

Modelo optimizado para cabezales rectangulares apoyados sobre un grupo de pilotes: Parte 2) Diseño óptimo

An optimized model for rectangular pile caps supported on a group of piles:
Part 2) Optimal design

Oscar Mario Farias Montemayor¹, Arnulfo Luévanos Rojas^{1*}, Sandra López Chavarría¹, Manuel Medina Elizondo¹

¹Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias, Universidad Autónoma de Coahuila. Blvd. Revolución 151 Ote. Torreón, Coahuila, México. CP 27000. *Correo electrónico: arnulfol_2007@hotmail.com.

*Autor de correspondencia

Resumen

La primera parte de esta investigación presenta un modelo optimizado para cabezales o zapatas rectangulares apoyadas sobre un grupo de pilotes para obtener la superficie mínima en planta (área óptima) que soporta una carga axial y dos momentos sobre el eje X y Y debido a una columna. La presente investigación muestra el diseño óptimo (costo mínimo) para cabezales. Este modelo considera que los cabezales son perfectamente rígidos y los pilotes están articulados en la unión de los cabezales con los pilotes y, por lo tanto, los pilotes transmiten solamente carga vertical. La metodología normalmente utilizada para obtener el diseño de los cabezales considera que todos los pilotes transmiten la misma carga vertical; esto funciona únicamente cuando la columna transmite carga axial y no momentos. Además, cinco tipos de cabezales apoyadas sobre un grupo formado por dos, tres, cuatro, cinco y seis pilotes se muestran para demostrar la precisión del modelo presentado en este documento.

Palabras clave: Modelo optimizado; cabezales o zapatas rectangulares; diseño óptimo; costo mínimo; grupo de pilotes.

Abstract

The first part of this research presents an optimized model for rectangular caps or footings supported on a group of piles to obtain the minimum surface in plant (optimal area) bearing an axial load and two moments on the X and Y axis due to a column. The present research shows the optimal design (minimum cost) for pile caps. This model considers that the caps are perfectly rigid, and the piles are articulated at the junction of the caps with the piles and, therefore, the piles transmit only vertical load. The methodology used to obtain the design of the caps considers that all the piles transmit the same vertical load; this only works when the column transmits axial load but not moments. Also, five types of caps supported on a group formed by two, three, four, five and six piles are shown to demonstrate the accuracy of the model presented in this document.

Keywords: Optimized model; rectangular caps or footings; optimal design; minimum cost; group of piles.

Recibido: 20 de diciembre de 2018

Aceptado: 15 de mayo de 2020

Publicado: 10 de junio de 2020

Como citar: Farias Montemayor, O. M., Luévanos Rojas, A., López Chavarría, S., & Medina Elizondo, M. (2020). Modelo optimizado para cabezales rectangulares apoyados sobre un grupo de pilotes: Parte 2) Diseño óptimo. *Acta Universitaria* 30, e2466. doi. <http://doi.org/10.15174.au.2020.2466>

Introducción

La cimentación de una estructura es la parte esencial para transmitir las cargas de columna o pared al terreno subyacente de la estructura. Las cargas que bajan de la estructura a las cimentaciones superficiales descansan directamente sobre el suelo, y en las cimentaciones profundas las cargas que provienen de la estructura descansan sobre una llamada tapa o cabezales de los pilotes o zapatas, y a su vez se transmiten a los pilotes.

La presión del suelo bajo una zapata se distribuye de acuerdo con el tipo de suelo, la rigidez relativa del suelo y la cimentación y la profundidad de contacto entre la cimentación y el suelo. La figura 1a muestra el diagrama de distribución de presión para la zapata que descansa sobre suelos arenosos (suelos granulares). La figura 1b presenta el diagrama de distribución de presión para la zapata que descansa sobre suelos arcillosos (suelos cohesivos). Por lo tanto, se supone, por simplicidad, que la zapata es un cuerpo perfectamente rígido, que el suelo se comporta elásticamente y que las distribuciones del esfuerzo y la deformación son lineales en el suelo debajo de la base de la zapata. Por consiguiente, el diseño propuesto asume que la presión del suelo se distribuye linealmente. La distribución de la presión del suelo es uniforme si el centroide de la zapata coincide con la fuerza resultante de las cargas aplicadas sobre la zapata (figura 1c) (Luévanos-Rojas, 2014; 2015; Luévanos-Rojas, Barquero-Cabrero, López-Chavarría & Medina-Elizondo, 2017).

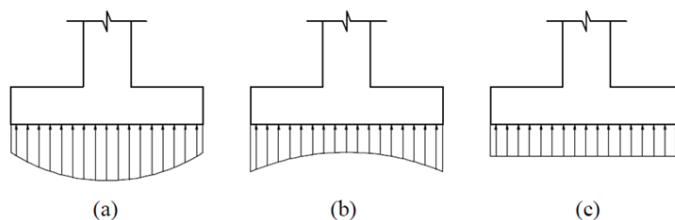


Figura 1. Diagrama de presión debajo de la zapata: (a) zapata sobre arena; (b) zapata sobre arcilla; (c) presión equivalente.
Fuente: Luévanos-Rojas (2014).

La figura 1 muestra los tipos de cimentaciones (ver Parte 1).

Los documentos más importantes sobre el diseño óptimo de cimentaciones que han presentado para algunos investigadores son: Diseño óptimo basado en algoritmos genéticos de cimentaciones de balsas apiladas con pruebas de modelo (Kim, Yoo & Kang, 2002); Diseño óptimo de cimentaciones superficiales rectangulares; Formulación (Chagoyén, Negrín, Cabrera, López & Padrón, 2009); Estudio teórico sobre optimización de longitud de pilotes de grupos de pilotes y balsas apiladas (Leung, Klar & Soga, 2010); Optimización del diseño del grupo de pilotes utilizando un enfoque genético real (Hwang, Lyu & Chung, 2011); Metodología de selección experto basada en el conocimiento para optimizar la construcción de pilotes de concreto (Penteado & de Brito, 2012); Diseño óptimo de cimentaciones superficiales poco profundas con suelos limosos (Hassaan, 2014); Metodologías de diseño óptimo para cimentaciones de pilotes en Londres (Letsios, Lagaros & Papadrakakis, 2014); Aplicación del algoritmo genético en el diseño óptimo de la cimentación de tira (Hui, Zhuoyi & Mingji, 2015); Método de análisis de optimización del diámetro de pilote de cimientos de balsas apiladas basado en la minimización de asentamientos diferenciales (Wang, Yang & Shangguani, 2015); Dimensionamiento óptimo para las zapatas combinadas de esquina (López-Chavarría, Luévanos-Rojas & Medina-Elizondo, 2017); Diseño óptimo para zapatas aisladas rectangulares utilizando la presión real del suelo (Luévanos-Rojas *et al.*, 2017); Diseño óptimo de zapatas basadas en la optimización de MINLP (Jelušič & Žlender, 2018); Experimentación numérica para el diseño óptimo de las zapatas combinadas rectangulares de concreto reforzado (Velázquez-Santillán,

Luévanos-Rojas, López-Chavarría, Medina-Elizondo & Sandoval-Rivas, 2018); Diseño robusto y procedimiento de optimización para cimientos de balsas apiladas para soportar aerogeneradores altos en arcilla y arena (Ravichandran, Shrestha & Piratla, 2018).

Los trabajos más relevantes sobre el diseño de cabezales que han estudiado algunos investigadores son: Diseño de cabezales en pilotes profundos por el modelo de punta y liga (Adebar & Zhou, 1996); Cimentaciones de losas sobre pilotes: Diseño y aplicaciones (Poulos, 2001); Un análisis elastostático FEM / BEM de losas cargadas verticalmente y cimientos de losas sobre pilotes (Mendonça & Paiva, 2003); Modelo de punta y liga adaptable para el diseño y verificación de cabezales sobre cuatro pilotes (Souza, Kuchma, Park & Bittencourt, 2009); Seis cabezales sobre pilotes de concreto armado: Simulación numérica y diseño por el método de punta y liga (Oliveira, Barros & Giongo, 2014); Minimización de costos de la cubierta de pilotes de concreto reforzado utilizando técnicas de optimización (Regupathi & Sugumar, 2017); Diseño de cabezales rígidos sobre pilotes usando un modelo iterativo de punta y liga (Araújo, 2016); Análisis de confiabilidad de los cabezales rígidos sobre pilotes usando un modelo iterativo de punta y liga (Araújo, 2017).

