



**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO**

---

---

**DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS  
CAMPUS LEÓN**

**Microláseres basados en la generación de  
microgotas por sistemas microfluídicos**

**TESIS PROFESIONAL**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN FÍSICA**

**PRESENTA:**

**Guillermo Segura Gómez**

**BAJO LA DIRECCIÓN DE:  
Rigoberto Castro Beltrán**

**LEÓN, GUANAJUATO**

**OCTUBRE 2023**

*"Si encuentras un camino sin obstáculos, probablemente no lleve a ninguna parte."*  
— Carl Sagan

# Agradecimientos

Quisiera empezar extendiendo mi más sincera gratitud al Dr. Rigoberto Castro Beltrán, cuya experiencia y conocimiento han sido cruciales en la elaboración de esta tesis. Sus consejos y apoyo incondicional han sido fundamentales desde el inicio de este proyecto hasta su culminación.

Un agradecimiento especial a Jonathan, Dr. Orlando Medina, Dr. Rosas Román y Héctor, quienes han sido pilares en la construcción de esta investigación. Su guía y conocimientos han sido esenciales para moldear este trabajo académico.

A mis amigos del laboratorio que hicieron más amenas las largas jornadas de trabajo. Un reconocimiento especial a Daniel, María, Joss y muchos otros grandes amigos con los que me tocó compartir mucho café en el laboratorio.

A mi familia: a mis padres, cuyo apoyo ha sido muy importante para llevar a cabo un proyecto tan complejo, sin ustedes no hubiera podido con nada de esto. A mis hermanos Bere y Rafa, por ser un soporte constante en mi vida.

A mi novia Paola, tu amor y apoyo han sido uno de los pilares más importantes en mi vida. Tu presencia ha sido esencial, especialmente en los momentos más complicados. Muchas gracias por siempre estar ahí, por apoyarme y por impulsarme a superarme cada día más.

A mis amigos que me acompañaron durante mi carrera, quienes han sido un apoyo constante y fuente de fortaleza. Con todas las personas con las que compartí momentos tan especiales a lo largo de mis estudios, muchas gracias.

Quisiera expresar mi agradecimiento al programa de apoyos de la Universidad de Guanajuato. Su respaldo fue crucial para la adquisición de equipo y material de laboratorio, además el apoyo hacía mi persona, lo cual hizo posible la realización de mi proyecto. En particular, las becas CIIC 023-2021, CIIC 028-2021 y CIIC 012-2023 contribuyeron significativamente al éxito de mi trabajo.

Finalmente, agradezco al laboratorio de biofotoacústica de la Universidad de Guanajuato y a su responsable, el Dr. Gerardo Gutiérrez Juárez, por proporcionarme el apoyo incondicional, los recursos financieros y técnicos necesarios para la realización de este proyecto.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Materiales y métodos</b>	<b>15</b>
2.1. Fabricación de moldes maestros por impresión láser directa	15
2.1.1. Low One-Photon Absorption (LOPA)	16
2.1.2. Fabricación de la máscara maestra	16
2.2. Técnica de litografía suave	19
2.2.1. Fabricación del chip microfluídico	20
2.3. Presentación del chip microfluídico	22
<b>3. Simulaciones por elemento finito</b>	<b>23</b>
3.1. Ecuaciones de movimiento para un fluido newtoniano	23
3.1.1. Ecuación de continuidad	24
3.1.2. Ecuación de conservación de momento	25
3.2. Método de Elementos Finitos	26
3.3. Método de conjunto de Nivel	26
3.4. Comsol Multiphysics	27
3.5. Simulaciones	28
<b>4. Generación de gotas en un canal microfluídico</b>	<b>31</b>
4.1. Ecuación de Navier-Stokes para fluidos newtonianos	31
4.1.1. Análisis dimensional	32
4.2. Geometría del dispositivo	36
4.2.1. Geometría unión en T	36
4.3. Generación pasiva de microgotas	37
4.3.1. Squeezing	37
4.4. Caracterización del chip microfluídico	38
4.5. Procesamiento digital de imágenes	40
4.6. Análisis de la frecuencia de la generación de microgotas	41
<b>5. Antecedentes teóricos de las cavidades resonantes</b>	<b>45</b>
5.1. Tratamiento matemático de una $\mu$ - guía de onda esférica	45
5.1.1. Ecuación de onda para campos electromagnéticos en un dieléctrico homogéneo	45
5.2. Solución de las ecuaciones de Helmholtz para una esfera	48
5.2.1. Solución de la ecuación de onda escalar	48
5.2.2. Solución de la ecuación de onda vectorial	52
5.3. Soluciones al campo electromagnético para una esfera	55
5.3.1. Modo transversal eléctrico (TE)	55
5.3.2. Modo transversal magnético (TM)	56

5.4.	Soluciones modales para el campo electromagnético . . . . .	57
5.4.1.	Ecuación modal para el transversal eléctrico (TE) . . . . .	58
5.4.2.	Ecuación modal para el transversal eléctrico (TM) . . . . .	59
5.5.	Simulación del campo electromagnético dentro de una esfera en Matlab . . . . .	61
<b>6.</b>	<b>Caracterización láser de microgotas generadas en un canal microfluídico tipo unión en T</b>	<b>65</b>
6.1.	Estimulación láser y microfluídica . . . . .	65
6.2.	Amplificación de la Emisión Estimulada . . . . .	66
6.2.1.	Diferencia entre ASE y Lasing . . . . .	66
6.3.	Diseño Experimental para la Estimulación Láser de Microgotas . . . . .	68
6.4.	Caracterización de gotas como cavidades ópticas . . . . .	69
6.5.	Resultados de la Estimulación Láser . . . . .	70
<b>7.</b>	<b>Conclusión</b>	<b>73</b>
<b>A.</b>	<b>Código: Análisis de frecuencia</b>	<b>75</b>
<b>B.</b>	<b>Cálculo de las componentes del vector <math>N_l^m</math></b>	<b>81</b>
<b>C.</b>	<b>Desarrollo de expresiones armónicos esféricos vectoriales</b>	<b>85</b>

# Índice de figuras

1.1. Representación de la creciente tendencia en la investigación de microgotas en sistemas microfluídicos a lo largo de los años. . . . .	11
1.2. Número de publicaciones por campo de la generación de microgotas en sistemas microfluídicos desde el año 2010 a la fecha. . . . .	12
2.1. Esquema ilustrativo de la plataforma de fabricación de la máscara maestra. Este diagrama detalla los componentes y etapas esenciales del proceso, que incluye el láser CW, así como el sistema óptico y el vidrio que contiene la resina SU8. . . . .	18
2.2. Plataforma de fabricación de la máscara maestra por DLW. Se muestran los componentes, incluyendo el láser CW, el sistema óptico y el vidrio que contiene la resina SU8. . . . .	19
2.3. Etapas principales de la técnica de litografía suave: 1) Mezclar el PDMS, 2) Verter el PDMS, 3) Pegado por plasma. . . . .	21
2.4. Imagen microscópica de alta resolución de la máscara maestra. Esta imagen detalla la precisión del patrón unión en T, T-junction por sus siglas en inglés, grabado en la máscara, tomada desde el ángulo que facilita la apreciación de la forma. . . . .	22
3.1. Diagrama de flujo para la construcción de una simulación en COMSOL para un canal microfluídico en forma de unión en T . . . . .	28
3.2. Posiciones de las fases $Q_c$ y $Q_d$ . Los parámetros geométricos de las gotas $L$ y $W$ son mostrados. . . . .	29
3.3. Evolución de la formación de una gota en un dispositivo de unión en T bajo el régimen de squeezing para $Ca = 0.00125$ . . . . .	29
4.1. Diagrama esquemático de fuerzas actuando sobre una gota de fluido. Se ilustran las principales contribuciones: la fuerza inercial dirigida en la dirección del flujo, la fuerza viscosa opuesta al movimiento, la fuerza de gravedad actuando hacia abajo y la fuerza capilar representada por las líneas curvas alrededor de la superficie de la gota. . . . .	33
4.2. Producción de gotas en el canal microfluídico visualizada mediante un lente Laowa Ultra Macro. En la parte inferior derecha, se puede apreciar el canal donde se introduce la fase dispersa, con el flujo moviéndose en dirección hacia la izquierda. En la superior derecha observamos la fase continua. En el punto de encuentro de la unión en T, es evidente la formación de las gotas microfluídicas. Cada gota se forma y se separa del flujo principal debido a las propiedades físicas de los líquidos y las condiciones de flujo en el dispositivo. . . . .	38

4.3.	Representación esquemática del montaje experimental para la producción y caracterización de gotas en un canal microfluídico. El canal se encuentra montado en un soporte milimétrico XYZ. Para la visualización del proceso, se utiliza una cámara Nikon D7500, equipada con un lente Laowa 25mm Ultra Macro 2.5 - 5x, la cual está montada sobre un carril micrométrico motorizado. La generación de las microgotas es controlada mediante dos microbombas New Era NE4000. . . . .	39
4.4.	Montaje experimental para la producción y visualización de gotas en un sistema microfluídico. Para la producción de las gotas se tienen dos microbombas New Era NE4000, una para la fase continua y otra para la fase dispersa. Para la visualización del proceso, se utiliza una cámara Nikon D7500, equipada con un lente Laowa 25mm Ultra Macro 2.5 - 5x, la cual está montada sobre un carril micrométrico motorizado. . . . .	40
4.5.	Diagrama de flujo del protocolo PDI implementado para el procesamiento de cada fotograma en los vídeos experimentales. El video se separa en imágenes individuales, conocidas como fotogramas. Ya que cada imagen esta compuesta por tres planos de colore, rojo, verde y azul, extraemos el plano que contiene la información que se desea destacar; en nuestra aplicación es el canal rojo. Después se recorta la región de la imagen que contiene el canal donde se forman las gotas. Mediante esta acción se reducen dramáticamente los tiempos de procesamiento del video. Se genera una imagen binaria conocida como máscara, donde las áreas de interés aparecen como gotas blancas. Los objetos en la máscara se etiquetan y se filtran aquellos que están en contacto con el borde. Finalmente, se realiza una extracción geométrica de las gotas previamente etiquetadas utilizando un algoritmo de cuadro delimitador. . . . .	41
4.6.	Gráfico de la frecuencia de generación de microgotas en función de la relación de caudales $Q_d/Q_c$ . . . . .	42
4.7.	Gráfico del área de las gotas en micras cuadradas en función de la relación de caudales $Q_d/Q_c$ . . . . .	43
4.8.	Gráfico de la frecuencia de generación de microgotas en función de la relación de caudales $Q_d/Q_c$ . . . . .	44
5.1.	Corte transversal radial para $ E , l = 2, m = 2$ . . . . .	63
5.2.	Corte transversal para las componente phi para $ E , l = 2, m = 2$ . . . . .	64
5.3.	Corte transversal para las componente theta para $ E , l = 2, m = 2$ . . . . .	64
6.1.	Representación del montaje experimental para la excitación de microgotas en el canal microfluídico. El sistema incluye un láser Q-switch Quantel de 532 nm que emite un haz láser, el cual es atenuado por un beam splitter antes de ser dirigido a las microgotas en el canal a través de un conjunto de lentes. Las gotas, llenas de Rodamina B, son creadas y alimentadas en el canal por dos microbombas. La recolección de la luz emitida se realiza mediante un filtro notch y una fibra óptica que conduce la luz hacia un espectrómetro Ocean USB4000 . . . . .	67
6.2.	Montaje experimental para la generación de gotas en el microcanal, integrado con la plataforma de excitación láser. El sistema óptico dirige el haz láser desde arriba para excitar las gotas, mientras la luz emitida se recoge lateralmente. Esta configuración permite un control preciso de la excitación y la recolección de la emisión de las gotas. . . . .	68

6.3. Configuración experimental para la generación y emisión de microgotas en un canal microfluídico. En la configuración, un láser Q-switch Quantel de 532 nm produce un haz de láser que se atenúa mediante un divisor de haz antes de focalizarse en las microgotas a través de un conjunto de lentes. Las gotas, llenas de Rodamina B, se generan y se introducen en el canal mediante dos microbombas. La luz emitida se recoge a través de un filtro de rechazo de banda y una fibra óptica, que conduce la luz a un espectrómetro Ocean USB4000 . . . . .	69
6.4. Espectro de emisión del canal con Rodamina. Se observa un patrón de fluorescencia y una disminución de la densidad de bombeo, indicando que no se trata de una emisión amplificada. . . . .	70
6.5. Espectro de ASE con una concentración de $1 \times 10^{-3}$ . Se observa un aumento lineal de la densidad de energía (subfigura 3) y un pico de emisión notable (subfigura 1) en la gráfica de la longitud de onda contra la intensidad, que se le atribuye a las gotas. . . . .	71
A.1. Frecuencia de gotas calculada a lo largo del video para un FR = 0.1 . . . . .	78
A.2. Área de las gotas calculada a lo largo del video para un FR = 0.1 . . . . .	79
A.3. Valor del parámetro L/W a lo largo de todo el video para un FR = 0.1 . . . . .	79



# Capítulo 1

## Introducción

La microfluídica es un campo multidisciplinario que abarca áreas como la física, química y biología, centrado en el estudio del comportamiento de los fluidos a escala microscópica [1]. Esta disciplina se está convirtiendo en un área de estudio cada vez más relevante dentro de la física. Desde el año 1969 los artículos publicados en el tema han ido en aumento<sup>1</sup> hasta convertirse en un área recurrente en las investigaciones a lo largo del mundo. Uno de los fenómenos que ha representado un creciente interés en la investigación del campo, es la generación de gotas en sistemas microfluídicos. De hecho, en el año 2020 la publicaciones relacionadas a la generación de gotas representaron alrededor del 30 % de los artículos publicados en microfluídica, lo cual es un porcentaje importante, tal como se aprecia en la figura 1.1.

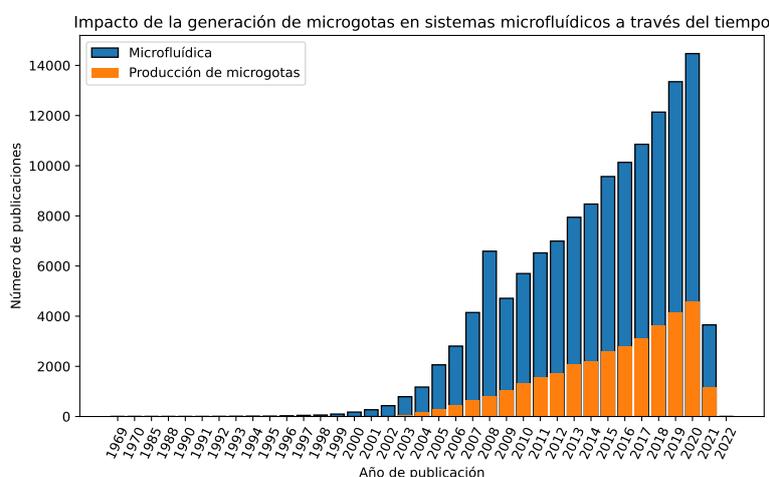


Figura 1.1: Representación de la creciente tendencia en la investigación de microgotas en sistemas microfluídicos a lo largo de los años.

El interés en el estudio de las de gotas en sistemas microfluídicos nació de su importante y amplia variedad de aplicaciones. Las primeras publicaciones se remontan a la década de los años ochenta, en donde se investigaban las emulsiones de microgotas formadas por dos líquidos inmiscibles, comúnmente agua y aceite [2]. Este tipo de sistemas tenía posibles aplicaciones en la industria farmacéutica ya que las emulsiones de microgotas poseían el potencial de ser un sistema muy eficiente de distribución de medicamentos, tal y como mostró Davies en los capítulos 8, 9 y 10 de su libro de 1972: *Turbulence Phenomena* [3]. Las posteriores investigaciones, llevaron al desarrollo de las emulsiones de microgotas como sistemas de entrega de

<sup>1</sup>Para la consulta se revisó la base de datos del buscador especializado *Scopus*

medicamentos [4] siendo utilizadas como herramientas de transporte actualmente en muchos fármacos, por ejemplo las vacunas. [5]

En los últimos diez años las investigaciones acerca de la generación de microgotas en sistemas microfluídicos ha tenido un importante auge en áreas como nanociencias, química y ciencias de materiales<sup>2</sup> (Ver figura 1.2). Las publicaciones abarcan temas que van desde la fabricación y caracterización de sistemas microfluídicos [6 - 8] hasta las aplicaciones como la síntesis de micropartículas [9] con utilidad en la industria farmacéutica y cosmética, o el desarrollo de los llamados *lab on a chip* (LOC). [10]

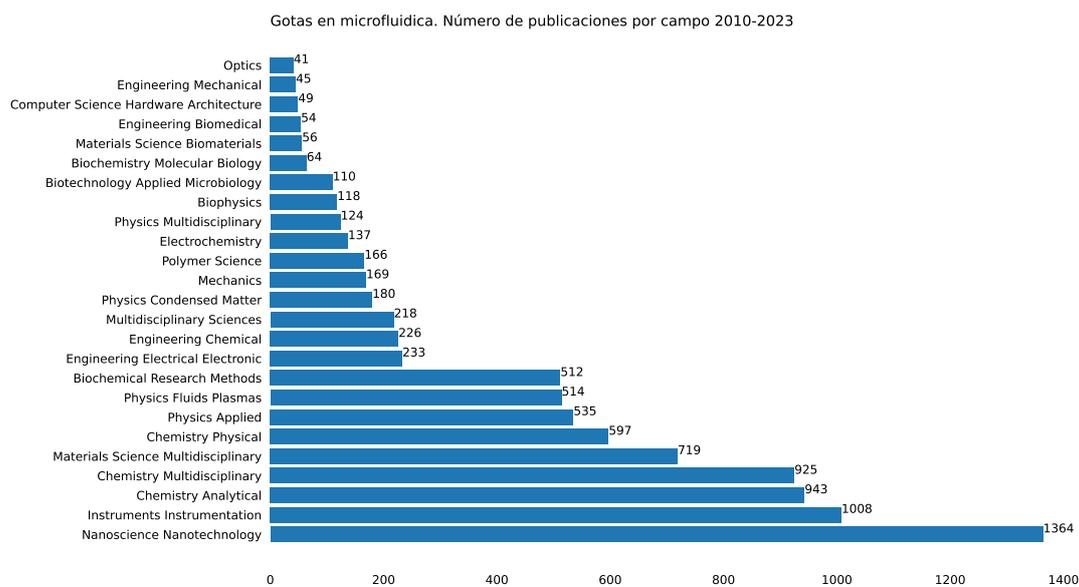


Figura 1.2: Número de publicaciones por campo de la generación de microgotas en sistemas microfluídicos desde el año 2010 a la fecha.

Una de las posibles aplicaciones de las gotas en microfluidica es su uso como cavidad óptica. Una cavidad óptica es esencialmente un espacio donde la luz es atrapada y rebotada múltiples veces entre superficies reflectantes, facilitando la generación de láseres al interactuar con un medio activo en presencia de una fuente de ganancia [11]. Aunque este tema ha generado interés, a lo largo de los años ha habido un número escaso de publicaciones, centrándose más en la caracterización de las propiedades ópticas de las cavidades que en otras aplicaciones. En la figura 1.2 vemos que el campo de la óptica ocupa el lugar número veinticinco entre las ramas de la ciencia que trabajan utilizando gotas en sistemas microfluídicos. Esto puede ser debido a que en otras disciplinas las aplicaciones de las microgotas son mas directas, tal y como se discutió en el párrafo anterior, lo cual da mucho mas relevancia a nuestro trabajo, puesto que no existe una amplia investigación acerca del uso de las gotas como cavidad óptica, siendo un área de interés novedosa aunque aún con muchas limitaciones.

Esta área de estudio dentro de la óptica fue introducida por primera vez en 2007 por Tanyeri et al. [12], quienes demostraron que las microgotas de agua pueden actuar como cavidades resonantes de alta calidad, es decir, pueden atrapar luz en su interior debido a la reflexión interna total en la interfaz gota-medio. Desde que se introdujo por primera vez la idea de usar microgotas microfluídicas como cavidades ópticas, se han explorado y desarrollado numerosas técnicas para excitar y colectar la luz atrapada en estas microgotas. Los métodos de generación de microgotas, tales como flujos co-fluentes y las unión en T, se han empleado para producir

<sup>2</sup>Los datos fueron consultados del sitio web especializado Web Of Science

microgotas que sirven como resonadores ópticos de alta calidad. En algunos estudios, se han empleado técnicas de microfluídica para generar microgotas de agua en aceite que sirven como resonadores, siendo capaces de atrapar luz en su interior [13]. Estos avances subrayan la importancia de las técnicas de generación de microgotas en la creación de cavidades resonantes ópticas de alta calidad.

De hecho este fenómeno tiene importante utilidad en tecnologías que aún se están desarrollando. Por ejemplo, el uso de microgotas de cristal líquido puede tener posibles usos en la fabricación de micro componentes ópticos para los circuitos ópticos integrados y generación de pantallas [14]. Otras de las aplicaciones es el uso de las cavidades como sensores bioquímicos [15] y fuentes de luz con un amplio espectro de emisión o peines de frecuencia óptica [16].

Más recientemente, la investigación se ha centrado en la mejora de la eficiencia y la estabilidad de estos resonadores ópticos de microgotas. Se ha experimentado con una amplia gama de tamaños de microgotas, composiciones de fluidos y configuraciones de sistemas microfluídicos para optimizar la calidad de las cavidades resonantes. Como tal, la generación de microgotas microfluídicas como cavidades ópticas ha evolucionado hacia un campo de estudio altamente especializado que promete abrir nuevas oportunidades para aplicaciones en áreas muy diversas a través de sistema híbridos.

En este trabajo, investigamos la producción de microgotas mediante sistemas microfluídicos y su posible uso en la creación de microláseres. Esta investigación combina elementos de microfluídica y óptica, con el objetivo de avanzar en la tecnología de microláseres. Nos centramos en identificar microgotas con propiedades óptimas y luego en la caracterización de su comportamiento láser cuando se les introduce en un medio de tinte dentro de los canales microfluídicos. El proceso de investigación se desarrolla en varias etapas. Iniciamos con la fabricación de un chip microfluídico en conjunto con una etapa de diseño, en la que se realizaron simulaciones para optimizar los chips fabricados. Seguimos con una fase de una rigurosa caracterización para optimizar la producción de microgotas. El último paso consiste en la evaluación detallada de estas microgotas microfluídicas, estudiando su comportamiento y potencial como cavidades ópticas resonantes, así como un estudio teórico de como se distribuye la luz en una cavidad esférica.

Ref.	Materiales	Fabricación	Caracterización
Tanyeri et al. [12]	Pyrex 7740, SU-8 (varias densidades), coverslips, Sigmacote, epoxy	Uso de máscara diseñada, tratamiento con Sigmacote para hidrofiliación	Emisión a través de fibra, detección con otra fibra
Zhang et al. [17]	Fibra óptica (200 $\mu\text{m}$ , RI = 1.458), PDMS (RI = 1.405), solución de tinte	Empotramiento de fibra óptica en un canal microfluídico de PDMS	Emisión de fluorescencia a través de la interfaz núcleo/cladding
Chen et al. [18]	Microcavidades de WGM (óxido de aluminio y ZrO <sub>2</sub> )	Fabricación con óxido de aluminio y deposición de capas ZrO <sub>2</sub>	Caracterización de calidad (Q) y frecuencia de modo
Yang et al. [19]	Pequeño volumen de vidrio, femto-REGEN (láser de femtosegundos)	Fabricación por irradiación láser de femtosegundos seguida de grabado químico (FLICE)	Separación y caracterización de células en tiempo real según sus propiedades mecánicas

Cuadro 1.1: Estado del arte sobre la estimulación láser en gotas microfluídicas, desde el año 2007 en adelante.

La tabla 1.1 ofrece un panorama general de los avances en el campo de la generación de microgotas estimuladas con láser. Varios métodos y materiales se han empleado para este fin, cada uno con sus ventajas y limitaciones. La diversidad de enfoques sugiere que aún hay mucho espacio para la innovación en esta área. Los futuros trabajos podrían centrarse en combinar las fortalezas de estos diferentes métodos para desarrollar sistemas más versátiles y eficientes para la generación y manipulación de microgotas láser-estimuladas.

El trabajo se divide en varios capítulos. En el Capítulo 2, 'Materiales y métodos', se describen los procedimientos de fabricación de moldes maestros por impresión directa por láser y la técnica de litografía suave para la creación de máscaras y chips microfluídicos. El Capítulo 3, 'Simulaciones por elemento finito', proporciona una visión detallada de las ecuaciones de movimiento para un fluido newtoniano y el método de elementos finitos. También se introducen las simulaciones realizadas con COMSOL MULTIPHYSICS. En el Capítulo 4, 'Generación de gotas en un canal microfluídico', se presenta la ecuación de Navier-Stokes para fluidos newtonianos, se analiza la geometría del dispositivo y se examinan los resultados obtenidos. El Capítulo 5, 'Antecedentes teóricos de las cavidades resonantes', proporciona una base teórica para el estudio de las cavidades resonantes y explica la solución de las ecuaciones de Helmholtz para el caso ideal, una esfera. Finalmente, en el Capítulo 6, 'Caracterización láser de microgotas en un canal microfluídico', se discute el espectro electromagnético y se examina el proceso de excitación láser de las microgotas en el canal microfluídico.

Este trabajo proporciona una contribución significativa al campo de la generación de microgotas y su uso como cavidades ópticas, explorando nuevas formas de manipulación y control que podrían tener importantes implicaciones en una variedad de aplicaciones tecnológicas

## Capítulo 2

# Materiales y métodos

Mediante la técnica de impresión láser directa (DLW por sus siglas en inglés), se fabricó una microestructura tridimensional destinada a la elaboración de un chip microfluídico (máscara maestra). Para lograr este cometido se utilizó la plataforma de fabricación reportada previamente en los trabajos de Camarena [20] y Reynoso [21], con la cual se fabricaron micro pedestales con fines fotónicos. Además, tomando como referencia el trabajo de Álvarez [6] usando la misma plataforma fue posible la fabricación de patrones micrométricos. La microestructura impresa en un vidrio portaobjetos es conocida como **máscara maestra**, y a partir de esta se pueden elaborar múltiples chips microfluídicos. Para la construcción del chip microfluídico, se empleó la técnica de litografía suave. La finalización del chip se lleva a cabo mediante la unión de la estructura de PDMS con un portaobjetos a través de un proceso de pegado por plasma.

Este capítulo tiene como objetivo proporcionar una visión detallada de las técnicas y los materiales involucrados en el proceso de fabricación, abarcando desde el estado del arte hasta el proceso de fabricación de un chip microfluídico. Comenzaremos presentando la técnica de DLW y la propiedad de fotón individual de baja absorción (LOPA), enfocándonos en la plataforma de fabricación y en cómo los diferentes parámetros pueden afectar los resultados. Seguiremos con el proceso de preparación de la resina SU-8 para la elaboración de microestructuras, así como la técnica de preparación del PDMS, destacando sus propiedades únicas y su relevancia en la fabricación de dispositivos microfluídicos. Finalmente, presentaremos el chip microfluídico, ilustrando cómo se integran todos los elementos en la práctica para producir sistemas funcionales.

### 2.1. Fabricación de moldes maestros por impresión láser directa

Las micro y nanoestructuras han cobrado gran relevancia durante los últimos años en áreas tan diversas como la óptica y la fotónica [22], la biología [23] y la medicina [24]. De manera particular, en las áreas de óptica y fotónica, las micro estructuras son de importante interés debido a la alta capacidad que tienen de poder manipular la luz a escalas micro y nanoscópicas. Uno de los motivos por los cuales este tipo de dispositivos se ha destacado en los últimos años ha sido la mejora en las técnicas de diseño y fabricación de microestructuras. En este contexto, una de las mejores técnicas de fabricación es la **impresión láser directa** (DLW). El impacto de la DLW se refleja en la amplia gama de aplicaciones que ha propiciado en innumerables campos, contribuyendo al desarrollo de tecnologías innovadoras, desde los laboratorios en un chip (Lab On a Chip) [25] hasta la fabricación de componentes ópticos y dispositivos biomédicos de alta precisión [24].

La técnica de DLW se basa en el uso de un haz láser para grabar patrones a escala micrométrica

sobre un material sensible a la luz (fotosensible). Esta técnica se aprovecha de una serie de fenómenos relacionados con la interacción entre la luz y la materia, que se pueden clasificar de acuerdo con las propiedades principales de absorción óptica del material fotosensible y la fuente de excitación. Esos fenómenos se denominan absorción de un fotón (OPA, por sus siglas en inglés), absorción de dos fotones (TPA) y fotón individual de baja absorción (LOPA) [26].

Una de las principales ventajas de DLW es su capacidad para crear estructuras con una resolución espacial de hasta 100 nm. Esto se debe en parte a la propiedad LOPA, que permite una absorción de energía altamente localizada. Otra ventaja es que la técnica permite la creación de estructuras tridimensionales con una geometría controlada con precisión. Por otro lado, una desventaja es la velocidad de escritura, ya que la creación de estructuras a gran escala es un proceso lento [26].

