées sont égales aux espaces parcourus par le mobile. Cette courbe est donc précisément celle que nous connaissons sous le nom de *courbe des espaces.*

Lois de la chute des corps. — Les procédés indiqués dans les cours de Physique pour vérifier expérimentalement les

(1) Le mouvement de la bande est produit par un mécanisme d'horlogerie, au moyen de deux bobines disposées de manière que le papier qui se déroule de l'une s'enroule sur l'autre, en offrant dans l'intervalle une portion tendue sur laquelle le crayon trace sa courbe. Pour que le mouvement du papier soit uniforme, il ne faut pas que celui des bobines le soit, car le diamètre de celles-ci varie d'une manière sensible avec la quantité de papier enroulée. On régularise le mouvement par l'emploi d'une fusée, dont les diamètres extrêmes sont les mêmes que ceux du cylindre, vide et couvert de papier.

lois de la chute des corps : à savoir, le plan incliné de Galilée et la machine d'Atwood, se rapportent en réalité à des phénomènes plus complexes. Avec l'appareil à cylindre tournant du général Poncelet (*voir* p. 27), on étudie au contraire le mouvement non modifié par une machine; et la méthode est combinée de manière à triompher de la difficulté qui résulte de la rapidité de ce mouvement.

On emploie la disposition analogue que voici, pour déterminer les lois d'un mouvement rotatoire.

Plateau tournant de M. Poncelet (¹). — Un plateau circulaire est fixé par son centre à l'extrémité de l'arbre dont on veut étudier la rotation. Un pinceau animé d'un mouvement circulaire et uniforme autour du point O′ (*fig.* 273) s'appuie constamment sur le plateau, et trace sur celui-ci une ligne qui, s'il était immobile, serait une circonférence ayant O′ pour centre. Par suite du mouvement du plateau, cette circonférence se transforme en une courbe épicycloïdale, sur laquelle on peut mesurer les déplacements angulaires de l'arbre pendant des temps connus.

En effet, soit AB la courbe relevée sur le plateau (c'est-à-dire la trajectoire relative du pinceau), AB′C la trajectoire absolue de ce même pinceau, lequel occupe actuellement la position A.

A l'instant où le pinceau a marqué le point B de la courbe, il était sur la circonférence (O′A), en un point dont la distance au centre O est égale à OB : donc il était en B′, intersection de ladite circonférence avec l'arc de cercle BB′. AO′B′ est donc l'angle décrit par le pinceau autour de son axe, pendant que l'arbre O tournait de l'angle AOB.

Usage du diapason pour apprécier avec justesse les très petites fractions du temps.

Toute la précision des expériences de ce genre repose essentiellement sur l'uniformité du mouvement produit par le mécanisme d'horlogerie.

(¹) Cet appareil a été appliqué par le général Morin à l'étude des lois du frottement.

Pour se mettre à l'abri de la cause d'erreur qui résulte de l'imperfection de ces mécanismes, on compare la courbe tracée par le corps mobile avec celle que trace en même temps sur le plateau une pointe fixée à un diapason mis en vibration. L'isochronisme parfait de ce dernier mouvement dénonce les plus petites irrégularités de l'appareil d'horlogerie.

Ce procédé a été employé par M. Wertheim, puis par le capitaine Schultz.

Chronographe du capitaine Schultz, construit par M. Froment. — Cet appareil, le plus précis qu'on ait encore construit, donne sans difficulté la cinq-cent-millième partie d'une seconde. Il se compose d'un tambour de 1ᵐ de circonférence, argenté et recouvert de noir de fumée à sa surface extérieure; ce tambour tourne uniformément sur son axe à raison de trois tours par seconde. Mais, pour l'extrême précision qu'on veut atteindre, on ne peut compter sur l'uniformité de la rotation du tambour; car les mouvements les plus réguliers ne sont en réalité que périodiquement uniformes.

On a donc installé devant le tambour un diapason bien réglé, qui fait 500 vibrations à la seconde, et qui dessine, au moyen d'une pointe, chaque vibration sur le noir de fumée (¹); un appareil électrique à étincelle d'induction imprime aussi sur le noir de fumée deux points, qui correspondent au commencement et à la fin du phénomène qu'on étudie. Pour mesurer le temps écoulé entre les deux étincelles, on compte d'abord autant de cinq-centièmes de seconde que l'intervalle des deux points renferme de vibrations complètes; puis, on estime les fractions, en admettant que le mouvement du tambour est uniforme pendant le temps d'une vibration.