La presente investigación muestra un modelo optimizado para el diseño óptimo (costo mínimo) para cabezales rectangulares apoyados sobre un grupo de pilotes que soporta una carga axial y dos momentos sobre el eje X y Y debido a una columna. La primera parte de esta investigación presenta un modelo para obtener la superficie mínima en planta (área óptima). Este modelo considera que los cabezales son perfectamente rígidos y los pilotes están articulados en la unión de los cabezales con los pilotes y, por lo tanto, los pilotes transmiten solamente carga vertical. La metodología normalmente utilizada para obtener el diseño de los cabezales considera que todos los pilotes transmiten la misma carga vertical; esto funciona únicamente cuando la columna transmite carga axial y no momentos. Además, cinco ejemplos de cabezales apoyados sobre un grupo formado por dos, tres, cuatro, cinco y seis pilotes se muestran para demostrar la precisión del modelo presentado en este documento.

Metodología

Las secciones críticas para la zapata que sostiene una columna de concreto reforzado de acuerdo con el código de construcción son: 1) Para el momento flexionante ocurre en la cara de la columna (unión de la columna con la zapata); 2) Para el cortante por flexión se presenta a una distancia (d) a partir de la cara de la columna; 3) Para el cortante por punzonamiento se ubica en b_o (perímetro de la sección crítica que se ubica a una distancia $d/2$ de la cara de la columna en ambas direcciones) (American Concrete Institute [ACI], 2014).

La ecuación general para obtener el esfuerzo generado por cada pilote sobre los cabezales o zapatas apoyadas sobre pilotes (cimentación profunda) sujetas a flexión biaxial se muestra en la Parte 1 de este documento:

$$\sigma_p = \frac{N_p}{A_p} = \frac{P}{A_{pT}} + \frac{M_x y_p}{\sum I_{xp}} + \frac{M_y x_p}{\sum I_{yp}} \quad (1)$$

donde σ_p = esfuerzo generado por el pilote sobre el cabezal (presión del pilote); A_p = área de contacto del pilote en estudio; A_{pT} = área de contacto de todos los pilotes; x_p = distancia en dirección del eje X a partir del eje Y a la ubicación del pilote en estudio; y_p = distancia en dirección del eje Y a partir del eje X a la ubicación del pilote en estudio; $\sum I_{yp}$ = suma de momentos de inercia de la superficie de contacto de todos los pilotes alrededor del eje Y general; $\sum I_{xp}$ = suma de momentos de inercia de la superficie de contacto de todos los pilotes alrededor del eje X general; y N_p = fuerza axial generada por cada pilote sobre el cabezal.

La ecuación general para obtener la fuerza ejercida por cualquier pilote es (ver Parte 1):

$$N_{p_i} = \frac{P}{n} + \frac{M_x y_{p_i}}{\sum_{i=1}^n y_{p_i}^2} + \frac{M_y x_{p_i}}{\sum_{i=1}^n x_{p_i}^2} \quad (2)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Formulación del nuevo modelo

Las figuras 2, 3 y 4 muestran un cabezal que soporta una columna y que está apoyado sobre varios pilotes de forma desorganizada para mostrar el modelo generalizado.

Para los momentos, las secciones críticas se presentan sobre los ejes $x_1' - x_1'$, $x_2' - x_2'$, $y_1' - y_1'$ y $y_2' - y_2'$ (figura 2).

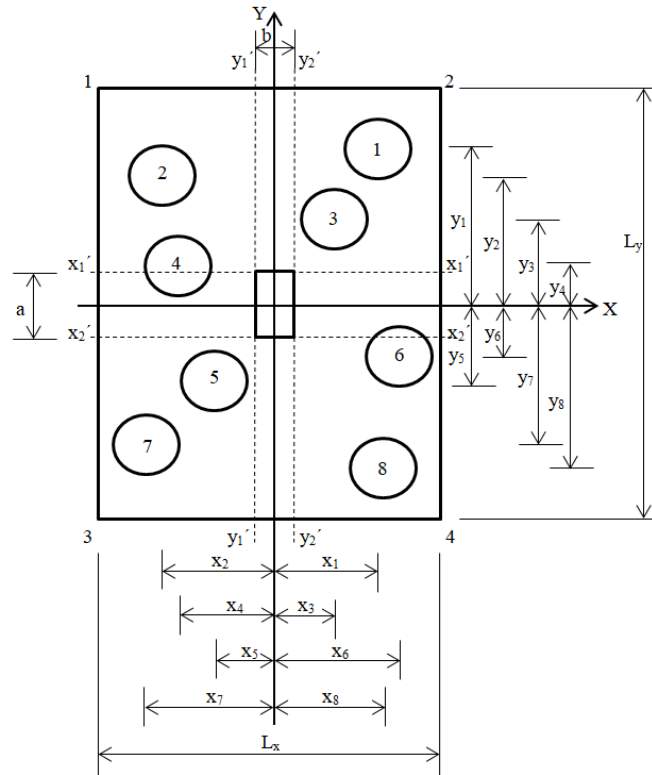


Figura 2. Secciones críticas para los momentos.
Fuente: Elaboración propia.

Las ecuaciones generalizadas para los momentos sobre los ejes $x_1' - x_1'$ y $x_2' - x_2'$ se presentan como sigue:

$$M_{x_1' - x_1'} = \sum_{i=1}^k N_{p_i} \left(y_i - \frac{a}{2} \right) \quad (3)$$

$$M_{x_2' - x_2'} = \sum_{i=1}^n N_{p_i} \left(y_i - \frac{a}{2} \right) \quad (4)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, k, l, \dots, n$. Los valores de 1 a k son los ubicados sobre los cuadrantes I y II (área delimitada por las esquinas 1, 2 y el eje $x_1' - x_1'$); los valores de l a n son los ubicados sobre los cuadrantes III y IV (área delimitada por las esquinas 3, 4 y el eje $x_2' - x_2'$).

El momento máximo sobre el eje $x' - x'$ se considera el momento mayor de los obtenidos por las ecuaciones (3) y (4).

Las ecuaciones generalizadas para los momentos sobre los ejes $y_1' - y_1'$ y $y_2' - y_2'$ se presentan como sigue:

$$M_{y_1' - y_1'} = \sum_{i=1}^j N_{p_i} \left(x_i - \frac{b}{2} \right) \quad (5)$$

$$M_{y_2' - y_2'} = \sum_{i=m}^n N_{p_i} \left(x_i - \frac{b}{2} \right) \quad (6)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, j, m, \dots, n$. Los valores de 1 a j son los ubicados sobre los cuadrantes II y III (área delimitada por las esquinas 1, 3 y el eje $y_1' - y_1'$); los valores de m a n son los ubicados sobre los cuadrantes I y IV (área delimitada por las esquinas 2, 4 y el eje $y_2' - y_2'$).

El momento máximo sobre el eje $y' - y'$ es considerado el momento mayor de los obtenidos por las ecuaciones (5) y (6).

Para los cortantes por flexión, las secciones críticas se presentan sobre los ejes $x_1'' - x_1''$, $x_2'' - x_2''$, $y_1'' - y_1''$ y $y_2'' - y_2''$ (figura 3).

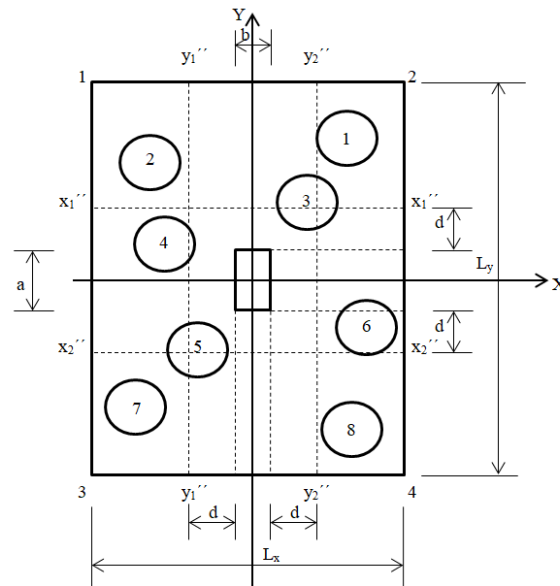


Figura 3. Secciones críticas para los cortantes por flexión.
Fuente: Elaboración propia.