En la fabricación de máscaras maestras para los sistemas microfluídicos, DLW sobresale por su alta resolución y control en 3D, difíciles de alcanzar con otros métodos. Además, permite modificar rápidamente los diseños y puede resultar más rentable al considerar los costos de equipos y materiales requeridos para la litografía convencional.

### 2.1.1. Low One-Photon Absorption (LOPA)

Los diferentes fenómenos que se obtienen de la interacción entre la luz y la materia se deben a las diferentes condiciones en las que esto ocurre. Para poder tener una dirección del tipo de fenómeno en el que se va a trabajar, es necesario tener claras las condiciones con las que se cuenta y lo que se busca. La fotopolimerización de fotoresinas se potencia mediante el uso de un haz de luz enfocado en una región específica del material. El proceso a menudo se realiza utilizando la absorción de dos fotones (TPA), sin embargo, este método no es viable debido al alto costo y la limitada disponibilidad de los láseres de femtosegundo necesarios en el proceso de fabricación. Como alternativa, para la fabricación se cuenta con un láser continuo (CW-laser) que son considerablemente más baratos. Ajustando la longitud de onda óptica del láser continuo, es posible sintonizar diferentes regiones del espectro de absorción de nuestro material fotosensible. Al mismo tiempo, tenemos dos nuevos efectos en el proceso de fotopolimerización: la absorción de un fotón (OPA) y la absorción baja de un solo fotón (LOPA). Aunque OPA es el fenómeno estándar en los procedimientos de litografía basados en máscaras maestras, no lo consideramos debido a la necesidad de equipos especiales o comunmente utilizados en laboratorios de investigación y compañías que se dedican a la fabricación del chips microfluídicos.

Por otro lado, cuando la fotoresina se excita ligeramente fuera de su banda de absorción principal, se puede lograr una buena profundidad de penetración en el material, comparable con los resultados obtenidos con procedimientos de TPA. Como este procedimiento se basa en la región de absorción débil de la fotoresistencia, se le llama LOPA. Para nuestro caso, usando la resina fotosensible SU8-2050, aunque la absorción a 532 nm es baja, es suficiente para realizar el proceso de polimerización. De esta forma, se puede aprovechar la ventaja de una penetración profunda de la luz similar a TPA, pero con un láser de onda continua más económico y accesible, lo que hace de LOPA la elección natural para nuestro trabajo.

### 2.1.2. Fabricación de la máscara maestra

El proceso de fabricación de máscaras maestras implica una preparación rigurosa de la fotoresina. En este proyecto, se utilizó la resina SU8-2050. La Tabla 2.1 detalla el procedimiento requerido para la preparación y manipulación de la resina, así como el proceso de impresión de la máscara mediante la técnica de DLW.

Además del protocolo de manipulación de la resina SU8 2050, es crucial seguir un procedimiento para la operación de la plataforma de fabricación o sistema de litografía, para garantizar las condiciones óptimas para la correcta fabricación de las máscaras maestras. En la figura 2.1 se observa un esquema de la plataforma de fabricación. En el cuadro 2.1, se presenta el protocolo de fabricación que emplea en su totalidad para la fabricación de las máscaras maestras.

Paso	Tiempo (min)	Temperatura (°C)
Desecación del Vidrio de Sodio-Calcio (SLG)	5	65
Deposición de la Resina	—	—
Horneado somero	2	65
Proceso de Escritura Directa por Laser (DLW):	—	—
Revelado Post-Exposición (PEB)	12	95
Revelado	20	—
horneado completo	30	150

Cuadro 2.1: Proceso de preparación y manipulación de la fotoresina SU8 2050 para la fabricación de máscaras maestras

1. **Preparación del sustrato:** Se deposita la película de fotoresina SU8 2050 (negativa) sobre un vidrio de sodio-calcio convencional de 1 mm de espesor mediante spin coating. Los espesores finales oscilan entre 50  $\mu\text{m}$  a 200  $\mu\text{m}$  y se miden mediante técnicas de contacto utilizando un micrómetro de carátula para espesores. De esta manera, se garantiza el espesor de la película (la altura del canal microfluídico) bajo diferentes valores de rpm, mientras que el ancho se ajusta mediante los parámetros ópticos del sistema de litografía.
2. **Ajuste de enfoque:** La ubicación de la película SU8 y el vidrio de sodio-calcio (SLG) en relación con el eje óptico influyen directamente en el diámetro del haz de luz que se enfoca en las interfaces aire/SU8 y SU8/SLG. Para obtener medidas precisas en el diseño, el control de la ubicación de la muestra en la dirección z es crucial. Este control se logra mediante un ajuste mecánico en la Distancia de Trabajo (WD, por sus siglas en inglés) del proceso de litografía. La Distancia de Trabajo se refiere a la distancia desde la lente del sistema de litografía hasta el punto en el que se enfoca el haz de luz, esencialmente determinando la ubicación del foco del haz. Este ajuste permite un control meticuloso sobre el ancho de los patrones que se imprimen, lo cual se traduce en un mayor nivel de precisión en la creación de las microestructuras.
3. **Compensación del desplazamiento focal:** Es importante tener en cuenta el “desplazamiento” focal cuando se consideran las interfaces aire/SU8 y SU8/vidrio. El desplazamiento es un efecto óptico que puede afectar la precisión de las técnicas de impresión como la litografía y se refiere a la variación o alteración en la posición del punto de enfoque de un haz de luz cuando transita de un medio a otro con diferente índice de refracción. Sin considerar este desplazamiento, el ancho final del canal impreso será diferente al esperado.

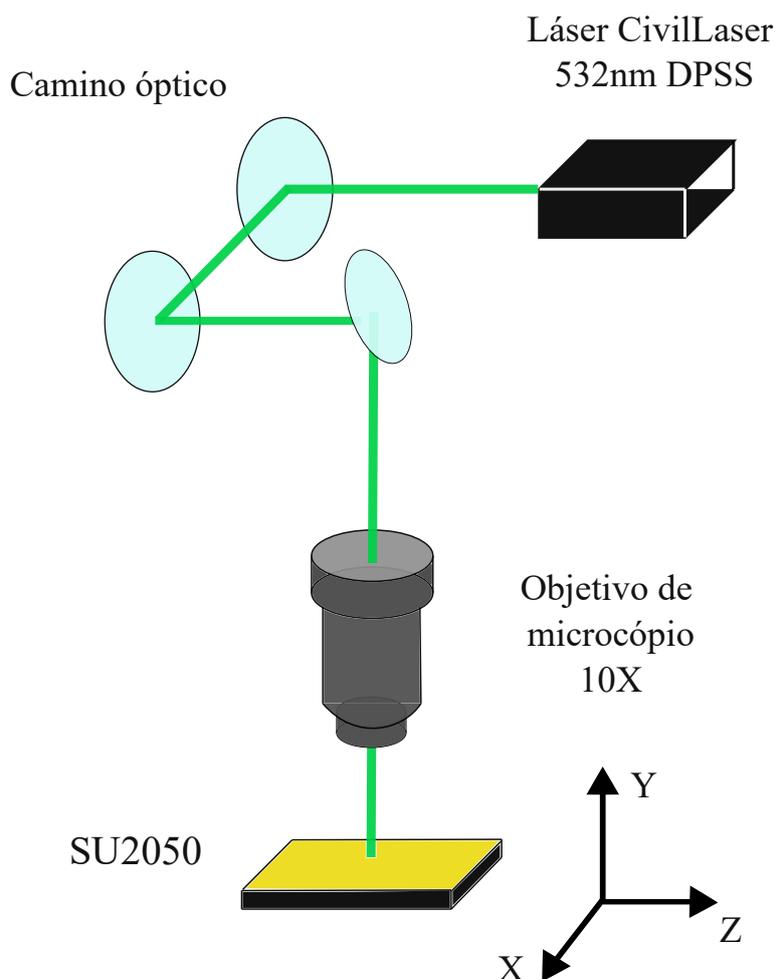


Figura 2.1: Esquema ilustrativo de la plataforma de fabricación de la máscara maestra. Este diagrama detalla los componentes y etapas esenciales del proceso, que incluye el láser CW, así como el sistema óptico y el vidrio que contiene la resina SU8.

4. **Preparación de la fotoresina:** Después de establecer los parámetros experimentales, se sigue el protocolo completo de DLW como se presenta en la tabla 2.1 para la impresión de la máscara maestra. El proceso de fabricación comienza con la limpieza y deshidratación del vidrio, donde descansa la película SU8. Se deposita 1 ml de resina SU8-2050 mediante spin coating a 3500 rpm para obtener un espesor de aproximadamente  $60 \mu\text{m}$ . Para mejorar la solidificación de la película SU8, se realiza un proceso de honeado somero por 2 minutos a  $65^\circ\text{C}$ . El vidrio se coloca dentro del sistema de litografía a la espera del proceso de impresión láser directa.
5. **Impresión:** Para la impresión se utiliza un láser modelo Civil LSR532NL-300 (CW) el cual emite a una longitud de onda de 532 nm. El sistema utiliza un objetivo de microscopio 10X con una apertura numérica de 0.25 para enfocar el haz en la muestra. El haz láser incide continuamente la película de fotoresina, imprimiendo el patrón deseado. Los parámetros requeridos para transmitir eficientemente el patrón de la unión en T fueron una velocidad de plataforma de  $200 \mu\text{ms}^{-1}$  una intensidad óptica láser de 15 mW y 30 repeticiones.
6. **Finalización y verificación:** Tras completar la impresión, se procede a revelar la fotoresina. Esto implica un proceso de post-exposición al calor durante 12 minutos a  $95^\circ\text{C}$  seguido de un revelado en solvente de SU8 a lo largo de 20 minutos, durante los cuales

los patrones no expuestos de la película SU8 se eliminan, dejando sólo los patrones deseables que se imprimieron durante el proceso DLW. Para finalizar, la máscara maestra es sometida a un horneado completo durante 30 minutos a 150°C. Este paso asegura el completo desarrollo de los patrones y la resistencia y durabilidad de la película SU8.

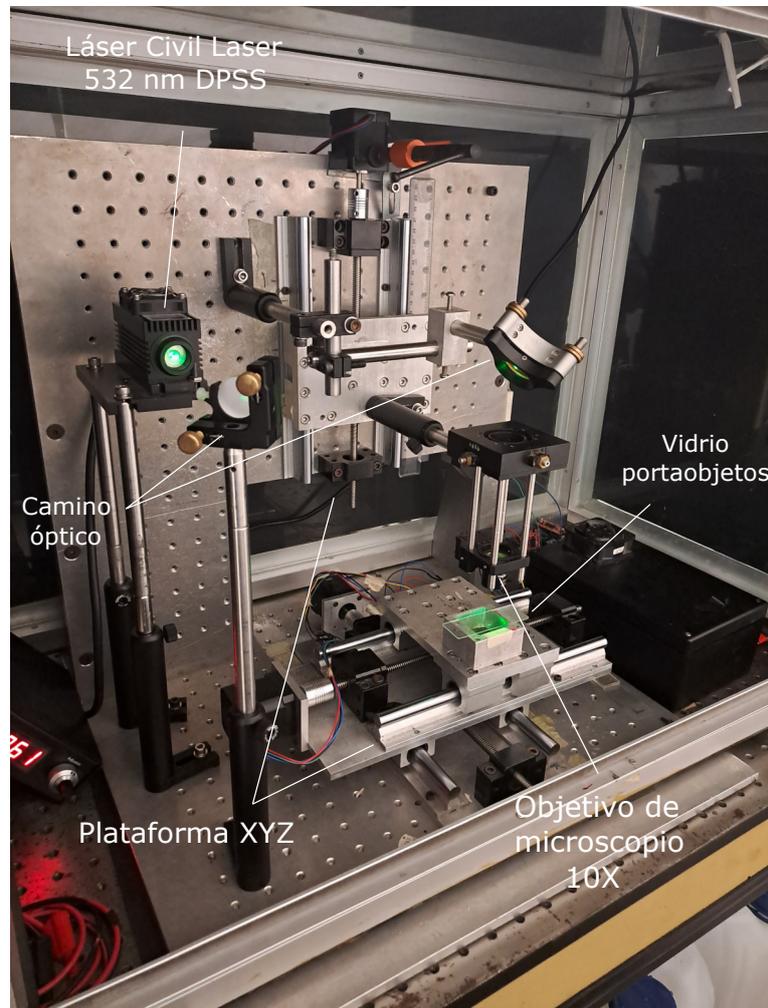


Figura 2.2: Plataforma de fabricación de la máscara maestra por DLW. Se muestran los componentes, incluyendo el láser CW, el sistema óptico y el vidrio que contiene la resina SU8.

## 2.2. Técnica de litografía suave

La litografía suave es una técnica de micro y nanofabricación que utiliza moldes "suaves" o flexibles, generalmente fabricados de elastómeros como el polidimetilsiloxano (PDMS). Estos moldes se utilizan para reproducir estructuras a micro y nano escala, generalmente a través de procesos de impresión o moldeo. [27] Esta técnica ha revolucionado los métodos de fabricación a pequeña escala, permitiendo el desarrollo rápido y eficiente de micro y nano estructuras, gracias a su bajo costo, flexibilidad y facilidad de uso. Además, la litografía suave ha demostrado ser especialmente útil en la fabricación de sistemas microfluídicos [6] y en la nanoimpresión de diversas estructuras. [28]

Las técnicas de litografía suave, en contraste con las técnicas de litografía "duras", no requieren equipos de alta precisión o un ambiente controlado en cuarto limpio, haciendo posible su aplicación en una variedad de contextos, incluyendo laboratorios con presupuestos limitados [29]. Una técnica común en litografía suave es la impresión con Polidimetilsiloxano (PDMS),

donde se utiliza un polímero elástico y transparente para transferir patrones. El PDMS se vierte sobre una "máscara maestra" que contiene el patrón deseado, luego se cura y se desmolda, obteniendo una reproducción del patrón de la máscara maestra en el PDMS [27].

Las propiedades físicas del PDMS, como su transparencia y su flexibilidad, permiten una amplia gama de aplicaciones, desde microfluídica hasta ingeniería de tejidos [29]. Sin embargo, la litografía suave también tiene sus desventajas. Por ejemplo, el PDMS puede deformarse bajo ciertas condiciones, lo que puede limitar la precisión de los patrones a gran escala o con detalles muy finos. Además, el PDMS puede ser permeable a ciertas sustancias, lo que puede ser un problema en ciertas aplicaciones, como las que involucran reacciones químicas [29].

En la fabricación de microcanales, la litografía suave y el PDMS son técnicas y materiales ideales debido a su biocompatibilidad, la capacidad para fabricar estructuras tridimensionales, y su facilidad de uso. Los canales se pueden fabricar rápidamente y con un alto grado de control sobre el tamaño y la forma, lo que es crucial para muchas aplicaciones en microfluídica [27].

### 2.2.1. Fabricación del chip microfluídico

La fabricación de sistemas microfluídicos requiere la preparación de una máscara maestra, que moldea la forma del canal microfluídico y determina sus dimensiones clave como altura, ancho y espesor. El procedimiento de fabricación, basado en la técnica de litografía suave, se desarrolla a partir de la máscara como molde y emplea polidimetilsiloxano (PDMS) combinado con un agente curador para la "impresión" del sistema microfluídico. A continuación, se detalla el proceso:

1. **Preparación de la máscara maestra:** Antes de implementar la litografía suave, es esencial preparar la máscara maestra para garantizar que el molde quede libre de grasa o solventes residuales. Este paso se logra lavando la máscara con una solución de agua y jabón, seguida de una limpieza con alcohol isopropílico y aplicar baño térmico para asegurar la evaporación de cualquier solvente.
2. **Preparación del PDMS:** La preparación del PDMS implica mezclar el compuesto base con un agente curador, que cataliza la solidificación del material con el tiempo. Se sigue una proporción de 10:1, es decir, por cada 10 ml de PDMS se añade 1 ml de agente curador. La mezcla debe ser homogénea, adquiriendo una consistencia viscosa con la presencia de múltiples burbujas de aire.
3. **Vertimiento del PDMS en la máscara:** En este trabajo se utiliza un portaobjetos como soporte de la máscara maestra. Con la máscara maestra debidamente preparada y dispuesta en un recipiente, se vierte la mezcla de PDMS sobre el portaobjetos, asegurando que el compuesto cubra completamente la máscara maestra.
4. **Eliminación de burbujas y curado:** Una vez vertido el PDMS, el proceso de curado se inicia automáticamente. Las burbujas de aire se desprenden por gravedad y, aproximadamente 24 horas después, el compuesto solidifica, dejando impreso el patrón microfluídico en el material.
5. **Extracción del canal microfluídico:** Cuando el PDMS ha solidificado, el canal microfluídico se corta del recipiente y se extrae de la máscara maestra con precaución para evitar dañar la máscara, permitiendo su reutilización para la creación de más canales.

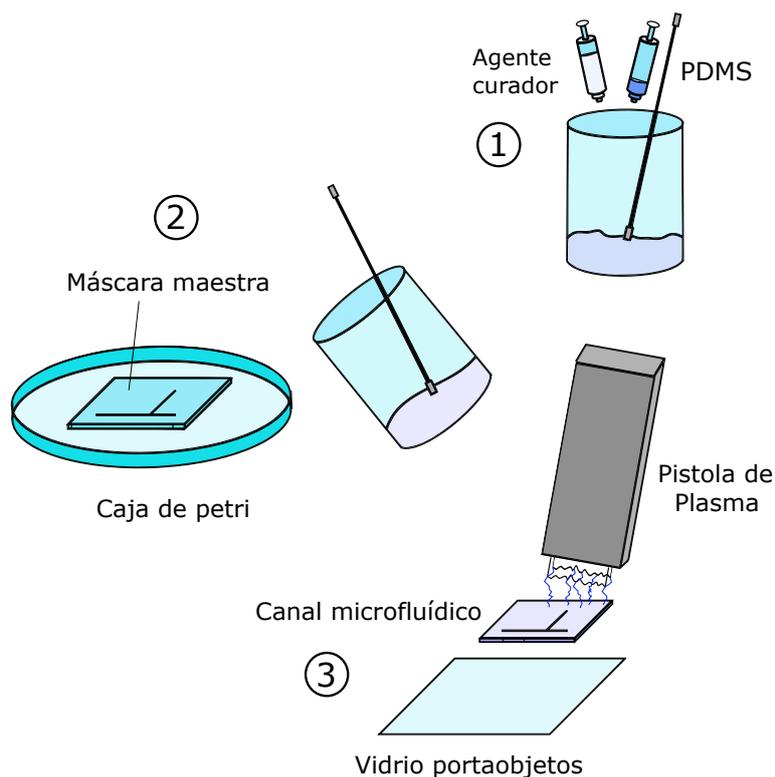


Figura 2.3: Etapas principales de la técnica de litografía suave: 1) Mezclar el PDMS, 2) Verter el PDMS, 3) Pegado por plasma.

- 6. Perforación del canal:** A continuación, se perforan orificios en el canal utilizando un punzón de biopsia de 5 mm y así poder conectar el canal con micro tubos del mismo espesor. Para una unión en T, se realizan tres perforaciones: dos para las entradas y una para la salida.
- 7. Unión por plasma:** El proceso de unión entre PDMS y el sustrato de vidrio de silicato es esencial para garantizar que no haya fugas en el canal microfluídico y para asegurar la integridad del sistema. El uso de un sustrato de vidrio en lugar de otros materiales asegura una superficie lisa, transparente y químicamente inerte, lo que permite una visualización clara de los fluidos dentro del canal y evita interacciones no deseadas con los reactivos o soluciones que fluyen a través del canal, además de ser compatible con el PDMS para su unión por plasma [30]. Finalmente, una vez limpiado el canal con agua y jabón, se lleva a cabo el proceso de unión del PDMS al sustrato de vidrio utilizando la técnica de activación por plasma. Esta técnica modifica las propiedades superficiales de los materiales, aumentando su energía superficial y permitiendo una mayor adherencia entre el PDMS y el vidrio. Es crucial controlar el tiempo de exposición al plasma para evitar daños en las superficies. Tras la exposición al plasma, se presiona suavemente el PDMS contra el vidrio para lograr una unión firme.

Esta secuencia de pasos cuidadosamente controlados garantiza una fabricación efectiva y precisa de sistemas microfluídicos, posibilitando su uso en una variedad de aplicaciones científicas y de ingeniería. En la figura 2.3 se muestran las tres etapas principales en la fabricación de un chip microfluídico utilizando la técnica de litografía suave.

### 2.3. Presentación del chip microfluídico

El resultado final del proceso de fabricación es un chip microfluídico de alta precisión, diseñado para soportar un amplio rango de aplicaciones en microfluídica, que en este proyecto es la producción de microgotas. Este chip microfluídico integra una serie de características únicas y beneficiosas gracias a la aplicación combinada de la técnica de litografía suave en el uso del material PDMS.

El chip microfluídico está conformado por una unión en T o por su traducción al inglés *T-junction* grabada en el PDMS, siguiendo el patrón establecido por la máscara maestra. La superficie de PDMS que contiene los canales está unida a una lámina de vidrio de silicato, lo que proporciona una base sólida y permite la observación directa de los fluidos en el interior del chip.

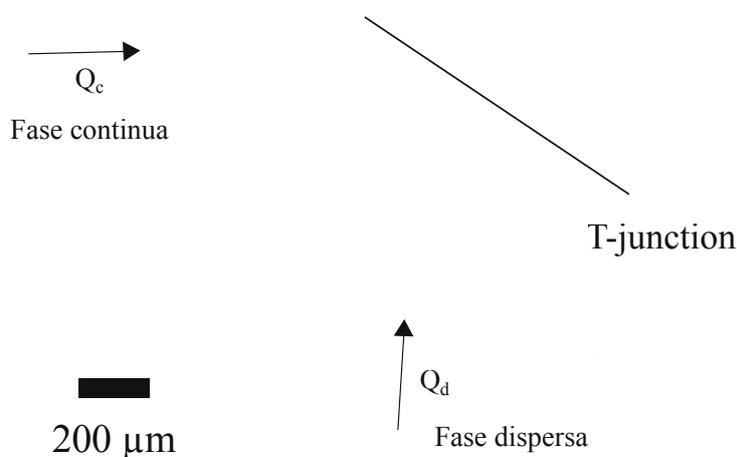


Figura 2.4: Imagen microscópica de alta resolución de la máscara maestra. Esta imagen detalla la precisión del patrón unión en T, T-junction por sus siglas en inglés, grabado en la máscara, tomada desde el ángulo que facilita la apreciación de la forma.

## Capítulo 3

# Simulaciones por elemento finito

Un fluido se caracteriza por ser una sustancia que cambia de forma continua en tanto se encuentre sometida a una fuerza. La distinción fundamental entre los fluidos y otros medios es su incapacidad para resistir esfuerzos cortantes, por lo que no tienen forma definida. Existen distintas clasificaciones para los fluidos en función de sus propiedades físicas. Los fluidos newtonianos son aquellos en los que existe una relación lineal entre el esfuerzo aplicado sobre el fluido y su deformación [31]. Ejemplos sencillos de este tipo de fluidos son el agua y el aceite. Para fines de este trabajo, estaremos considerando únicamente con fluidos newtonianos.

Con propósito de llevar a cabo una simulación de gotas en un sistema microfluidico, es necesario resolver la física de la intersección de dos fluidos inmiscibles. Se realizaron varias simulaciones de gotas dentro de un microcanal, utilizando el software COMSOL Multiphysics, el cual resuelve la dinámica del sistema utilizando las ecuaciones de continuidad y de conservación de momento, que son las ecuaciones que describen el movimiento mecánico de un fluido. El tipo de geometría que se modeló es una unión en T. La formación de gotas en esta geometría ocurre cuando un fluido inmiscible, conocido como fase dispersa, se introduce dentro de otro fluido denominado fase continua. Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales mediante el uso del método de elementos finitos. Adicionalmente, se emplea el método de conjunto de nivel para modelar y diferenciar la interacción entre ambos fluidos inmiscibles.

### 3.1. Ecuaciones de movimiento para un fluido newtoniano

Previo a realizar cualquier cálculo es menester conocer el origen de la física de los fluidos. Para poder encontrar las ecuaciones que rigen un fluido, existen dos maneras posibles, la discreta o estadística y la continua. La visión discreta, considera a un fluido como un conjunto de moléculas cuyo movimiento es gobernado por las leyes de la dinámica. En cambio, la continua ignora todas las interacciones moleculares y se asume al fluido como una materia continua.

En el marco de la microfluídica es necesario establecer cual es el paradigma a utilizar, ya que según sea el caso, podría convenir utilizar el modelo continuo o el discreto. La aproximación continua requiere que el camino libre medio de las moléculas sea muy pequeño comparado con la escala de longitud física mas pequeña del lugar en donde las moléculas están fluyendo [31]. Es decir, si estamos trabajando con un gas que fluye por un tubería, la distancia media que existe entre el choque de dos partículas, tiene que ser mucho menor al diámetro de la tubería. Ya que estamos trabajando con líquidos, el camino libre medio entre las moléculas es despreciable puesto que no existe una amplia separación en las moléculas de un líquido en movimiento, por lo que para nuestros fines, el modelo continuo es el indicado.

Deducimos las ecuaciones que describen la dinámica de un fluido, en un marco continuo a partir de los principios fundamentales de conservación de la masa, del momento y de la energía. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido newtoniano son la ecuación de continuidad (la cual se deduce del principio de conservación de la masa), la ecuación de Navier-Stokes (se deduce del principio de conservación del momento), la ecuación de energía y las ecuaciones de estado [31].

El modelo de una gota generada por la interferencia del flujo laminar en un canal es descrito utilizando la ecuación de continuidad y la ecuación de conservación de momento. Estas dos ecuaciones son suficientes para llevar a cabo nuestro modelo. No utilizamos las demás ecuaciones debido a que nuestro interés está en la descripción del flujo mecánico dentro del canal y no de sus propiedades termodinámicas.

### 3.1.1. Ecuación de continuidad

Determinamos la ecuación de continuidad aplicando el principio de conservación de la masa a un fluido en un marco de referencia lagrangiano. Es necesario utilizar el **teorema de transporte de Reynolds**, el cual relaciona la derivada lagrangiana de una integral de volumen sobre cierta masa con una integral de volumen en la cual el integrando son derivadas eulerianas. La utilidad de escribir en un marco euleriano está en que el modelo que se va a construir se encuentra sobre un volumen fijo, por esto es necesario escribir las ecuaciones de movimiento en este marco de referencia.

El teorema de transporte de Reynolds se define como [32]

$$\frac{D}{Dt} \int_V \mathbf{f} dV = \int_V \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \int_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{f} dA, \quad (3.1)$$

en donde  $\mathbf{n}$  es un vector normal unitario que apunta en la dirección fuera de la superficie,  $\mathbf{f}$  es una función escalar o vectorial que representa una propiedad física del fluido (como densidad o velocidad), y  $\mathbf{u}$  es la velocidad del fluido en el punto considerado.

Consideramos una porción de masa que está fluyendo en un cierto volumen  $V$  el cual es arbitrario. La porción de masa elegida puede cambiar en forma, pero no en masa. Esto se escribe como sigue

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0, \quad (3.2)$$

en donde  $\rho$  se refiere a la densidad de masa del fluido.

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds (ecuación 3.1), escribimos la ecuación anterior como sigue:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0 \quad (3.3)$$

Ya que la integral es igual a cero, el integrando también tiene que ser cero. De esta manera obtenemos la ecuación de la conservación de masa también llamada **ecuación de continuidad**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.4)$$

### 3.1.2. Ecuación de conservación de momento

La ecuación de conservación del momento equivale a la aplicación del segundo principio de Newton al movimiento de un fluido. Esto es, que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento (momento) de una porción de fluido es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre él. Si utilizamos un marco euleriano, esto es, que tomamos un volumen fijo  $V$  en el espacio como nuestro sistema de referencia, que esta rodeado por una superficie  $S$ , la derivada temporal del momento contenida en  $V$  tiene que ser igual a las fuerzas que actúen sobre el fluido en  $V$  (fuerzas de volumen y de superficie) menos el flujo neto del momento que sale a través de  $S$  [33].

Podemos expresar lo anterior como sigue:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS - \oint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.5)$$

en donde  $\mathbf{f}$  denota las fuerzas por unidad de masa que actúan sobre el fluido, como pueden ser la gravedad o fuerzas electromagnéticas;  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidades, que describe la dirección y magnitud de la velocidad en cada punto del fluido;  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos, representando las fuerzas internas en el fluido con componentes que se dividen entre esfuerzos normales (como la presión) y esfuerzos cortantes derivados, por ejemplo, de la viscosidad; y finalmente,  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario que define la dirección exterior de la superficie en cuestión, y es vital para identificar la dirección de las fuerzas de superficie.

La primera integral de la derecha representa la resultante de las fuerzas de volumen que actúan sobre el volumen del fluido, la segunda integral de la derecha la resultante de las fuerzas de volumen y la última el flujo neto de la cantidad de movimiento que atraviesa la superficie  $S$ .