Au moyen d'un microscope et d'un micromètre, on divise facilement en mille parties l'intervalle occupé sur le tambour par une vibration, c'est-à-dire qu'on apprécie un cinq-cent-millième de seconde.

On a pu mesurer avec cet appareil le temps que met une

(¹) Par la combinaison du mouvement oscillatoire du diapason avec le mouvement uniforme du tambour, la courbe décrite par la pointe sur le cylindre développé est une sinusoïde (*fig.* 274).

balle à parcourir quelques centimètres, et déterminer ainsi la loi du mouvement d'un boulet dans l'âme d'une bouche à feu.

Étude des vibrations sonores par M. Lissajous (¹). — Tout le monde connaît le phénomène optique connu sous le nom de *persistance des impressions lumineuses sur la rétine*; M. Lissajous a fondé sur cette propriété un moyen simple de rendre sensible aux yeux le mouvement vibratoire d'un diapason. Il suffit pour cela de fixer à l'une des branches de celui-ci un miroir métallique (en ayant soin d'ajouter à l'autre branche un contrepoids égal), et de regarder dans le miroir l'image réfléchie d'un corps lumineux. Lorsque le diapason vibre, l'image semble s'allonger dans le sens de la longueur de la branche : l'œil perçoit une ligne lumineuse.

Pour trouver la loi du mouvement du diapason, il faut, après la première réflexion, faire tomber le pinceau lumineux sur un deuxième miroir, mobile autour d'un axe vertical, et recevoir la nouvelle image sur un écran, en interposant une lentille convergente de foyer convenable.

Par l'effet de la rotation du second miroir, la pointe du faisceau réfléchi parcourt l'écran dans le sens horizontal; et la combinaison de ce mouvement connu avec l'oscillation verticale produite par la vibration du diapason fait connaître les lois du mouvement de celui-ci.

Comparaison de deux diapasons. — Cette première expérience fait comprendre le moyen, imaginé également par M. Lissajous, pour comparer deux sons à l'aide de l'œil, organe beaucoup plus sensible que l'oreille, et en même temps moins sujet à la fatigue.

L'un des diapasons qu'il s'agit de comparer est vertical, l'autre horizontal; chacun d'eux porte un miroir disposé comme dans l'expérience précédente : les deux miroirs sont en regard. Le faisceau lumineux se réfléchit d'abord sur le premier miroir, puis sur le second, et enfin sur un miroir fixe qui projette l'image sur un écran. Dès qu'on ébranle le diapason vertical, on voit l'image s'allonger et se transformer en une

(¹) *Voir* les leçons professées à la Société chimique, en 1861.

ligne verticale. Si l'on ébranle au contraire le diapason horizontal, l'image est une droite horizontale. Enfin, quand on fait vibrer à la fois les deux diapasons, l'image est animée d'un mouvement composé de deux mouvements oscillatoires rectangulaires : elle décrit sur l'écran une ligne sinueuse plus ou moins compliquée, dont la forme dépend de la relation qui existe entre la durée de l'oscillation dans chacun des deux mouvements (*fig.* 275). Cette courbe est d'ailleurs toujours comprise à l'intérieur d'un rectangle, dont les côtés sont précisément égaux aux amplitudes des mouvements vibratoires des deux diapasons.

Dans le cas de l'unisson, l'image reçue sur le plan est une courbe fermée, qui n'a que deux tangentes parallèles à une direction quelconque (A); elle affecte la forme d'une ligne droite, d'un cercle ou d'une ellipse, suivant la différence de phase des deux vibrations.

A l'octave, l'un des diapasons faisant deux vibrations pendant que l'autre n'en fait qu'une, on a pour la courbe l'une des formes (B). Le rapport de quinte est représenté par les figures (C). Enfin, si les nombres des vibrations ne sont pas dans un rapport simple, la courbe est plus ou moins irrégulière.

FIN DE LA CINÉMATIQUE.

11613 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.