Las ecuaciones generalizadas para los cortantes por flexión sobre los ejes $x_1''-x_1''$ y $x_2''-x_2''$ se presentan como sigue:

$$V_{F_{x_1''-x_1''}} = \sum_{i=1}^k N_{p_i} \quad (7)$$

$$V_{F_{x_2''-x_2''}} = \sum_{i=l}^n N_{p_i} \quad (8)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, k, m, \dots, n$. Los valores de 1 a k son los ubicados sobre los cuadrantes I y II (área delimitada por las esquinas 1, 2 y el eje $x_1''-x_1''$); los valores de l a n son los ubicados sobre los cuadrantes III y IV (área delimitada por las esquinas 3, 4 y el eje $x_2''-x_2''$).

El cortante por flexión máximo sobre el eje $x''-x''$ se considera el valor mayor de los obtenidos por las ecuaciones (7) y (8).

Las ecuaciones generalizadas para los cortantes por flexión sobre los ejes $y_1''-y_1''$ y $y_2''-y_2''$ se presentan como sigue:

$$V_{F_{y_1''-y_1''}} = \sum_{i=1}^j N_{p_i} \quad (9)$$

$$V_{F_{y_2''-y_2''}} = \sum_{i=m}^n N_{p_i} \quad (10)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, j, m, \dots, n$. Los valores de 1 a j son los ubicados sobre los cuadrantes II y III (área delimitada por las esquinas 1, 3 y el eje $y_1''-y_1''$). Los valores de m a n son los ubicados sobre los cuadrantes I y IV (área delimitada por las esquinas 2, 4 y el eje $y_2''-y_2''$).

El cortante por flexión máximo sobre el eje $y''-y''$ se considera el valor mayor de los obtenidos por las ecuaciones (9) y (10).

Para los cortantes por punzonamiento, las secciones críticas se presentan en dos casos; el primero es la columna sobre el cabezal y el segundo es el pilote (carga mayor) sobre el cabezal (figura 4).

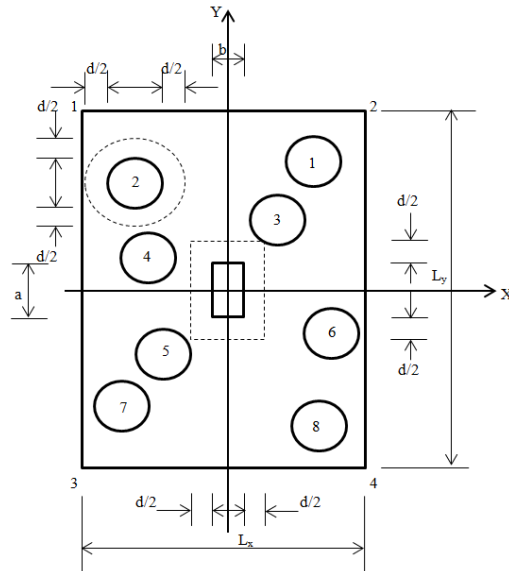


Figura 4. Secciones críticas para los cortantes por punzonamiento.
Fuente: Elaboración propia.

La ecuación generalizada para el cortante por punzonamiento de la columna sobre el cabezal V_{Pc} se presenta como sigue:

$$V_{Pc} = P - \sum_{i=1}^n N_{pi} \quad (11)$$

donde N_{pi} es la fuerza axial generada por cada pilote sobre el cabezal que se ubica dentro del área delimitada por el perímetro de la sección crítica.

Ahora, la ecuación generalizada para el cortante por punzonamiento del pilote (carga mayor) sobre el cabezal V_{Pp} se presenta como sigue:

$$V_{Pp} = N_{p1} \quad (12)$$

donde N_{p1} es la fuerza axial generada por el pilote que tiene la mayor carga.

La función objetivo para obtener el costo mínimo para diseño del cabezal $C_{\text{mínimo}}$ se muestra como sigue:

$$C_{\text{mínimo}} = C_c [L_x L_y (d + r) - (A_{sy} L_y + A_{sx} L_x) (1 - \alpha)] \quad (13)$$

donde C_c es el costo en dólares del concreto por 1 m^3 de concreto armado premezclado; A_{sx} es el área de acero de refuerzo en la dirección X; A_{sy} es el área de acero de refuerzo en la dirección Y; d es la profundidad efectiva de la zapata (distancia desde la fibra más alejada en compresión al centroide del acero de refuerzo); r es el recubrimiento de concreto; α es la relación del costo de acero de refuerzo y el concreto por 1 m^3 .

Las funciones de restricciones para obtener el costo mínimo para diseño del cabezal se muestran a continuación:

Para los momentos:

$$M_{x_1'-x_1'} \leq \phi_f f_y d A_{sy} \left(1 - \frac{0.59 A_{sy} f_y}{L_x d f'_c} \right) \quad (14)$$

$$M_{x_2'-x_2'} \leq \phi_f f_y d A_{sy} \left(1 - \frac{0.59 A_{sy} f_y}{L_x d f'_c} \right) \quad (15)$$

$$M_{y_1'-y_1'} \leq \phi_f f_y d A_{sx} \left(1 - \frac{0.59 A_{sx} f_y}{L_y d f'_c} \right) \quad (16)$$

$$M_{y_2'-y_2'} \leq \phi_f f_y d A_{sx} \left(1 - \frac{0.59 A_{sx} f_y}{L_y d f'_c} \right) \quad (17)$$

Para los cortantes por flexión:

$$V_{F_{x_1''-x_1''}} \leq 0.17 \phi_v \sqrt{f'_c} L_x d \quad (18)$$

$$V_{F_{x_2''-x_2''}} \leq 0.17 \phi_v \sqrt{f'_c} L_x d \quad (19)$$

$$V_{F_{y_1''-y_1''}} \leq 0.17 \phi_v \sqrt{f'_c} L_y d \quad (20)$$

$$V_{F_{y_2''-y_2''}} \leq 0.17 \phi_v \sqrt{f'_c} L_y d \quad (21)$$

Para el cortante por punzonamiento de la columna sobre el cabezal:

$$V_{Pc} \leq \begin{cases} 0.17 \phi_v \left(1 + \frac{2}{\beta_c} \right) \sqrt{f'_c} [2(a + b + 2d)] d \\ 0.083 \phi_v \left[\frac{\alpha_s d}{2(a + b + 2d)} + 2 \right] \sqrt{f'_c} [2(a + b + 2d)] d \\ 0.33 \phi_v \sqrt{f'_c} [2(a + b + 2d)] d \end{cases} \quad (22)$$

Para el cortante por punzonamiento del pilote más cargado sobre el cabezal:

$$V_{Pp} \leq \begin{cases} 0.17 \phi_v \left(1 + \frac{2}{\beta_c} \right) \sqrt{f'_c} [\pi(D + d)] d \\ 0.083 \phi_v \left[\frac{\alpha_s d}{\pi(D + d)} + 2 \right] \sqrt{f'_c} [\pi(D + d)] d \\ 0.33 \phi_v \sqrt{f'_c} [\pi(D + d)] d \end{cases} \quad (23)$$

Porcentajes de acero de refuerzo:

$$\rho_y, \rho_x \leq 0.75 \left[\frac{0.85 \beta_1 f'_c}{f_y} \left(\frac{600}{600 + f_y} \right) \right] \quad (24)$$

$$\rho_y, \rho_x \geq \begin{cases} \frac{0.25 \sqrt{f'_c}}{f_y} \\ 1.4 \\ \frac{1.4}{f_y} \end{cases} \quad (25)$$

Acero de refuerzo:

$$A_{sx} = \rho_x L_y d \quad (26)$$

$$A_{sy} = \rho_y L_x d \quad (27)$$

$$A_{sxT} = 0.0018 L_y d \quad (28)$$

donde ϕ_f es el factor de reducción de resistencia por flexión y su valor es 0.90; f'_c es la resistencia a la compresión especificada del concreto a los 28 días, f_y es la resistencia del límite elástico especificado del acero de refuerzo; ϕ_v es el factor de reducción de resistencia por cortante y su valor es 0.85; $b_o = [2(a + b + 2d)]$ es el perímetro de la sección crítica del cortante por punzonamiento de la columna sobre el cabezal; $b_o = [\pi(D + d)]$ es el perímetro de la sección crítica del cortante por punzonamiento del pilote sobre el cabezal; ρ_x es el porcentaje de acero de refuerzo en la dirección X; ρ_y es el porcentaje de acero de refuerzo en la dirección Y; A_{sxT} es el área de acero por temperatura; $\alpha_s = 40$ para columnas interiores, 30 para columnas de borde y 20 para columnas de esquina; β_c es la relación del lado largo entre el lado corto de la columna; β_1 es el factor que relaciona la profundidad del bloque de esfuerzo de compresión rectangular equivalente con la profundidad del eje neutro.