Si utilizamos notación de índices

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) dV = \int_V \rho f_i dV + \oint_S \sigma_{ij} \cdot n_j dS - \oint_S \rho u_i (u_j \cdot n_j) dS \quad (3.6)$$

Podemos expresar las últimas dos integrales como integrales de volumen utilizando el teorema de la divergencia. El cual dice que una integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie cerrada es igual a una integral de volumen de la divergencia del campo vectorial sobre la región interior de la superficie. Es decir

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) dV = \int_V \left[ \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right] dV \quad (3.7)$$

Como la relación anterior vale para cualquier volumen fijo, entonces escribimos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \quad (3.8)$$

Desarrollando las derivadas de los productos

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) - \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.9)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.10)$$

Asumiendo una densidad  $\rho$  constante en todo el dominio y en el tiempo, cualquier término que involucre una derivada temporal o espacial de  $\rho$  se anula, lo que simplifica significativamente las ecuaciones de momento. Agrupando los términos se sigue

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

Si lo escribimos en notación vectorial

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.12)$$

La ecuación 3.12 se conoce como la **ecuación de conservación de momento** y expresa la aceleración de un fluido en términos de la fuerza de volumen y la divergencia del tensor de esfuerzos. Es importante hacer mención de que si bien estamos trabajando con fluidos newtonianos, el tensor de esfuerzos no se cambia por el tensor para este tipo de fluidos (esto se definirá mas adelante). Para la simulación, el tensor se define en base a la viscosidad dinámica de los materiales, por esta razón solo se indica en esta ecuación.

## 3.2. Método de Elementos Finitos

Para resolver las ecuaciones de continuidad (ecuación 3.4) y de conservación de momento (ecuación 3.12) utilizamos el método de elementos finitos. El análisis de elementos finitos es una técnica numérica. En este método todas las complejidades del problema, como la forma o las condiciones de frontera, se mantienen, sin embargo la solución que se obtiene es aproximada. El análisis permite resolver la física para un cuerpo o estructura sobre el cual están definidas ciertas ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento físico del problema. Es muy utilizado para el diseño de aeronaves, buques, motores eléctricos y de calor, ya que permite el análisis estructural, la mecánica de fluidos computacional, el análisis de campos eléctricos y magnéticos así como de transferencia de calor [34].

En el caso concreto de la mecánica de fluidos, el campo que determina la dinámica del sistema es la velocidad  $\mathbf{u}$ . De hecho es la incógnita en las ecuaciones 3.4 y 3.12. En el paradigma continuo, las incógnitas tienen un carácter infinito. El método de elementos finitos reduce la continuidad de estas variables dividiendo la geometría sobre la que se esta trabajando en un conjunto de subdominios no intersectantes entre sí denominados **elementos finitos** logrando lo que se conoce como discretización. Dentro de cada elemento se definen funciones de aproximación las cuales están construidas a partir de las variables de campo. Además, también podemos distinguir una serie de puntos representativos llamados **nodos**. El conjunto de nodos se denomina **malla**. Los cálculos para obtener la solución final se realizan sobre la malla de puntos [35].

La generación de la malla se realiza utilizando un programa generador de mallas, previamente al comienzo de los cálculos.

## 3.3. Método de conjunto de Nivel

Es necesario recordar el propósito de esta sección. Estamos trabajando en la simulación de la interferencia de dos fluidos inmiscibles en una geometría tipo unión en T para la generación de gotas. Las ecuaciones que describen el fenómeno son las ecuaciones de continuidad (ecuación 3.4) y de conservación de momento 3.12. Sin embargo, estas ecuaciones no consideran que los

flujos tienen que ser inmiscibles. Para poder lograr esto utilizamos el método de conjunto de nivel [36].

El método de conjunto de nivel es una técnica con la cual es posible representar interfaces o fronteras en movimiento utilizando una malla fija. Este método es muy utilizado en problemas en donde el dominio computacional puede ser dividido en dos dominios separados por una interface. La interface es representada por un determinado **conjunto de niveles** de una función definida globalmente, **la función de conjunto de nivel  $\phi$** . Esta función puede ser definida como una función suave a trozos, la cual es igual a cero en cierto dominio y es igual a uno en el otro. De esta manera, es posible hacer la consideración de la no miscibilidad de dos fluidos, considerando que están en *diferentes niveles*.

Para poder resolver la interface es necesario considerar la siguiente ecuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \gamma \nabla \cdot \left( \varepsilon \nabla \phi - \phi(1 - \phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \quad (3.13)$$

En donde  $\phi$  es la función de conjunto de nivel  $\mathbf{u}$  la velocidad de campo y  $\varepsilon$  y  $\gamma$  son parámetros de estabilidad numérica. [36]

La ecuación 3.13 resuelve la dinámica de la interface considerando la velocidad de campo  $\mathbf{u}$ . Los términos en la parte izquierda muestran el movimiento de la interface, mientras que los términos en la parte derecha son necesarios para la estabilidad numérica. El parámetro  $\varepsilon$  determina el ancho o espesor de la región sobre la cual  $\phi$  va de cero a uno y típicamente es del mismo orden del tamaño de los elementos de la malla. En general  $\varepsilon$  es constante dentro de cada dominio y depende del tamaño de la malla. El parámetro  $\gamma$  determina la estabilidad de la función de conjunto de nivel  $\phi$ , y necesita ser ajustado dependiendo del problema.

### 3.4. Comsol Multiphysics

Para poder resolver la dinámica del sistema se utilizó el software comercial COMSOL Multiphysics en su versión 5.3a con el número de licencia 6464555. COMSOL permite resolver de manera simultánea las ecuaciones de continuidad y conservación de momento, además de que hace uso de la técnica de conjunto de nivel, lo cual es una condición necesaria para la formación de gotas en un canal microfluidico. Para poder determinar el sistema de ecuaciones (ecuaciones 3.4, 3.12 y 3.13) el software utiliza el método de elementos finitos.

El programa cuenta con una serie de módulos los cuales permiten desarrollar un problema complejo de manera intuitiva. El módulo de **geometría** permite diseñar la forma del cuerpo en cuestión ya sea en 2D o 3D. El módulo de **física** establece la física que se va a resolver sobre el sistema, además de escribir las condiciones iniciales y de frontera. Es importante definir la resolución sobre la geometría que se va a modelar, en este caso utilizamos el módulo de **malla**. Es importante mencionar que el software cuenta con un generador de malla, necesario para el método de los elementos finitos y la técnica de ajuste de nivel.

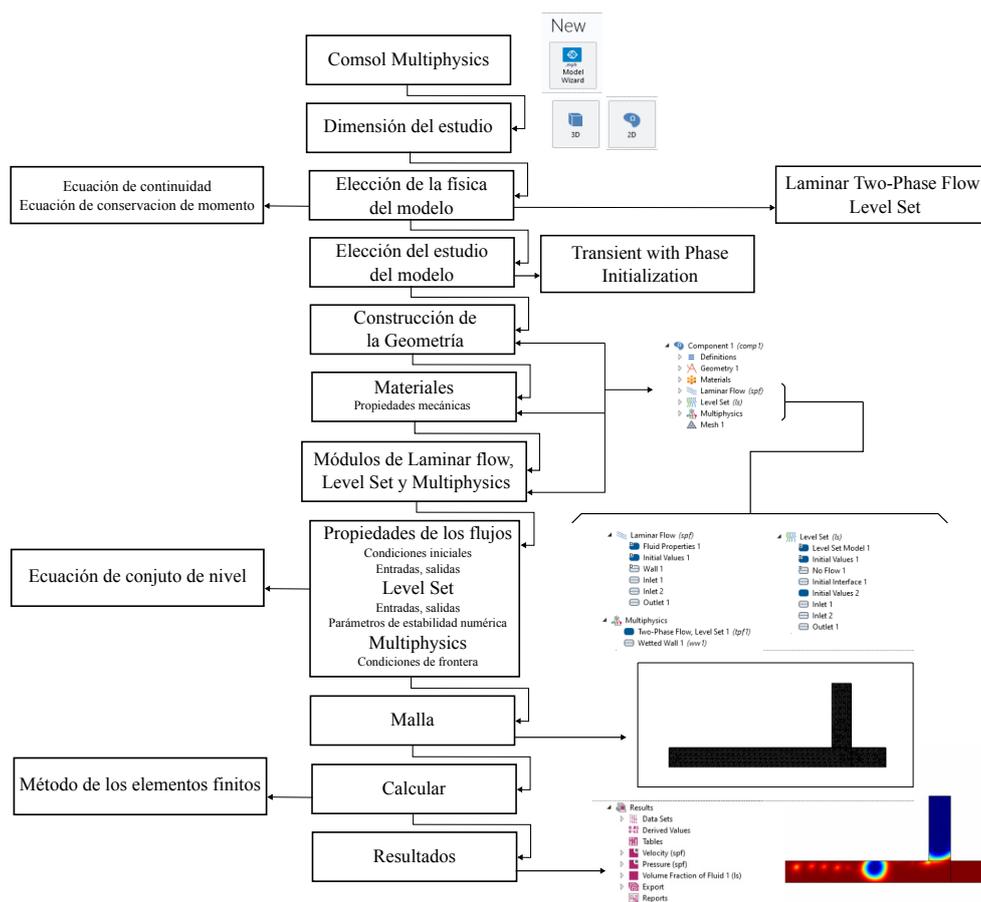


Figura 3.1: Diagrama de flujo para la construcción de una simulación en COMSOL para un canal microfluídico en forma de unión en T

Para realizar la simulación primero se diseñó la geometría sobre la cual se van a resolver el modelo. Posteriormente, se establecieron los materiales, en nuestro caso será una solución acuosa como fase dispersa y aceite mineral como fase continua. Posteriormente se construyeron los parámetros iniciales y de frontera utilizando el módulo de flujo laminar. Una parte muy importante en este punto es la construcción de la malla, y dependiendo del número de puntos que se elijan, el resultado será mejor aproximado. Con todo esto el programa realiza la simulación. Se observa un esquema del proceso en la figura 3.1.

### 3.5. Simulaciones

Las simulaciones fueron llevadas a cabo modelando una geometría de unión en T como un sistema microfluídico. El ancho del canal en la fase continua ( $I_c$ ) y dispersa ( $I_d$ ) es de  $50 \mu\text{m}$ . La representación geométrica del modelo se puede apreciar en la figura 3.2. Las propiedades mecánicas densidad  $\rho$  y la viscosidad dinámica  $\mu$  fueron establecidas. Para la fase continua (aceite mineral)  $\rho_c = 920 \text{ kg m}^{-3}$  y  $\mu_c = 40 \text{ mPas}$  y para la fase dispersa  $\rho_d = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  y  $\mu_d = 1 \text{ mPas}$ .

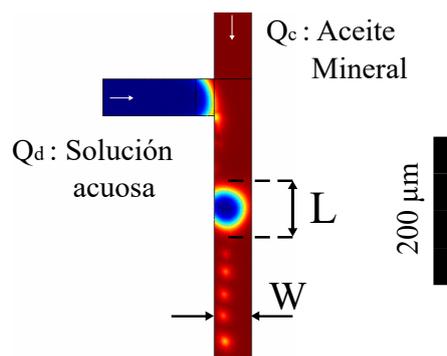


Figura 3.2: Posiciones de las fases  $Q_c$  y  $Q_d$ . Los parámetros geométricos de las gotas  $L$  y  $W$  son mostrados.

Los valores para los flujos en este ejemplo particular son  $Q_d = 0.5 \mu\text{l}\cdot\text{min}^{-1}$  y  $Q_c = 1 \mu\text{l}\cdot\text{min}^{-1}$ , dando como resultado un  $\text{FRR} = 0.5$ . La gota toma alrededor de  $0.51 \text{ s}$  en ser formada. Las simulaciones fueron realizadas con un valor de las constantes numéricas de  $\varepsilon = 5 \mu\text{m}$  y  $\gamma = 0.0015 \text{ ms}^{-1}$ .

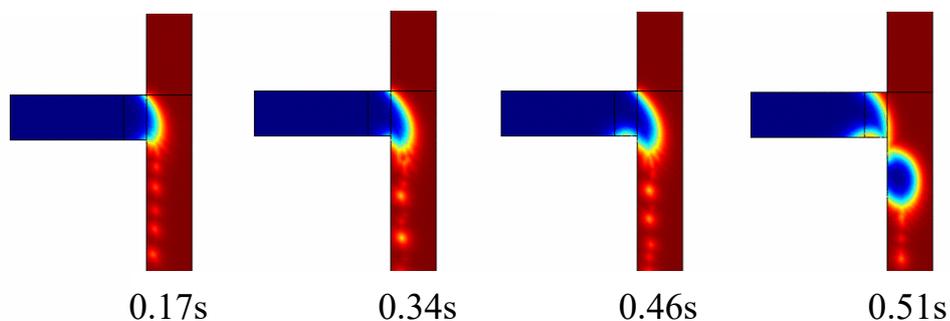


Figura 3.3: Evolución de la formación de una gota en un dispositivo de unión en T bajo el régimen de squeezing para  $Ca = 0.00125$



## Capítulo 4

# Generación de gotas en un canal microfluídico

La generación de gotas microscópicas en sistemas microfluídicos ha surgido como una potente herramienta en una variedad de campos científicos y tecnológicos, desde la química hasta la biología y la física [37]. Esta tecnología permite el control preciso de los volúmenes de líquido en la escala de nano litros a micro litros, ofreciendo un alto grado de control sobre los experimentos de manipulación de fluidos. Los sistemas microfluídicos para la generación de gotas han demostrado ser especialmente útiles para la formación de emulsiones monodispersas, es decir, emulsiones en las que todas las gotas tienen el mismo tamaño. Este control del tamaño de las gotas y la capacidad para generarlas a altas frecuencias abre un abanico de posibilidades para su aplicación en diversas áreas de estudio, desde la creación de cápsulas de medicamentos [38] hasta el desarrollo de cavidades ópticas en miniatura [12].

Con el propósito de utilizar microgotas como cavidades ópticas, durante este capítulo desarrollaremos la caracterización de un chip microfluídico capaz de generar gotas en diferentes frecuencias, buscando una tasa de generación lenta, lo cual permitirá excitar ópticamente las gotas y colectar la luz en su interior, además de una forma idealmente esférica para maximizar la eficiencia de la emisión. También se discute acerca de los principios de estos sistemas microfluídicos: el modelo matemático con las diferentes variables que definen la física, la geometría, en particular para este trabajo estamos utilizando una unión en T, los diferentes regímenes de generación y además realizamos el análisis de la generación utilizando procesamiento digital de imágenes.

### 4.1. Ecuación de Navier-Stokes para fluidos newtonianos

El modelo matemático que describe la generación de gotas en un canal microfluídico se desarrolló en el capítulo 3, donde se dedujeron las ecuaciones de movimiento para fluidos newtonianos. Para describir correctamente la generación de gotas, se utilizan dos ecuaciones: la ecuación de continuidad 3.4 y la ecuación de conservación del momento 3.12. Tener las ecuaciones es un paso importante para realizar una simulación, no obstante en este momento las ecuaciones van a funcionar como punto de partida para hacer otro tipo de análisis. Al estudiar los componentes de la ecuación de momento, se pueden identificar las diferentes contribuciones que influyen en la generación de gotas en un sistema microfluídico llegando a la deducción de los llamados "números adimensionales". Ciertos números adimensionales son muy importantes para caracterizar este fenómeno, siendo la capilaridad el número mas importante, ya que determina si se produce la formación de una gota o simplemente hay escurrimiento.

Partimos de la ecuación de conservación del momento 3.12, o ecuación de Navier-Stokes, que se desarrolló previamente en la sección 3.1.2

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

en donde  $\rho$  denota la densidad del fluido,  $\mathbf{u}$  es el vector de la velocidad del fluido,  $\mathbf{f}$  la resultante de las fuerzas que actúan sobre el fluido y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos.

Asumimos, por las condiciones de los fluidos, que éstos son newtonianos. Un fluido newtoniano es un tipo de fluido cuyo comportamiento de flujo se caracteriza por una relación lineal entre la tasa de deformación (o gradiente de velocidad) y el esfuerzo de corte aplicado. En otras palabras, la viscosidad del fluido es constante y no depende de la deformación. El hecho de tener fluidos newtonianos implica que el tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}$  tiene la siguiente forma [39]

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \eta \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right), \quad (4.1)$$

donde  $p$  es la presión,  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad,  $\eta$  es la viscosidad dinámica y  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidad del fluido. Sustituyendo el tensor de esfuerzos en la ecuación de conservación del momento, tenemos lo siguiente:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \left( -p\mathbf{I} + \eta \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right) \right) \quad (4.2)$$

Del lado derecho de la ecuación, la divergencia se aplica a la suma entre el producto de la presión y la matriz identidad, y el producto de la viscosidad dinámica con la suma de los gradientes de velocidad. Al multiplicar la presión por la matriz identidad, se obtiene un campo vectorial de la presión. La divergencia de este campo vectorial corresponde simplemente al gradiente de la presión. Por otro lado, al aplicar la divergencia al producto de la viscosidad (asumiendo que es constante) y la suma de los gradientes de velocidad, se obtiene el laplaciano de la velocidad [37]. La siguiente ecuación es la ecuación de Navier-Stokes para un fluido newtoniano :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.3)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mathbf{u}$  es el vector de velocidad del fluido,  $\eta$  es la viscosidad dinámica del fluido,  $p$  es la presión y  $\mathbf{f}$  es la resultante de las fuerzas que actúan sobre el fluido. La ecuación 4.3 ecuación de Navier-Stokes para fluidos newtonianos, servirá como punto de partida para determinar las propiedades adimensionales de un fluido newtoniano, propiedades que desempeñan un papel clave en la caracterización de los dominios de los distintos efectos físicos.

#### 4.1.1. Análisis dimensional

La ecuación de Navier-Stokes es una ecuación diferencial la cual describe como se mueve un fluido en función de las fuerzas que actúan sobre el. Para que una ecuación pueda describir correctamente el comportamiento de un fluido en un caso particular, necesitamos imponer condiciones de frontera. La formación de gotas en dispositivos microfluídicos implica la deformación y ruptura de la interfaz entre la fase continua y la fase dispersa líquido-líquido [37].

Por lo tanto, se deben especificar varias condiciones de frontera interfaciales. La primera de ellas proviene de la continuidad de la velocidad normal en la interfaz inmisible

$$\mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_c \cdot \mathbf{n} \quad (4.4)$$

siendo  $\mathbf{n}$  un vector normal a la interface y  $\mathbf{u}$  la velocidad, en donde los subíndices  $c$  y  $d$  representan la fase continua y dispersa respectivamente. Esta condición significa que la velocidad del fluido en la interfaz debe ser la misma para ambas fases. Esto tiene sentido porque si las velocidades fueran diferentes, habría un "deslizamiento" en la interfaz, lo cual no es físicamente posible.

La segunda condición implica que la tensión viscosa tangencial debe ser continua y la diferencia de tensiones normales entre las fases dispersa y continua está equilibrada por la presión capilar [37]. Esto describe cómo las fuerzas viscosas y la tensión interfacial contribuyen a la deformación y eventual ruptura de la interfaz para formar una gota.

$$\begin{aligned} \sigma_d \cdot \mathbf{t} &= \sigma_c \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{T}_d \cdot \mathbf{n} - \mathbf{T}_c \cdot \mathbf{n} &= -\gamma \kappa \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de esfuerzo viscoso,  $\mathbf{t}$  es un vector tangencial en la interfaz entre las dos fases,  $\mathbf{T}$  es el tensor de esfuerzo total, que contiene la presión y el esfuerzo viscoso,  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal hacia afuera en la interfaz,  $\gamma$  es la tensión interfacial o tensión superficial entre las fases, y  $\kappa$  es el doble de la curvatura media de la interfaz entre las dos fases. [37]

De esta forma, la ecuación de Navier-Stokes (ecuación 4.3) en conjunto con las condiciones de frontera (ecuaciones 4.4 y 4.5) nos permite identificar y cuantificar las diferentes contribuciones de las fuerzas que influyen en la generación de gotas. Más específicamente, podemos identificar la fuerza inercial (relacionada con la aceleración del fluido), la fuerza viscosa (relacionada con la resistencia al flujo), la gravedad (una fuerza del cuerpo) y la fuerza capilar (relacionada con la tensión interfacial) como las principales fuerzas involucradas. Lo podemos ver en la figura 4.1.

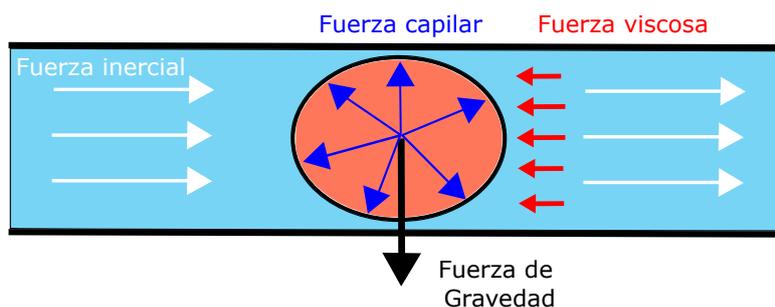


Figura 4.1: Diagrama esquemático de fuerzas actuando sobre una gota de fluido. Se ilustran las principales contribuciones: la fuerza inercial dirigida en la dirección del flujo, la fuerza viscosa opuesta al movimiento, la fuerza de gravedad actuando hacia abajo y la fuerza capilar representada por las líneas curvas alrededor de la superficie de la gota.

En el contexto de la mecánica de fluidos y el análisis del medio continuo, es más útil expresar las fuerzas como tensiones, las cuales son más útiles para poder describir correctamente la física del sistema microfluídico. De esta manera se pueden comparar más fácilmente y establecer argumentos de escalado simples para entender su impacto en el proceso. Para poder encontrar las fuerzas que se observan en la figura 4.1, analizamos cada componente de la ecuación

Fuerza	Componente	Significado físico	Tensión
Fuerza inercial	$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right)$	Término que describe la aceleración del fluido en relación con su densidad. Más relevante cuando el fluido se mueve a alta velocidad o cambia de dirección rápidamente.	$f_{i(c,d)} \sim \rho_{(c,d)} u_{(c,d)}^2$
Fuerza viscosa	$\eta \nabla^2 \mathbf{u}$	Representa la resistencia al flujo debido a la viscosidad y los gradientes de velocidad del fluido.	$f_{v(c,d)} \sim \eta_{(c,d)} u_{(c,d)} / L$
Fuerza gravitacional	$\rho \mathbf{f}$	Fuerza de cuerpo que actúa en el volumen del fluido. En microfluídicos, a menudo se ignora debido a su efecto pequeño.	$f_{g(c,d)} \sim \rho_{(c,d)} g L$
Fuerza capilar	$-\gamma \kappa \mathbf{n}$	Esta fuerza está relacionada con la tensión interfacial en la interfaz entre la fase dispersa y la fase continua. Conduce a la formación de gotas en microfluídicos. Se introduce a través de las condiciones de frontera.	$f_{\gamma(c,d)} \sim \gamma / L$

Cuadro 4.1: Fuerzas que influyen en la física de un fluido que fluye a través de un dispositivo microfluídico con una longitud característica  $L$  y una velocidad  $u$  para las fases continua  $c$  y dispersa  $d$  [37].

de Navier Stokes, que contribuye a una diferente fuerza. En la tabla 4.1 podemos ver un análisis de las fuerzas de un sistema microfluídico, así como el significado físico y las tensiones resultantes.

Al establecer estas relaciones de escalado, es posible identificar y desarrollar varios números adimensionales que son útiles para estudiar la generación de gotas en sistemas microfluídicos y comprender la interacción entre las diferentes fuerzas involucradas. El uso adecuado de números adimensionales, como Reynolds, Weber y el número capilar, nos permite establecer las condiciones óptimas para la generación de gotas. Estos nos ayudan a controlar y personalizar la forma, tamaño y frecuencia de las gotas producidas, ajustándonos a las demandas experimentales. Al determinar la 'ventana de operación' óptima, podemos maximizar el rendimiento del sistema microfluídico y adaptarlo a diversas aplicaciones.

### Capilaridad y otros números adimensionales

La fuerza capilar, es la fuerza dominante si hablamos de sistemas microfluídicos [37]. En principio, la razón entre dos de las cuatro tensiones, representa un número adimensional. De esta manera, aquellos números que sean proporcionales a la fuerza capilar, tendrán un impacto mayor en la caracterización de la física de estos sistemas. Por ejemplo la capilaridad ( $Ca$ ) se construye comparando la fuerza viscosa y la fuerza capilar. Vimos en la sección pasada (tabla 4.1) que la fuerza viscosa se escala de la siguiente manera

$$f_v \sim \eta_s u_s / L$$

donde  $\eta_s$  es la viscosidad del fluido,  $u_s$  es la velocidad del flujo y  $L$  es una longitud característica del dispositivo microfluídico. Mientras tanto, la fuerza capilar se escala como

$$f_\gamma \sim \gamma / L$$

Símbolo	Nombre	Fórmula	Significado físico
Re	Número de Reynolds	$Re = \frac{\rho u L}{\eta}$	fuerza inercial / fuerza viscosa
Ca	Número capilar	$Ca = \frac{\eta u}{\gamma}$	fuerza viscosa / tensión interfacial
We	Número de Weber	$We = \frac{\rho u^2 L}{\gamma}$	fuerza inercial / tensión interfacial
Bo	Número de Bond	$Bo = \frac{\Delta \rho g L^2}{\gamma}$	fuerza gravitacional / tensión interfacial
$\lambda$	Relación de viscosidad	$\lambda = \frac{\eta_d}{\eta_c}$	viscosidad dispersa / viscosidad continua
$\varphi$	Relación de caudales	$\varphi = \frac{Q_d}{Q_c}$	caudal disperso / caudal continuo

Cuadro 4.2: Parámetros adimensionales en la generación de gotas en microfluídica

donde  $\gamma$  es la tensión interfacial entre los dos fluidos inmiscibles. Para construir el número adimensional de capilaridad, se toma la relación entre la tensión viscosa y la tensión capilar:

$$\frac{f_v}{f_\gamma} = \frac{\eta_s u_s / L}{\gamma / L}$$

$$Ca_s = \frac{\eta_s u_s}{\gamma} \quad (4.6)$$

La ecuación 4.6 representa la capilaridad, y es un número adimensional que permite evaluar la importancia relativa de las fuerzas viscosas y capilares en el proceso de generación de gotas. Este número es el más utilizado y además el más representativo para caracterizar la generación de gotas en microfluídicos.

Aparte de la capilaridad, existen otros dos números adimensionales que son relevantes para comprender el comportamiento de los flujos bifásicos microfluídicos:

- Relación de viscosidades ( $\lambda$ ): Representa la relación entre las viscosidades de las fases dispersa y continua.

$$\lambda = \eta_d / \eta_c \quad (4.7)$$

- Relación de caudales FR ( $\varphi$ ): Indica la relación entre los caudales de las fases dispersa y continua.

$$\varphi = Q_d / Q_c \quad (4.8)$$

La relación entre caudales o (FR) tiene gran relevancia en el contexto de la generación de microgotas en microfluídica ya que permite cuantificar la forma de las gotas según la inyección de masa al canal. Esta propiedad es primordial para alcanzar los objetivos del proyecto, pues buscamos gotas lo más esféricas posibles. En la Tabla 4.2, se presenta un resumen de los números adimensionales, incluyendo sus respectivas ecuaciones y las relaciones que describen cómo calcular cada uno de estos números.

## 4.2. Geometría del dispositivo

La geometría de los canales microfluídicos es esencial para la caracterización de la generación de gotas. Los diferentes tipos de geometría definen las fronteras de los flujos y, por ende, en proceso de formación de cada emulsión. Existen varias geometrías de sistemas microfluídicos utilizadas en la generación de gotas, cada una con características y ventajas específicas. Para la generación de gotas necesitamos al menos dos fluidos, estamos trabajando con sistemas de dos fases. En la **fase dispersa** el fluido se "rompe" o se dispersa en forma de gotas o partículas dentro de otro fluido, mientras que en la **fase continua** tenemos el fluido en el que se dispersan las gotas.

Las geometrías que pueden tomar los microsistemas se dividen en tres categorías principales [37].

1. Flujo cruzado: en este tipo de geometría, las corrientes de los dos fluidos (fase dispersa y fase continua) fluyen en ángulo recto entre sí. La fase dispersa se introduce en el canal principal, donde la fase continua ejerce fuerzas de corte que rompen la fase dispersa en gotas. Este trabajo se basa en la utilización de una geometría de flujo cruzado.
2. Flujo coaxial: en estas geometrías, la fase dispersa y la fase continua fluyen en la misma dirección y se encuentran en el mismo eje. La fase dispersa se rodea por la fase continua, lo que permite la formación de gotas a medida que las fuerzas de corte separan la fase dispersa en el límite de las dos fases.
3. Enfoque de flujo: en esta configuración, la fase dispersa se introduce en el canal principal desde un ángulo, mientras que la fase continua ingresa desde dos canales laterales opuestos. Las fuerzas de corte viscosas resultantes en el punto de convergencia de los flujos provocan la formación de gotas.

### 4.2.1. Geometría unión en T

El chip microfluídico que se presenta en este trabajo consta de una geometría de flujo cruzado en la que se encuentran dos fluidos inmiscibles. Sabemos que geometría de flujo cruzado es aquella en la que los fluidos de fase dispersa y continua se encuentran en un ángulo  $\theta$  ( $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$ ). Esta estructura se implementa comúnmente en lo que se conoce como una **unión en T** o por sus siglas en inglés **T-junction**, donde los fluidos disperso y continuo se cruzan en un ángulo recto, de manera que forman una "T". El dispositivo de unión en T fue reportado por primera vez por Thorsen [40] para producir gotas monodispersas de agua en entornos de aceite, con el objetivo de generar patrones dinámicos ordenados en flujos laminares controlados por presión. Esta geometría es ampliamente utilizada debido a su simplicidad y capacidad para producir gotas monodispersas. [37]. Incluso también se han aplicado recientemente en el diseño de microválvulas y microactuadores. [41]

Las unión en T también se han aplicado recientemente en el diseño de microválvulas y microactuadores. [41] Para ciertas aplicaciones prácticas, una sola unión en T con la estructura simple mencionada anteriormente no puede satisfacer requisitos específicos. Por ejemplo, en la realización de reacciones químicas mediante la fusión de dos microreactores de gotas que contienen diferentes reactivos, se desea generar pares de gotas en los microcanales. Se diseñó una doble unión en T para crear pares de gotas alternantes estables, donde dos corrientes dispersas se separan alternativamente en la misma unión [37]. Además, se han propuesto estrategias como la integración de generadores de gotas unión en T paralelas y la división de gotas primarias en gotas hijas para la producción masiva de gotas.

### 4.3. Generación pasiva de microgotas

La generación de microgotas en sistemas microfluídicos es el objetivo final tras el análisis matemático y la comprensión de la geometría de los dispositivos. El dispositivo microfluídico utilizado es una unión en T de algunos cientos de micras de espesor con tres entradas/salidas de líquido. Las entradas ortogonales con la distancia relativa más corta son comúnmente utilizadas, ya que proporcionan espacio para la formación de las gotas y para la visualización. Dos de los conductos se convierten en las entradas y el otro en la salida. En este trabajo, se utiliza la **generación pasiva de gotas**, tal como se describe en Zhu et al. [37].

La generación pasiva de gotas controla el flujo bifásico microfluídico utilizando bombas de jeringa o reguladores de presión que suministran tasas de flujo constantes, sin requerir una entrada de energía adicional. Este método se basa en las propiedades físicas de la superficie de las gotas, principalmente la tensión superficial. Por lo tanto, el número capilar es crítico en este proceso, ya que está inversamente relacionado con la tensión superficial. La correcta formación de las gotas requiere que este número se mantenga en el rango óptimo; de lo contrario, puede haber un derrame de líquidos. Durante la formación de las gotas, parte de la energía suministrada se convierte en energía interfacial, lo que facilita la desestabilización de la interfaz líquido-líquido y, en última instancia, la formación de gotas discretas. [37]

En contraste, la generación activa de gotas emplea fuerzas externas para influir en la formación de gotas. Estas fuerzas pueden ser campos eléctricos (electrocoalescencia), campos acústicos (acústica de superficie), campos magnéticos (magnetofluidica), presión de gas (neumática) o actuadores mecánicos. La generación activa de gotas puede ofrecer un mayor control sobre el tamaño y la frecuencia de las gotas, pero también puede requerir un sistema más complejo y potencialmente más costoso. En este trabajo, se enfocará exclusivamente en la generación pasiva de gotas, la cual involucra un chip microfluídico simple. [37]

Un factor crucial en la generación de gotas es la relación de caudal (FR), que se define como la proporción entre el caudal del fluido disperso y el del fluido continuo. Esta relación desempeña un papel esencial en la determinación del tamaño y la frecuencia de las gotas producidas. Un FR alto resulta en gotas más grandes y menos frecuentes, mientras que un FR bajo produce gotas más pequeñas y más frecuentes. La regulación de este parámetro permite un control preciso sobre las características de las gotas generadas. Zhu et al. [37] demuestran cómo la manipulación de la relación de caudal puede utilizarse para ajustar el régimen de formación de gotas y, por ende, las propiedades de las gotas resultantes.

Se han observado cinco modos fundamentales de generación de gotas en estos sistemas: squeezing, dripping, jetting, tip-streaming y tip-multi-breaking. Cada uno de estos modos genera gotas de diferentes tamaños y formas. En este proyecto, trabajaremos específicamente en el régimen de generación de squeezing.

#### 4.3.1. Squeezing

El modo squeezing es un mecanismo de generación de microgotas que ocurre a bajos números capilares,  $Ca < O(10^{-2})$ , en dispositivos de tipo unión en T. En este escenario, el estrés viscoso se somete a la confinación de las paredes del canal, y la protuberancia del fluido disperso obstruye la región de la unión en las estructuras de flujo cruzado. Esto significa que el fluido disperso se resiste a fluir junto con el fluido continuo, lo que termina restringiendo este último alrededor de la gota en formación y genera una emulsión al "apretar" el fluido disperso en el continuo [37].

El modo squeezing se conoce a menudo en la literatura como "geometry-controlled", y tiene la ventaja de producir gotas de un tamaño caracterizado por la relación entre la longitud del

tapón de fluido disperso y el ancho del canal de la fase continua. Este modo permite la generación de gotas altamente monodispersas, y su tamaño está determinado por la geometría del dispositivo y la relación de la tasa de flujo, independientemente de las propiedades físicas de los fluidos. Durante la formación de la gota, la fase continua no se bloquea por completo, lo que puede ser beneficioso en ciertas aplicaciones en las que la interrupción completa del flujo puede ser indeseable. Una posible desventaja de este modo de generación es que la forma de la gota está caracterizada por un "tapón", es decir, la gota no es completamente esférica. Además, este modo depende de la geometría del canal, lo que significa que cualquier variación en la geometría del dispositivo puede afectar el tamaño y la uniformidad de las gotas generadas [37].

La elección de este modo de generación se debe a que el número capilar es muy bajo en este régimen. Al analizar la definición del número capilar, este es directamente proporcional a la velocidad del flujo. El objetivo de este trabajo es conseguir cavidades lo más esféricas posibles, pero también buscamos que estas cavidades sean lo más lentas que se puedan para que la gota tenga tiempo de absorber luz y de captar la luz emitida. Es mucho más importante tener una cavidad lo suficientemente lenta como para analizarla en lugar de tener una cavidad perfectamente esférica pero que no se tenga el tiempo suficiente como para ver la luz. Por lo tanto, necesitamos de una velocidad baja para estos fines, y con los fluidos que estamos utilizando los cuales no son muy viscosos, la mejor opción para la generación es usar una baja velocidad.

#### 4.4. Caracterización del chip microfluídico

Siguiendo en la línea de trabajo que hemos venido desarrollando, recordemos que el objetivo primordial en la caracterización del chip microfluídico es la generación de gotas de forma esférica a velocidades muy bajas. Trabajamos en el régimen de squeezing para buscar una tasa de generación de gotas que se acerque a nuestro objetivo. Debido a que trabajaremos con un láser pulsado a 10 Hz, es necesario reducir la tasa de repetición de las gotas a menos de una gota por segundo, lo cual permitirá al láser impactar varias veces en la misma gota y mejorar la resonancia de la luz.

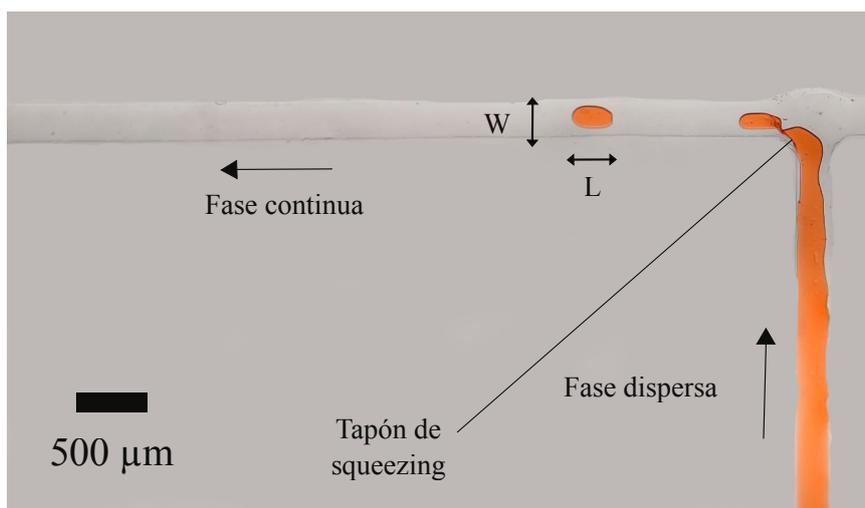


Figura 4.2: Producción de gotas en el canal microfluídico visualizada mediante un lente Lao-wa Ultra Macro. En la parte inferior derecha, se puede apreciar el canal donde se introduce la fase dispersa, con el flujo moviéndose en dirección hacia la izquierda. En la superior derecha observamos la fase continua. En el punto de encuentro de la unión en T, es evidente la formación de las gotas microfluídicas. Cada gota se forma y se separa del flujo principal debido a las propiedades físicas de los líquidos y las condiciones de flujo en el dispositivo.

Para la caracterización del chip microfluídico, se implementaron dos microbombas de jeringa New Era NE4000-ES: una para la fase continua y otra para la fase dispersa. La configuración de estas bombas buscaba controlar el Factor de Relación (FR) ajustando el valor del caudal, lo cual nos permitió operar en regímenes muy bajos. Ambas bombas estaban equipadas con jeringas de 5ml, lo que permitió mantener una relación lineal y ajustar el FR simplemente modificando el caudal. El chip microfluídico se montó sobre un soporte micrométrico con movimiento en los ejes XYZ, permitiendo una precisa calibración de la visualización.

La observación se realizó utilizando una cámara Nikon D7500, equipada con un lente Laowa 25mm Ultra Macro 2.5-5x, que nos permitió alcanzar fácilmente resoluciones de hasta 50  $\mu\text{m}$ . La cámara estaba montada en un riel micrométrico motorizado que podía moverse en pasos precisos de hasta 5  $\mu\text{m}$ , permitiéndonos tomar imágenes de alta calidad y observar con un nivel de detalle excepcional las gotas producidas en el canal microfluídico, como se puede apreciar en la figura 4.2.

El canal tenía un ancho aproximado de 350  $\mu\text{m}$ , lo cual nos permitió producir gotas de entre 200 y 300  $\mu\text{m}$ . Para la fase continua, se utilizó aceite mineral, mientras que para la fase dispersa, con fines de visualización, empleamos el colorante Congo Rojo diluido en agua al 0.5% en peso. Los residuos se recolectaban en un recipiente para su posterior disposición en los vertederos correspondientes. Puede observarse el montaje experimental en la figura 4.3.

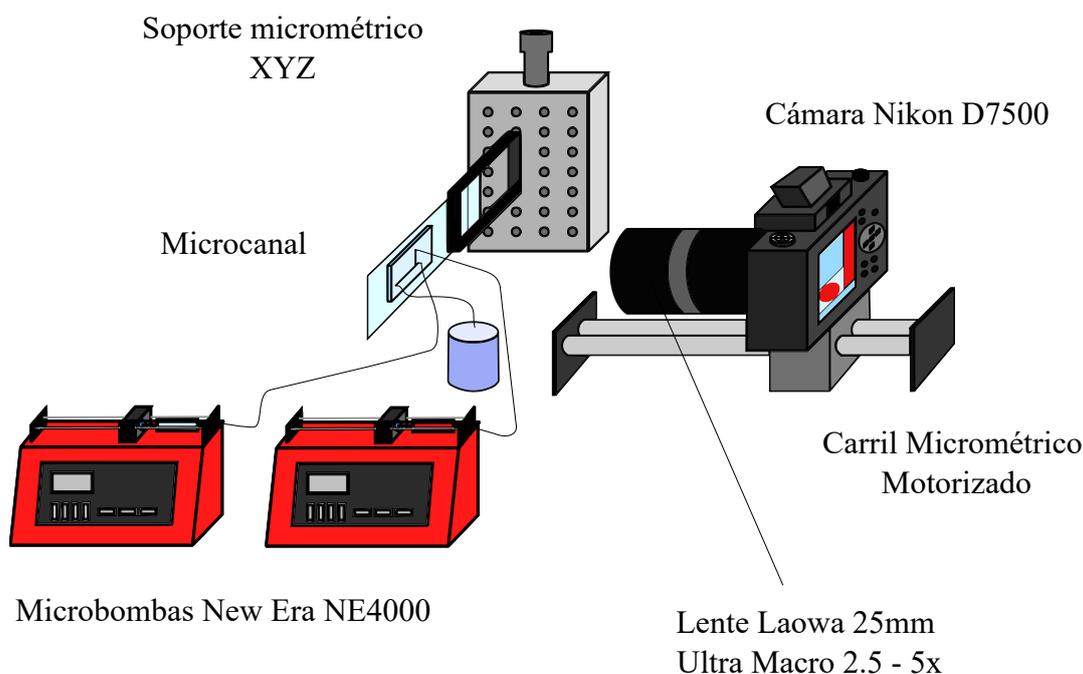


Figura 4.3: Representación esquemática del montaje experimental para la producción y caracterización de gotas en un canal microfluídico. El canal se encuentra montado en un soporte milimétrico XYZ. Para la visualización del proceso, se utiliza una cámara Nikon D7500, equipada con un lente Laowa 25mm Ultra Macro 2.5 - 5x, la cual está montada sobre un carril micrométrico motorizado. La generación de las microgotas es controlada mediante dos microbombas New Era NE4000.

La caracterización del canal microfluídico se realizó con el objetivo de obtener una tasa de repetición muy baja y una formación de gotas con forma elipsoide. Con el fin de conseguir una generación de gotas suficientemente lenta, trabajamos con caudales muy bajos. El caudal promedio de la fase continua era de 1  $\mu\text{l}\cdot\text{s}$ . La relación entre caudales (FR) es uno de los parámetros más importantes en la caracterización de estos sistemas. Nos enfocamos en valores

de FR bajos ya que, para FR altos y velocidades de caudal bajas, no lográbamos una formación adecuada de gotas debido a la capilaridad; cuando los caudales son lentos, el valor de la capilaridad disminuye, por lo que se alcanza el umbral de no formación de gotas. Trabajamos con FR en un rango de 0.05 y 0.1. Esta razón de los caudales era bastante buena para producir gotas lo suficientemente lentas y que tuvieran una forma relativamente esférica. El montaje del canal microfluídico se puede observar en la figura 4.4.

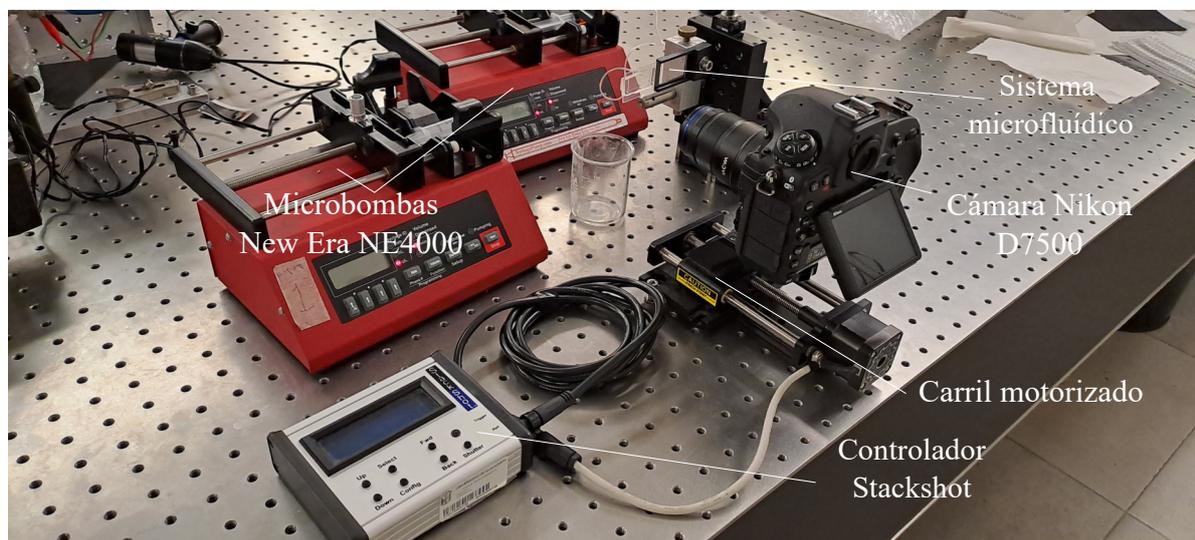


Figura 4.4: Montaje experimental para la producción y visualización de gotas en un sistema microfluídico. Para la producción de las gotas se tienen dos microbombas New Era NE4000, una para la fase continua y otra para la fase dispersa. Para la visualización del proceso, se utiliza una cámara Nikon D7500, equipada con un lente Laowa 25mm Ultra Macro 2.5 - 5x, la cual está montada sobre un carril micrométrico motorizado.

## 4.5. Procesamiento digital de imágenes

El procesamiento digital de imágenes es una herramienta fundamental en la investigación y el desarrollo de sistemas microfluídicos, especialmente en la caracterización de la generación de gotas. Mediante el análisis de secuencias de imágenes capturadas a lo largo del tiempo, es posible obtener información valiosa sobre las propiedades dinámicas y estadísticas de las gotas, como la frecuencia de generación de gotas, el tamaño y la dispersión de tamaño.

Para procesar adecuadamente las gotas en el canal, empleamos dos códigos. El primer código, desarrollado en nuestro laboratorio, utiliza procesamiento digital de imágenes para analizar los vídeos y obtener las propiedades geométricas de las gotas [6]. El diagrama de su funcionamiento se puede observar en la figura 4.5.

Una característica muy importante para poder determinar la viabilidad de cualquier configuración de flujos es la frecuencia de generación de gotas. Para poder lograr esto, aprovechamos los resultados obtenidos por el código mostrado en la figura 4.5. El análisis de procesamiento digital de imágenes arroja una base de datos, la cual contiene en cada registro todos los fotogramas o frames que analizó el programa. Cada frame tiene la posición de cada gota y características geométricas. Se realizó un programa de procesamiento de datos que tiene como objetivo analizar secuencias de imágenes de un canal microfluídico y determinar la frecuencia de generación de gotas en el canal. Este algoritmo es esencial para comprender el comportamiento de las gotas en el sistema microfluídico y optimizar el diseño y las condiciones de funcionamiento del dispositivo. Este código se muestra en el anexo A, y presentamos resulta-

dos como el área por gota y gráficas de la frecuencia para un ensayo ejemplo.

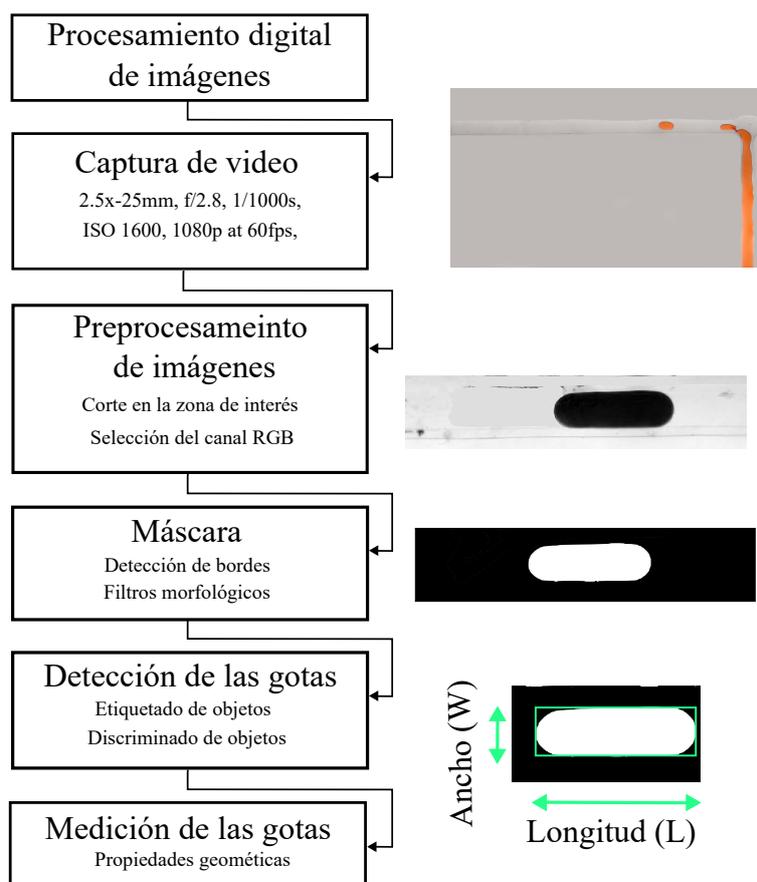


Figura 4.5: Diagrama de flujo del protocolo PDI implementado para el procesamiento de cada fotograma en los videos experimentales. El video se separa en imágenes individuales, conocidas como fotogramas. Ya que cada imagen esta compuesta por tres planos de colore, rojo, verde y azul, extraemos el plano que contiene la información que se desea destacar; en nuestra aplicación es el canal rojo. Después se recorta la región de la imagen que contiene el canal donde se forman las gotas. Mediante esta acción se reducen dramáticamente los tiempos de procesamiento del video. Se genera una imagen binaria conocida como máscara, donde las áreas de interés aparecen como gotas blancas. Los objetos en la máscara se etiquetan y se filtran aquellos que están en contacto con el borde. Finalmente, se realiza una extracción geométrica de las gotas previamente etiquetadas utilizando un algoritmo de cuadro delimitador.

## 4.6. Análisis de la frecuencia de la generación de microgotas

El conjunto de datos que describe las geometrías de las gotas incluye los siguientes parámetros: L (longitud), W (ancho), LW (proporción longitud-ancho), Área, Número de Frame, Centroid\_Row (fila del centroide) y Centroid\_Col (columna del centroide). Estos parámetros se registran para cada imagen del video capturado y se procesan mediante el código ya mencionado en la sección anterior A.

A partir de estos datos procesados, obtenemos tres gráficos relevantes. El primero ilustra la frecuencia de generación de gotas a lo largo del tiempo (figura A.1), el segundo representa la variación del área de las gotas durante el video (figura A.2), y el tercero el cambio del parámetro FR a lo largo de la prueba. En el ensayo con una relación de flujo (FR) de 0.1, observamos una frecuencia de generación de 0.019 gotas por segundo, es decir, en un intervalo de 1 minuto,

se genera aproximadamente una gota. Esto se alinea con nuestro objetivo de producir gotas a baja frecuencia.

El segundo gráfico muestra las ligeras variaciones en el área de las gotas a lo largo del ensayo, atribuibles a las imperfecciones en el canal microfluídico. A pesar de que solo se generaron diez gotas durante el ensayo, es evidente este patrón de variación. Este patrón es el mismo reportado antes por Álvarez et al. [6] el cual se puede atribuir a la variación en la velocidad de giro del motor de pasos de la microbomba. Además como factor adicional a considerar, es necesario tener además gotas lo suficientemente grandes para que puedan llegar a ser impactadas de manera correcta y puedan tener el tiempo suficiente para poder resonar. De otra manera no podremos observar correctamente la emisión.

Para determinar el grado de esfericidad de las gotas, nos referimos al gráfico de la relación  $L/W$  (figura A.3). Cuando una gota es perfectamente esférica, esta relación es igual a 1. En nuestro ensayo, el valor promedio fue de 1.98, lo que sugiere que las gotas formadas son elipsoides, con su longitud superando ligeramente a su anchura.

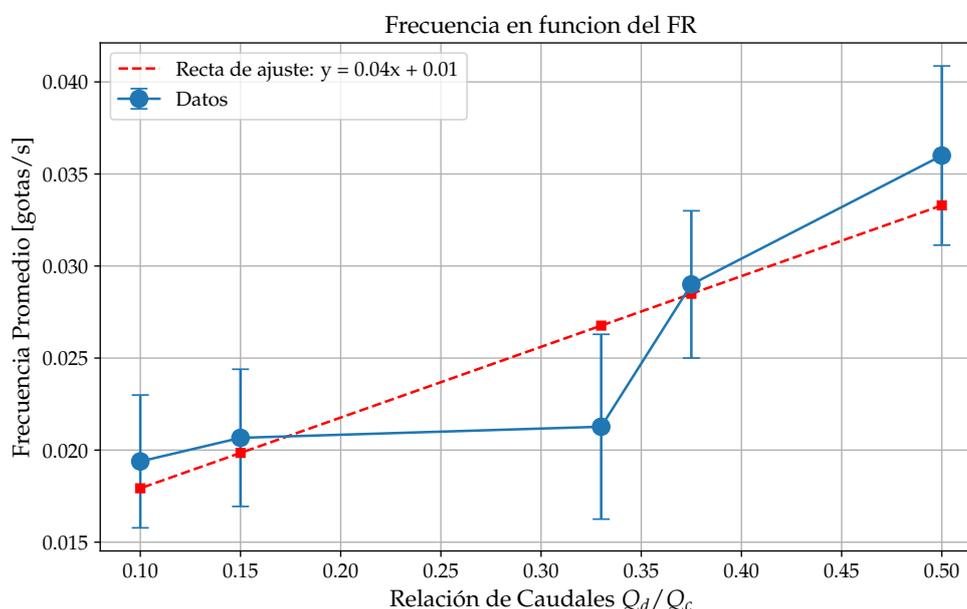


Figura 4.6: Gráfico de la frecuencia de generación de microgotas en función de la relación de caudales  $Q_d/Q_c$

En la caracterización del chip microfluídico, llevamos a cabo un total de cinco ensayos, cada uno con una distinta relación de flujo (FR). Nuestro propósito era identificar una FR que promoviera la formación de gotas esféricas a una baja frecuencia de repetición y con una magnitud suficientemente grande para una correcta emisión. Como se observa en la figura 4.6, la frecuencia de formación de las gotas es proporcional a la FR. Aunque un ajuste lineal es plausible, su precisión es moderada y la incertidumbre resultante es alta, lo que sugiere la necesidad de recolectar más datos para considerar otro tipo de ajuste.

Por otro lado, el gráfico de la relación  $L/W$  en función de la FR demuestra una tendencia lineal, respaldando los hallazgos del estudio de Álvarez et al. [6]. Este comportamiento parece ser dependiente del canal microfluídico específico, ya que factores como su geometría y las imperfecciones pueden alterar sus propiedades.

Aun así, la gráfica 4.7 expone una tendencia directamente proporcional, indicando que el área de la gota aumenta a medida que la FR se incrementa. Esta tendencia sugiere que para conse-

Cuadro 4.3: Valores de los caudales utilizados en los ensayos

Ensayo	Flujo Disperso ( $\mu\text{l}/\text{min}$ )	Flujo Continuo ( $\mu\text{l}/\text{mon}$ )	FR
1	0.1	1	0.1
2	0.15	1	0.15
3	0.33	1	0.33
4	0.375	1	0.375
5	0.5	1	0.5

guir gotas de mayor tamaño, que favorecerían una buena emisión, sería necesario incrementar la FR, lo que contrasta con las necesidades de frecuencia y forma.

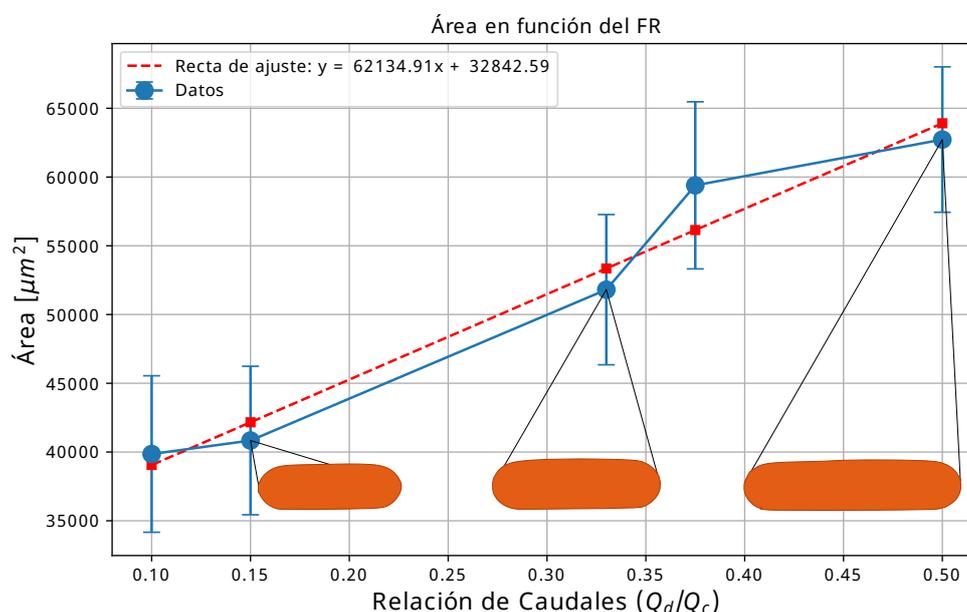


Figura 4.7: Gráfico del área de las gotas en micras cuadradas en función de la relación de caudales  $Q_d/Q_c$

Las tendencias lineales observadas en la frecuencia y en la relación L/W en función de la FR nos proporcionan una guía sobre cómo generar nuestras gotas. Sin embargo, debemos considerar que el tamaño de la gota, que también presenta una relación lineal, puede afectar la generación de láseres por emisión. Para conseguir gotas más esféricas y de baja frecuencia, debemos enfocarnos en FR bajas, teniendo en cuenta las tasas de flujo reducidas que utilizamos en nuestros experimentos 4.3. Pero para conseguir gotas de mayor tamaño, sería necesario incrementar ligeramente la FR.