Nota: La segunda parte de las ecuaciones (14) a (27) son propuestas por los reglamentos de construcción (ACI, 2014).

Ejemplos numéricos

En esta sección se muestran cinco ejemplos numéricos para obtener el costo mínimo de diseño de cabezales que soportan a una columna en la parte superior y los cabezales están apoyados sobre pilotes. Los cabezales para los casos A y B se aplican para soportar una carga axial P y momento en una dirección. Y para los casos C, D y E, se aplican para soportar una carga axial P y momentos en dos direcciones (figura 2 de la parte 1). La información general para todos los casos es: $a = 45$ cm; $b = 30$ cm; $D = 30$ cm; $r = 10$ cm; $f'_c = 21$ Mpa; $f_y = 420$ Mpa; $\phi_f = 0.90$; $\phi_v = 0.85$; $\alpha_s = 40$; β_c (columna) = 1.5; β_c (pilote) = 1; $\beta_1 = 0.85$; $\alpha = 90$. El diámetro de todos los pilotes para todos los ejemplos se considera de 30 cm. La función objetivo del costo mínimo para todos los casos es la misma ecuación. Las soluciones se obtienen por medio del *software* MAPLE-15.

Caso A

Este caso muestra el diseño de costo mínimo para un cabezal que soporta una columna en la parte superior y está apoyado sobre dos pilotes (figura 2a de la parte 1). La información para este caso es: $P = 800$ kN y $M_x = 200$ kN-m.

Todos los valores correspondientes se sustituyen en la ecuación (17) para encontrar la función objetivo (área mínima), así como en las ecuaciones (18) a (24) para obtener las funciones de restricción (Parte 1).

La solución para el área mínima es: $A_{min} = 0.90$ m²; $L_x = 0.60$ m; $L_y = 1.50$ m; $M_x = 200$ kN-m; $N_1 = 622.22$ kN; $N_2 = 177.78$ kN; $P = 800$ kN; $x_1 = 0$ m; $y_1 = 0.45$ m.

Ahora, por las ecuaciones (3) y (4) los momentos se obtienen: $M_{x1' - x1'} = 139.95$ kN-m y $M_{x2' - x2'} = 40.05$ kN-m. Por las ecuaciones (7) y (8) los cortantes por flexión se encuentran: $V_{Fx1' - x1'} = 622.22$ kN y $V_{Fx2' - x2'} =$

177.78 kN. Por la ecuación (11) el cortante por punzonamiento para la columna se obtiene: $V_{Pc} = 800$ kN. Por la ecuación (12) el cortante por punzonamiento para el pilote se encuentra: $V_{Pp} = 622.22$ kN.

Enseguida, se sustituyen todos los valores correspondientes en la ecuación (13) para encontrar la función objetivo (costo mínimo), y también en las ecuaciones (14) a (27) para obtener las funciones de restricción. Para este caso, las ecuaciones (16), (17), (20), (21) y (26) se eliminan porque los momentos y cortantes por flexión no existen; la ecuación (28) se agrega (acero por temperatura).

La solución para el costo mínimo es: $C_{min} = 2.14C_c$; $A_{sx} = 42.28$ cm²; $A_{sy} = 31.32$ cm²; $d = 1.57$ m; $\rho_y = 0.0033333$. Ahora, si se observa la solución, la profundidad efectiva d es mucho mayor que $y_1 - a/2$ (ubicación de los pilotes a partir de la cara de la columna), entonces los pilotes se ubican dentro de la sección crítica del cortante por flexión. Por lo tanto, los cortantes por flexión no existen y se considera 0.

Ahora, la nueva solución para el costo mínimo es: $C_{min} = 0.58C_c$; $A_{sx} = 8.10$ cm²; $A_{sy} = 13.54$ cm², $d = 0.30$ m, $\rho_y = 0.0075243$.

Caso B

Este caso muestra el diseño de costo mínimo para un cabezal que soporta una columna en la parte superior y está apoyado sobre tres pilotes (figura 2b de la Parte 1). La información para este caso es: $P = 800$ kN y $M_x = 200$ kN-m.

Todos los valores correspondientes se sustituyen en la ecuación (26) para encontrar la función objetivo (área mínima), al igual que en las ecuaciones (27) a (34) para obtener las funciones de restricción (Parte 1).

La solución para el área mínima es: $A_{min} = 1.44$ m²; $L_x = 0.60$ m; $L_y = 2.40$ m; $M_x = 200$ kN-m; $N_1 = 377.78$ kN; $N_2 = 266.67$ kN; $N_3 = 155.56$ kN; $P = 800$ kN; $x_1 = 0$ m; $y_1 = 0.90$ m.

Ahora, por las ecuaciones (3) y (4) los momentos se obtienen: $M_{x1'-x1'} = 255.00$ kN-m y $M_{x2'-x2'} = 105.00$ kN-m. Por las ecuaciones (7) y (8) los cortantes por flexión se encuentran: $V_{Fx1'-x1'} = 377.78$ kN y $V_{Fx2'-x2'} = 155.56$ kN. Por la ecuación (11) el cortante por punzonamiento para la columna se obtiene: $V_{Pc} = 533.33$ kN. Por la ecuación (12) el cortante por punzonamiento para el pilote se encuentra: $V_{Pp} = 377.78$ kN.

Enseguida, se sustituyen todos los valores correspondientes en la ecuación (13) para encontrar la función objetivo (costo mínimo), y en las ecuaciones (14) a (27) para obtener las funciones de restricción. Para este caso, las ecuaciones (16), (17), (20), (21) y (26) se eliminan porque los momentos y cortantes por flexión no existen, y la ecuación (28) se agrega (acero por temperatura).

La solución para el costo mínimo es: $C_{min} = 1.42C_c$; $A_{sx} = 41.08$ cm²; $A_{sy} = 19.02$ cm²; $d = 0.95$ m; $\rho_y = 0.0033333$. Ahora, si se observa la solución, la profundidad efectiva d es mucho mayor que $y_1 - a/2$ (ubicación de los pilotes a partir de la cara de la columna), entonces los pilotes se ubican dentro de la sección crítica del cortante por flexión. Por lo tanto, los cortantes por flexión no existen y se considera 0.

Ahora, la nueva solución para el costo mínimo es: $C_{min} = 0.78C_c$; $A_{sx} = 15.05$ cm²; $A_{sy} = 22.13$ cm²; $d = 0.35$ m; $\rho_y = 0.0105869$.

Caso C

Este caso muestra el diseño de costo mínimo para un cabezal que soporta una columna en la parte superior y está apoyado sobre cuatro pilotes (figura 2c de la Parte 1). La información para este caso es: $P = 1200$ kN; $M_x = 800$ kN-m y $M_y = 400$ kN-m.

Todos los valores correspondientes se sustituyen en la ecuación (36) para encontrar la función objetivo (área mínima), así como en las ecuaciones (37) a (45) para obtener las funciones de restricción (Parte 1).

La solución para el área mínima es: $A_{min} = 6.29$ m²; $L_x = 2.03$ m; $L_y = 3.10$ m; $M_x = 800$ kN-m; $M_y = 400$ kN-m; $N_1 = 600$ kN; $N_2 = 320.24$ kN; $N_3 = 279.76$ kN; $N_4 = 0$ kN; $P = 1200$ kN; $x_1 = 0.71$ m; $y_1 = 1.25$ m.

Ahora, por las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) los momentos se obtienen: $M_{x1' - x1'} = 943.25$ kN-m; $M_{x2' - x2'} = 286.75$ kN-m; $M_{y1' - y1'} = 492.67$ kN-m; y $M_{y2' - y2'} = 179.33$ kN-m. Por las ecuaciones (7), (8), (9) y (10) los cortantes por flexión se encuentran: $V_{Fx1' - x1'} = 920.24$ kN; $V_{Fx2' - x2'} = 279.76$ kN; $V_{Fy1' - y1'} = 879.76$ kN; y $V_{Fy2' - y2'} = 320.24$ kN. Por la ecuación (11) el cortante por punzonamiento para la columna se obtiene: $V_{Pc} = 1200$ kN. Por la ecuación (12) el cortante por punzonamiento para el pilote se encuentra: $V_{Pp} = 600$ kN.

En seguida, se sustituyen todos los valores correspondientes en la ecuación (13) para encontrar la función objetivo (costo mínimo), y también en las ecuaciones (14) a (27) para obtener las funciones de restricción.