En conclusión, es esencial encontrar un equilibrio entre los tres factores: frecuencia, área y L/W. La frecuencia y el L/W no presentan una variación significativa entre ellos al cambiar la FR, lo que implica que la forma y frecuencia de las gotas son similares sin importar la FR utilizada. Sin embargo, el tamaño de la gota cambia sustancialmente, lo cual es relevante dado que buscamos gotas de gran tamaño para permitir el impacto adecuado del láser pulsado y una óptima emisión y recolección de la señal. Por lo tanto, nos inclinamos a utilizar valores de FR cercanos a 0.5.

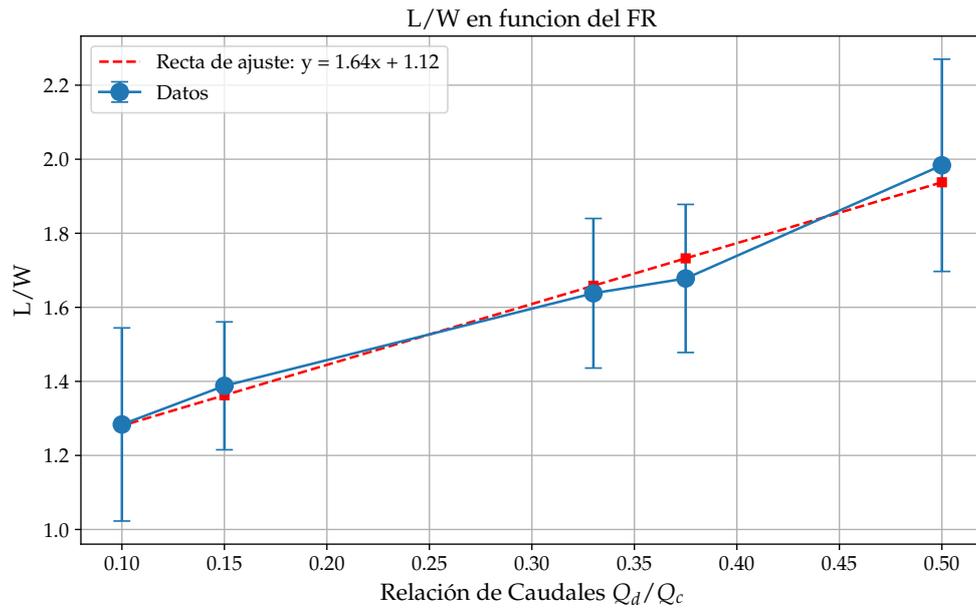


Figura 4.8: Gráfico de la frecuencia de generación de microgotas en función de la relación de caudales  $Q_d/Q_c$

## Capítulo 5

# Antecedentes teóricos de las cavidades resonantes

### 5.1. Tratamiento matemático de una $\mu$ - guía de onda esférica

La propagación de la luz es un fenómeno que se da de distintas maneras y depende del medio por el cual se este propagando. Si hablamos de la propagación en una guía de onda, la geometría de la guía es un factor muy importante a considerar. En nuestros experimentos trabajamos con guías cilíndricas y esféricas. En estas cavidades, la luz tiene un comportamiento muy diferente al que tendría en una guía rectangular. En este tipo de geometría se soportan los *Modos de Galería de Susurro* o **Whispering Gallery Modes (WGM)** por sus siglas en inglés, los cuales son soluciones a la ecuación de onda en geometrías cóncavas.

Resolver la ecuación de onda para una cavidad resonante puede presentar múltiples soluciones, sin embargo estas soluciones dependerán de las condiciones a la frontera así como de la geometría de nuestra cavidad. Las soluciones de la ecuación de onda brindan una referencia de lo que podríamos esperar en los experimentos. En este capítulo se abordará la solución de la ecuación vectorial de onda, así como la simulación de la solución para una cavidad esférica.

#### 5.1.1. Ecuación de onda para campos electromagnéticos en un dieléctrico homogéneo

Para poder encontrar las expresiones de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , que representan el campo eléctrico y el campo magnético respectivamente, en una esfera (los Modos de Galería de Susurro), es necesario resolver la ecuación de onda en dicha geometría. El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  describe cómo una carga eléctrica experimenta una fuerza cuando se encuentra en la presencia de otras cargas eléctricas, mientras que el campo magnético  $\mathbf{B}$  describe la influencia de una corriente eléctrica o un campo eléctrico cambiante en cierta región del espacio. Es primordial encontrar la ecuación de la cual debemos partir para determinar dichos campos. A partir de las ecuaciones de Maxwell, es posible derivar la ecuación de Helmholtz para campos armónicos.

Los campos armónicos en el tiempo son campos electromagnéticos que varían periódica o sinusoidalmente en el tiempo. Es muy práctico trabajar con ellos ya que mediante el análisis de Fourier se pueden prolongar a la mayoría de formas posibles. Para entender las interacciones entre luz y materia, partimos de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_v(\mathbf{r}, t) \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.4)$$

A nivel macroscópico los campos se relacionan entre sí a través de parámetros determinados por las propiedades de la materia, en las que se conocen como relaciones constitutivas.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 (\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)) \quad (5.6)$$

El campo electromagnética viaja libremente dentro de la cavidad, sin tener interacción con el material, por lo que el vector de la polarización  $\mathbf{P}$  y el vector de la magnetización  $\mathbf{M}$  son iguales a cero.

Las cavidades son de un material un dieléctrico no conductivo y libre de carga, por lo que  $\mathbf{j}_d = 0$  y  $\rho_v = 0$ . Entonces para un material dieléctrico homogéneo (la permitividad y la permeabilidad no dependen de la posición) en el que el campo no tiene interacción con este, tenemos que las ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (5.10)$$

con base es las igualdades  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$  y también  $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$ .

Para obtener la ecuación de onda, se hace lo siguiente. Aplicando el rotacional a la ecuación de Faraday (ecuación 5.9)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

Utilizando la identidad vectorial,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (5.11)$$

y dado que por las ecuaciones de Gauss, el primer término de la derecha se elimina, se sigue

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

Sustituyendo la ecuación de Ampere-Maxwell (ecuación 5.10) dentro de la expresión anterior tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.12)$$

Del mismo modo, si aplicamos el rotacional a la ecuación de Ampere-Maxwell (ecuación 5.10) tenemos lo siguiente

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

se sigue aplicando la misma identidad vectorial (ecuación 5.11) y sustituyendo la ecuación de Faraday (ecuación 5.9), entonces tenemos

$$-\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

reescribiendo llegamos a

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.13)$$

Las ecuaciones 5.12 y 5.13 se conocen como **ecuación de onda**

Es posible separar la parte temporal de la ecuación de onda utilizando la transformada de Fourier. Considerando que estamos trabajando con campos armónicos en el tiempo, si aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación 5.12 tenemos lo siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( c^2 \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \right) d\omega = 0$$

en donde el valor  $i$  es la unidad imaginaria.

Utilizando la transformada de Fourier pasamos a trabajar de un dominio temporal a un espacio de frecuencias,  $\omega$  es entonces la frecuencia del campo electromagnético.

Se sigue

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c^2 \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - (i\omega)(-i\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) e^{-i\omega t} d\omega = 0$$

Por definición la transformada inversa de Fourier

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (5.14)$$

Considerando la definición de la transformada inversa de Fourier, comparamos los valores dentro de las integrales y encontramos la ecuación de onda en términos de la frecuencia

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \left( \frac{i\omega}{c} \right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

Si consideramos que la frecuencia del campo  $\omega$  es constante, y además definiendo la constante de propagación como

$$k \equiv \left( \frac{i\omega}{c} \right)$$

eliminamos la dependencia en la frecuencia.

Realizando un procedimiento análogo con el campo magnético llegamos finalmente a las **ecuaciones vectoriales de Helmholtz**

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.16)$$

## 5.2. Solución de las ecuaciones de Helmholtz para una esfera

A partir de las ecuaciones de Maxwell, obtenemos la ecuación de onda, la cual al separar la parte temporal, encontramos la ecuación de Helmholtz vectorial. Es así que para una función  $\Psi$  tenemos que la ecuación a resolver es la siguiente

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.17)$$

La ecuación 5.17 es una ecuación diferencial parcial homogénea de tipo elíptica. Al ser una ecuación vectorial es posible descomponer la ecuación en coordenadas cartesianas, en tres ecuaciones de onda escalares, homogéneas y unidimensionales. Cada componente de los campos eléctrico y magnético tienen que satisfacer una de las ecuaciones, cuyo resultado es una onda. Para poder resolver la ecuación vectorial de Helmholtz, es necesario resolver primero una de las ecuaciones escalares<sup>1</sup>, puesto que la solución vectorial esta en términos de la función escalar. [42]

$$\nabla^2 \Psi(x) + k^2 \Psi(x) = 0 \quad (5.18)$$

### 5.2.1. Solución de la ecuación de onda escalar

Vamos a resolver la ecuación en una esfera, por lo que se van a utilizar coordenadas esféricas. Aplicando el método de separación de variables

$$\Psi(x) = \Psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (5.19)$$

El laplaciano en coordenadas esféricas es el siguiente

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de Helmholtz (ecuación 5.18)

<sup>1</sup>El método lo desarrolla en Stratton en su libro *Electromagnetic Theory* [42]. Se resuelve una ecuación vectorial de Helmholtz utilizando como base la solución de la ecuación escalar de Helmholtz

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + k^2 \Psi = 0$$

Haciendo la separación de variables (ecuación 5.19)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \Theta \Phi \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta) R \Phi \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{R \Theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k^2 R \Theta \Phi = 0$$

Agrupamos y multiplicamos para eliminar términos

$$\frac{r^2}{R \Theta \Phi} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \Theta \Phi \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta) R \Phi \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{R \Theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k^2 R \Theta \Phi \right] = 0$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k^2 r^2 = 0$$

Agrupando términos comunes y multiplicando por un factor de  $\sin^2 \theta$  tenemos

$$\sin^2 \theta \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Separemos la ecuación en su parte radial y angular. Para ello, primero igualamos el último término, la dependencia de  $\phi$  a una constante. La primera ecuación separada es la siguiente

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2 \quad (5.20)$$

Sustituyendo la constante, se sigue

$$\sin^2 \theta \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - m^2 = 0$$

Si dividimos entre  $\sin^2 \theta$

$$\left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 \right) + \frac{1}{(\sin \theta) \Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (5.21)$$

Ahora, separemos completamente la parte angular. Dividimos por  $\sin^2 \theta$  e igualamos la ecuación dependiente de  $\theta$  a la constante  $-l(l+1)$ , esto para que la solución tenga una relación directa con las funciones asociadas de Legendre. La razón de la elección de las constantes de separación viene de los valores propios del momento angular. La elección de los valores propios del momento angular nos lleva a tener una solución única para la parte angular la cual es común siempre si se resuelve una ecuación diferencial parcial elíptica (esto es, que involucra un operador laplaciano), en una geometría esférica.

Al separar las variables, igualamos la parte angular de la ecuación a una constante, que tomamos como  $l(l+1)$ . La elección de este signo positivo se justifica al trasladar términos a diferentes lados de la ecuación. Así, la ecuación resultante para  $\theta$  es:

$$\frac{1}{\Theta(\sin \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -l(l+1)$$

Si hacemos el cambio de variable  $t = \cos \theta$  y  $\Theta = P(t)$  llegamos a la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( (1-t^2) \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right) P = 0 \quad (5.22)$$

Las ecuaciones 5.20 y 5.22 son las dos ecuaciones que describen la parte angular de nuestro problema.

La ecuación 5.20 es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Su solución general, considerando además que se debe tener simetría en  $\phi$  cada  $2\pi$  ya que tenemos una condición periódica, es la siguiente

$$\Phi(\phi) = c_1 e^{-im\phi} + c_2 e^{im\phi} \quad (5.23)$$

La ecuación 5.22, es la **ecuación asociada de Legendre**. Su solución esta dada por los polinomios asociados de Legendre

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (5.24)$$

donde  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  y  $-l \leq m \leq l$ . Además cumplen la condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lm}$$

La solución de la ecuación 5.22 que cumple la condición de ortogonalidad es la siguiente

$$\Theta_{lm}(\cos(\theta)) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) \quad (5.25)$$

mientras que la solución de la ecuación 5.20 que cumple con estas condiciones es

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \quad (5.26)$$

Las funciones que resultan de la solución angular de la ecuación de Helmholtz se les conoce como **armónicos esféricos**  $Y_l^m(\theta, \phi) = \Theta_{lm}(\theta) \Phi_m(\phi)$  y son los mismos siempre que se tenga una ecuación diferencial parcial elíptica en una geometría esférica.

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi} \quad (5.27)$$

Ahora trabajando con la parte radial, de la ecuación 5.21, recordando la constante de separación  $l(l+1)$  se tiene

$$\left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 \right) = l(l+1)$$

desarrollando, se llega a lo siguiente

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial R}{\partial r} + R[k^2 r^2 - l(l+1)] = 0 \quad (5.28)$$

la ecuación 5.28 es conocida como **la ecuación de Bessel**. Considerando la siguiente sustitución con el propósito de encontrar una ecuación con soluciones conocidas

$$R(kr) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}} \quad (5.29)$$

Se calculan las derivadas

$$\frac{dR(kr)}{dr} = \frac{k}{(kr)^{1/2}} \frac{dZ}{dr} - \frac{kZ}{2(kr)^{3/2}} ; \quad \frac{d^2 R(kr)}{dr^2} = \frac{k^2}{(kr)^{1/2}} \frac{d^2 Z}{dr^2} - \frac{k^2}{(kr)^{3/2}} \frac{dZ}{dr} + \frac{3k^2}{4(kr)^{5/2}} Z$$

Sustituyendo en la ecuación de Bessel

$$r^2 \left( \frac{k^2}{(kr)^{1/2}} \frac{d^2 Z}{dr^2} - \frac{k^2}{(kr)^{3/2}} \frac{dZ}{dr} + \frac{3k^2}{4(kr)^{5/2}} Z \right) + 2r \left( \frac{k}{(kr)^{1/2}} \frac{dZ}{dr} - \frac{kZ}{2(kr)^{3/2}} \right) + \left( \frac{Z}{(kr)^{1/2}} (k^2 r^2 - l(l+1)) \right) = 0$$

Multiplicando por  $(kr)^{1/2}$  y dividiendo por  $k^2$

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} - \frac{r}{k} \frac{dZ}{dr} + \frac{3}{4k} Z + \frac{2r}{k} \frac{dZ}{dr} - \frac{Z}{k^2} + \frac{Z}{k^2} (k^2 r^2 - l(l+1)) = 0$$

se sigue

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{r}{k} \frac{dZ}{dr} + \frac{Z}{k^2} \left( \frac{3}{4} - 1 + (k^2 r^2 - l(l+1)) \right) = 0$$

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{r}{k} \frac{dZ}{dr} + \frac{Z}{k^2} \left( \frac{3}{4} - 1 + (k^2 r^2 - l(l+1)) \right) = 0$$

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{r}{k} \frac{dZ}{dr} + \frac{Z}{k^2} \left( k^2 r^2 - l^2 - l - \frac{1}{4} \right) = 0$$

Finalmente se llega a la siguiente ecuación

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{r}{k} \frac{dZ}{dr} + \frac{Z}{k^2} \left( k^2 r^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) = 0 \quad (5.30)$$

la ecuación 5.30 se conoce como **ecuación de Bessel de orden  $l + 1/2$**  y tiene como solución general a las funciones de Bessel esféricas

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \quad (5.31)$$

$$y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x) \quad (5.32)$$

Las funciones  $j_l(x)$  y  $y_l(x)$  se conocen como las funciones de Bessel esféricas de primer y segundo tipo y están definidas en base a las funciones  $J_\nu$  y  $Y_\nu$  las cuales son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo respectivamente.

De manera general, la solución para la ecuación 5.30 se puede ver como la combinación lineal en  $\mathbb{R}$  de las ecuaciones 5.31 y 5.32, es decir

$$Z_l(kr) = \alpha_l j_l(kr) + \beta_l y_l(kr) \quad (5.33)$$

Escribiendo la solución en términos de  $R(kr)$ , utilizando la sustitución 5.29 llegamos a la solución para la parte radial de la ecuación de Bessel esférica

$$R_l(kr) = \alpha_l \frac{j_l(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} + \beta_l \frac{y_l(kr)}{(kr)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.34)$$

Es posible reescribir la solución, introduciendo **las ecuaciones de Bessel-Riccati**. El comportamiento de dichas funciones es que la función  $\varphi_l(x)$  es igual a cero en  $x = 0$  mientras que  $\chi_l(x)$  diverge en  $x = 0$ . Al estar resolviendo una ecuación diferencial parcial para una superficie esférica, se requiere de una solución no divergente dentro de la esfera y una que decaiga a cero ó no diverja fuera de ésta. Elegimos las funciones de Bessel - Riccati para la solución ya que son adecuadas para la posterior representación de los campos electromagnéticos.

$$\varphi_l(x) = x j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (5.35)$$

$$\chi_l(x) = -x y_l(x) = -\sqrt{\frac{\pi x}{2}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad (5.36)$$

es así, que reescribiendo  $R(kr)$  llegamos a lo siguiente

$$R_l(kr) = \alpha_l \frac{\varphi_l(kr)}{kr} - \beta_l \frac{\chi_l(kr)}{kr} \quad (5.37)$$

La solución general para la ecuación de Helmholtz escalar 5.18 es una combinación lineal de las funciones encontradas  $R(kr)$  y  $Y(\theta, \phi)$  haciendo el producto de la separación de variables (ecuación 5.19)

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_l \frac{\varphi_l(kr)}{kr} - \beta_l \frac{\chi_l(kr)}{kr} \right) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (5.38)$$

En general para cada  $l$  y  $m$

$$\Psi_l^m(r, \theta, \phi) = Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (5.39)$$

donde las  $Z_l(kr)$  pueden ser la parte que depende de  $j_l$  o  $y_l$ .

### 5.2.2. Solución de la ecuación de onda vectorial

Para encontrar la solución de la ecuación vectorial de Helmholtz 5.17 partimos de la solución escalar ya desarrollada 5.38, tal y como se especifica en el método desarrollado por Stratton en su libro [42]. Construimos tres vectores solución independientes como sigue

$$\mathbf{L} = \nabla \Psi, \quad \mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{r} \Psi, \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M} \quad (5.40)$$

Los vectores  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  satisfacen la ecuación de Helmholtz vectorial (ecuación 5.17) siempre y cuando se emplee la ecuación de onda escalar (ecuación 5.18). Es importante remarcar lo anterior, las funciones vectoriales definidas son soluciones a la ecuación vectorial de Helmholtz, misma que estamos buscando resolver. Además son soluciones siempre y cuando se utilice la función  $\Psi$  la cual es la solución de la parte escalar que hemos encontrado en la sección anterior. Por lo tanto, vamos a construir una solución vectorial empleando la ecuación escalar 5.38.

Debido a que  $\mathbf{r}$  es un vector constante, podemos reescribir  $\mathbf{M}$  como sigue

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \mathbf{r} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{N}$$

Las funciones vectoriales  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  tienen ciertas propiedades notables, las cuales parten directamente de su definición. De este modo

$$\nabla \times \mathbf{L} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{L} = \nabla^2 \Psi = -k^2 \Psi$$

mientras que  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  son vectores solenoidales, es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{N} = 0$$

Los vectores  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  son apropiadas representaciones para los campos eléctrico y magnético respectivamente, ya que cada uno es proporcional al rotacional del otro.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{E}$$

A partir de la solución escalar 5.38, asociado con cada función característica  $\Psi_n$  hay tres vectores solución  $\mathbf{L}_n$ ,  $\mathbf{M}_n$  y  $\mathbf{N}_n$ . Sabemos además que cualquier función de onda puede ser representada como una combinación lineal de las funciones vectoriales características. Escribimos la solución a la ecuación vectorial como una combinación lineal de los vectores característicos.

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha \mathbf{L}_l^m + \beta \mathbf{M}_l^m + \gamma \mathbf{N}_l^m \quad (5.41)$$

El problema radica ahora en determinar las relaciones vectoriales 5.40. Para encontrar  $\mathbf{L}$  se hace el desarrollo utilizando como función  $\Psi$  la ecuación 5.39

$$\mathbf{L}_l^m = \nabla \Psi_l^m = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} Z(kr) Y_l^m(\theta, \phi) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} Z_l(kr) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r \sin(\theta)} Z_l(kr) \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (5.42)$$

De la misma manera para  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$ . La notación que se utilizará para las componentes es la siguiente  $(L_l^m)_r$  la  $r$  inferior indica a que componente se refiere del vector.

$$\mathbf{M}_l^m = \mathbf{L}_l^m \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & \hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ (L_l^m)_r & (L_l^m)_\theta & (L_l^m)_\phi \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_l^m = \frac{r Z_l(kr)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\theta - r Z_l(kr) \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (5.43)$$

$$\mathbf{N}_l^m = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_l^m = \frac{1}{k} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( M_{l\phi}^m \sin(\theta) \right) - \frac{\partial M_{l\theta}^m}{\partial \phi} \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r \sin(\theta)} - \frac{\partial}{\partial r} \left( r M_{l\phi}^m \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r M_{l\theta}^m \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r} \right]$$

Calculando las derivadas de las componentes del vector  $\mathbf{M}$  determinamos  $\mathbf{N}$  (Apéndice B).

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_l^m &= \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &+ \frac{1}{kr \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned} \quad (5.44)$$

En este punto ya tenemos los vectores  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  los cuales son solución de la ecuación vectorial de Helmholtz. Los vectores están expresados en sus componentes, es mucho mas conveniente trabajar directamente con vectores, ya que vuelve simple el álgebra. Podemos reescribirlos en términos de funciones conocidas.

Definimos los **armónicos esféricos vectoriales** como sigue.

$$\mathbf{Z}_{lm} = Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_r \quad (5.45)$$

$$\mathbf{Y}_{lm} = r \nabla Y_l^m(\theta, \phi) \quad (5.46)$$

$$\mathbf{X}_{lm} = \nabla Y_l^m(\theta, \phi) \times \mathbf{r} \quad (5.47)$$

Es de especial cuidado la notación utilizada ya que es fácil confundir el vector  $\mathbf{Y}_{lm}$  con los armónicos esféricos  $Y_l^m$ .

Si desarrollamos las expresiones para los armónicos esféricos vectoriales  $\mathbf{Y}_{lm}$  y  $\mathbf{X}_{lm}$  (Apéndice C) llegamos a las siguientes expresiones

$$\mathbf{Y}_{lm} = \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (5.48)$$

$$\mathbf{X}_{lm} = -\frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (5.49)$$

Podemos reescribir los vectores  $\mathbf{L}_l^m$ ,  $\mathbf{M}_l^m$  y  $\mathbf{N}_l^m$  en términos de los armónicos esféricos vectoriales (Apéndice C). De modo que

$$\mathbf{L}_l^m = \frac{\partial}{\partial r} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{Z_l(kr)}{r} \mathbf{Y}_{lm} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{M}_l^m = Z_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{N}_l^m = \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \quad (5.52)$$

De esta manera, la solución de la ecuación vectorial de Helmholtz esta dada por

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_l^m \mathbf{L}_l^m(r, \theta, \phi) + \beta_l^m \mathbf{M}_l^m(r, \theta, \phi) + \gamma_l^m \mathbf{N}_l^m(r, \theta, \phi) \quad (5.53)$$

en donde las funciones  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  corresponden a las ecuaciones 5.50, 5.51 y 5.52 respectivamente.

### 5.3. Soluciones al campo electromagnético para una esfera

Para encontrar las soluciones al campo eléctrico y magnético basta expresar los campos en términos de los vectores  $\mathbf{M}_l^m$  y  $\mathbf{N}_l^m$ . Se encuentran dos tipos de soluciones

#### 5.3.1. Modo transversal eléctrico (TE)

El modo transversal eléctrico ocurre cuando el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es colineal al campo  $\mathbf{M}_l^m$ .

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = A^{\text{TE}} \mathbf{M}_l^m \quad (5.54)$$

en donde  $A^{\text{TE}}$  es la amplitud compleja del campo.

Calculamos el campo magnético utilizando la ley de Faraday (ecuación 5.3)

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

Considerando un campo armónico y aplicando un análisis de Fourier separamos la parte temporal en un término exponencial

$$e^{i\omega t} (\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) + i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})) = 0$$

se sigue

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Ahora, calculando el campo magnético para el modo transversal eléctrico

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{i}{\omega} A^{\text{TE}} \nabla \times \mathbf{M}_l^m$$

de la definición de  $\mathbf{N}$  (ecuación 5.40) encontramos el rotacional de  $\mathbf{M}$  y por ende el campo magnético.

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \frac{ik}{\omega} A^{\text{TE}} \mathbf{N}_l^m \quad (5.55)$$

Las expresiones para los campos  $\mathbf{M}_l^m$  y  $\mathbf{N}_l^m$  (ecuaciones 5.51 y 5.52) pueden ser expresadas en términos de las ecuaciones de Bessel - Riccati (ecuaciones 5.35 y 5.36). Sin embargo, es importante notar cual es el comportamiento de estas funciones. La función  $\varphi_l(x)$  es igual a cero en  $x = 0$  mientras que  $\chi_l(x)$  diverge en  $x = 0$ . Se requiere de una solución no divergente dentro de la esfera y una que decaiga a cero ó no diverja fuera de ésta. Por este motivo, es natural la elección de estas funciones para la representación de los campos. De esta manera, utilizamos las funciones de Bessel - Riccati  $\varphi_l(x)$  (ecuación 5.35) para representar al campo dentro de la esfera, y las funciones  $\chi_l(x)$  (ecuación 5.36) para expresar los campos fuera de la esfera.

Vamos a expresar los campos eléctrico y magnético en términos de las funciones de Bessel - Riccati. De la definición del vector  $\mathbf{M}_l^m$  (ecuación 5.51), y además con las consideraciones hechas para estas funciones tenemos que el campo eléctrico es igual a

$$\mathbf{E} = \begin{cases} A^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r \leq R \\ -A^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(k_0r)}{k_0r} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (5.56)$$

mientras que para el campo magnético

$$\mathbf{B} = \frac{ik}{\omega} A^{TE} \left( \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} R_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right)$$

en donde sustituimos la función  $Z_l(kr) = R_l(kr)/(kr)$  de su definición (ecuación 5.37).

Por las consideraciones de las funciones de Bessel - Riccati

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{ik}{\omega} A^{TE} \left( \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} \varphi_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r \leq R, \\ -\frac{ik_0}{\omega} A^{TE} \left( \frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \chi_l(k_0 r) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{k_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_l(k_0 r)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (5.57)$$

### 5.3.2. Modo transversal magnético (TM)

El modo transversal magnético ocurre cuando el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  es colineal al campo  $\mathbf{N}_l^m$ .

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = A^{TM} \mathbf{N}_l^m \quad (5.58)$$

en donde  $A^{TM}$  es la amplitud compleja del campo.

De la misma manera que para el caso del modo TE, calculamos el campo magnético para el transversal magnético TM.

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{i}{\omega} A^{TM} \nabla \times \mathbf{N}_l^m$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) = \frac{ik}{\omega} A^{TM} \mathbf{M}_l^m \quad (5.59)$$

Expresando el campo eléctrico y magnético en términos de las funciones de Bessel - Riccati tenemos lo siguiente.

Para el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = A^{TM} \left( \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} R_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right)$$

se sigue

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{ik}{\omega} A^{TM} \left( \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} \varphi_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r \leq R, \\ -\frac{ik_0}{\omega} A^{TM} \left( \frac{l(l+1)}{k_0^2 r^2} \chi_l(k_0 r) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{k_0 r} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_l(k_0 r)) \mathbf{Y}_{lm} \right) & \text{si } r > R. \end{cases} \quad (5.60)$$

Finalmente para el campo magnético

$$\mathbf{B} = \begin{cases} A^{TM} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r \leq R \\ -A^{TM} \frac{\varphi_l(k_0 r)}{k_0 r} \mathbf{X}_{lm} & \text{si } r > R \end{cases} \quad (5.61)$$

## 5.4. Soluciones modales para el campo electromagnético

Las soluciones encontradas en la sección anterior para los campos eléctrico y magnético fueron desarrolladas sin considerar las condiciones de la frontera en la interfaz de la esfera. Las ecuaciones de campo solo son válidas para puntos ordinarios del espacio, esto es, puntos en cuyos alrededores las propiedades físicas del medio varíen de manera continua. Sin embargo, a través de cualquier superficie que limita un medio de otro, ocurren pequeños cambios en las propiedades electromagnéticas  $\epsilon$ ,  $\mu$  y  $\sigma$ . A escala macroscópica estos cambios son usualmente considerados como discontinuidades y por este motivo se puede esperar que los vectores de campo en sí mismos muestren discontinuidades.

Si tomamos el campo magnético  $\mathbf{B}$ , para que el vector sea continuo, es necesario que se cumpla la siguiente condición en la interfaz de los medios <sup>2</sup>

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.62)$$

en donde  $\mathbf{n}$  es un vector normal a la interfaz. La transición de la componente normal del vector  $\mathbf{B}$  a través de cualquier superficie discontinua en el medio es continua, por lo que las ecuaciones de onda son válidas.

De la misma manera tenemos que para el desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$ , la condición de continuidad en la interfaz es la siguiente

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \quad (5.63)$$

en donde  $\rho_s$  es la densidad superficial de carga eléctrica.

Las ecuaciones 5.62 y 5.63 son condiciones que involucran las componentes ortogonales de los campos en la interfaz de los medios.

Si ahora vemos el comportamiento tangencial de los campos, la condición para que el campo eléctrico sea continuo en la interfaz es la siguiente

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (5.64)$$

La transición de la componente tangencial del vector  $\mathbf{E}$  a través de la superficie discontinua es continua.

De la misma manera para el campo magnético.

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (5.65)$$

en donde  $\mathbf{K}$  es la densidad de corriente superficial.

Las ecuaciones 5.62 - 5.65 son las condiciones de frontera que determinan la transición de un campo electromagnético de un medio hacia otro separado por una superficie de discontinuidad.

Aplicando estas condiciones a las soluciones para los campos electromagnéticos encontrados en la sección anterior. Para el caso de un material dieléctrico, la densidad de carga superficial  $\rho_s = 0$  y la densidad de corriente superficial  $\mathbf{K} = 0$ . Además, consideramos solo el campo dentro de la esfera, por lo que  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{B}_2 = 0$ . Con lo que las condiciones de frontera toman la siguiente forma

<sup>2</sup>El desarrollo matemático fue abordado por J.Stratton en la Sección 1.13 de su libro *Electromagnetic Theory* [42]

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.66)$$

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5.67)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, \phi) \times \mathbf{n} = 0 \quad (5.68)$$

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) \times \mathbf{n} = 0 \quad (5.69)$$

estas condiciones son válidas en general para cualquier interfaz bajo estas consideraciones.

#### 5.4.1. Ecuación modal para el transversal eléctrico (TE)

Partiendo de las soluciones para los modos TE (ecuaciones 5.56 y 5.57), tenemos que los campos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= A^{\text{TE}} Z_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \\ \mathbf{B} &= \frac{ik}{\omega} A^{\text{TE}} \left( \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} R_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right) \end{aligned}$$

La condición de frontera normal para el campo eléctrico (ecuación 5.67) implica que los armónicos esféricos vectoriales son ortogonales a un vector normal a la interfaz  $\mathbf{X}_{lm} \perp \mathbf{n}$ . Además también se tiene que cumplir la segunda condición para el campo eléctrico, la condición tangencial (ecuación 5.69), por lo tanto, en la interfaz

$$A^{\text{TE}} Z_l(kr) = A^{\text{TE}} \frac{R_l(kr)}{kr} = 0 \quad (5.70)$$

y ha de satisfacerse en ambos lados de la frontera, por lo que

$$A_i^{\text{TE}} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} = -A_o^{\text{TE}} \frac{\chi_l(k_0 r)}{k_0 r} \quad (5.71)$$

Se indica mediante el subíndice *i/o* si la amplitud de los campos es interna (*i*) o externa (*o*) a la interfaz. Además el subíndice 0 en la variable  $k_0$  indica que es la  $k$  existente fuera de la esfera.

De la misma manera, para el campo magnético, la condición normal del campo magnético (ecuación 5.66) implica que para  $\mathbf{B}$

$$\frac{ik}{\omega} A^{\text{TE}} \left( \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} R_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \cdot \mathbf{n} \right) = 0$$

se sigue

$$A^{\text{TE}} \frac{l(l+1)}{kr^2} R_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} \cdot \mathbf{n} + \frac{A^{\text{TE}}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \cdot \mathbf{n} = 0$$

Identificamos el término  $A^{\text{TE}} \frac{R_l(kr)}{kr}$  que de la condición del campo eléctrico sabemos que es igual a cero. Finalmente llegamos a que

$$\frac{A^{\text{TE}}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \cdot \mathbf{n} = 0$$

Debido a que el campo  $\mathbf{B}$  tiene que valer sobre cualquier punto de la frontera, se tiene que

$$A^{\text{TE}} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) = 0$$

y se tiene que satisfacer a ambos lados de la frontera, por lo que

$$A_i^{TE} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_l(kr)) = A_o^{TE} \frac{\partial}{\partial r} (\chi_l(k_0r)) \quad (5.72)$$

Las ecuaciones 5.71 y 5.72 forman un sistema de ecuaciones, en donde las incógnitas son las amplitudes internas y externas de campo.

$$\begin{aligned} A_i^{TE} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} + A_o^{TE} \frac{\chi_l(k_0r)}{k_0r} &= 0 \\ A_i^{TE} \varphi_l'(kr) + A_o^{TE} \chi_l'(k_0r) &= 0. \end{aligned}$$

Si el determinante del sistema es cero, entonces éste tendrá soluciones no triviales. Si realizamos el determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} & \frac{\chi_l(k_0r)}{k_0r} \\ \varphi_l'(kr) & \chi_l'(k_0r) \end{vmatrix} = 0$$

se sigue

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} \chi_l'(k_0r) - \frac{\chi_l(k_0r)}{k_0r} \varphi_l'(kr) &= 0 \\ \frac{\varphi_l(kr)}{kr} \chi_l'(k_0r) &= \frac{\chi_l(k_0r)}{k_0r} \varphi_l'(kr) \\ \frac{k_0}{k} \frac{\varphi_l(kr)}{\varphi_l'(kr)} &= \frac{\chi_l(k_0r)}{\chi_l'(k_0r)} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Siempre y cuando la ecuación 5.73 se cumpla, el sistema de ecuaciones tendrá solución. Podemos escribir la amplitud externa en términos de la interna utilizando la ecuación 5.73. Entonces

$$A_o^{TE} = -A_i^{TE} \frac{k_0}{k} \frac{\varphi_l(kR)}{\chi_l(k_0R)} \quad (5.74)$$

#### 5.4.2. Ecuación modal para el transversal eléctrico (TM)

Partimos de las soluciones para los modos TM (ecuaciones 5.60 y 5.61)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{ik}{\omega} A^{TM} \left( \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} R_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \right) \\ \mathbf{B} &= A^{TM} \frac{R_l(kr)}{kr} \mathbf{X}_{lm} \end{aligned}$$

Haciendo un procedimiento similar al de la sección anterior, la condición de frontera normal para el campo magnético (ecuación 5.66) implica que los armónicos esféricos vectoriales son ortogonales a un vector normal a la interfaz  $\mathbf{X}_{lm} \perp \mathbf{n}$ . También se tiene que cumplir la segunda condición para el campo magnético, (ecuación 5.68), por lo tanto, en la interfaz

$$\frac{ik}{\omega} A^{TM} Z_l(kr) = A^{TM} \frac{R_l(kr)}{kr} = 0 \quad (5.75)$$

y ha de satisfacerse en ambos lados de la frontera, por lo que

$$A_i^{TM} \varphi_l(kr) = -A_o^{TM} \chi_l(kr) \quad (5.76)$$

La condición tangencial del campo eléctrico (ecuación 5.67) implica que para  $\mathbf{E}$  tenemos

$$A^{TM} \left( \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} R_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} \times \mathbf{n} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \times \mathbf{n} \right) = 0$$

se sigue

$$\frac{l(l+1)}{kr} A^{TM} \frac{R_l(kr)}{kr} \mathbf{Z}_{lm} \times \mathbf{n} + A^{TM} \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (R_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \times \mathbf{n} = 0$$

Sabemos que el término  $A^{TM} \frac{R_l(kr)}{kr}$  es igual a cero. Entonces

$$A^{TM} \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} R_l(kr) \mathbf{Y}_{lm} \times \mathbf{e}_r = 0$$

Debido a que el campo  $\mathbf{E}$  tiene que valer sobre cualquier punto de la frontera, se tiene que

$$A^{TM} \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} R_l(kr)$$

y se tiene que satisfacer a ambos lados de la frontera, por lo que

$$A_i^{TM} k_0 \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_l(kr)) = -A_o^{TE} k \frac{\partial}{\partial r} (\chi_l(k_0 r)) \quad (5.77)$$

De la misma forma para el caso TE, las ecuaciones 5.76 y 5.77 forman un sistema de ecuaciones, en donde las incógnitas son las amplitudes internas y externas de campo.

$$\begin{aligned} A_i^{TM} \frac{\varphi_l(kr)}{kr} + A_o^{TM} \chi_l(k_0 r) &= 0 \\ A_i^{TM} k_0 \varphi_l'(kr) + A_o^{TE} k \chi_l'(k_0 r) &= 0. \end{aligned}$$

Se tienen soluciones no triviales si el determinante es cero. Desarrollando el determinante llegamos a la siguiente expresión

$$\frac{k}{k_0} \frac{\varphi_l(kr)}{\varphi_l'(kr)} = \frac{\chi_l(k_0 r)}{\chi_l'(k_0 r)} \quad (5.78)$$

Podemos escribir la amplitud del campo externo en términos de la amplitud interna. De esta manera, despejando de la primera ecuación del sistema de ecuaciones

$$A_o^{TM} = -\frac{k_0 A_i^{TM} \varphi_l'(kr)}{k \chi_l'(k_0 r)}$$

finalmente

$$A_o^{TM} = -A_i^{TM} \frac{\varphi_l(kr)}{\chi_l(k_0 r)} \quad (5.79)$$

Podemos agrupar las ecuaciones modales 5.73 y 5.78 en una sola expresión

$$P \frac{\varphi_l(kr)}{\varphi_l'(kr)} = \frac{\chi_l(k_0 r)}{\chi_l'(k_0 r)} \quad (5.80)$$

donde

$$P = \begin{cases} \frac{k_0}{k} = \frac{1}{N} & \text{si es TM} \\ \frac{k}{k_0} = N & \text{si es TE} \end{cases}$$

## 5.5. Simulación del campo electromagnético dentro de una esfera en Matlab

Vamos a simular el campo eléctrico dentro de una esfera para el modo transversal eléctrico TE (ecuación 5.56). La ecuación es la siguiente

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}^{TE} \frac{\phi_l(kr)}{kr} \mathbf{X}_{lm}$$

```

clc; clear all; close all
%%
% Compute TE_Mode
%-1 <= m <= 1
m = 2; l = 2;
u = 3e8;
lamb = 532e-9;
mu0 = 1.2566e-6;
ep0 = 8.8541e-12;
mu1 = 1.08;
ep1 = 3.25;
mu = mu0*mu1;
ep = ep0*ep1;
w = 2.*pi*u./lamb;
k = w.*sqrt(mu*ep);

% finura de la malla
num_steps = 81;

% size de la gota
diam = 10e-3;
StpDiam = diam/num_steps;
r = -diam/2: StpDiam :diam/2;

%% Compute spherical Harmonics Y^m_l

% Definir el area de trabajo theta y phi.
theta_sph = 0: pi/(2*num_steps): pi;
phi_sph = 0: pi/num_steps :2*pi;

% Cartesian coordianates of a sphere.
x_sph = sin(theta_sph).*cos(phi_sph)';
y_sph = sin(theta_sph).*sin(phi_sph)';
z_sph = cos(theta_sph).*ones(size(phi_sph))';

% Square region of space from -1 to 1 in all dimensions
[x, y, z] = meshgrid( -1: 2/num_steps :1, ...
                    -1: 2/num_steps :1, -1: 2/num_steps :1 );
% Theta and Phi through the 3D volume of space
[Phi, Theta, R] = cart2sph(x, y, z);

% Compute Spherical Harmonic
Const = sqrt( ((2*l+1)*factorial(l-m))/(4*pi*factorial(l+m)) );

```

```

P1 = legendre( 1,cos( Theta+pi/2 ) );
if l~=1
    Plm = squeeze( P1(abs(m)+1, :, :, :) );
end
%Campo escalar armonico esferico
YmlSpheric = Const .* Plm .* exp(1i*m*Phi);

%% Compute the vector spherical harmonic
[grad_x, grad_y, grad_z] = gradient( YmlSpheric, 2/num_steps);

%Cross Product
Mx = r.*grad_x;
My = - r.*grad_y;
Mz = r.*grad_z;

%% Funciones de Bessel-Ricatti
js = BesRicc(l, k*r);

figure();
plot(r, real(js))
%% Compute |E_TE|
ME_TEr = abs((js/(k*(diam/2))).*Mx);
ME_TEphi = abs((js/(k*(diam/2))).*My);
ME_TEtheta = abs((js/(k*(diam/2))).*Mz);

%% fit to a sphere
center = round((num_steps+1)/2);
for i=1:(num_steps+1)
    for j = 1:(num_steps+1)
        for k = 1:(num_steps+1)
            Rt = ((i-center)*StpDiam)^2 +...
                ((j-center)*StpDiam)^2 + ((k-center)*StpDiam)^2;
            Rt = sqrt(Rt);
            if Rt > (diam/2)
                ME_TEr(i,j,k) = 0;
                ME_TEphi(i,j,k) = 0;
                ME_TEtheta(i,j,k) = 0;
            end
        end
    end
end

%% Plot Mode E_{r,phi,theta}

figure('Name','r');
volshow(ME_TEr);

figure('Name','phi');
volshow(ME_TEphi);

```

## 5.5. SIMULACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO DENTRO DE UNA ESFERA EN MATLAB63

```
figure('Name','theta');
volshow(ME_TEtheta);

%% Plot cross section of TEMode
figure('Name','r');
surf(r,r,ME_TEr(:,:, round(size(ME_TEr,1)/2 )));

figure('Name','phi');
surf(r,r,ME_TEphi(:,:, round(size(ME_TEr,1)/2 )));

figure('Name','theta');
surf(r,r,ME_TEtheta(:,:, round(size(ME_TEr,1)/2 )));
```

Dentro de la rutina se utiliza la función **BessRicc**, la cual es

```
function js = BesRicc(l, x)
% Bessel-Riccati functions
js = sqrt( (pi*x)/(2) ) .* besselj(l + 0.5, x);
end
```

La simulación se hizo en Matlab2019a, para una malla de 81 pasos.

De esta forma la simulación del modulo del campo eléctrico, para cortes transversales por la mitad de la esfera es la siguiente:

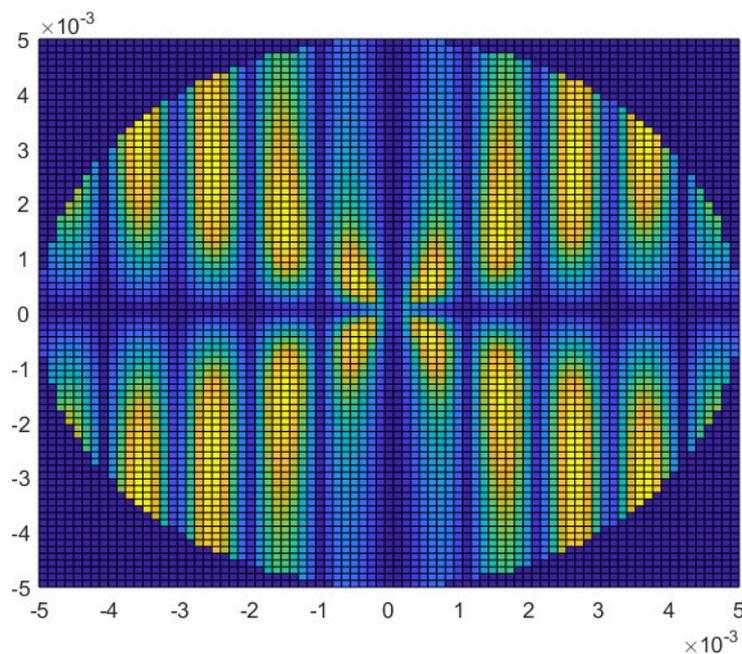


Figura 5.1: Corte transversal radial para  $|E|$ ,  $l = 2$ ,  $m = 2$

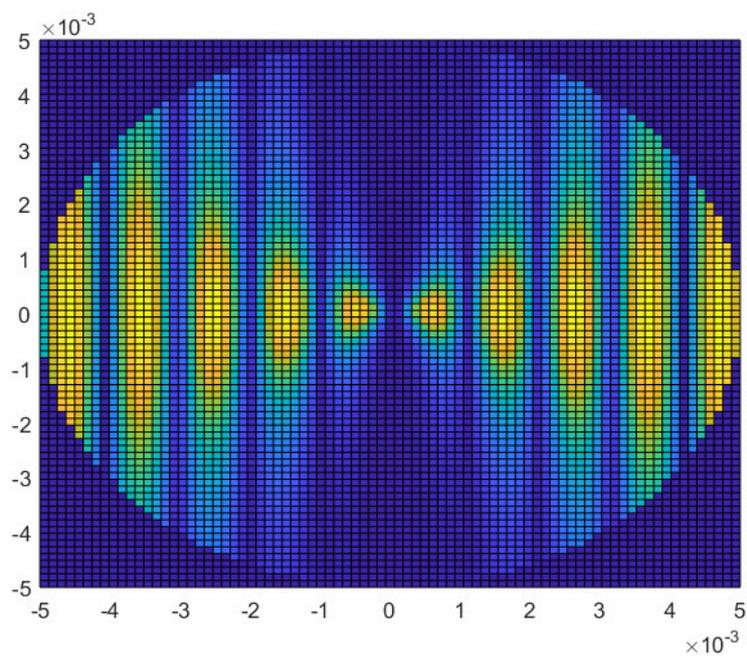


Figura 5.2: Corte transversal para las componente phi para  $|E|, l = 2, m = 2$

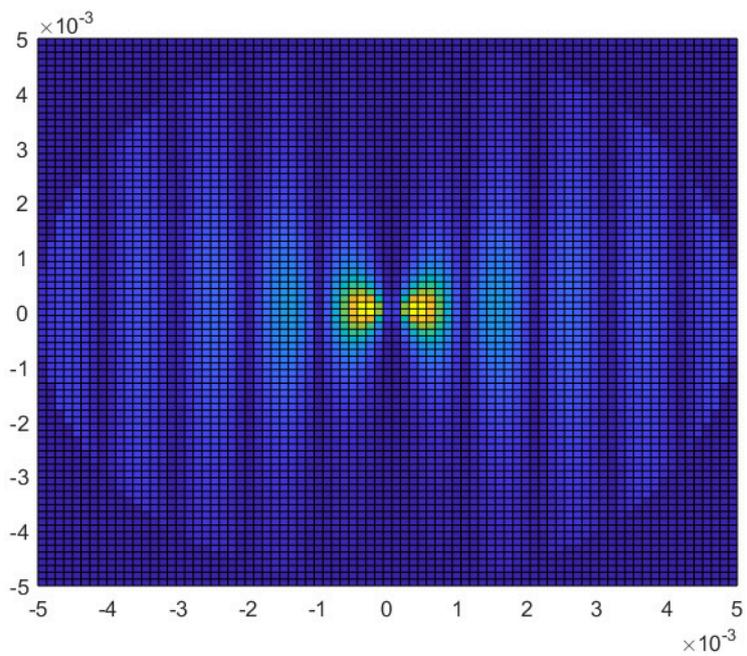


Figura 5.3: Corte transversal para las componente theta para  $|E|, l = 2, m = 2$

## Capítulo 6

# Caracterización láser de microgotas generadas en un canal microfluídico tipo unión en T

La microfluídica es un campo de rápido crecimiento con el potencial de transformar diversas áreas como la química, la biología y la física. En particular, la producción de gotas microfluídicas y su aplicación como resonadores ópticos se ha mostrado especialmente prometedora. Por ejemplo, la investigación de Tanyeri et. al [12] demostró que las cavidades microfluídicas pueden ser empleadas para la generación de láseres de tinte, lo que abre un amplio espectro de posibilidades. En años posteriores, se han publicado varios trabajos explorando aún más las propiedades ópticas de las gotas microfluídicas. Entre ellos se incluyen estudios sobre un láser de gotas de tinte conmutable [43] y un láser multicolor basado en microgotas [44]. Estas investigaciones demuestran la versatilidad y el amplio potencial de esta tecnología.

En los capítulos anteriores, hemos discutido la producción de gotas mediante sistemas microfluídicos y hemos explorado su uso potencial como cavidades resonantes. En este capítulo, vamos un paso más allá y exploramos la excitación óptica de estas gotas con láser dentro de un canal microfluídico. Este capítulo se centra en la estimulación láser de estas gotas con el propósito de obtener un espectro láser, un proceso que tiene potencial para convertir estas microgotas en resonadores ópticos altamente eficientes. Revisamos de manera breve los fenómenos de amplificación de la luz. Su entendimiento es importante para comprender los resultados de nuestro experimento. Además abordamos un panorama general del estado del arte que se tiene en cuanto a la estimulación de microgotas en sistemas microfluídico, esto con el fin de determinar en donde está nuestro proyecto y los posibles caminos que podemos seguir en base a los resultados.

### 6.1. Estimulación láser y microfluídica

La tecnología láser ha encontrado aplicaciones significativas en el campo de la microfluídica, particularmente en la estimulación de gotas microfluídicas. Los láseres ofrecen una forma altamente controlada y precisa de interactuar con pequeños volúmenes de líquidos, lo que ha permitido la creación de resonadores ópticos de alta calidad utilizando gotas microfluídicas.

Los trabajos de Tanyeri et al. (2007) y Li (2006, 2008) han sido fundamentales en el desarrollo de la optofluídica, una disciplina que combina la óptica y la microfluídica para crear sistemas con propiedades únicas y aplicaciones prácticas.

Tanyeri y sus colaboradores demostraron que las gotas microfluídicas pueden actuar como resonadores ópticos, permitiendo la emisión láser al ser estimulados por una fuente de luz externa. La emisión láser de gotas en un canal microfabricado se logra por la emisión estimulada de radiación a medida que la luz circula alrededor de la superficie interna de la gota. Este estudio ha sentado las bases para el uso de gotas microfluídicas en aplicaciones de lasing y ha impulsado el desarrollo de técnicas más avanzadas [12].

Por otro lado, Li ha llevado a cabo una serie de investigaciones significativas en el campo de los láseres de tinte optofluídicos. En su trabajo de 2006, Li demostró la posibilidad de construir un láser de retroalimentación distribuido de modo único utilizando la tecnología optofluídica, y en su estudio de 2008 presentó una revisión exhaustiva de los láseres de tinte optofluídicos, proporcionando un análisis detallado de su diseño, fabricación y rendimiento [45] [46].

En años recientes, la estimulación láser de gotas microfluídicas ha encontrado aplicaciones en una variedad de áreas, expandiendo considerablemente el alcance de la óptica y la microfluídica. Por ejemplo, se ha utilizado en la creación de sensores bioquímicos altamente sensibles, con promesas de permitir un diagnóstico médico más rápido y preciso [47]. En la misma línea, estos desarrollos han facilitado estudios de dinámica de fluidos a pequeña escala, abriendo nuevas posibilidades para la mejora de las tecnologías de imagenología [48].

Además, la fabricación de resonadores ópticos de alta calidad se ha visto beneficiada por estos avances. Los resonadores ópticos basados en gotas microfluídicas, por ejemplo, han mostrado un alto rendimiento en la mejora de la eficiencia de las tecnologías de comunicación de fibra óptica [17].

El desarrollo de nuevos tipos de dispositivos láser también ha sido posible gracias a la capacidad de manipular y controlar la luz a escala microscópica [18]. Esto no sólo representa un avance teórico, sino que tiene el potencial de impactar significativamente en una variedad de campos, incluyendo el desarrollo de biosensores y circuitos ópticos [19].

## 6.2. Amplificación de la Emisión Estimulada

La Amplificación de la Emisión Estimulada (ASE, por sus siglas en inglés) es un fenómeno que es fundamental para la operación de un láser y su capacidad de generar luz coherente de alta intensidad. Es el proceso mediante el cual la emisión estimulada de radiación, discutida anteriormente, se amplifica a través del medio activo en el láser [49].

En un láser, la fuente de bombeo proporciona energía a los átomos del medio activo, excitándolos a niveles energéticos superiores y creando una situación conocida como inversión de población [50]. En este estado, hay más átomos en los niveles de energía excitados que en los niveles de energía bajos. Cuando un átomo excitado en el medio activo es golpeado por un fotón (una partícula de luz) de la frecuencia correcta, este puede caer a un nivel de energía inferior y emitir otro fotón con la misma fase, frecuencia y dirección que el fotón incidente.

Ahora, aquí es donde la ASE entra en juego. Los fotones recién emitidos pueden, a su vez, estimular la emisión de más fotones en otros átomos excitados en el medio activo. Este efecto multiplicativo, conocido como amplificación, resulta en un número creciente de fotones coherentes propagándose en la misma dirección[50].

### 6.2.1. Diferencia entre ASE y Lasing

A pesar de que la Amplificación de la Emisión Estimulada (ASE) y el Lasing son dos fenómenos que se producen en un láser y que ambos se basan en el principio de la emisión estimulada[49], existen diferencias importantes entre ellos.

La ASE, como se mencionó anteriormente, se refiere a la amplificación de los fotones emitidos a través de la emisión estimulada. El Lasing, por otro lado, es un fenómeno que se da cuando la ASE ocurre dentro de una cavidad resonante que tiene espejos en los extremos.

La principal diferencia entre la ASE y el Lasing es que el Lasing implica la formación de un haz de luz coherente y direccional, gracias a la retroalimentación positiva proporcionada por la cavidad resonante [50].

Para que se produzca el Lasing a partir de la ASE, son necesarios algunos componentes y condiciones:

- **Inversión de Población:** Hay más átomos en el estado excitado que en el estado fundamental. Esto se logra mediante el bombeo del medio activo.
- **Cavidad Resonante:** Una estructura que permite que los fotones emitidos sean reflejados hacia adelante y hacia atrás a través del medio activo, permitiendo que la amplificación se produzca repetidamente.
- **Umbral de Lasing:** Existe un cierto umbral de energía que se debe superar para que comience el lasing
- **Espejos de alta reflectividad:** Los espejos de la cavidad resonante deben ser altamente reflectivos para minimizar las pérdidas de fotones.

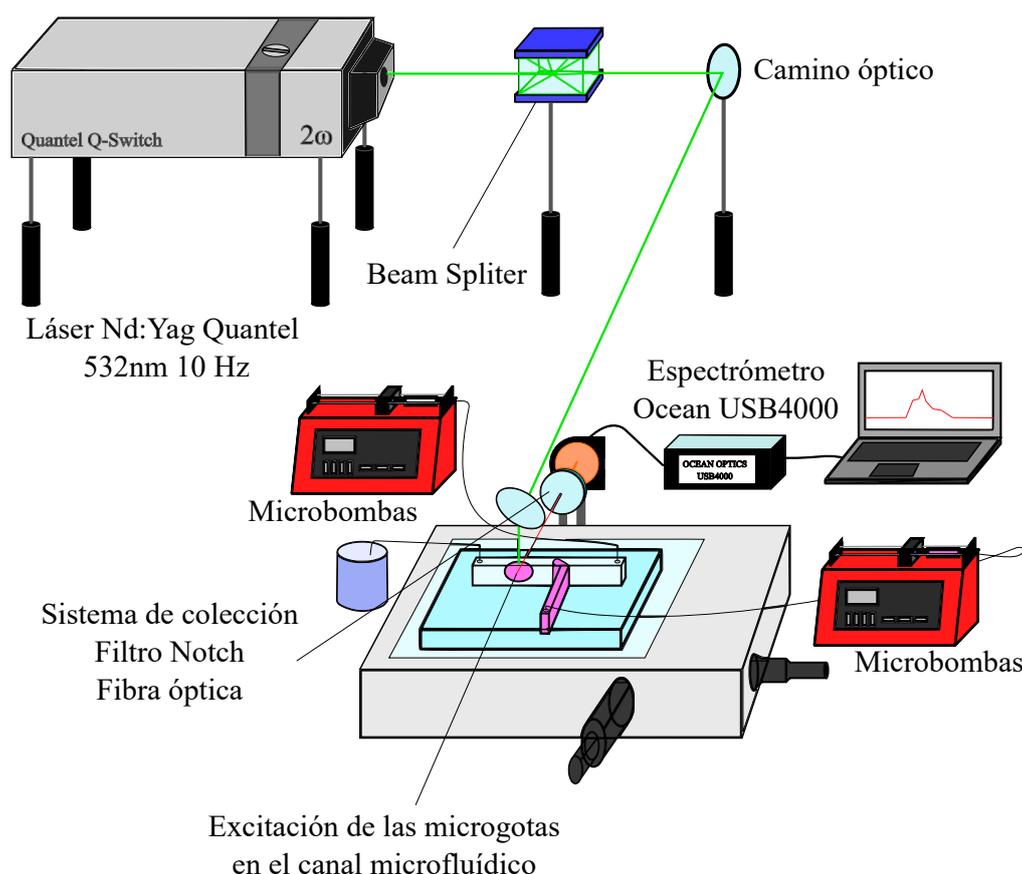


Figura 6.1: Representación del montaje experimental para la excitación de microgotas en el canal microfluídico. El sistema incluye un láser Q-switch Quantel de 532 nm que emite un haz láser, el cual es atenuado por un beam splitter antes de ser dirigido a las microgotas en el canal a través de un conjunto de lentes. Las gotas, llenas de Rodamina B, son creadas y alimentadas en el canal por dos microbombas. La recolección de la luz emitida se realiza mediante un filtro notch y una fibra óptica que conduce la luz hacia un espectrómetro Ocean USB4000

### 6.3. Diseño Experimental para la Estimulación Láser de Microgotas

En este estudio, se llevó a cabo la estimulación láser de microgotas semiesféricas con un radio aproximado de  $300\ \mu\text{m}$ . Para ello, se utilizó un canal similar al descrito en el capítulo 4. Este diseño permitió una tasa de repetición de aproximadamente 2 gotas por minuto ( $FR = 0.5$ ), proporcionando suficiente tiempo para que la cavidad se ubicara adecuadamente en la zona de bombeo y recolección de emisión. El montaje de las gotas en la plataforma de excitación láser lo podemos observar en la figura 6.2.