La solución para el costo mínimo es: $C_{min} = 7.49C_c$; $A_{sx} = 70.74$ cm²; $A_{sy} = 46.32$ cm²; $d = 0.68$ m; $\rho_x = 0.00333333$; $\rho_y = 0.00333333$. Ahora, si se observa la solución, la profundidad efectiva d es mayor que $x_1 - b/2$ (ubicación de los pilotes a partir de la cara de la columna sobre el eje Y), entonces los pilotes se ubican dentro de la sección crítica del cortante por flexión. Por lo tanto, los cortantes por flexión sobre el eje Y no existen y se considera 0.

Ahora, la nueva solución para el costo mínimo es: $C_{min} = 7.49C_c$; $A_{sx} = 70.74$ cm²; $A_{sy} = 46.32$ cm²; $d = 0.68$ m; $\rho_x = 0.00333333$; $\rho_y = 0.00333333$.

Caso D

Este caso muestra el diseño de costo mínimo para un cabezal que soporta una columna en la parte superior y está apoyado sobre cinco pilotes (figura 2d de la parte 1). La información para este caso es: $P = 1200$ kN, $M_x = 800$ kN-m y $M_y = 400$ kN-m.

Todos los valores correspondientes se sustituyen en la ecuación (47) para encontrar la función objetivo (área mínima), así como en las ecuaciones (48) a (57) para obtener las funciones de restricción (parte 1).

La solución para el área mínima es: $A_{min} = 8.89$ m²; $L_x = 2.37$ m; $L_y = 3.75$ m; $M_x = 800$ kN-m; $M_y = 400$ kN-m; $N_1 = 480$ kN; $N_2 = 254.07$ kN; $N_3 = 240$ kN; $N_4 = 225.93$ kN; $N_5 = 0$ kN; $P = 1200$ kN; $x_1 = 0.89$ m; $y_1 = 1.57$ m.

Ahora, por las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) los momentos se obtienen: $M_{x1' - x1'} = 987.32$ kN-m; $M_{x2' - x2'} = 303.88$ kN-m; $M_{y1' - y1'} = 522.39$ kN-m; y $M_{y2' - y2'} = 188.01$ kN-m. Por las ecuaciones (7), (8), (9) y (10) los cortantes por flexión se encuentran: $V_{Fx1' - x1'} = 734.07$ kN; $V_{Fx2' - x2'} = 225.93$ kN; $V_{Fy1' - y1'} = 705.93$ kN; y $V_{Fy2' - y2'} = 254.07$ kN. Por la ecuación (11) el cortante por punzonamiento para la columna se obtiene: $V_{Pc} = 960$ kN. Por la ecuación (12) el cortante por punzonamiento para el pilote se encuentra: $V_{Pp} = 480$ kN.

Enseguida, se sustituyen todos los valores correspondientes en la ecuación (13) para encontrar la función objetivo (costo mínimo), y también en las ecuaciones (14) a (27) para obtener las funciones de restricción.

La solución para el costo mínimo es: $C_{min} = 8.27C_c$; $A_{sx} = 58.47 \text{ cm}^2$; $A_{sy} = 59.63 \text{ cm}^2$; $d = 0.47 \text{ m}$; $\rho_x = 0.00333333$; $\rho_y = 0.0053786$.

Caso E

Este caso muestra el diseño de costo mínimo para un cabezal que soporta una columna en la parte superior y está apoyado sobre seis pilotes (figura 2e de la Parte 1). La información para este caso es: $P = 1200 \text{ kN}$, $M_x = 800 \text{ kN-m}$ y $M_y = 400 \text{ kN-m}$.

Todos los valores correspondientes se sustituyen en la ecuación (59) para encontrar la función objetivo (área mínima), y en las ecuaciones (60) a (70) para obtener las funciones de restricción (Parte 1).

La solución para el área mínima es: $A_{min} = 8.82 \text{ m}^2$; $L_x = 2.07 \text{ m}$; $L_y = 4.25 \text{ m}$; $M_x = 800 \text{ kN-m}$; $M_y = 400 \text{ kN-m}$; $N_1 = 400 \text{ kN}$; $N_2 = 218.92 \text{ kN}$; $N_3 = 290.54 \text{ kN}$; $N_4 = 109.46 \text{ kN}$; $N_5 = 181.08 \text{ kN}$; $N_6 = 0 \text{ kN}$; $P = 1200 \text{ kN}$; $x_1 = 0.74 \text{ m}$; $y_1 = 1.83 \text{ m}$.

Ahora, por las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) los momentos se obtienen: $M_{x1' -x1'} = 993.37 \text{ kN-m}$; $M_{x2' -x2'} = 290.63 \text{ kN-m}$; $M_{y1' -y1'} = 514.26 \text{ kN-m}$; y $M_{y2' -y2'} = 193.74 \text{ kN-m}$. Por las ecuaciones (7), (8), (9) y (10) los cortantes por flexión se encuentran: $V_{Fx1' -x1'} = 618.92 \text{ kN}$; $V_{Fx2' -x2'} = 181.08 \text{ kN}$; $V_{Fy1' -y1'} = 790.62 \text{ kN}$; y $V_{Fy2' -y2'} = 328.38 \text{ kN}$. Por la ecuación (11) el cortante por punzonamiento para la columna se obtiene: $V_{Pc} = 1200 \text{ kN}$. Por la ecuación (12) el cortante por punzonamiento para el pilote se encuentra: $V_{Pp} = 400 \text{ kN}$.

Enseguida, se sustituyen todos los valores correspondientes en la ecuación (13) para encontrar la función objetivo (costo mínimo), y también en las ecuaciones (14) a (27) para obtener las funciones de restricción.

La solución para el costo mínimo es: $C_{min} = 8.42C_c$; $A_{sx} = 63.97 \text{ cm}^2$; $A_{sy} = 63.25 \text{ cm}^2$; $d = 0.45 \text{ m}$; $\rho_x = 0.00333333$; $\rho_y = 0.0067674$.

Resultados

En esta sección se muestran los datos prácticos de los cinco ejemplos numéricos del costo mínimo para diseño de cabezales que soportan una columna en la parte superior y están apoyados sobre pilotes. Los casos A y B soportan las mismas cargas y momentos en una dirección. Los casos C, D y E soportan las mismas cargas y momentos en las dos direcciones.

Caso A

La solución obtenida para el costo mínimo es: $C_{min} = 0.58C_c$; $L_x = 60 \text{ cm}$; $L_y = 150 \text{ cm}$; $A_{sx} = 8.10 \text{ cm}^2$; $A_{sy} = 13.54 \text{ cm}^2$; $d = 30 \text{ cm}$; $\rho_y = 0.0075243$. Las áreas de acero de refuerzo propuestas son $A_{sx} = 8.89 \text{ cm}^2$ (7Ø1/2") y $A_{sy} = 15.21 \text{ cm}^2$ (3Ø1"). Ahora, se sustituyen las áreas de acero de refuerzo propuestas en la ecuación (13) para obtener el costo mínimo real $C_{min} = 0.61C_c$.

La figura 5 muestra las dimensiones y el acero de refuerzo para el cabezal apoyado sobre dos pilotes.

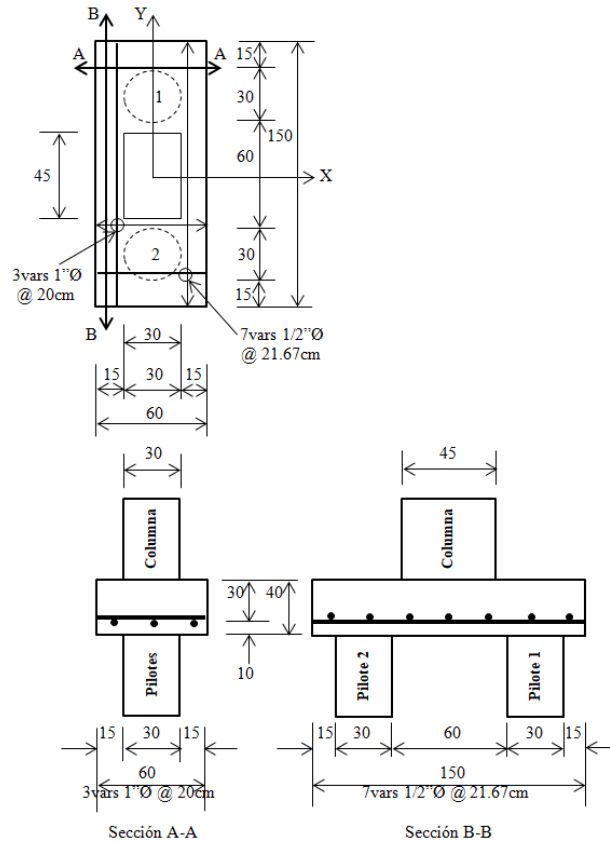


Figura 5. Cabezal apoyado sobre dos pilotes.
Fuente: Elaboración propia.

Caso B

La solución obtenida para el costo mínimo es: $C_{min} = 0.78C_c$; $L_x = 60$ cm; $L_y = 240$ cm; $A_{sx} = 15.05$ cm²; $A_{sy} = 22.13$ cm²; $d = 35$ cm; $\rho_y = 0.0105869$. Las áreas de acero de refuerzo propuestas son $A_{sx} = 15.24$ cm² (12Ø1/2") y $A_{sy} = 25.35$ cm² (5Ø1"). Ahora, se sustituyen las áreas de acero de refuerzo propuestas en la ecuación (13) para obtener el costo mínimo real $C_{min} = 0.82C_c$.

La figura 6 muestra las dimensiones y el acero de refuerzo para el cabezal apoyado sobre tres pilotes.

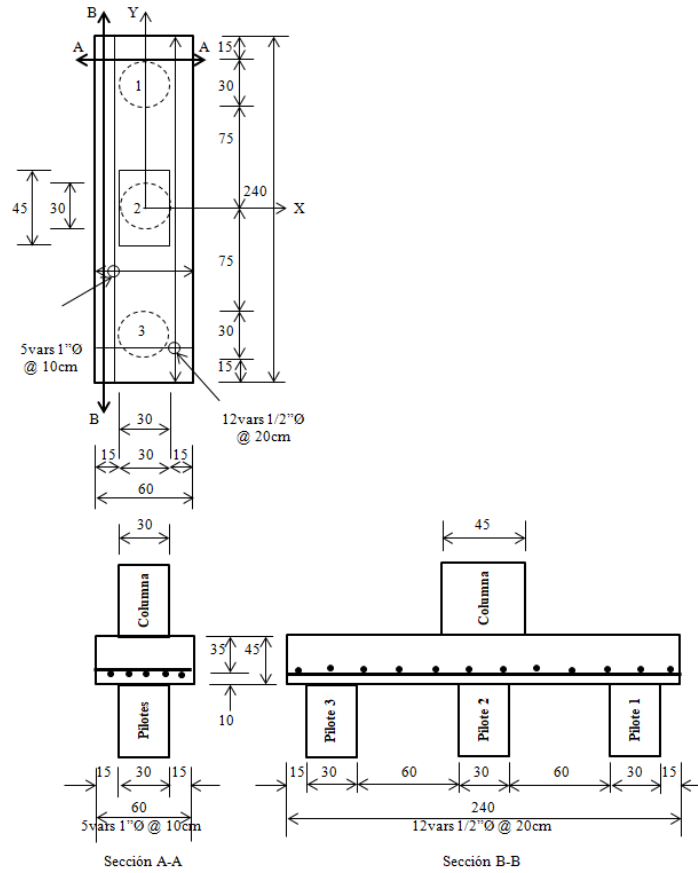


Figura 6. Cabezal apoyado sobre tres pilotes.
Fuente: Elaboración propia.

Caso C

La solución obtenida para el costo mínimo es: $C_{min} = 7.49C_c$; $L_x = 203$ cm; $L_y = 310$ cm; $A_{sx} = 70.74$ cm²; $A_{sy} = 46.32$ cm²; $d = 68$ cm; $\rho_x = 0.0033333$; $\rho_y = 0.0033333$. Las áreas de acero de refuerzo propuestas son $A_{sx} = 70.98$ cm² (14Ø1") y $A_{sy} = 50.70$ cm² (10Ø1"). Ahora, se sustituyen las áreas de acero de refuerzo propuestas en la ecuación (13) para obtener el costo mínimo real $C_{min} = 7.59C_c$.

La figura 7 muestra las dimensiones y el acero de refuerzo para el cabezal apoyado sobre cuatro pilotes.

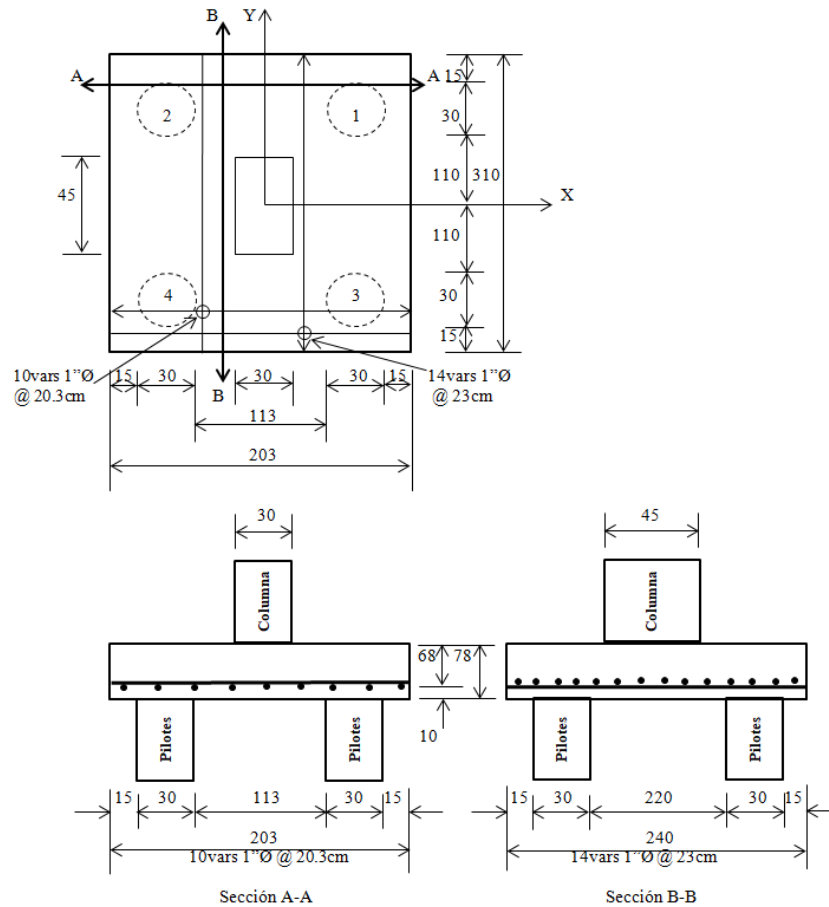


Figura 7. Cabezal apoyado sobre cuatro pilotes.
Fuente: Elaboración propia.

Caso D

La solución obtenida para el costo mínimo es: $C_{min} = 8.27C_c$; $L_x = 237$ cm; $L_y = 375$ cm; $A_{sx} = 58.47$ cm²; $A_{sy} = 59.63$ cm²; $d = 47$ cm; $\rho_x = 0.0033333$; $\rho_y = 0.0053786$. Las áreas de acero de refuerzo propuestas son $A_{sx} = 60.84$ cm² (12Ø1") y $A_{sy} = 60.84$ cm² (12Ø1"). Ahora, se sustituyen las áreas de acero de refuerzo propuestas en la ecuación (13) para obtener el costo mínimo real $C_{min} = 8.38C_c$.

La figura 8 muestra las dimensiones y el acero de refuerzo para el cabezal apoyado sobre cinco pilotes.