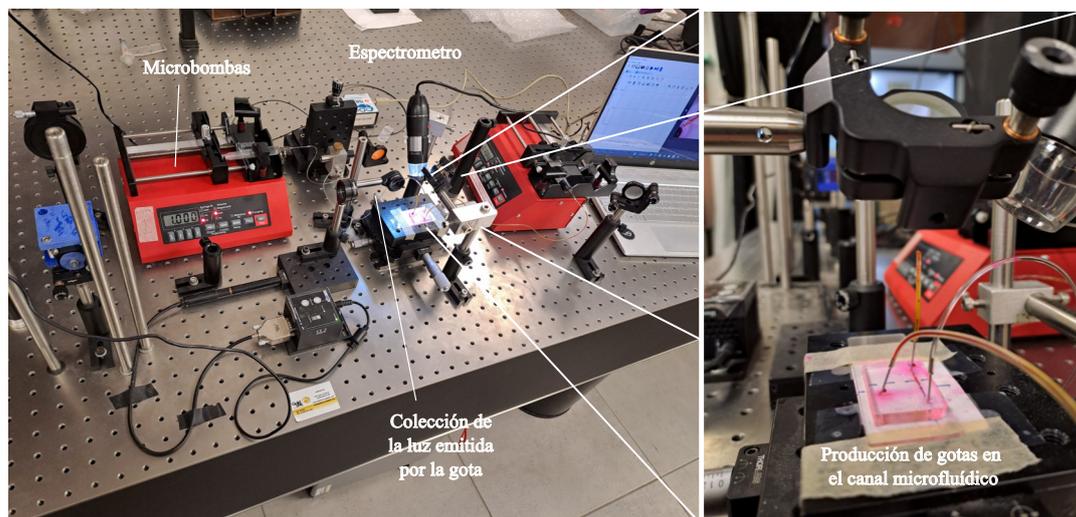


Figura 6.2: Montaje experimental para la generación de gotas en el microcanal, integrado con la plataforma de excitación láser. El sistema óptico dirige el haz láser desde arriba para excitar las gotas, mientras la luz emitida se recoge lateralmente. Esta configuración permite un control preciso de la excitación y la recolección de la emisión de las gotas.

La configuración experimental se basó en un láser pulsado Q-switch Quantel de  $532\ \text{nm}$  como fuente de bombeo. El medio de ganancia elegido fue la Rodamina B, y las microgotas actuaron como cavidades ópticas. Con el fin de formar las gotas a partir del medio activo, se emplearon diferentes concentraciones de Rodamina B como fase dispersa.

Para maximizar la eficiencia de la inversión de población y promover el fenómeno de emisión estimulada, se excitaban las microgotas usando un láser con una frecuencia de  $10\ \text{Hz}$  y una longitud de onda de  $532\ \text{nm}$ , correspondiente a la longitud de onda de emisión de la Rodamina B. Las microgotas eran consistentemente producidas y mantenidas a un ritmo uniforme gracias al uso de dos microbombas. El montaje completo se muestra en la figura 6.3.

El experimento se realizó utilizando un conjunto de lentes que permitió dirigir un haz láser, cuya potencia se redujo al  $10\%$  mediante un beam splitter. La excitación se realizó desde la parte superior, mientras que la colección de la emisión se hizo por uno de los lados del canal, de manera específica, se colectó por el lado del canal más próximo al aire, ya que el PDMS es un material que dispersa bastante la luz. En la colección se contó con un filtro notch de  $532\ \text{nm}$  para filtrar la luz láser y una fibra óptica que canalizaba la luz hacia un espectrómetro Ocean USB 4000. De esta manera, se logró una configuración adecuada para llevar a cabo la estimulación láser de las microgotas y recoger la emisión resultante de manera eficiente.

Para el medio activo, se prepararon cuatro alícuotas con diferentes concentraciones de Rodamina B, destinadas a actuar como la fase dispersa en la generación de microgotas dentro del canal microfluídico. Las concentraciones elaboradas fueron  $1 \times 10^{-4}$ ,  $5 \times 10^{-4}$ ,  $1 \times 10^{-3}$  y  $5 \times 10^{-3}$ .

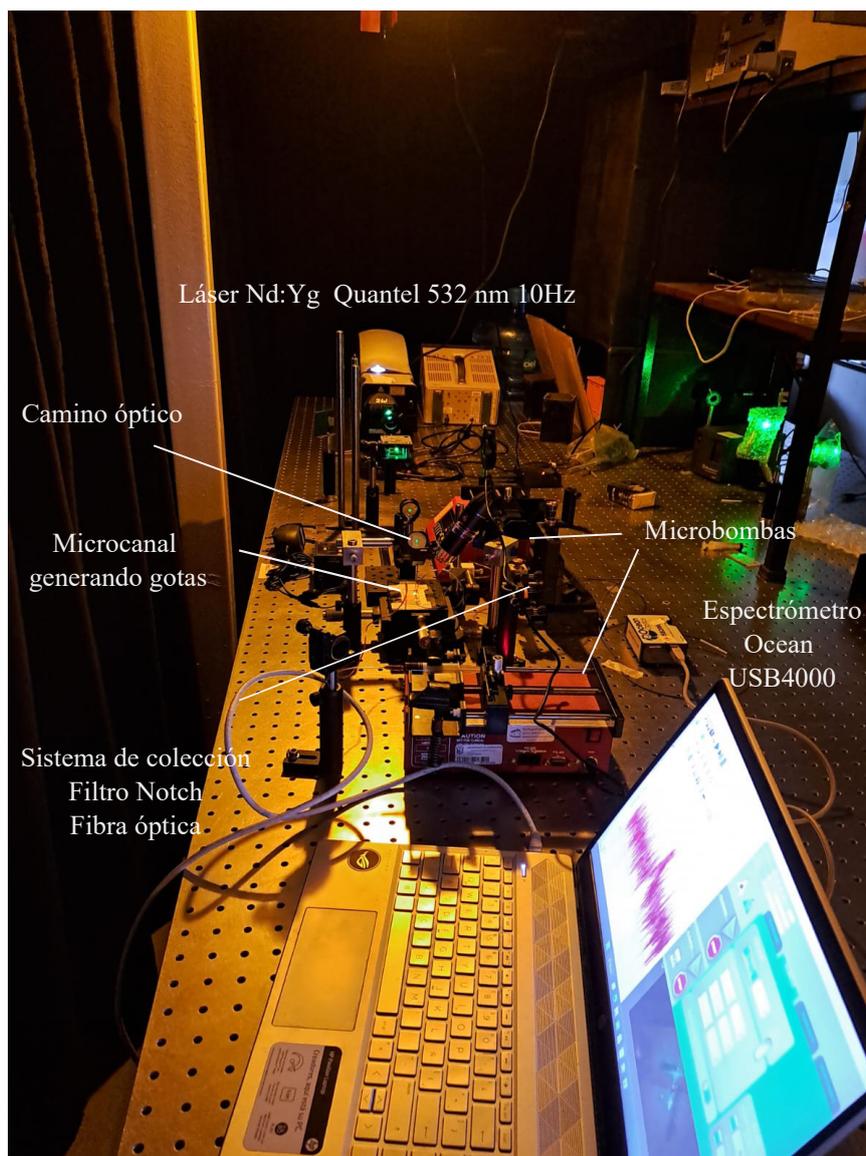


Figura 6.3: Configuración experimental para la generación y emisión de microgotas en un canal microfluídico. En la configuración, un láser Q-switch Quantel de 532 nm produce un haz de láser que se atenúa mediante un divisor de haz antes de focalizarse en las microgotas a través de un conjunto de lentes. Las gotas, llenas de Rodamina B, se generan y se introducen en el canal mediante dos microbombas. La luz emitida se recoge a través de un filtro de rechazo de banda y una fibra óptica, que conduce la luz a un espectrómetro Ocean USB4000

#### 6.4. Caracterización de gotas como cavidades ópticas

Para garantizar una emisión satisfactoria y asegurarnos de que los resultados que observamos en el espectrómetro sean precisos, caracterizamos la emisión del canal microfluídico utilizando diferentes condiciones para la producción de gotas. El proceso constaba de varias etapas. Primero, se generaban gotas en el microcanal utilizando una relación de flujo (FR) cercana a 0.5, como se discutió previamente. Luego, permitíamos que la producción de gotas se estabilizara hasta que se tornara relativamente uniforme.

Una vez estabilizada la producción de gotas, dirigíamos el haz láser hacia la cavidad, comenzando con la mínima potencia para el láser. El láser Quantel Brilliant B (con 360 MJ de potencia)

se enfocaba en la muestra utilizando un objetivo de microscopio NAD0.13, lo que permitía la excitación óptica de la microcavidad con una fluencia de bombeo que variaba de 2 a  $12 \mu\text{J} \cdot \text{cm}^{-2}$ . La potencia residual del bombeo se suprimía con dos filtros de paso largo colocados en serie.

El microcanal descansaba sobre una plataforma mecánica que permitía su traslado a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$ . La radiación óptica de la cavidad, transmitida por los filtros, se conducía con un telescopio hacia el puerto de entrada de un espectrómetro USB (Ocean Optics USB4000).

Una vez establecidas las mejores condiciones experimentales en términos de excitación, detección, posición de la muestra y relación señal-ruido, se adquirían los datos de los espectros de emisión a través de un conjunto de 25 mediciones, cada una con un tiempo de integración de 500 ms. Estas mediciones se realizaban disminuyendo progresivamente la potencia del láser. De esta manera es posible construir un espectro completo de emisión de la cavidad.

Es importante destacar que el tiempo disponible para medir la gota es bastante limitado, ya que la cavidad solo permanece en la posición óptima durante aproximadamente 10 segundos. Por tanto, es esencial capturar rápidamente la cavidad para obtener resultados precisos.

## 6.5. Resultados de la Estimulación Láser

Durante la etapa de resultados, se llevaron a cabo tres pruebas en las cuales se obtuvieron y analizaron diferentes espectros.

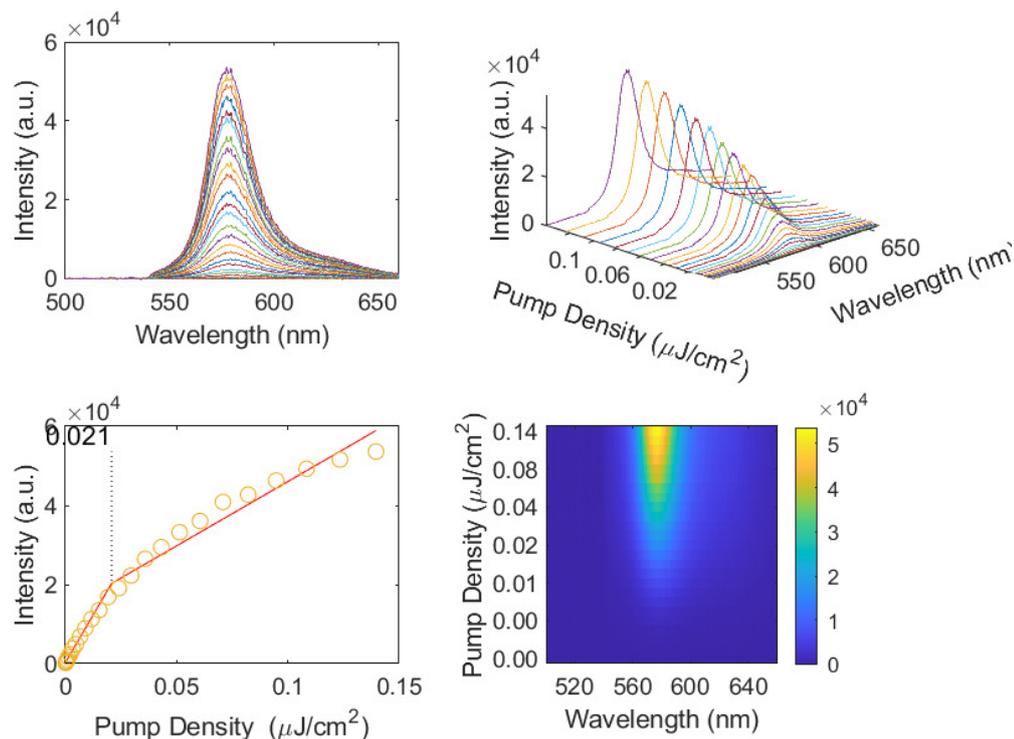


Figura 6.4: Espectro de emisión del canal con Rodamina. Se observa un patrón de fluorescencia y una disminución de la densidad de bombeo, indicando que no se trata de una emisión amplificada.

En la primera prueba, se probó el canal solo con Rodamina. Los resultados, presentados en la figura 6.4, muestran que hay un fenómeno de emisión, pero esta no es una emisión amplificada

y definitivamente no es láser. La gráfica de la densidad de bombeo revela que no sigue un patrón de pendiente positiva más pronunciada que la recta inicial del bombeo; en cambio, tiene una pendiente de ajuste menor. Este comportamiento sugiere que la emisión observada se debe principalmente a la fluorescencia del colorante. La fluorescencia es un proceso en el cual un material absorbe luz (fotones) y luego emite luz de longitud de onda más larga. Aunque la fluorescencia es el fenómeno dominante aquí, hay otros procesos como la absorción y el scattering que pueden influir en la emisión, pero su contribución es menor en este contexto.

En la prueba más exitosa que llevamos a cabo, logramos construir un espectro de Amplified Spontaneous Emission (ASE) utilizando una concentración de  $1 \times 10^{-3}$ . A pesar de que esta concentración de Rodamina podría considerarse relativamente alta, obtuvimos resultados prometedores. Este juicio sobre la alta concentración se basa en los estudios comparativos mencionados en el trabajo de Reynoso [51]. En dicho trabajo se demuestra que la eficiencia de una cavidad óptica que utiliza un tinte como medio activo depende tanto de la concentración del tinte como de la geometría de la cavidad. Una mayor concentración implica una mayor densidad de estados excitables en el tinte, lo cual puede complicar la obtención de una resonancia continua y, por ende, dificultar la amplificación espontánea de la luz. Una cavidad más uniforme mejora significativamente la distribución de la luz, permitiendo una amplificación más efectiva.

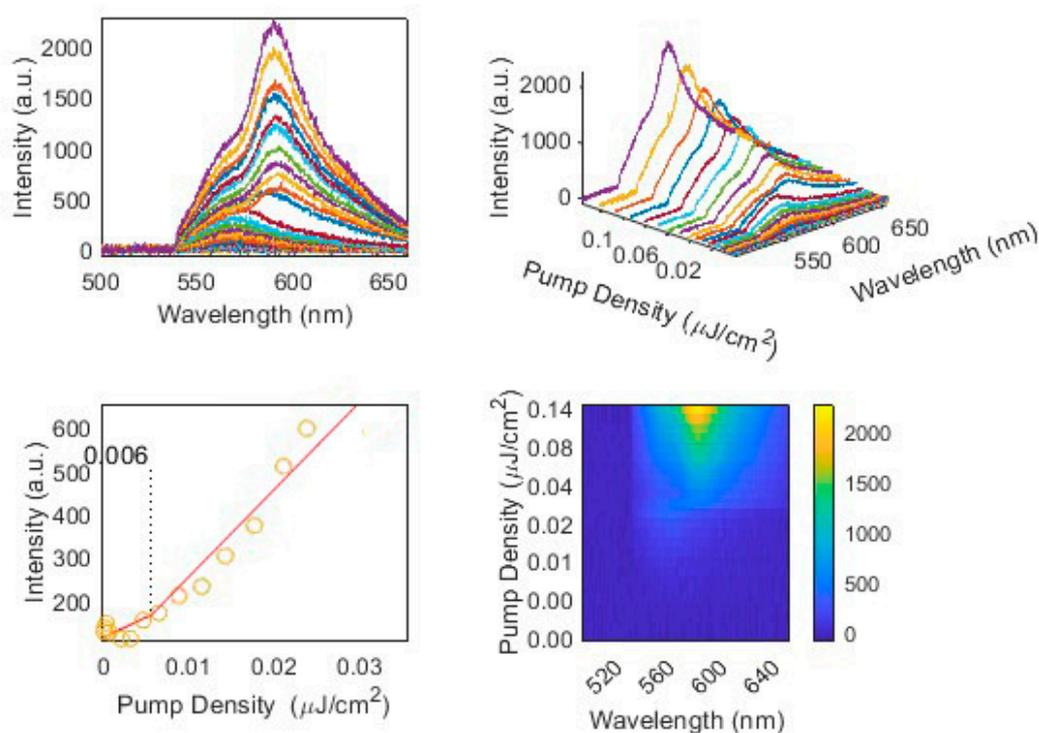


Figura 6.5: Espectro de ASE con una concentración de  $1 \times 10^{-3}$ . Se observa un aumento lineal de la densidad de energía (subfigura 3) y un pico de emisión notable (subfigura 1) en la gráfica de la longitud de onda contra la intensidad, que se le atribuye a las gotas.

La figura 6.5 muestra que la densidad de energía aumenta de manera lineal, cambiando la pendiente de la segunda recta a una mayor en comparación con la recta del inicio, lo que sugiere que estamos observando un fenómeno de ASE. Además, un pico de emisión en la gráfica de longitud de onda contra intensidad sobresaliente es muy notorio. Este pico solo

puede provenir de las gotas, ya que las pruebas anteriores no se observaba esa emisión en esa región del espectro.

Este pico presenta familias de pequeñas fluctuaciones que son resultado de los modos de onda guiada por la cavidad (WGM). Es probable que estos se traten de microláseres, pero no contamos con la resolución suficiente para confirmarlo con nuestro equipo de espectrometría actual, además de que la cavidad no tiene la calidad suficiente para poder emitir láser de mejor manera.

El pico presenta familias de pequeñas fluctuaciones que corresponden a los modos de onda guiada por la cavidad (WGM). Estas fluctuaciones podrían sugerir la presencia de posibles microláseres, aunque esto necesita ser confirmado con equipos de mayor resolución, dada su naturaleza y comportamiento característico en la espectrometría. Sin embargo, nuestro equipo de espectrometría actual no tiene la resolución necesaria para confirmarlo con certeza. Además, la calidad de la cavidad no es óptima, lo que podría limitar la eficiencia de la emisión láser.

El espectro de emisión obtenido en la última prueba muestra características interesantes que nos permiten entender mejor la dinámica del sistema. La concentración de Rodamina de  $1 \times 10^{-3}$ , aunque elevada, resultó ser efectiva para generar una Amplified Spontaneous Emission (ASE). Observamos una relación lineal entre la densidad de bombeo y la energía, que sugiere que nos encontramos en una etapa temprana del fenómeno.

Cabe señalar que la calidad de la cavidad juega un papel crucial en la emisión de luz. A pesar de la presencia de un potencial microláser, la calidad de la cavidad puede no ser suficiente para permitir una emisión de láser más eficiente.

Al evaluar estos resultados, es esencial tomar en cuenta los conceptos teóricos revisados anteriormente, tales como la emisión estimulada amplificada. No logramos obtener el fenómeno de lasing, lo que sugiere que alguna condición necesaria para este fenómeno no se cumplió. Probablemente atribuida a la concentración alta de la Rodamina. Esto puede estar relacionado con la concentración del medio activo. Por ejemplo, es posible que la Rodamina, al encontrarse en concentraciones altas, pueda llegar a saturarse, afectando de esta manera la emisión de luz.

Además, es importante considerar la posible pérdida de luz debido a la dispersión que podría ocurrir en el material que rodea la cavidad, en este caso, el canal de polidimetilsiloxano (PDMS). Las fluctuaciones que observamos en el espectro de ASE podrían estar siendo atenuadas debido a esta dispersión. Ya que las pruebas con concentraciones bajas, no se observaba una emisión que proviniera de las gotas. La luz atraviesa diversas fases antes de ser recogida por la guía de onda: aceite, PDMS, aire y finalmente, la fibra. El trayecto a través del PDMS podría ocasionar una considerable pérdida de luz. Para futuros trabajos, se sugiere la posibilidad de acoplar una fibra óptica al canal microfluídico para la recolección de luz, tal como se implementó en los experimentos de Tanyeri et al. [12].

No obstante, a pesar de estas dificultades y limitaciones, los resultados obtenidos son alentadores. A través de la recolección de luz fuera del canal, hemos conseguido observar la ASE y las posibles fluctuaciones de WGM. Esto abre un abanico de posibilidades para futuras investigaciones y aplicaciones en el ámbito de la microfluídica y la optofluídica.

## Capítulo 7

# Conclusión

La presente investigación se enfocó en la generación y caracterización de microgotas para su uso como cavidades láser, abarcando una serie de procesos complejos y detallados que incluyen la fabricación de chips microfluídicos, la simulación de microgotas mediante el uso de COMSOL y el método de los elementos finitos, el análisis de las características físicas de las gotas y el desarrollo matemático de las cavidades resonantes.

En lo que respecta a la creación del chip microfluídico, se prestó especial atención al proceso de diseño y fabricación para garantizar una eficiente generación de microgotas. El uso del software de simulación COMSOL permitió una representación visual precisa de las microgotas y un análisis detallado de sus propiedades.

Al considerar la generación de las microgotas, encontramos que el equilibrio entre la frecuencia, el área y la relación de aspecto  $L/W$  era esencial para la formación de gotas de gran tamaño que permitieran una óptima emisión y recolección de la señal del láser pulsado. Por lo tanto, se decidió utilizar valores de razón de flujo (FR) cercanos a 0.5.

Se profundizó en el tratamiento matemático de las cavidades resonantes, resolviendo la ecuación de Helmholtz y simulando los modos de onda guiada por la cavidad (WGM). Este análisis teórico fue fundamental para entender los comportamientos observados en la práctica.

En el ámbito de la emisión de luz, nuestros experimentos con una concentración de Rodamina de  $1 \times 10^{-3}$  permitieron obtener una Amplified Spontaneous Emission (ASE). Esta relación lineal entre la densidad de bombeo y la energía, aunque no culminó en la obtención de *lasing*, reveló que es factible generar y recolectar un espectro electromagnético dentro de una cavidad microfluídica. Este trabajo tiene potenciales aplicaciones emocionantes y directas, especialmente en el campo de los biosensores, un área que podría explorarse en investigaciones futuras dentro del mismo grupo.

A pesar de los desafíos y limitaciones a los que nos enfrentamos, como la posible saturación de la Rodamina en altas concentraciones y la pérdida de luz debido a la dispersión en el PDMS, los resultados que obtuvimos son prometedores. Logramos observar la ASE y las posibles fluctuaciones de los modos de onda guiada por la cavidad (WGM) mediante la recolección de luz externa al canal. Este logro abre un mundo de posibilidades para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas en el campo de la microfluídica y la optofluídica.

En conclusión, esta investigación ha sentado las bases para un mayor desarrollo en el campo de las cavidades láser a base de microgotas, al mismo tiempo que ha presentado resultados y hallazgos significativos en el ámbito de la microfluídica y la optofluídica. Con investigaciones futuras y mejoras en la técnica y el enfoque, podemos esperar mejores trabajos y aplicaciones prácticas en este campo emergente.



## Apéndice A

# Código: Análisis de frecuencia

El propósito del siguiente código es analizar los datos de la geometría de las gotas y determinar su frecuencia de generación. Nuestra meta es alcanzar frecuencias bajas, teniendo en cuenta que el láser que emplearemos es un láser pulsado de 10 Hz. Buscamos las frecuencias más bajas posibles, lo que permitirá al láser excitar adecuadamente las gotas y facilitar la resonancia dentro de la cavidad. Así, optimizamos las condiciones para la observación de la emisión láser en cada gota. Para nuestro análisis, únicamente recurrimos al número de frame, el área y la fila del centroide para procesar la frecuencia de generación de las gotas. Como ejemplo, utilizamos un ensayo con una relación de flujo (FR) de 0.1 (0.1/1, fase dispersa/fase continua).

Se importan las librerías que se van a necesitar.

numpy - Manejo de arreglos. matplotlib - Gráficas. pandas - Matrices. statistics - Estadística

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import statistics as st

# Leemos los datos y los guardamos en un data frame de pandas.
dat = pd.read_csv('C:/Users/guill/Desktop/Codes/Tesis/Procesamiento digital_
→de imagenes/PDI/DSC_5678.csv')

f = dat.iloc[:,4]
a = dat.iloc[:,3]
d = dat.iloc[:,6]
```

### Declaramos valores y vectores donde se van a guardar algunos datos

El valor **count** se inicializa, es un entero en el que se van a guardar la cantidad de gotas en cada 60 frames

**frequency** - El vector en el que se guarda los valores de la frecuencia.

**time** - Un entero para ir guardando los valores de los segundos.

**tiempo** - Un vector que guarda en cada espacio un segundo, es decir los valores de time.

**gotas** - El vector que guarda la cantidad de gotas por frame

**g** - Un entero para ir guardando el valor de las gotas

El algoritmo funciona como sigue: Se checan los valores del centroide y se le da un seguimiento a las gotas. Los valores del centroide están en píxeles, entonces entre más pequeños sean los valores más a la izquierda están. Ya que el flujo de las gotas es de derecha a izquierda, en algún punto del lado izquierdo las gotas desaparecen. El algoritmo cuenta las gotas una vez que éstas desaparecen. La manera que podemos saber que una gota desapareció es revisando el frame siguiente. Mientras que las gotas se mueven el valor del centroide va disminuyendo (se van moviendo hacia la izquierda), en algún punto cuando la gota desaparece el valor del centroide es mayor al anterior. El programa va chequeando los valores del centroide por frame, entonces cuando el valor del siguiente frame es mayor cuenta una gota.

```
[2]: count = 0
frecuency = []
time = 0
tiempo = []
gotas = []
g = 0

#Se establecen las cotas de los valores de acuerdo a una distribución normal
a_prom = st.mean(a)
cota_s = a_prom + st.pstdev(a)*4
cota_i = a_prom - st.pstdev(a)*4

for i in range(len(d)-1):
    #for i in range(0,15,1):

        j = i

        # Checamos el siguiente frame, guardamos el primer lugar del siguiente
        →frame en j
        while(f[i] == f[j] and cota_i < a[j] < cota_s):

            # Si estamos en el último frame rompemos el ciclo para que no nos de
            →error
            if j == len(d)-1:
                break

            j = j + 1

            # Se guarda el número de gotas
            g = g + 1

        # Agregamos el valor del número de gotas solo si nos encontramos en la
        →ultima casilla del frame
        if i != 0:

            if f[i] != f[i-1]:
                gotas.append(g)
            #else:

            # gotas.append(g)
```

```

# Reiniciamos el valor de las gotas
g = 0

# Comparamos los lugares del centroide con el del siguiente frame si es
→menor contamos una gota
if d[i] < d[j] and cota_i < a[i] < cota_s and cota_i < a[j] < cota_s:
    count = count+1

# Cuando llegamos al frame 60 añadimos el valor de count al vector de
→frecuencias
# Se checa tambien que se este en el ultimo valor del frame
if (f[i]) % 60 == 0 and f[i+1] != f[i]:
    frequency.append(count)

#Añadimos el valor del tiempo. Para graficar.
tiempo.append(time)
time = time +1

#Reiniciamos el contador
count=0

```

```

[3]: from matplotlib import rc
#rc('font',**{'family':'sans-serif','sans-serif':['Helvetica']})
## for Palatino and other serif fonts use:
rc('font',**{'family':'serif','serif':['Palatino']})
rc('text', usetex=True)

```

```

[4]: #Se calcula la frecuencia promedio
suma = 0
for i in range(len(frequency)):
    suma = frequency[i] + suma
media = suma/len(frequency)

plt.rcParams.update({'font.size': 16})

#Graficamos la frecuencia
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 5), constrained_layout=True)

frequency = np.asarray(frequency)
tiempo = np.asarray(tiempo)

plt.plot(tiempo, frequency, color="black")

plt.hlines(y=media, xmin=min(tiempo), xmax=max(tiempo), color="red",
→label="Frecuencia promedio")

plt.xlabel("Tiempo (s)")
plt.ylabel("No. de Gotas")

```

```
#plt.title("Frecuencia video")

plt.grid()
plt.legend()

print("La frecuencia promedio es igual a: " + str(media) + " Gotas/sec")

plt.show()
```

La frecuencia promedio es igual a: 0.019384615384615385 Gotas/sec

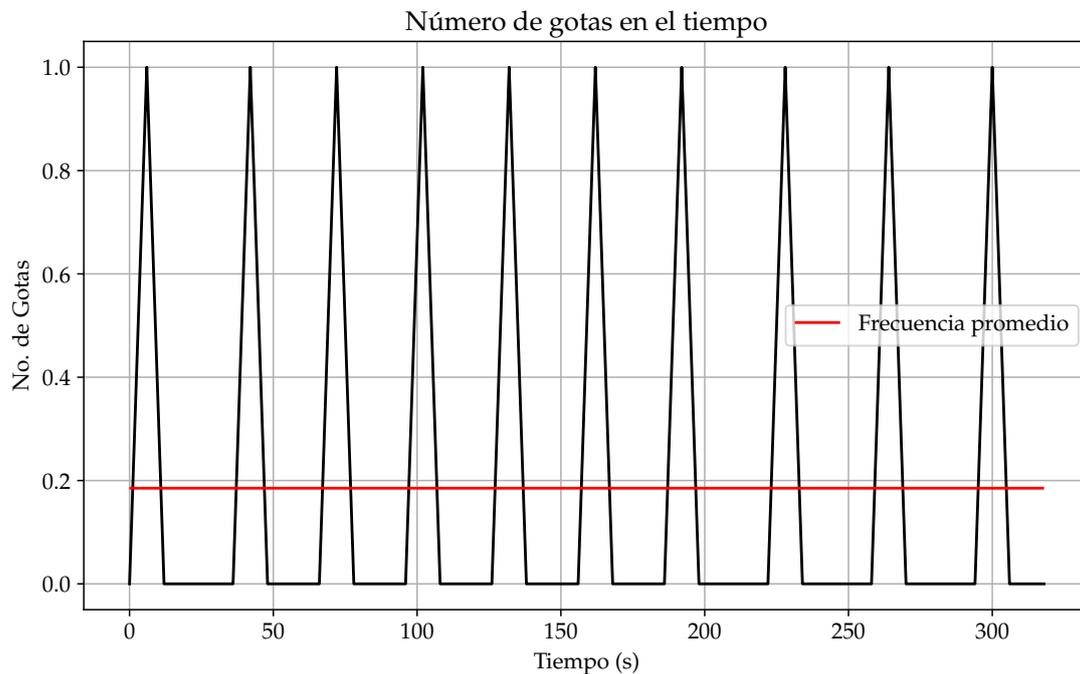


Figura A.1: Frecuencia de gotas calculada a lo largo del video para un FR = 0.1

```
[5]: # Graficamos el área
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 5), constrained_layout=True)

plt.plot(a)
plt.title("Area de cada gota")
plt.ylabel("Area $[px^2]$")
plt.xlabel("Frames")

plt.grid()
plt.show()
```

El Area promedio es igual a: 4662.875756702219px<sup>2</sup>

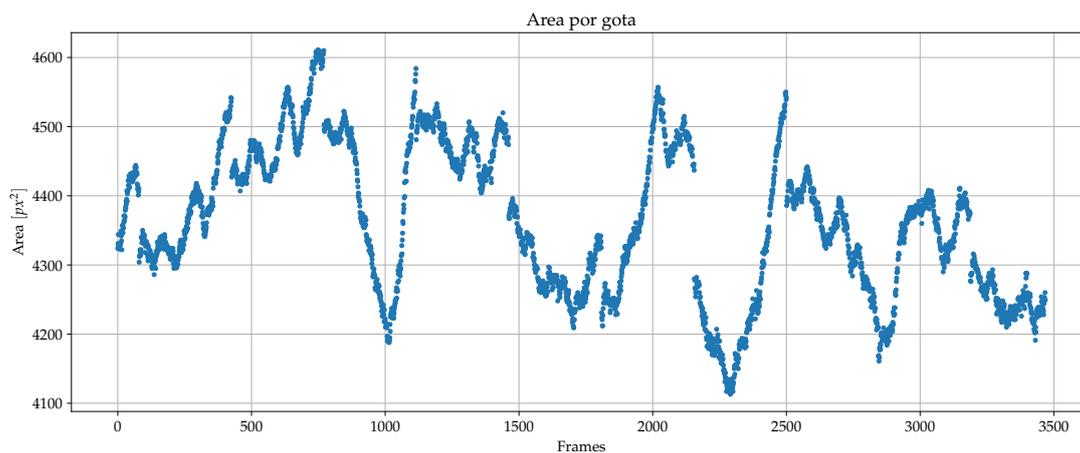


Figura A.2: Área de las gotas calculada a lo largo del video para un FR = 0.1

```
[93]: # Graficamos el valor L/W
fig, ax = plt.subplots(figsize=(12, 5), constrained_layout=True)

plt.plot(lw, marker='o', linestyle='', ms=3)

plt.title("Longitud sobre ancho (L/W)")
plt.ylabel("L/W")
plt.xlabel("Frames")

plt.grid()

plt.show()
```

El L/W promedio es igual a: 1.9835744469940795

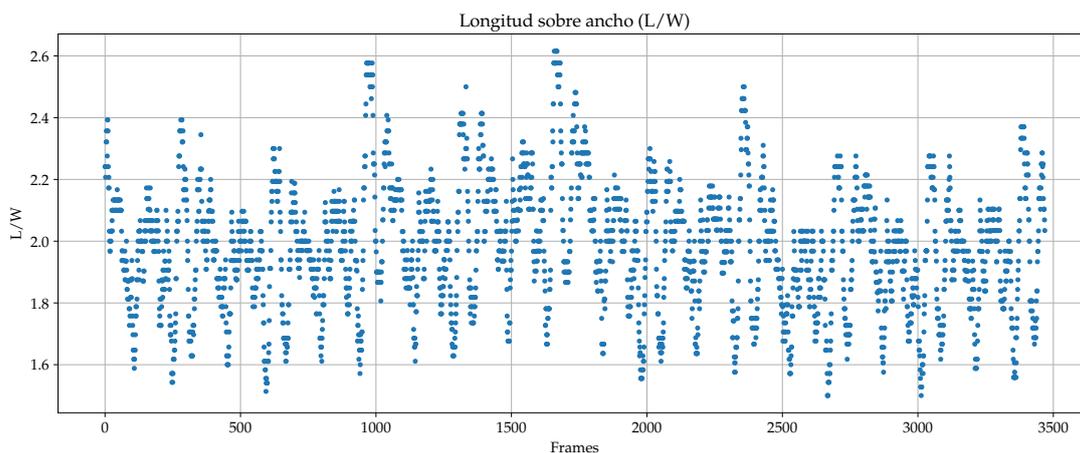


Figura A.3: Valor del parámetro L/W a lo largo de todo el video para un FR = 0.1



## Apéndice B

# Cálculo de las componentes del vector

## $\mathbf{N}_l^m$

Para el cálculo de  $\mathbf{N}_l^m$  partimos de la definición 5.40. Entonces

$$\mathbf{N}_l^m = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_l^m = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & \hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ M_{lr}^m & M_{l\theta}^m & M_{l\phi}^m \end{vmatrix}$$

Se sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_l^m &= \frac{1}{k} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{l\phi}^m \sin(\theta)) - \frac{\partial M_{l\theta}^m}{\partial \phi} \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r \sin(\theta)} \right] + \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial M_{lr}^m}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\phi}^m) \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} \\ &+ \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\theta}^m) - \frac{\partial M_{lr}^m}{\partial \phi} \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r} \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_l^m = \frac{1}{k} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{l\phi}^m \sin(\theta)) - \frac{\partial M_{l\theta}^m}{\partial \phi} \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r \sin(\theta)} - \frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\phi}^m) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} + \frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\theta}^m) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r} \right]$$

Comenzamos calculando la componente en  $\theta$ . Hacemos la siguiente derivada

$$-\frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\phi}^m) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) Z_l(kr) \right) = -\frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr))$$

La componente  $\mathbf{N}_{l\theta}^m$  es la siguiente

$$\mathbf{N}_{l\theta}^m = \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (\text{B.1})$$

De la misma manera para la componente en  $\phi$ . Hacemos la derivada

$$\frac{\partial}{\partial r} (r M_{l\theta}^m) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{Z_l(kr)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \right) = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr))$$

La componente  $\mathbf{N}_{l\phi}^m$  es la siguiente

$$\mathbf{N}_{l\phi}^m = \frac{1}{kr \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \quad (\text{B.2})$$

Para calcular la componente en  $r$  del vector  $\mathbf{N}_l^m$  consideramos las expresiones sin desarrollar de  $\mathbf{M}_l^m$  en términos de la solución escalar 5.38.

$$\mathbf{M}_l^m = L_{l\phi}^m r \hat{\mathbf{e}}_\theta - L_{l\theta}^m r \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \Psi_l^m \hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Partimos de la componente  $N_{lr}^m$

$$N_{lr}^m = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( M_{l\phi}^m \sin(\theta) \right) - \frac{\partial M_{l\phi}^m}{\partial \phi} \right) \frac{1}{r \sin(\theta)}$$

Sustituyendo las componentes del vector  $\mathbf{M}$

$$N_{lr}^m = \frac{1}{rk \sin(\theta)} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m \sin(\theta) \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \Psi_l^m \right)$$

Se sigue

$$N_{lr}^m = -\frac{1}{rk \sin(\theta)} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial \phi^2} \right)$$

$$N_{lr}^m = -\frac{r}{k} \left( \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_l^m \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial \phi^2} \right)$$

De esta manera, la expresión anterior tiene una similitud al operador laplaciano en coordenadas esféricas. Podemos sustituir el laplaciano menos una parte que dependa de  $r$ , entonces

$$N_{lr}^m = \frac{r}{k} \left( -\nabla^2 \Psi_l^m + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} \right) \right)$$

De la ecuación de Helmholtz escalar 5.18 tenemos que  $\nabla^2 \Psi_l^m = -k^2 \Psi_l^m$ , y ya que el vector  $\mathbf{N}_l^m$  es solución a la ecuación de Helmholtz, sustituyendo el valor del operador laplaciano tenemos lo siguiente

$$N_{lr}^m = \frac{r}{k} \left( -k^2 \Psi_l^m + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} \right) \right)$$

Se sigue

$$N_{lr}^m = kr \Psi_l^m + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} \right)$$

$$N_{lr}^m = kr \Psi_l^m + \frac{1}{kr} \left( 2r \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial r^2} \right)$$

$$N_{lr}^m = \frac{1}{k} \left( 2 \frac{\partial \Psi_l^m}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Psi_l^m}{\partial r^2} \right) + kr \Psi_l^m$$

Notemos que los primeros dos términos pueden ser agrupados en una derivada

$$N_{lr}^m = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Psi_l^m) + k^2 r \Psi_l^m \right)$$

Sustituyendo el valor de la solución escalar de la ecuación de Helmholtz (ecuación 5.39)

$$N_{lr}^m = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r Z_l(kr)) + k^2 r Z_l(kr) \right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

Se sigue

$$N_{lr}^m = \frac{1}{k} \left( 2 \frac{\partial Z_l(kr)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 Z_l(kr)}{\partial r^2} + k^2 r Z_l(kr) \right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

Sustituimos la derivada de segundo orden con la ecuación de Bessel 5.28. Se eliminan algunos términos

$$N_{lr}^m = \frac{1}{kr} \left( 2r \frac{\partial Z_l(kr)}{\partial r} - 2r \frac{\partial Z_l(kr)}{\partial r} - [k^2 r^2 - l(l+1)] Z_l(kr) + k^2 r^2 Z_l(kr) \right) Y_l^m(\theta, \phi)$$

Finalmente, llegamos a la componente  $N_{lr}^m$

$$N_{lr}^m = \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (\text{B.3})$$



## Apéndice C

# Desarrollo de expresiones armónicos esféricos vectoriales

Partimos de la definición de los armónicos esféricos vectoriales. (ecuaciones 5.45, 5.46, 5.47).  
Desarrollando la expresión para  $\mathbf{Y}_{lm}$ .

$$\mathbf{Y}_{lm} = r \nabla Y_l^m(\theta, \phi)$$

Se sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{lm} &= \left( \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} Y_l^m(\theta, \phi) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \right) r \\ \mathbf{Y}_{lm} &= \left( \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) + \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \right) r \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{Y}_{lm} = \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (\text{C.1})$$

Continuando con la expresión para  $\mathbf{X}_{lm}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{lm} &= \nabla Y_l^m(\theta, \phi) \times \mathbf{r} \\ \mathbf{X}_l^m &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & \hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) & \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\mathbf{X}_{lm} = -\frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (\text{C.2})$$

Ahora, vamos a reescribir los vectores  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$  (ecuaciones 5.42, 5.43 y 5.44) en términos de los armónicos esféricos vectoriales.

Comenzamos por  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L}_l^m = \frac{\partial}{\partial r} Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{Z_l(kr)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{Z_l(kr)}{r} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi,$$

Entonces

$$\mathbf{L}_l^m = \frac{\partial}{\partial r} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{Z_l(kr)}{r} \mathbf{Y}_l^m \quad (\text{C.3})$$

Para **M**

$$\mathbf{M}_l^m = Z_l(kr) \left( \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi - \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\theta \right)$$

el término entre paréntesis es idéntico a la expresión desarrollada de  $\mathbf{X}_{lm}$  entonces

$$\mathbf{M}_l^m = Z_l(kr) \mathbf{X}_{lm} \quad (\text{C.4})$$

Finalmente para **N**

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_l^m = & \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + \frac{1}{kr \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned}$$

Se sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_l^m = & \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \left( \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right) \\ \mathbf{N}_l^m = & \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right) \\ \mathbf{N}_l^m = & \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) (\nabla Y_l^m(\theta, \phi)) \\ \mathbf{N}_l^m = & \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) (r \nabla Y_l^m(\theta, \phi)) \end{aligned}$$

Sustituyendo los armónicos esféricos vectoriales  $\mathbf{Y}_{lm}$  llegamos a la expresión para **N**

$$\mathbf{N}_l^m = \frac{l(l+1)}{kr} Z_l(kr) \mathbf{Z}_{lm} + \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r Z_l(kr)) \mathbf{Y}_{lm} \quad (\text{C.5})$$

# Bibliografía

- [1] George M Whitesides. The origins and the future of microfluidics. *nature*, 442(7101):368–373, 2006.
- [2] SL Silvestri and RT Lostritto. Theoretical evaluation of dispersed droplet radii in submicron oil-in-water emulsions. *International journal of pharmaceuticals*, 50(2):141–146, 1989.
- [3] John Tasman Davies. *Turbulence phenomena*. Academic, New York, 1972.
- [4] RT Lostritto, L Goei, and SL Silvestri. Theoretical considerations of drug release from submicron oil in water emulsions. *PDA Journal of Pharmaceutical Science and Technology*, 41(6):214–219, 1987.
- [5] Mi-Gyeong Kim, Joo Yeon Park, Yuna Shon, Gunwoo Kim, Gayong Shim, and Yu-Kyoung Oh. Nanotechnology and vaccine development. *asian journal of pharmaceutical sciences*, 9(5):227–235, 2014.
- [6] Jonathan U Álvarez-Martínez, Orlando M Medina-Cázares, Maria E Soto-Alcaraz, Ramón Castañeda-Priego, G Gutiérrez-Juárez, and R Castro-Beltrán. Microfluidic system manufacturing by direct laser writing for the generation and characterization of microdroplets. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 32(6):065001, 2022.
- [7] Shaojiang Zeng, Xin Liu, Hua Xie, and Bingcheng Lin. Basic technologies for droplet microfluidics. *Microfluidics*, pages 69–90, 2011.
- [8] Ryan D Sochol, Eric Sweet, Casey C Glick, Sung-Yueh Wu, Chen Yang, Michael Restaino, and Liwei Lin. 3d printed microfluidics and microelectronics. *Microelectronic Engineering*, 189:52–68, 2018.
- [9] Eujin Um, Dae-Sik Lee, Hyeon-Bong Pyo, and Je-Kyun Park. Continuous generation of hydrogel beads and encapsulation of biological materials using a microfluidic droplet-merging channel. *Microfluidics and Nanofluidics*, 5(4):541–549, 2008.
- [10] Xin Yan, Ryan M Bain, and R Graham Cooks. Organic reactions in microdroplets: Reaction acceleration revealed by mass spectrometry. *Angewandte Chemie International Edition*, 55(42):12960–12972, 2016.
- [11] Cathy M Rushworth, Joanna Davies, João T Cabral, Philip R Dolan, Jason M Smith, and Claire Vallance. Cavity-enhanced optical methods for online microfluidic analysis. *Chemical Physics Letters*, 554:1–14, 2012.
- [12] Melikhan Tanyeri, Richard Perron, and Ian M Kennedy. Lasing droplets in a microfabricated channel. *Optics letters*, 32(17):2529–2531, 2007.
- [13] M. Aas. Lasing in optically manipulated, dye-doped emulsion microdroplets. *Optics Communications*, 290:183–187, 2013.

- [14] Matjaž Humar. Liquid-crystal-droplet optical microcavities. *Liquid Crystals*, 43(13-15):1937–1950, 2016.
- [15] Matthew R Foreman, Jon D Swaim, and Frank Vollmer. Whispering gallery mode sensors. *Advances in optics and photonics*, 7(2):168–240, 2015.
- [16] Tobias J Kippenberg, Ronald Holzwarth, and Scott A Diddams. Microresonator-based optical frequency combs. *science*, 332(6029):555–559, 2011.
- [17] Yuanxian Zhang, Fariba Kenarangi, Han Zhang, Seyedmohsen Vaziri, Dongyang Li, Xiaoyun Pu, and Yuze Sun. Versatile optofluidic solid-core/liquid-cladding waveguide based on evanescent wave excitation. *Analytical Chemistry*, 92(22):14983–14989, 2020.
- [18] Yu-Cheng Chen, Qiushu Chen, and Xudong Fan. Lasing in blood. *Optica*, 3(8):809–815, 2016.
- [19] Tie Yang, P Paiè, Giovanni Nava, Francesca Bragheri, R Martinez Vazquez, Paolo Minzioni, M Vegliione, M Di Tano, C Mondello, R Osellame, et al. An integrated optofluidic device for single-cell sorting driven by mechanical properties. *Lab on a Chip*, 15(5):1262–1266, 2015.
- [20] Victor A Camarena-Chávez, R Castro-Beltrán, Orlando M Medina-Cázares, Jonathan U Álvarez-Martínez, G Ramos-Ortíz, and G Gutiérrez-Juárez. Implementation and assessment of a low-cost 3d laser platform controlled by open software for printing polymeric micro-structures. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 30(3):035010, 2020.
- [21] HM Reynoso-De La Cruz, E Ortiz-Ricardo, VA Camarena-Chávez, A Martínez-Borquez, G Gutiérrez-Juárez, AB U'Ren, and R Castro-Beltrán. Low-cost fabrication of microlasers based on polymeric micropedestals. *Applied Optics*, 60(3):720–726, 2021.
- [22] Weijian Chen. Exceptional points enhance sensing in an optical microcavity. *Nature*, 548:192–196, 2017.
- [23] N. Schiele. Gelatin-based laser direct-write technique for the precise spatial patterning of cells. *Tissue engineering. Part C, Methods*, 17 3:289–98, 2011.
- [24] S. Gittard. Laser direct writing of micro- and nano-scale medical devices. *Expert Review of Medical Devices*, 7:343 – 356, 2010.
- [25] Chaolong Song. Tunable optofluidic aperture configured by a liquid-core/liquid-cladding structure. *Optics letters*, 36 10:1767–9, 2011.
- [26] Mangirdas Malinauskas, Maria Farsari, Algis Piskarskas, and Saulius Juodkazis. Ultrafast laser nanostructuring of photopolymers: A decade of advances. *Physics Reports*, 533(1):1–31, 2013.
- [27] George M Whitesides, Emanuele Ostuni, Shuichi Takayama, Xingyu Jiang, and Donald E Ingber. Soft lithography in biology and biochemistry. *Annual review of biomedical engineering*, 3(1):335–373, 2001.
- [28] C. Xue. Simplest method for creating micropatterned nanostructures on pdms with uv light. *Langmuir : the ACS journal of surfaces and colloids*, 27 22:13410–4, 2011.
- [29] Pilnam Kim, Keon Woo Kwon, Min Cheol Park, Sung Hoon Lee, Sun Min Kim, and Kahp Yang Suh. Soft lithography for microfluidics: a review. *Biochip J*, 2(1):1–11, 2008.
- [30] Mark A Eddings, Michael A Johnson, and Bruce K Gale. Determining the optimal pdms–pdms bonding technique for microfluidic devices. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 18(6):067001, 2008.

- [31] Iain G Currie. *Fundamental mechanics of fluids*. CRC press, 2016.
- [32] Merle C Potter and David C Wiggert. *Schaum's Outline of Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Education, 2021.
- [33] Julio Gratton. Introducción a la mecánica de fluidos. *Buenos Aires*, 2002.
- [34] SS Bhavikatti. *Finite element analysis*. New Age International, 2005.
- [35] KJ Bathe. *Finite element procedures*, englewood cliffs, nj: Prentice-hall. 1996.
- [36] Junling Hu, Ruoxu Jia, Kai-tak Wan, and Xingguo Xiong. Simulation of droplet impingement on a solid surface by the level set method. In *Proceedings of the COMSOL Conference*, pages 8–10, 2014.
- [37] Pingan Zhu and Liqiu Wang. Passive and active droplet generation with microfluidics: a review. *Lab on a Chip*, 17(1):34–75, 2017.
- [38] Karin Schroën, Lingfeng Wu, and Meinou Corstens. Food-grade microgel capsules tailored for anti-obesity strategies through microfluidic preparation. *Current Opinion in Food Science*, 45:100816, 2022.
- [39] Pijush K Kundu, Ira M Cohen, and David R Dowling. *Fluid mechanics*. Academic press, 2015.
- [40] Todd Thorsen, Richard W Roberts, Frances H Arnold, and Stephen R Quake. Dynamic pattern formation in a vesicle-generating microfluidic device. *Physical review letters*, 86(18):4163, 2001.
- [41] Takasi Nisisako, Toru Torii, and Toshiro Higuchi. Novel microreactors for functional polymer beads. *Chemical Engineering Journal*, 101(1-3):23–29, 2004.
- [42] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic theory*, volume 33. John Wiley & Sons, 2007.
- [43] Alexander JC Kuehne, Malte C Gather, Irwin A Eydelnant, Seok-Hyun Yun, David A Weitz, and Aaron R Wheeler. A switchable digital microfluidic droplet dye-laser. *Lab on a Chip*, 11(21):3716–3719, 2011.
- [44] G Aubry, Q Kou, J Soto-Velasco, C Wang, S Meance, JJ He, and AM Haghiri-Gosnet. A multicolor microfluidic droplet dye laser with single mode emission. *Applied Physics Letters*, 98(11), 2011.
- [45] Zhenyu Li. Single mode optofluidic distributed feedback dye laser. *Optics express*, 14 2:696–701, 2006.
- [46] Zhenyu Li and Demetri Psaltis. Optofluidic dye lasers. *Microfluidics and Nanofluidics*, 4:145–158, 2008.
- [47] Philip C Gach, Kosuke Iwai, Peter W Kim, Nathan J Hillson, and Anup K Singh. Droplet microfluidics for synthetic biology. *Lab on a Chip*, 17(20):3388–3400, 2017.
- [48] Keisuke Goda, Ali Ayazi, Daniel R Gossett, Jagannath Sadasivam, Cejo K Lonappan, Elodie Sollier, Ali M Fard, Soojung Claire Hur, Jost Adam, Coleman Murray, et al. High-throughput single-microparticle imaging flow analyzer. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(29):11630–11635, 2012.
- [49] Orazio Svelto, David C Hanna, et al. *Principles of lasers*, volume 1. Springer, 2010.
- [50] Jeff Hecht. *Understanding lasers: an entry-level guide*. John Wiley & Sons, 2018.

- [51] HM Reynoso-De La Cruz, I Rosas-Román, G Ramos-Ortiz, BS Mendoza, E Ortiz-Ricardo, G Gutiérrez-Juárez, and R Castro-Beltrán. Studies of the transition between amplified spontaneous emission and optical lasing in ultrahigh-q polymeric micro-pedestals. *Optics Express*, 31(5):9018–9033, 2023.



**Asunto:** Carta aval de sinodal

León, Gto., Octubre 04, 2023

**Dr. David Yves Ghislain Delepine**

**Director**

**División de Ciencias e Ingenierías**

**Estimado Dr. Delepine:**

Por medio de la presente hago constar que he revisado la tesis titulada: "**Microláseres basados en la generación de microgotas por sistemas microfluídicos**", que para obtener el grado de Licenciado en Física presenta el **Sr. Guillermo Segura Gómez**.

En dicho trabajo se presenta una implementación novedosa para fabricar una microestructura tridimensional destinada a la elaboración de un chip microfluídico, mediante la técnica de impresión láser directa. Cabe destacar que este trabajo es importante por las potenciales aplicaciones tecnológicas que tiene en diversos campos la ciencia. Es además un trabajo muy completo, teórica y experimentalmente.

Le comunico que he discutido cuidadosamente dicha tesis con el sustentante, a quien le he hecho llegar mis comentarios y correcciones. Le expreso además que en lo general me parece un buen trabajo por lo que avalo su presentación.

Sin otro particular por el momento, aprovecho para reiterarle las seguridades de mi consideración más distinguida.

**Atentamente**

---

**DR. MODESTO ANTONIO SOSA AQUINO**

PROFESOR TITULAR "C"

Sinodal

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FÍSICA,  
DIVISION DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN**

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre, C.P. 37150 León, Gto., México. Tel. (477) 788-5100, Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, <http://www.fisica.ugto.mx>



12 octubre de 2023

Asunto: Aprobación de Tesis.

**Dr. David Delepine**  
**Director de la División de Ciencias e Ingenierías, Campus León**  
**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO**  
**P R E S E N T E**

Por medio de la presente en mi carácter de revisor del trabajo de tesis titulado:  
***“Microláseres basados en la generación de microgotas por sistemas microfluídicos”*** para obtener el título de Licenciado en Física que presenta **Guillermo Segura Gómez con NUA 427046.**

Me permito comunicarle que he leído y discutido dicho trabajo y considero que reúne los requisitos y méritos suficientes para poder continuar con sus trámites de solicitud de examen de grado y ser presentado.

Sin otro particular por el momento, aprovecho para reiterarle las seguridades de mi consideración más distinguida.

**Atentamente**

**Dr. Ignacio Raúl Rosas Román**  
**Técnico de los Laboratorios del Cuerpo Académico**  
**Departamento de Ingeniería Física**



09 octubre de 2023

Asunto: Aprobación de Tesis.

**Dr. David Delepine**  
**Director de la División de Ciencias e Ingenierías, Campus León**  
**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO**  
**P R E S E N T E**

Por medio de la presente en mi carácter de revisor del trabajo de tesis titulado: ***“Microláseres basados en la generación de microgotas por sistemas microfluídicos”*** para obtener el título de **Licenciado en Física** que presenta **Guillermo Segura Gómez con NUA 427046**.

Me permito comunicarle que he leído y discutido dicho trabajo y considero que reúne los requisitos y méritos suficientes para poder continuar con sus trámites de solicitud de examen de grado y ser presentado.

Sin otro particular por el momento, aprovecho para reiterarle las seguridades de mi consideración más distinguida.

**Atentamente**

**Dr. Orlando Miguel Medina Cázares**  
**Profesor Investigador Posdoctoral**  
**Departamento de Ingeniería Física**

Septiembre 19, 2023

Director Dr. David Yves Ghislain Delepine  
División de Ciencias e Ingenierías  
Universidad de Guanajuato

Estimado Dr. Delepine:

Por medio de este conducto le informo que he leído y discutido ampliamente el trabajo de tesis titulado “**Microláseres basados en la generación de microgotas por sistemas microfluídicos**” desarrollado por el **C. Guillermo Segura Gómez** para obtener el grado de Licenciado en Física y dirigido por el Dr. Rigoberto Castro Beltrán. En el trabajo de tesis, Guillermo realizó un estudio teórico-experimental para el diseño, la construcción y la puesta en marcha de microláseres basados en la formación controlada de microgotas. Este trabajo multidisciplinario resulta de interés e impacto para la comunidad de microfluídica interesada en el control de procesos a escala micrométrica. Finalmente, quiero comentarle que estoy satisfecho con el contenido de la tesis, los resultados obtenidos y, principalmente, por el conocimiento adquirido y generado por Guillermo, por lo que no tengo ningún inconveniente para que se lleve a cabo la defensa de la tesis.

Sin otro particular por el momento, me despido enviándole un cordial saludo.

Atentamente,  
“La Verdad Os Hará Libres”



**Dr. Ramón Castañeda Priego**  
**Profesor Titular C**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA FÍSICA**

Lomas del Bosque #103,  
Lomas de Campestre, León Gto.  
C.P. 37150  
(477) 788 5100 Ext. 8411 y 8462  
Fax. Ext. 8410  
[www.depif.ugto.mx](http://www.depif.ugto.mx)