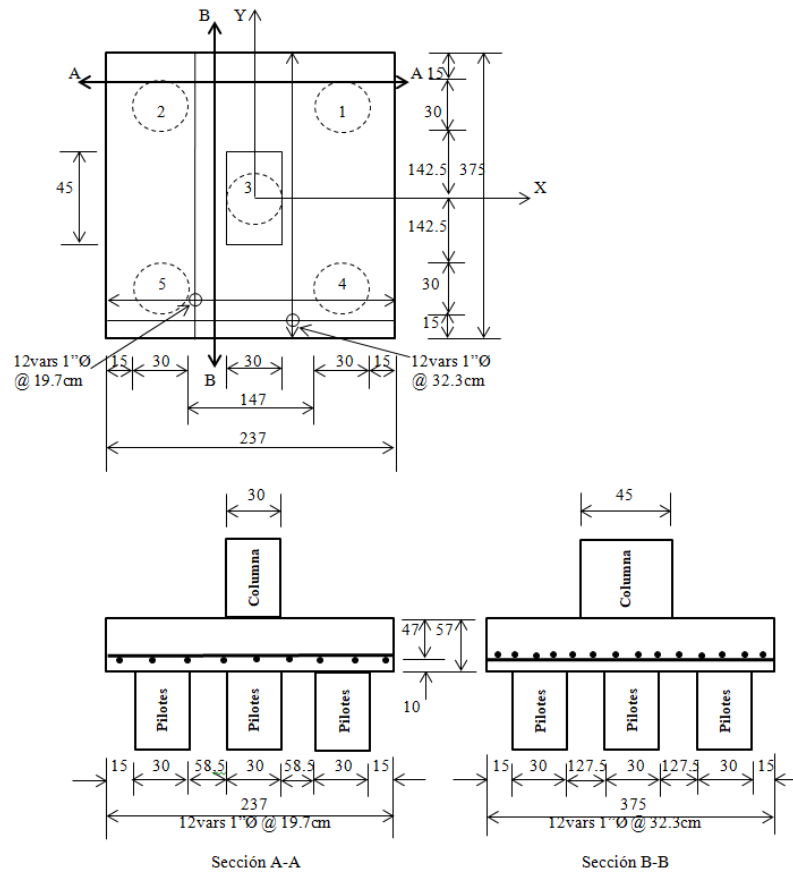


Figura 8. Cabezal apoyado sobre cinco pilotes.
Fuente: Elaboración propia.

Caso E

La solución obtenida para el costo mínimo es: $C_{min} = 8.42C_c$; $L_x = 207$ cm; $L_y = 425$ cm; $A_{sx} = 63.97$ cm²; $A_{sy} = 63.25$ cm²; $d = 45$ cm; $\rho_x = 0.0033333$; $\rho_y = 0.0067674$. Las áreas de acero de refuerzo propuestas son $A_{sx} = 65.91$ cm² (13Ø1") y $A_{sy} = 65.91$ cm² (13Ø1"). Ahora, se sustituyen las áreas de acero de refuerzo propuestas en la ecuación (13) para obtener el costo mínimo real $C_{min} = 8.55C_c$.

La figura 9 muestra las dimensiones y el acero de refuerzo para el cabezal apoyado sobre seis pilotes.

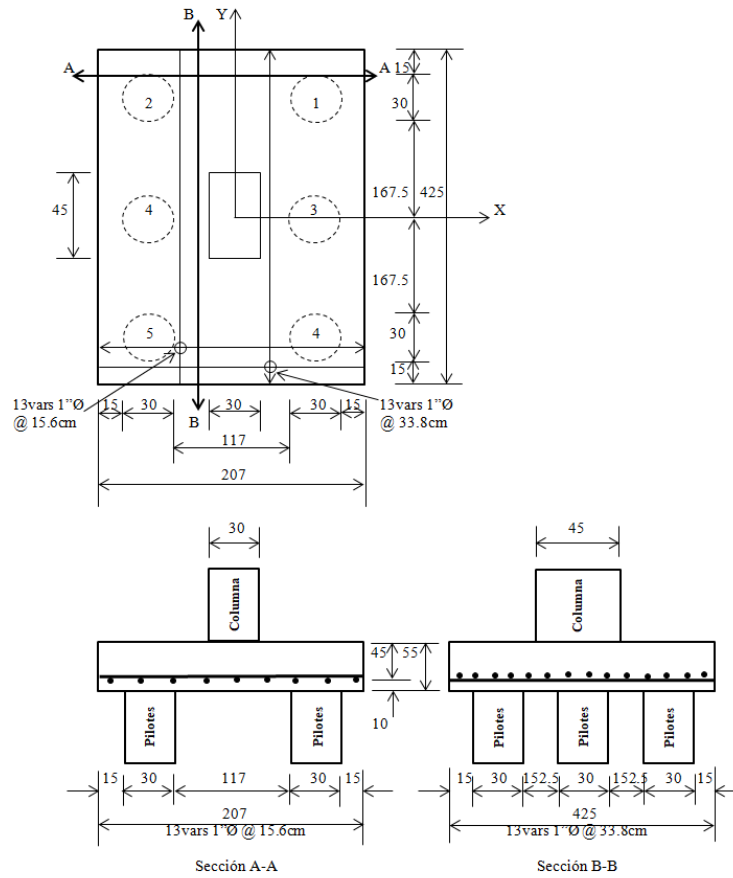


Figura 9. Cabezal apoyado sobre seis pilotes.
Fuente: Elaboración propia.

La tabla 1 muestra los resultados de los casos A, B, C, D y E.

Tabla 1. Resumen de los cinco casos para cabezales.

Concepto	Casos				
	A	B	C	D	E
Cargas aplicadas	P = 800 kN; M _x = 200 kN-m		P = 1200 kN; M _x = 800 kN-m; M _y = 400 kN-m		
L _x (cm)	60	60	203	237	207
L _y (cm)	150	240	310	375	425
x ₁ (cm)	0	0	71	89	74
y ₁ (cm)	45	90	125	157	183
A _{min} (m ²)	0.9	1.44	6.29	8.89	8.82
N _{p1} (kN)	622.22	377.78	600	480	400
N _{p2} (kN)	177.78	266.67	320.24	254.07	218.92
N _{p3} (kN)	-	155.56	279.76	240	290.54
N _{p4} (kN)	-	-	0	225.93	109.46
N _{p5} (kN)	-	-	-	0	181.08
N _{p6} (kN)	-	-	-	-	0
d (cm)	30	35	68	47	45
A _{sx} (cm ²)	8.89	15.24	70.98	60.84	65.91
A _{sy} (cm ²)	15.21	25.35	50.7	60.84	65.91
C _{min} (\$)	0.61C _c	0.82C _c	7.59C _c	8.38C _c	8.55C _c

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 1 muestra la comparación de los casos A y B, así como de los casos C, D y E por tener la misma carga y momentos aplicados a los cabezales.

Para los casos A y B, el área de acero de refuerzo en la dirección del eje X para los dos casos es acero temperatura. El caso B presenta mayor superficie en planta, mayor profundidad efectiva y mayor área de acero de refuerzo en las dos direcciones que el caso A. Por lo tanto, el cabezal del caso A es más económico, pero el cabezal del caso A cuenta con dos pilotes que deben resistir mayor carga con respecto al caso B, el cual tiene tres pilotes.

Para los casos C, D y E, el área de acero de refuerzo en la dirección del eje X para los tres casos, y para el caso C en la dirección del eje Y, es acero mínimo. El caso C presenta menor superficie en planta y menor área de acero de refuerzo en la dirección Y. El caso D muestra la menor área de acero de refuerzo en la dirección X. El caso E presenta la menor profundidad efectiva. Por lo tanto, el cabezal para el caso C es más económico, pero el cabezal del caso C cuenta con cuatro pilotes que deben resistir mayor carga con respecto a los casos D (cinco pilotes) y E (seis pilotes).

Conclusiones

La cimentación de una estructura es la parte esencial para transmitir las cargas de columna o pared al terreno subyacente de la estructura. En el caso de cimentaciones profundas, las cargas que provienen de la estructura descansan sobre un miembro estructural llamado cabezal y, a su vez, las cargas se transmiten a los pilotes que se apoyan directamente en un estrato más fuerte, que puede ubicarse a una profundidad

significativa debajo de la superficie del suelo. La primera parte de esta investigación presenta el área óptima de los cabezales rectangulares utilizando las técnicas de optimización. La parte principal de esta investigación es obtener el diseño óptimo (costo mínimo) de los cabezales rectangulares utilizando las técnicas de optimización.

El modelo propuesto en esta investigación produce resultados que tienen una precisión sin precedentes para que se pueda aplicar a todos los problemas de ingeniería de cimientos.

Las cimentaciones profundas son necesarias cuando la capacidad de carga del suelo cerca de la superficie de este es demasiado baja.

El modelo propuesto presentado en este documento para obtener el diseño óptimo (costo mínimo) para los cabezales rectangulares bajo una carga concéntrica y momentos alrededor de los ejes X y Y debido a la columna, también se puede usar para los otros casos: 1) Cabezales o zapatas sometidos una carga concéntrica; 2) Cabezales o zapatas sometidos una carga concéntrica y un momento en una dirección.

Las principales conclusiones son:

1. La metodología mostrada en este documento es más precisa y converge más rápidamente.
2. El espesor de los cabezales es gobernado por el cortante por flexión, y las zapatas apoyadas sobre el suelo se rigen por el cortante por punzonamiento.
3. El modelo clásico no será práctico en comparación con esta metodología, ya que el modelo normalmente utilizado para obtener el diseño de los cabezales considera que todos los pilotes transmiten la misma carga vertical; esto funciona únicamente cuando la columna transmite carga axial y no momentos.

El modelo optimizado presentado en este artículo es aplicado solo para obtener el diseño óptimo (costo mínimo) para cabezales rectangulares apoyados sobre un grupo de pilotes, y este estudio considera que los cabezales son perfectamente rígidos y los pilotes están articulados en la unión con los cabezales y, por lo tanto, los pilotes transmiten solamente carga vertical.

Las sugerencias para las próximas investigaciones pueden ser: 1) El diseño óptimo para cabezales o zapatas apoyadas sobre pilotes de otro tipo de forma en planta como circular, triangular, pentagonal, hexagonal, etc.; 2) El diseño óptimo para cimentaciones profundas que incluya los cabezales y los pilotes.

Referencias

- American Concrete Institute (ACI). (2014). Building code requirements for structural concrete and commentary. New York, USA: Committee 318.
- Adebar, P., & Zhou, Z. (1996). Design of deep pile caps by strut-and-tie models. *ACI Structural Journal*, 93(4), 1-12. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.658.2762&rep=rep1&type=pdf>
- Araújo, J. M. (2016). Design of rigid pile caps through of strut-and-tie model. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 14(8), 397-407. doi: <https://doi.org/10.3151/jact.14.397>
- Araújo, J. M. (2017). Reliability analysis of rigid pile caps using an iterative strut-and-tie model. *Architecture Civil Engineering Environment*, (2), 65-75. http://www.editoradunas.com.br/dunas/ACEE_PILE_CAPS.pdf

- Chagoyén, E., Negrín, A., Cabrera, M., López, L., & Padrón, N. (2009). Diseño óptimo de cimentaciones superficiales rectangulares. *Formulación Revista de la Construcción*, 8(2), 60-71. <https://www.redalyc.org/pdf/1276/127619798006.pdf>
- Hassaan, G. A. (2014). Optimal design of machinery shallow foundations with silt soils. *International Journal of Mechanical Engineering (IJME)*, 4(3), 11-24. <https://pdfs.semanticscholar.org/2fbf/6c521e96565d28203aae0299fd65efa07663.pdf>
- Hui, L., Zhuoyi, C., & Mingji, Z. (2015). Genetic algorithm application on optimal design of strip foundation. *The Open Cybernetics & Systemics Journal*, 9, 335-339. doi: <https://doi.org/10.2174/1874110X01509010335>
- Hwang, J. H., Lyu, Y. D., & Chung, M. C. (2011). Optimizing pile group design using a real genetic approach. *Proceedings of the Twenty-first (2011) International Offshore and Polar Engineering Conference* (pp. 491-499). Maui, Hawaii, USA: International Society of Offshore and Polar Engineers (ISOPE). <https://www.onepetro.org/conference-paper/ISOPE-I-11-056>
- Jelušič, P., & Žlender, B. (2018). Optimal design of pad footing based on MINLP optimization. *Soils and Foundations*, 58(2), 277-289. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2018.02.002>
- Kim, H., Yoo, H., & Kang, I. (2002). Genetic algorithm-based optimum design of piled raft foundations with model tests. *Geotechnical Engineering*, 33(1), 1-11. <https://www.tib.eu/en/search/id/BLSE%3ARN113801189/Genetic-Algorithm-Based-Optimum-Design-of-Piled/>
- Letsios, C., Lagaros, N. D., & Papadrakakis, M. (2014). Optimum design methodologies for pile foundations in London. *Case Studies in Structural Engineering*, 2, 24-32. doi: <https://doi.org/10.1016/j.csse.2014.08.001>
- Leung, Y., Klar, A., & Soga, K. (2010). Theoretical study on pile length optimization of pile groups and piled rafts. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 136(2), 319-330. doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000206](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000206)
- López-Chavarría, S., Luévanos-Rojas, A., & Medina-Elizondo, M. (2017). Optimal dimensioning for the corner combined footings. *Advances in Computational Design*, 2(2), 169-183. doi: <https://doi.org/10.12989/acd.2017.2.2.169>
- Luévanos-Rojas, A. (2014). Design of isolated footings of circular form using a new model. *Structural Engineering and Mechanics*, 52(4), 767-786. doi: <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2014.52.4.767>
- Luévanos-Rojas, A. (2015). Design of boundary combined footings of trapezoidal form using a new model. *Structural Engineering and Mechanics*, 56(5), 745-765. doi: <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2015.56.5.745>
- Luévanos-Rojas, A., Barquero-Cabrero, J. D., López-Chavarría, S., & Medina Elizondo, M. (2017). A comparative study for design of boundary combined footings of trapezoidal and rectangular forms using new models. *Coupled Systems Mechanics*, 6(4), 417-437. doi: <https://doi.org/10.12989/csm.2017.6.4.417>
- Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2017). Optimal design for rectangular isolated footings using the real soil pressure. *Ingeniería e Investigación*, 37(2), 25-33. doi: <http://dx.doi.org/10.15446/ing.investig.v37n2.61447>
- Mendonça, A. V., & Paiva, J. B. (2003). An elastostatic FEM/BEM analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(9), 19-93. doi: [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(03\)00061-4](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(03)00061-4)
- Oliveira, D. S., Barros, R., & Giongo, J. S. (2014). Six pile caps reinforced concrete: Numerical simulation. *IBRACON Structures and Materials Journal*, 7(1), 1-23. doi: <https://doi.org/10.1590/S1983-41952014000100002>
- Penteado, M., & de Brito, J. (2012). Expert knowledge-based selection methodology for optimizing the construction of concrete piles. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 26(1), 95-103. doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CF.1943-5509.0000196](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CF.1943-5509.0000196)
- Poulos, H. (2001). Piled raft foundations: Design and applications. *Géotechnique*, 51(2), 95-113. doi: <https://doi.org/10.1680/geot.2001.51.2.95>

- Ravichandran, N., Shrestha, S., & Piratla, K. (2018). Robust design and optimization procedure for piled-raft foundation to support tall wind turbine in clay and sand. *Soils and Foundation*, 58(3), 744-755. doi: <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2018.02.027>
- Regupathi, R., & Sugumar, R. (2017). Cost minimization of reinforced concrete pile cap using optimization techniques. *International Journal of Advance Engineering and Research Development*, 4(7), 745-750. http://www.ijaerd.com/papers/finished_papers/Cost%20Minimization%20of%20Reinforced%20Concrete%20Pile%20Cap%20Using%20Optimization%20Techniques-IJAERDV04I0762754.pdf
- Souza, R., Kuchma, D., Park, J., & Bittencourt, T. (2009). Adaptable strut-and-tie model for design and verification of four-pile caps. *ACI Structural Journal*, 106(2), 142-150. https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/32056367/Artigo_R11.pdf?1381445853=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DArtigo_R11.pdf&Expires=1591117370&Signature=dNUqAHPgJ63WDI306wqKG0S0M7s1U2AzaxvbovOsPacB8UdeSW5hvnTASMKpTkyFh0zOrOpDbrPE-DGg0uydOA3xAqS3OTsNSQhy~l5Z3ulUCzbF~MLn0V5O~tH3Y6GBJdmrPmb1B3QLH6o6PudgS39pt4~SHf0zQn~xF3rvdQ8OQUphbm2KHYSjPjTgoFzSnYTW9bpHV-smYZa1ET6tWVmsY516W-l-Um-ICDpMztBfW42jv1sHQHVivqaTAzy16UzPyG8iXvFtZ50sfP92ccZ05PGaCvRm4iqFCaZrGqiEFkXZPKv97q30TYMDzLrLhEJGjAOxdfcGkmM7VLn6g__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA
- Velázquez-Santillán, F., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., & Sandoval-Rivas, R. (2018). Numerical experimentation for the optimal design for reinforced concrete rectangular combined footings. *Advances in Computational Design*, 3(1), 49-69. doi: <https://doi.org/10.12989/acd.2018.3.1.049>
- Wang, W., Yang, M., & Shangguani, S. (2015). Pile diameter optimization analysis method of piled raft foundation based on minimization of differential settlements. *Rock and Soil Mechanics*, 36(2), 178-184. doi: <https://doi.org/10.16285/j.rsm.2015.S2.023>